# INSTITUTO TECNOLÓGICO DE MORELIA

DIVISIÓN DE ESTUDIOS PROFESIONALES

INGENIERÍA EN SISTEMAS COMPUTACIONALES

# ANÁLISIS DE REDES

PRESENTA:

**Bocanegra Villaseñor Diana Valeria**

**Gasca Contreras Carlos**

**Huerta Magaña Jasiel**

**Tinoco Duarte Ángel David**

ASESOR:

**Ildefonso Huerta Kevin Cristopher**

MORELIA, MICHOACÁN **DICIEMBRE 2022**

# INDICE

# ¿Qué es?

Una red es la representación gráfica de una serie de eventos y actividades que suceden en un trabajo que se programa para lograr un objetivo determinado. Un evento o suceso se representaba en la red con un círculo que se conoce como nodo.

Los nodos también pueden indicar puntos geográficos o estaciones en algunos casos. Las actividades de los proyectos solían representarse por ramas en la red, que también pueden señalar sentidos o direcciones en que se da algún movimiento.

Es frecuente que la notación de estas ramas se forme por las letras y/o números de los nodos a los cuales conectan. En el caso de las ramas dirigidas, primero se coloca la letra o número del nodo a partir del cual proviene la rama y al final aquel hacia el que se dirige la rama.

Una red dirigida es aquella que tiene sólo ramas dirigidas; si las ramas son no dirigidas, la red es no dirigida. Si la red tiene ambos tipos de ramas no dirigidas se convierten en ramas dirigidas en direcciones opuestas.

## 1. Problema de la ruta más corta

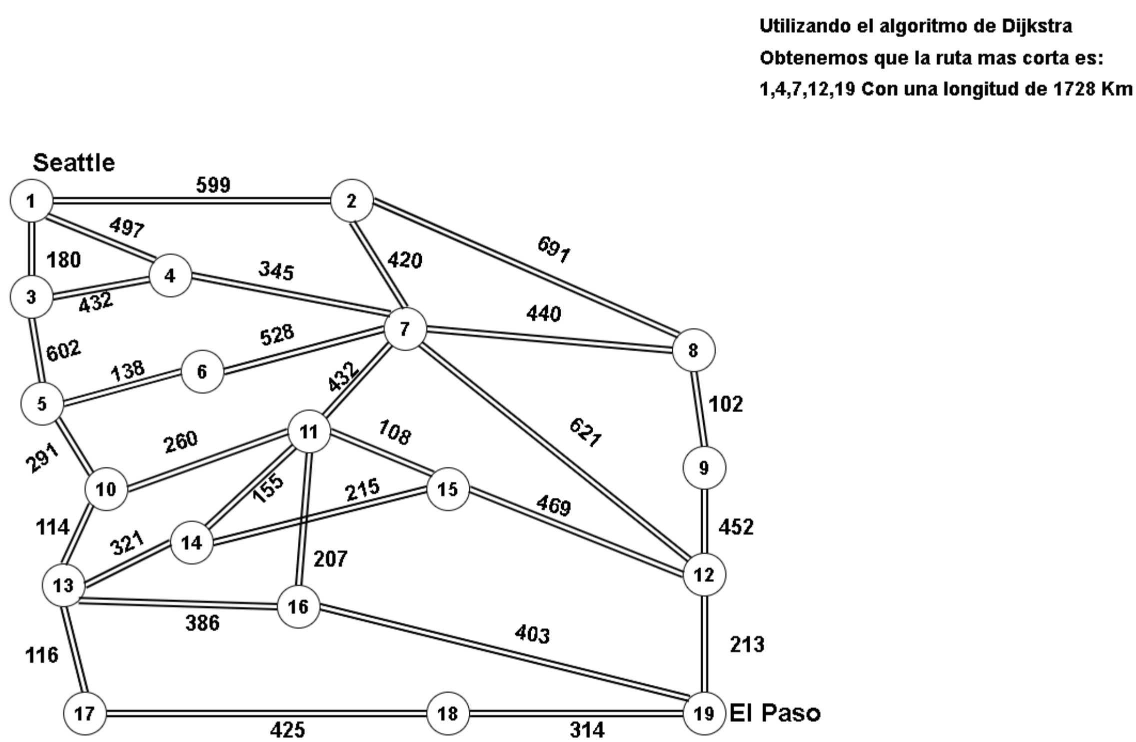
### *Descripción*

El problema de la ruta más corta es uno de los problemas más importantes de optimización combinatoria con muchas aplicaciones, tanto directas como subrutinas en otros algoritmos de optimización combinatoria. Los algoritmos para este tipo de problemas han sido estudiados desde la década de los 50’s y continúan siendo un área activa de investigación. De hecho, ha sido el objetivo de una investigación extensiva durante muchos años y ha dado como resultado la publicación de un gran número de documentos científicos.

Encontrar la ruta más corta entre dos nodos de una red, en la cual cada arco tiene un costo (o longitud) no negativo es un problema que a menudo se presenta en cierto tipo de actividades. El objetivo es minimizar el costo (tiempo o longitud) total.

