

1. 참, 거짓 판별하는 문제(이유 없이 진리값만 적으시면 됩니다)

2. 전확률의 법칙, 베이즈의 법칙을 이용한 확률 구하기

3. 확률변수 $Z=h(X)$ 또는 $Z=h(X,Y)$ 의 확률밀도함수 및 평균 구하기

3-1

Example 2.33 흰 공이 5개 검은 공이 4개가 있는 주머니에서 동시에 임의로 3개의 공을 꺼내서 그 속에 포함된 흰 공의 개수를 X 라 하자.

(1) 확률변수 X 의 확률질량함수를 구하시오.

(2) 확률변수 X 의 평균을 구하시오.

solution. X 의 치공간은 $R_X = \{0, 1, 2, 3\}$ 이므로 X 는 이산확률변수이다.

(1) 확률변수 X 의 확률질량함수:

$$\begin{aligned} f_X(x) = P[X=x] &= \frac{\binom{5}{x} \binom{4}{3-x}}{\binom{9}{3}} \cdot I_{\{0,1,2,3\}}(x) \\ &= \begin{cases} \frac{\binom{5}{x} \binom{4}{3-x}}{\binom{9}{3}}, & x \in R_X = \{0, 1, 2, 3\} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

x	0	1	2	3
$P[X=x]$	$\frac{4}{84}$	$\frac{30}{84}$	$\frac{40}{84}$	$\frac{10}{84}$

(2) 확률변수 X 의 평균:

$$\begin{aligned} E[X] &= \sum_{x \in R} x \cdot f_X(x) = \sum_{x=0}^3 x \cdot \frac{\binom{5}{x} \binom{4}{3-x}}{\binom{9}{3}} \\ &= 0 \times \frac{1 \cdot 4}{84} + 1 \times \frac{5 \cdot 6}{84} + 2 \times \frac{10 \cdot 4}{84} + 3 \times \frac{10 \cdot 1}{84} \\ &= \frac{140}{84} = \frac{5}{3} \quad \square \end{aligned}$$

3-2

Example 2.45 연속 확률변수 X 의 확률밀도함수가 $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & -2 < x < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ 이라 하자. Theorem 2.44를 이용하여 $Y = X^2$ 의 평균 $E[Y] = E[X^2]$ 을 구하시오. (Example 2.43)

solution.

$$E(Y) = E[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_{-2}^1 x^2 \cdot \frac{1}{3} dx = \left[\frac{1}{9} x^3 \right]_{-2}^1 = \frac{1 - (-8)}{9} = 1$$

Example 3.5 한 주머니에 흰 공이 3개, 검은 공이 2개, 붉은 공이 3개가 들어 있다. 이 주머니에서 2개의 공을 꺼낼 때 X 를 흰 공의 개수, Y 를 검은 공의 개수라 한다.

- (1) 확률벡터 (X, Y) 의 치공간을 구하시오.
- (2) 확률벡터 (X, Y) 의 결합확률질량함수를 구하시오.

solution. 흰 공(W_1, W_2, W_3), 검은 공(B_1, B_2), 붉은 공(R_1, R_2)
표본공간 $\Omega = \{W_1W_2, W_1W_3, W_2W_3, W_1B_1, \dots, R_1R_2\}$

(0) X, Y 의 치공간과 확률질량함수

$$R_X = \{0, 1, 2\}, \quad R_Y = \{0, 1, 2\}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\binom{3}{x}\binom{5}{2-x}}{\binom{8}{2}}, & x \in R_X \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{\binom{2}{y}\binom{6}{2-y}}{\binom{8}{2}}, & y \in R_Y \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

(1) (X, Y) 의 치공간

$$R_{X \times Y} = \{(0, 0), (0, 1), (0, 2), (1, 0), (1, 1), (2, 0)\}$$

여기서 $R_{X \times Y} \subseteq R_X \times R_Y$ 임을 알 수 있다.