## *Ejemplo*

Determine la ruta más corta entre Seattle y El Paso para la siguiente red de carreteras.



# 2. Problema de árbol de mínima expansión

## *Descripción*

Este problema surge cuando todos los nodos de una red deben conectar entre ellos, sin formar un ciclo.

El árbol de expansión mínima es apropiado para problemas en los cuales la redundancia es expansiva, o el flujo a lo largo de los arcos se considera instantáneo.

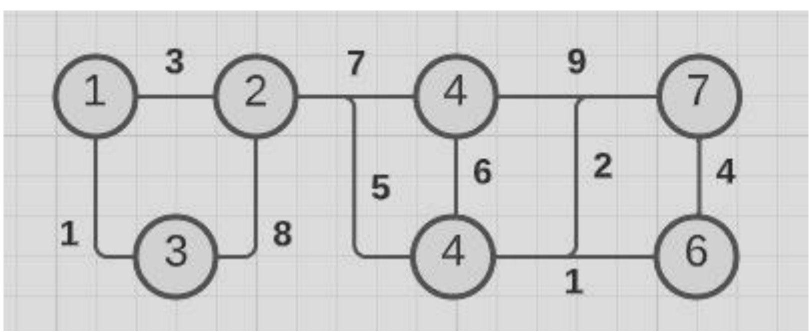
Los algoritmos que pueden dar solución a este problema son:

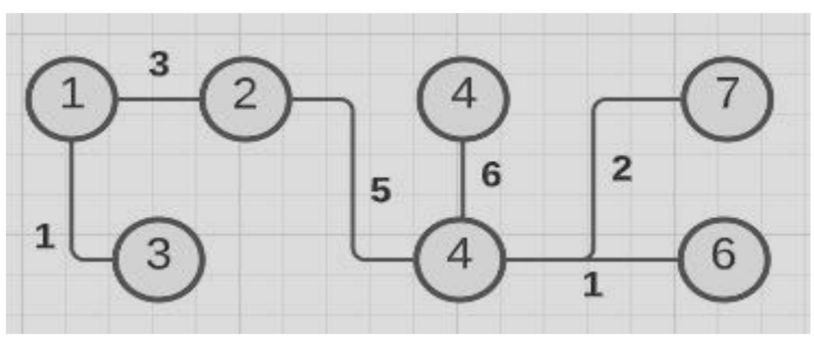
- Algoritmo de Dijkstra
- Algoritmo de Kruskal
- Algoritmo de Prim

## *Ejemplo*

Trataremos el algoritmo de Prim como forma de solución para la cobertura mínima, debido a la simplicidad que este algoritmo conlleva puede ser aprovechado sin necesidad de ser un gran experto en programación. Consiste en un algoritmo de la teoría de los grafos para encontrar un árbol de cobertura mínimo en un grafo conexo (grafo que, para cada par de nodos está conectado por un camino, o sea, si para cualquier par de nodos A y B, existe al menos un camino posible desde B hacia A), no dirigido y cuyas aristas están etiquetadas. En otras palabras, el algoritmo encuentra un subconjunto de aristas que forman un árbol con todos los vértices, donde el peso total de todas las aristas en el árbol es el mínimo posible.

Siguiendo el algoritmo de Prim, se tiene: Se elige, por ejemplo, el nodo 1 y se marca. Se elige la arista con menor valor incidente en 1, la (1, 3) = 1 se marca y se marca el otro nodo en el que incide, el 3. Se elige la arista con menor valor incidente en un nodo marcado y otro que no lo esté, la (1, 2) = 3 se marca y se marca el nodo no marcado, el 2. Se elige la arista con menor valor incidente en un nodo marcado y otro que no lo esté, la (2, 5) = 5 se marca y se marca el nodo no marcado, el 5. Se elige la arista con menor valor incidente en un nodo marcado y otro que no lo esté, la (5, 6) = 1 se marca y se marca el nodo no marcado, el 6. Se elige la arista con menor valor incidente en un nodo marcado y otro que no lo esté, la (5, 7) = 2 se marca y se marca el nodo no marcado, el 7. Se elige la arista con menor valor incidente en un nodo marcado y otro que no lo esté, la (5, 4) = 6 se marca y se marca el nodo no marcado, el 4. FIN. Se finaliza dado que se tiene marcados los 7 nodos del grafo. Por tanto, el árbol de mínima expansión resultante sería:



# 3. Problema de flujo máximo

## Descripción

En algunas redes circula por los arcos un flujo (envío o circulación de unidades homogéneas de algún producto: automóviles en una red de carreteras, litros de petróleo en un oleoducto, bits por un cable de fibra óptica) desde el origen o fuente al destino, también denominado sumidero o vertedero. Los arcos tienen una capacidad máxima de flujo, y se trata de enviar desde la fuente al sumidero la mayor cantidad posible de flujo, de tal manera que:

- El flujo es siempre positivo y con unidades enteras.
- El flujo a través de un arco es menor o igual que la capacidad.
- El flujo que entra en un nodo es igual al que sale de él.
- En el caso de que el origen o el destino no existan en el problema, se añaden ficticiamente utilizando arcos unidireccionales de capacidad infinita.

El algoritmo de Ford-Fulkerson propone buscar caminos en los que se pueda aumentar el flujo, hasta que se alcance el flujo máximo. La idea es encontrar una ruta de penetración con un flujo positivo neto que una los nodos origen y destino.

## Ejemplo

PASOS PARA LA RESOLUCIÓN DE UN PROBLEMA DE FLUJO MÁXIMO

1. Identificar el nodo origen y de destino.

2. Partiendo del nodo de origen se elige el arco que posea mayor flujo

3. Identificar los nodos de transbordo.

4. Repetir el proceso como si el nodo intermediario fuera el nodo origen.

5. Calcular 'k' y las nuevas capacidades.

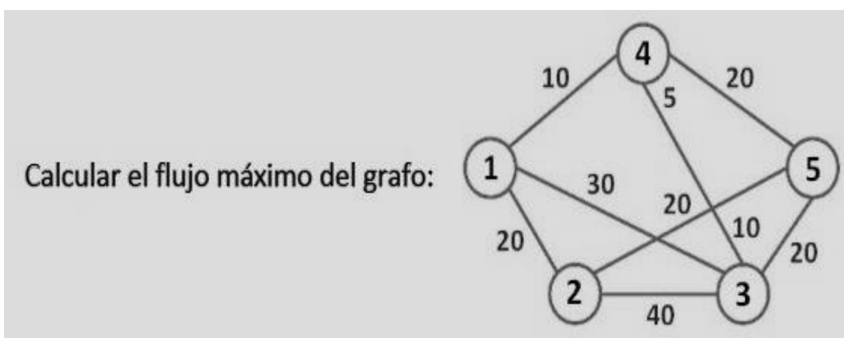
6. Obtenido el resultado se cambian las capacidades y se repite idéntico procedimiento desde el inicio.

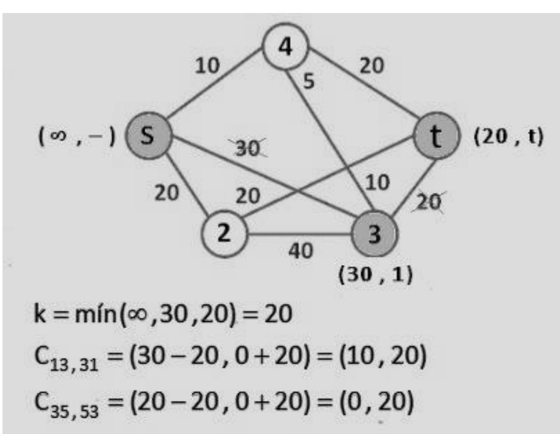
Para Cij, Cji = (Ci - k, Cj + k) donde:

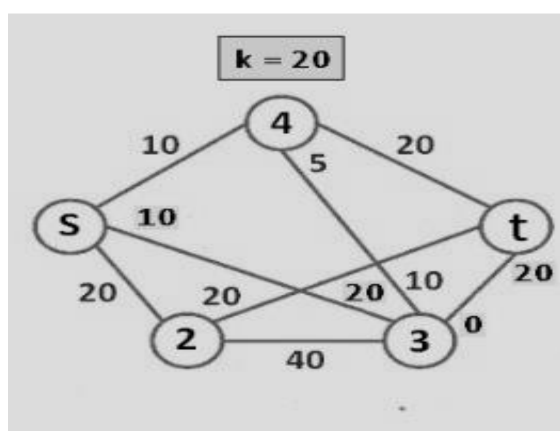
C = Capacidad

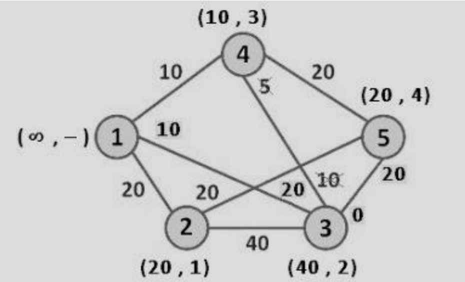
i j Í= índices de los nodos

k= Mínimo flujo que pasa por el nodo





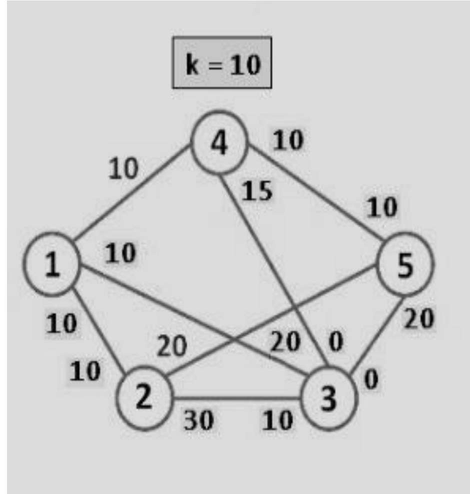

$k = \text{mín}(\infty, 20, 40, 10, 20) = 10$

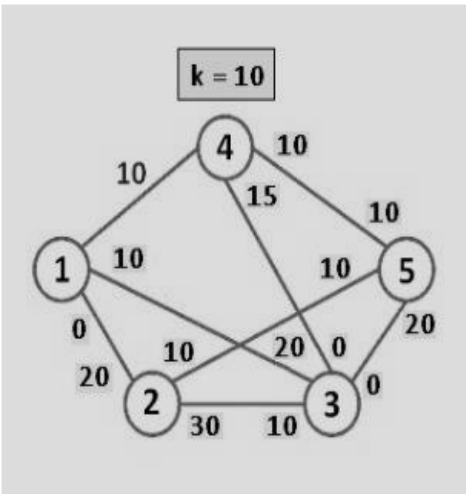
$C_{12,21} = (20-10, 0+10) = (10, 10)$

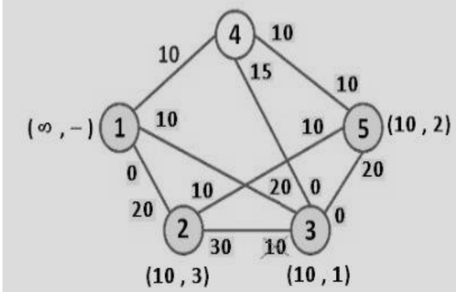
$C_{23,32} = (40-10, 0+10) = (30, 10)$

$C_{34,43} = (10-10, 5+10) = (0, 15)$

$C_{45,54} = (20-10, 0+10) = (10, 10)$



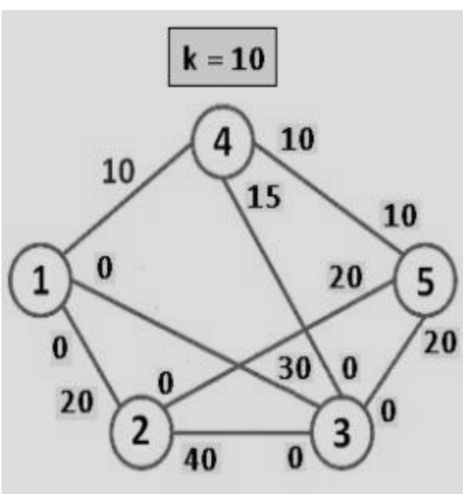



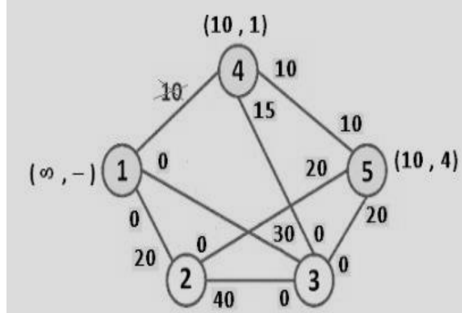

$k = \text{mín}(\infty, 10, 10, 10) = 10$

$C_{13,31} = (10-10, 20+10) = (0, 30)$

$C_{32,23} = (10-10, 30+10) = (0, 40)$

$C_{25,52} = (10-10, 10+10) = (0, 20)$

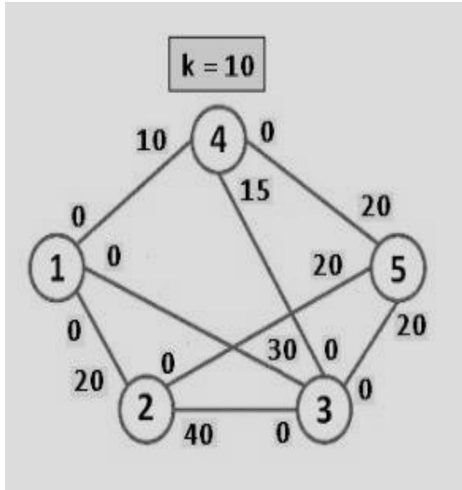



$k = \text{mín}(\infty, 10, 10) = 10$

$C_{14,41} = (10-10, 0+10) = (0, 10)$

$C_{45,54} = (10-10, 10+10) = (0, 20)$




El Flujo Máximo que puede pasar del nodo origen hasta el nodo destino es la suma de las capacidades de la ruta.

El Flujo máximo se obtiene al sumar todas las nuevas capacidades: $\sum k = 20 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 = 60$

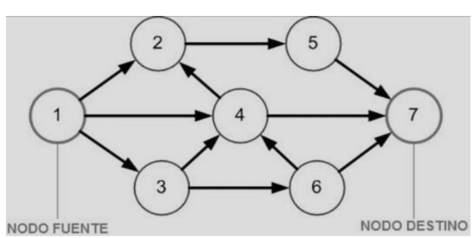
# 4. Problema de flujo de costo mínimo

## *Descripción*

Su objetivo es determinar el programa de flujo que minimiza el costo asociado al tiempo que satisface las restricciones de capacidad y flujo externo.

## *Ejemplo*

Se tiene un Nodo Fuente como inicio, y un Nodo destino o Nodo Demanda como fin.