(2) (X, Y) 의 결합확률질량함수 $f_{X,Y}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \in \mathbb{R}^2$ 에 대하여

$$f_{X,Y}(x, y) = P[X = x, Y = y] = \begin{cases} \frac{\binom{3}{x}\binom{2}{y}\binom{3}{2-x-y}}{\binom{8}{2}}, & (x, y) \in R_{X \times Y} \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$= \frac{\binom{3}{x}\binom{2}{y}\binom{3}{2-x-y}}{\binom{8}{2}} \cdot I_{R_{X \times Y}}(x, y)$$

$x \setminus y$	0	1	2
0	$\frac{3}{28}$	$\frac{6}{28}$	$\frac{1}{28}$
1	$\frac{9}{28}$	$\frac{6}{28}$	0
2	$\frac{3}{28}$	0	0

4. 확률벡터에서 조건부 확률질량(밀도)함수 및 조건부 기댓값 구하기

Example 3.47 연속확률벡터 (X, Y) 의 결합확률밀도함수가

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} \frac{2}{5}(x+4y), & 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

일 때, 다음 질문에 답하시오.(Example 3.17)

- (1) $Y=y$ 에 대한 X 의 조건부 확률밀도함수를 구하시오.
- (2) (1)을 이용하여 확률 $P\left[X \leq \frac{1}{2} \mid Y = \frac{1}{2}\right]$ 를 구하시오.

solution. Example 3.17에서 다음과 같이 X 와 Y 의 주변확률밀도함수를 얻었다.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{2}{5}(x+2), & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{5}(8y+1), & 0 < y < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

(1) $Y=y$ 에 대한 X 의 조건부 확률밀도함수: $0 < y < 1$ 일 때,

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} \frac{\frac{2}{5}(x+4y)}{\frac{1}{5}(8y+1)}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$= \begin{cases} \frac{2x+8y}{1+8y}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

(2) (1)을 이용하여 확률 $P\left[X \leq \frac{1}{2} \mid Y = \frac{1}{2}\right]$ 를 구하시오.

$$\begin{aligned} P\left[X \leq \frac{1}{2} \mid Y = \frac{1}{2}\right] &= \int_{-\infty}^{1/2} f_{X|Y}(x|y = \frac{1}{2}) dx \\ &= \int_0^{1/2} \frac{2x+4}{5} dx \\ &= \left[\frac{x^2+4x}{5}\right]_0^{1/2} = \frac{9}{20} \end{aligned}$$

5. 감마분포와 푸아송분포 사이의 관계를 이용한 확률 구하기

8장 연속확률분포
↳ 감마분포

Example $X \sim \text{Pois}(15)$ $T \sim \text{Ga}(1, 4)$
 $X_{1/2} \sim \text{Pois}(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2})$ $G = T \sim \text{exp}(4)$

1. 어떤 가게에서 만 원 이상 구매하는 고객들의 수는 시간당 15명의 비율로 도착하는 푸아송분포를 따른다고 하자. 만 원 이상 구매하는 첫 고객이 생길 때 까지 가게 종업원이 기다려야 하는 시간이 4분 이상일 확률을 구하시오.

$P[T \geq 4] = \int_4^{\infty} \frac{1}{4} e^{-t/4} dt$ $f_T(t) = \frac{1}{4} e^{-t/4}, t > 0$

2. 어떤 햄버거 가게에는 시간당 평균 30명의 손님이 오는 비율로 푸아송분포를 따른다고 한다. $X \sim \text{Pois}(30) = X_{1/2} \sim \text{Pois}(\frac{1}{2})$

(1) 처음 두 명의 손님이 방문하기까지 가게 주인이 기다리는 시간이 7분 이상일 확률을 구하시오. $T \sim \text{Ga}(2, 2)$

(2) 처음 두 명의 손님이 방문하기까지 가게 주인이 기다리는 시간의 평균과 분산을 구하시오. $E(X) = \alpha\beta = 4$
 $V(X) = \alpha\beta^2 = 8$

$P(T \geq 7) = \int_7^{\infty} \frac{x^{\alpha-1} e^{-x/\beta}}{\Gamma(\alpha) \beta^\alpha} dx$

20 / 20

5.2 # 14. 우리나라 동남부 지역은 매년 2건의 비올로 지진이 일어나며, 지진 발생 횟수는 푸아송과정에 따른다고 한다.