## Modelo del problema

Minimizar Z=

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} Cij\ Xij$$

$$Sujeto\ a:$$

$$\sum_{j=1}^{n} Xij - \sum_{j=1}^{n} Xij = bi,\ para\ i = \{1, 2, \ldots, n\}$$

$$0 \leq Xij \leq Uij$$

$$Xij\ = f\,lujo\ a\ trav\acute{e}s\ del\ arco\ i \rightarrow j$$

$$Cij\ = \text{costo}\ por\ unidad\ de\ f\,lujo\ a\ trav\acute{e}s\ del\ arco\ i \rightarrow j$$

$$Uij\ = capacidad\ dedl\ arco\ i \rightarrow j$$

$$bi\ = f\,lujo\ neto\ del\ arco\ i,\ tal\ que$$

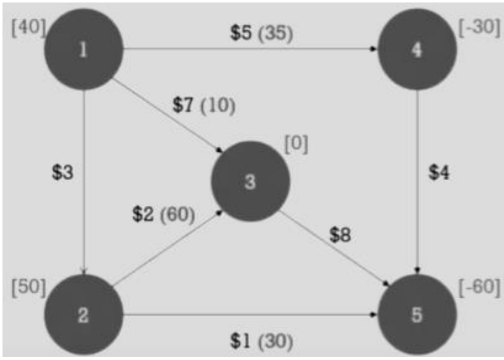
$$bi > 0\ si\ i\ es\ un\ nodo\ f\,uente$$

$$bi < 0\ si\ i\ es\ un\ nodo\ demanda$$

$$bi = 0\ si\ i\ es\ un\ nodo\ de\ trasbordo$$

## Ejemplo (Simplex)

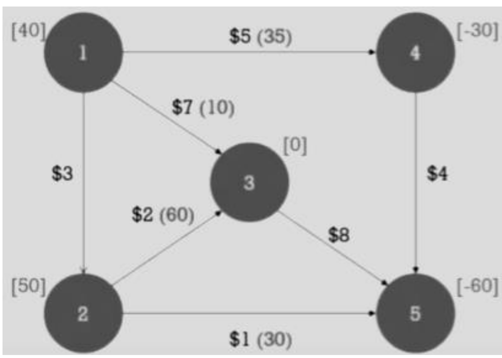
Una red de tuberías conecta dos plantas desaladoras de agua a dos ciudades. Las cantidades diarias de abastecimiento en las dos plantas son 40 y 50 millones de galones y las demandas diarias en las ciudades 1 y 2 son 30 y 60 millones de galones. Los nodos 1 y 2 representan las plantas 1 y 2, y los nodos 4 y 5 representan las ciudades 1 y 2. El nodo 3 es una estación de bombeo entre las plantas y las ciudades. Encontrar el flujo máximo de coste mínimo.




$$Propiedad\ de\ soluciones\ factibles$$

$$\sum_{i=1}^{n} bi = 0$$

$$40 + 50 - 30 - 60 = 0$$




$$Minimizar\ Z = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} Cij\ Xij$$

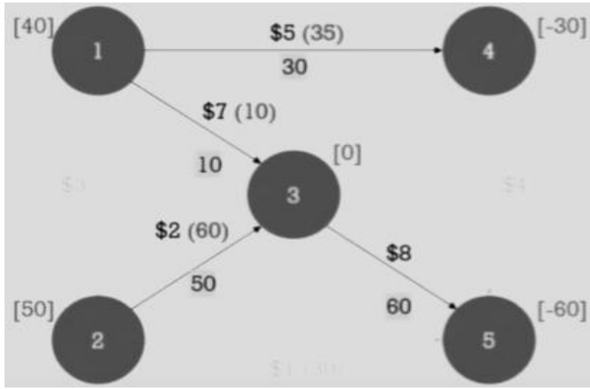
$$Sujeto\ a:$$

$$\begin{array}{rrrrrrrrl}
X12 & + X13 & + X14 & & & & & = & 40 \\
-X12 & & & + X23 & + X25 & & & = & 50 \\
& - X13 & & - X23 & & + X35 & & = & 0 \\
& & - X14 & & & & + X45 & = & -30 \\
& & & & - X25 & - X35 & - X45 & = & -60
\end{array}$$

Solución básica factible inicial

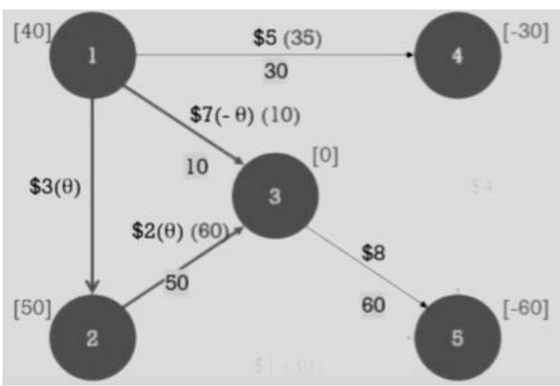
| Arcos no básicos | Arcos |
|---|---|
| básicos | |
| X12 = 0 | X13 = 10 |
| X25 = 0 | X23 = 50 |
| X45 = 0 | X14 = 30 |
| | X35 = 60 |

Y se agrega al diagrama:




## Prueba de optimalidad

Si agregamos el arco (1,2), se genera el ciclo (1,2), (1,3) y (2,3), se incrementa en θ el costo que va en dirección de flujo, y decrece en θ en la dirección contraria, por lo cual, realizando la suma de los costos




$$\Delta Z = 3\theta + 2\theta - 7\theta$$
$$= -2\theta$$

Y así sucesivamente probamos casa arco hasta obtener la siguiente tabla

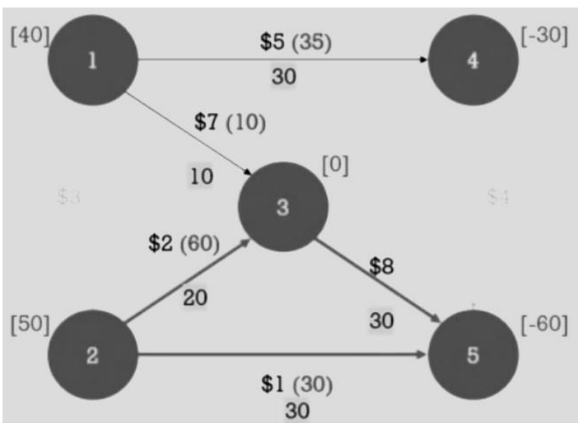
| ARCO NO BÁSICO | CICLO GENERADO | ΔZ |
|---|---|---|
| X12 | (1,2),(2,3)(1,3) | -2 |
| X25 | (2,5),(2,3),(3,5) | -9 |
| X45 | (1,3),(3,5),(1,4),(4,5) | -6 |

| Arcos no básicos | Arcos básicos |
|---|---|
| X12=0 | X13=10 |
| X25=0 | X23=50 |
| X45=0 | X14=30 |
| | X35=60 |

X25 es la variable de entrada

X25 es la variable de salida

Actualizamos los valores de las X, notando que X25 llegó a su capacidad (30)




X25= θ<=30 θ=30

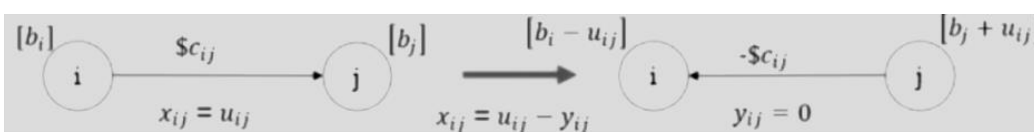
X23= 50 - θ>= 0

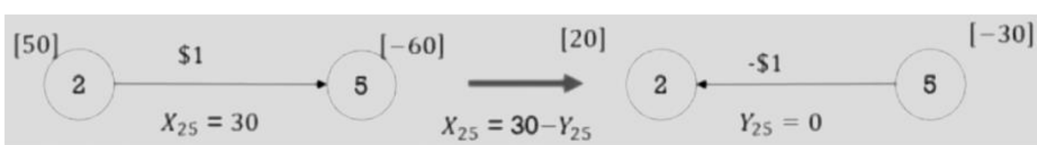
X35= 60 - θ>= 0

X25= 30

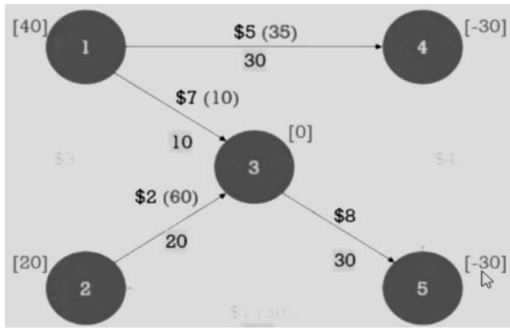
X24= 20

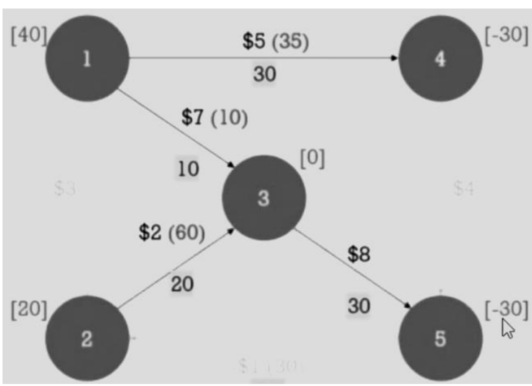
X35= 30




De esta manera, ahora Yij es nuestra nueva variable básica, a la vez que invertimos la dirección del arco y el costo unitario, además, reducimos el flujo neto en los nuevos que entran y se aumenta en los que salen, agregamos los cambios al diagrama:




$X45 = \quad \theta <= \infty \qquad \theta <= \infty$

$X13 = 10 - \theta >= 0 \qquad \theta <= 10$

$X35 = 30 - \theta >= 0 \qquad \theta <= 30$

$X14 = 30 + \theta <= 35 \qquad \theta <= 5 \qquad \theta = 5$

$X45=5$

$X13=5$

$X35=25$

$X14=35$

## Iteración 2

A pesar de que el arco que entró a la base volvió a salir, se modificaron las bases de los flujos, por lo que sobre estos se debe analizar la tasa de incremento en los arcos no básicos.