지진이 발생하는 횟수를 X 라 하자

$$X \sim \text{Pois}(2) \text{ 이라.}$$

(1) $t=0$ 이후 3번째 지진이 발생할 때까지 걸리는 4간에 대한 확률분포를 구하라.

T 를 지진 간격 즉 ~~3번째~~ 지진이 발생할 때까지 걸리는 4간이라 하자.

$$T \sim \text{Ga}(3, \frac{1}{2})$$

$$\therefore f_T(x) = \begin{cases} \frac{x^2 e^{-x}}{\Gamma(3) \cdot \frac{1}{2}} = 4x^2 e^{-2x}, & x > 0 \\ 0, & \text{o/w} \end{cases}$$

(2) 3번째 지진에 $t=0.5$ 와 $t=1.5$ 사이에 발생한 확률을 구하라.

$$P[0.5 < T < 1.5] = \int_{0.5}^{1.5} 4x^2 e^{-2x} dx = \left[-(2x^2 + 1)e^{-2x} \right]_{0.5}^{1.5} \\ = 0.4965$$

6. 모평균, 모비율, 모분산, 모평균 차의 점추정 및 신뢰구간 모평균(분산이 알려진 경우)

Example 7.34 어떤 전자 제품의 수명은 근사적으로 정규 분포를 따른다고 한다. 이 부품 100개를 검사하여 $\bar{x} = 301.2$ (시간)를 얻었다고 하자. $\sigma^2 = 16$ 으로 알려졌다고 할 때 μ 의 95% 신뢰구간을 구하시오.

solution. 어떤 전자 제품의 수명을 X 라 하자. X 가 근사적으로 정규분포를 따르므로 표본평균 \bar{X} 는 근사적으로 정규분포를 따른다.

주어진 통계량은 $n = 100, \bar{x} = 301.2, \sigma^2 = 16$ 이므로

$$\bar{X} \approx N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right) = N\left(\mu, \frac{16}{100}\right) = N\left(\mu, \left(\frac{4}{10}\right)^2\right)$$

이고, Theorem 7.33에 의해 μ 의 95% 신뢰구간은 다음과 같다.

$$\left(301.2 - 1.96 \times \frac{4}{10}, 301.2 + 1.96 \times \frac{4}{10} \right) = (300.4, 302.0)$$

모평균(분산이 미지인 경우)

Example 7.37 어떤 공장에서 생산하는 비누 무게의 평균을 알아보기 위하여 10개를 추출하여 비누 무게를 알아본 결과 다음과 같았다. 실제 평균 비누 무게 μ 의 95% 신뢰구간을 구하시오. 단, 비누 무게는 정규분포를 따른다고 한다.

94 96 97 85 86 79 93 89 92 78

solution. 어떤 공장에서 생산하는 비누 무게를 X 라 하자. $n = 10$ 인 표본평균을 \bar{X} , 표본분산을 S^2 이라 하면,

$$T = \frac{\bar{X} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} \sim t(10-1) = t(9)$$

이다. 표본평균(\bar{X})과 표본분산(S^2)을 구하면 다음과 같다.

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = \frac{94+96+97+85+86+79+93+89+92+78}{10} = 88.9$$

$$\begin{aligned} S^2 &= \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 - n(\bar{X})^2 \right) \\ &= \frac{1}{9} \left\{ (94-88.9)^2 + (96-88.9)^2 + (97-88.9)^2 + (85-88.9)^2 + (86-88.9)^2 \right. \\ &\quad \left. + (79-88.9)^2 + (93-88.9)^2 + (89-88.9)^2 + (92-88.9)^2 + (78-88.9)^2 \right\} \\ &= 45.4333 \\ s &= \sqrt{45.4333} \approx 6.74042 \end{aligned}$$