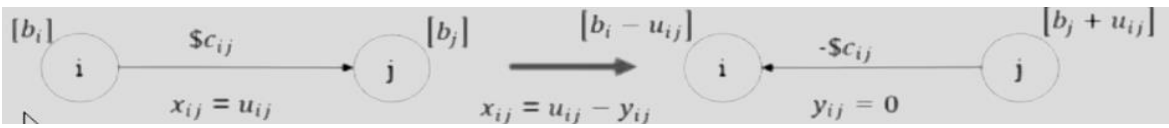
| ARCO NO BÁSICO | CICLO GENERADO | ΔZ |
|---|---|---|
| X12 | (1,2),(2,3)(1,3) | -2 |
| Y25 | (2,5),(2,3),(3,5) | 9 |
| X45 | (1,3),(3,5),(1,4),(4,5) | -6 |

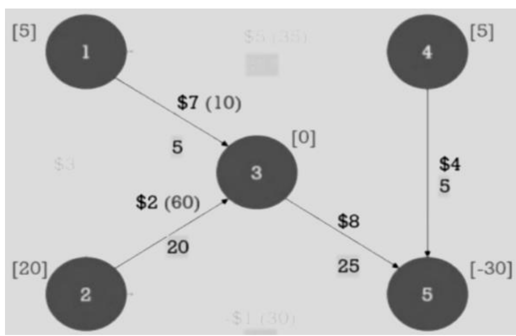
| Arcos no básicos | Arcos básicos |
|---|---|
| X12=0 | X13=10 |
| Y25=30* | X23=20 |
| X45=0 | X14=30 |
| | X35=30 |

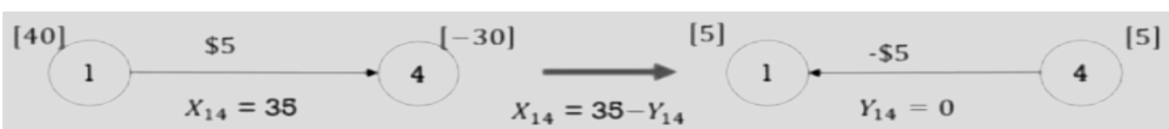
X45 es la variable de entrada

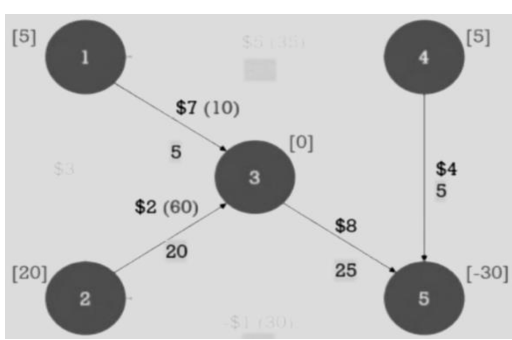
X14 es la variable de salida

Volvemos a realizar el cambio que genera este diagrama



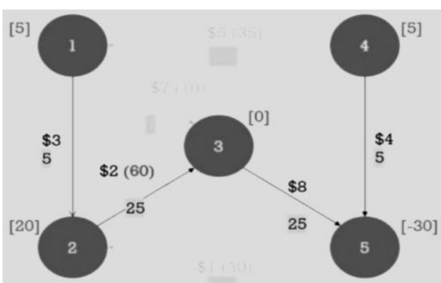



Realizamos el mismo procedimiento nuevamente, se analiza para cada arco no básico, determinamos que el arco X12 es la variable de entrada, y el aumento de los flujos dice que X13 es la variable de salida, sustituimos θ, y observamos que ninguno alcanzó su cuota superior, pero X13 alcanzó la inferior y solamente modificamos con los valores nuevos.

| ARCO NO BÁSICO | CICLO GENERADO | ΔZ |
|---|---|---|
| X12 | (1,2),(2,3)(1,3) | -2 |
| Y25 | (2,5),(2,3),(3,5) | 9 |
| Y14 | (4,1),(1,3),(3,5),(4,5) | 6 |

| Arcos no básicos | Arcos básicos |
|---|---|
| | X13 = 5 |
| X12 = 0 | X23 = 20 |
| Y25 = 30* | X45 = 5 |
| Y14 = 35* | X35 = 25 |