$n = 10$, $t_{0.025}(9) = 2.262$ 이므로 Theorem 7.36에 의해 95% 신뢰구간은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} &\left(\bar{X} - t_{0.025}(n-1) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}, \bar{X} + t_{0.025}(n-1) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} \right) \\ &= \left(88.9 - 2.262 \times \frac{\sqrt{45.4333}}{\sqrt{10}}, 88.9 + 2.262 \times \frac{\sqrt{45.4333}}{\sqrt{10}} \right) \\ &= (88.9 - 4.821, 88.9 + 4.821) \\ &= (84.079, 93.721) \end{aligned}$$

모분산

Example 7.44 어떤 공장에서 생산된 철판의 두께는 정규분포를 따른다고 한다. 16개의 임의표본을 추출된 결과 두께의 표준편차가 2.2mm라면 철판 두께의 분산에 대한 95% 신뢰구간을 구하시오.

solution. 공장에서 생산된 철판 두께의 분산을 σ^2 이라 하고, $n = 16$ 인 표본분산을 S^2 이라 하자. 그러면

$$V = \frac{(n-1)S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n-1) = \chi^2(15) \quad \frac{15 S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(15)$$

이다.

$$s^2 = 2.2^2, \quad \chi_{0.025}^2(15) = 27.4884, \quad \chi_{0.975}^2(15) = 6.2621$$

이므로, 분산 σ^2 의 95% 신뢰구간은 다음과 같다.

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi_{\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi_{1-\frac{\alpha}{2}}^2(n-1)} \right) = \left(\frac{15 \times 2.2^2}{27.4884}, \frac{15 \times 2.2^2}{6.2621} \right) = (2.6411, 11.5936)$$

모비율

모평균의 차

3. 어떤 지역의 유권자 중에서 임의로 150명을 선별하여 이 지역
 정치단체장 득침 확률에 대한 지지여부를 조사한다고 한다.
 90명이 지지를 나타냈을 때 득침 후보자이 지지율에 대한 95%
 신뢰구간을 구하시오.

득침 후보에 대한 지지여부를 X 라 하자
 $X \sim \text{Ber}(p) \xrightarrow{n=150} \bar{X} \approx N(p, \frac{p(1-p)}{n}) \quad (\bar{x} = \hat{p} = p)$

$$\begin{aligned} \hat{p} &= \frac{90}{150}, z_{0.025} = 1.96 \\ \therefore \left(\hat{p} - z_{0.025} \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{0.025} \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right) \\ &= \left(\frac{90}{150} - 1.96 \times \sqrt{\frac{\frac{90}{150} \times \frac{60}{150}}{150}}, \frac{90}{150} + 1.96 \times \sqrt{\frac{\frac{90}{150} \times \frac{60}{150}}{150}} \right) \\ &= \left(\frac{3}{5} - 1.96 \times \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{3}{5} + 1.96 \times \frac{1}{\sqrt{5}} \right) \\ &= (0.5216, 0.6784) \end{aligned}$$

7. 다음은 남자와 여자의 생년 연월을 조사한 자료이다.
 남자와 여자의 생년 연월은 각각 동일한 분산을 갖는 정규분포를
 따른다고 한다. 남자와 여자의 평균 생년 연월 $\mu_1 - \mu_2$ 에 대한
 95% 신뢰구간을 구하시오.

X 남자 52 60 55 46 33 75 58 45 57 88
 Y 여자 62 58 65 56 53 45 56 65 77 47

$$T = \frac{(\bar{X} - \bar{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}}} \sim t(18)$$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = 56.9$$

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = 58.4$$

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = 240.544$$

$$S_y^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = 58.489$$

$$S_p^2 = \frac{(9)S_x^2 + (9)S_y^2}{18} = 56.9165$$

$$\begin{aligned} \therefore & \left((\bar{X} - \bar{Y}) - t_{0.025}(18) S_p \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}}, (\bar{X} - \bar{Y}) + t_{0.025}(18) S_p \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{n}} \right) \\ & t_{0.025}(18) = 2.101 \\ & = \left(-1.5 - 2.101 \times \sqrt{\frac{56.9165}{9}}, -1.5 + 2.101 \times \sqrt{\frac{56.9165}{9}} \right) \\ & = (-8.564, 5.564) \end{aligned}$$

7. 모평균, 모비율, 모분산, 모평균 차(대응비교 포함), 모분산 비의 검정