X12 es la variable de entrada




$$\Delta Z = -5\theta + 3\theta + 2\theta + 8\theta - 4\theta$$
$$= 4\theta$$

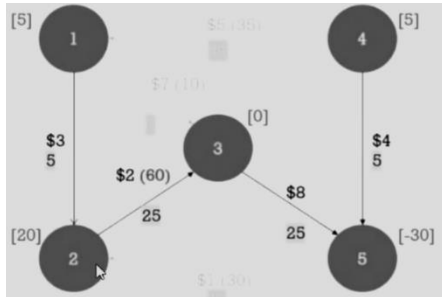
Finalmente, hay que notar que todos los arcos básicos tienen un $\Delta Z>0$, por lo cual hemos obtenido la solución óptima

| ARCO NO BÁSICO | CICLO GENERADO | ΔZ |
|---|---|---|
| X13 | (4,1),(1,3),(3,5),(4,5) | 2 |
| Y25 | (2,5),(2,3),(3,5) | 9 |
| Y14 | (4,1),(1,3),(3,5),(4,5) | 4 |

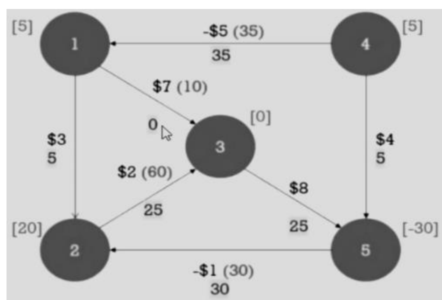
| Arcos no básicos | Arcos básicos |
|---|---|
| | X13 = 0 |
| X12 = 5 | X23 = 25 |
| Y25 = 30* | X45 = 5 |
| Y14 = 35* | X35 = 25 |

## Interpretación

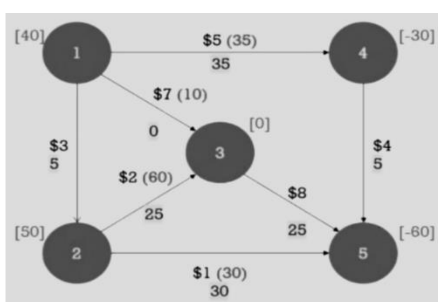
Nos dice que de la planta X12, se envían 5M de galones




De la planta X13, no se envía nada, y del X14, donde se hizo un cambio en las iteraciones, debemos deshacer este cambio en la dirección, el costo y flujo neto, quedando que se envían 35M de galones a la ciudad 1




De igual forma, deshacemos el cambio en el arco X25



Obteniendo estas soluciones:

$$X12 = 5 \qquad X35 = 25$$
$$X13 = 0 \qquad X45 = 5$$
$$X14 = 35$$
$$X23 = 25$$
$$X25 = 30$$

Finalmente, obtenemos el costo total, sumando el producto de los costos por los flujos:

$$Z = 3 * 5 + 7 * 0 + 5 * 35 + 2 * 25 + 1 * 30 + 8 * 25 + 4 * 5 = 490$$

# 5. Análisis

## *Programación lineal en Teoría de redes*

### Programación lineal

Es un método matemático de optimización, que permite representar modelos lineales para reducir costos o maximizar ganancias en diferentes áreas de una organización. Por lo que, es utilizada para la administración eficiente de los procesos en todos los ámbitos de la economía de igual forma la teoría de redes son un conjunto de métodos cuantitativos utilizados para la toma de decisiones.

## Teoría de redes

La modelación de redes permite la resolución de múltiples problemas de programación matemática mediante la implementación de algoritmos especiales creados para tal fin, conocidos como algoritmos de optimización de redes.

Los modelos de optimización de redes constituyen una herramienta muy sencilla para encontrar la solución óptima a los problemas de flujo de redes, porque usa algoritmos fáciles de comprender y aplicar; comparándolos con el método simplex, disminuyendo el número de iteraciones que resuelven el problema.

Si se aplica el método simplex en un problema de distribución o redes, tenemos muchas variables y restricciones en el modelo y se tiene que utilizar herramientas computacionales para encontrar la solución óptima de una forma rápida.

Ahora con los modelos de redes solo habría que aplicar las iteraciones al grafo que origina la representación de la red del problema y luego aplicar el algoritmo que corresponde, que puede ser el algoritmo de la ruta más corta, algoritmo para encontrar el árbol de expansión mínima, algoritmo de la trayectoria de aumento o el algoritmo de flujo máximo.

# BIBLIOGRAFÍA


- Problema Flujo Máximo. (2010, 10 abril). INVESTIGACION DE OPERACIONES. https://karenbandala.wordpress.com/about/2-4-problema-flujo-maximo/

- Problema árbol expandido mínimo. (2010, 11 abril). INVESTIGACION DE OPERACIONES. https://jorgesosasanchez.wordpress.com/unidad-2/2-3-problema-arbol-expandido-minimo/

- Ortiz, J. C. (2021, 8 junio). Flujo a costo mínimo | Método simplex de redes [Vídeo]. YouTube. https://www.youtube.com/watch?v=cCPNEGGL6p8&feature=youtu.be

- Landeta, J. M. I., & Manuel, J. (2012). *Investigación de operaciones*. Trillas.

- Problema de la ruta más corta. (2019, 10 enero). https://investigaciondeoperacionesonline.blogspot.com/2019/12/24-problema-de-la-ruta-mas-corta.html