MAT2410(02) 응용수학I(HW6)

No: 1 학과: 컴퓨터공학과 학번: 20171630 이름: 남주형

1. $X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$이고 X와 Y가 독립이면, $Z = X+Y$는 정규분포를 따르고 $Z \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$임을 증명하시오.

$m_X(t) = \exp\{\mu_1 t + \frac{1}{2}\sigma_1^2 t^2\}$, $m_Y(t) = \exp\{\mu_2 t + \frac{1}{2}\sigma_2^2 t^2\}$

$$\therefore m_Z(t) = E[e^{tZ}] = E[e^{t(X+Y)}] = E[e^{tX} \cdot e^{tY}] = E[e^{tX}] E[e^{tY}]$$
$$= m_X(t) \cdot m_Y(t)$$
$$= \exp\{\mu_1 t + \tfrac{1}{2}\sigma_1^2 t^2\} \cdot \exp\{\mu_2 t + \tfrac{1}{2}\sigma_2^2 t^2\}$$
$$= \exp[(\mu_1+\mu_2)t + \tfrac{1}{2}(\sigma_1^2+\sigma_2^2)t^2]$$

$\therefore Z \sim N(\mu_1+\mu_2, \sigma_1^2+\sigma_2^2)$

2. 어느 직장의 신입사원들의 키는 근사적으로 평균이 175cm, 표준편차가 5cm인 정규분포를 따른다고 한다. 임의로 선택한 신입사원의 키가 170cm 보다 크고 180cm 보다 작은 확률을 구하시오

신입사원의 키를 X라하면
$X \approx N(175, 5^2)$ 이다.

$$P[170 < X < 180]$$
$$= P\left[\frac{170-175}{5} < \frac{X-175}{5} < \frac{180-175}{5}\right]$$
$$= P[-1 < Z < 1]$$

3. 퓨즈의 수명 X는 평균이 3인 지수분포를 따른다고 하자. 즉, $X \sim exp(3)$이다.

(1) 퓨즈의 수명이 10년이 넘을 확률을 구하시오.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}, & x>0 \\ 0, & o/w \end{cases}$$

$$P[X>10] = \int_{10}^{\infty} \frac{1}{3}e^{-\frac{x}{3}}dx = \left[-e^{-\frac{x}{3}}\right]_{10}^{\infty} = e^{-\frac{10}{3}}$$

(2) 퓨즈를 동시에 5개 사용한 후에 10년 후에도 절반 이상이 작동할 확률을 구하시오

10년후에도 작동할 수있는 퓨즈의 개수를 Y라 하면
$Y \sim B(5, e^{-\frac{10}{3}})$ 이다.

$$P[Y \geq 3] = \sum_{x=3}^{5} \binom{5}{x} (e^{-\frac{10}{3}})^x (1-e^{-\frac{10}{3}})^{5-x}$$
$$= {}_5C_3 (e^{-\frac{10}{3}})^3 (1-e^{-\frac{10}{3}})^2 + {}_5C_4 (e^{-\frac{10}{3}})^4 (1-e^{-\frac{10}{3}})^1 + {}_5C_5 (e^{-\frac{10}{3}})^5 \cdot 1$$
$$= 10 \cdot (e^{-\frac{10}{3}})^3 \cdot (1 - 2(e^{-\frac{10}{3}}) + (e^{-\frac{10}{3}})^2) + 5 \cdot ((e^{-\frac{10}{3}})^4 - (e^{-\frac{10}{3}})^5) + (e^{-\frac{10}{3}})^5$$
$$= 10 \cdot (e^{-\frac{10}{3}})^3 - 15(e^{-\frac{10}{3}})^4 + 6(e^{-\frac{10}{3}})^5$$

4. 어떤 지역에서, 지진이 평균 1주에 2회 발생한다고 한다.

(1) 이 지역에서 앞으로 2주 안에 적어도 3회 지진이 발생할 확률을 구하시오.

지진이 발생한 횟수를 X라하자.

$\underset{(0,1)\,(1주)}{X} \sim Pois(2) \rightarrow \underset{(0,2)}{X} \sim Pois(4)$ 이다. $f_X(x) = \begin{cases} \frac{4^x e^{-4}}{x!}, & R_X = \{0,1,2,\cdots\} \\ 0, & o/w \end{cases}$

$$P[X \geq 3] = \sum_{x=3}^{\infty} \frac{4^x e^{-4}}{x!} = 1 - \sum_{x=0}^{2} \frac{4^x e^{-4}}{x!}$$
$$= 1 - [e^{-4} + 4e^{-4} + 8e^{-4}]$$
$$= 1 - 13e^{-4}$$

(2) 지진이 일어난 후 다음 지진까지의 기간이 적어도 4주가 될 확률을 구하시오

$\underset{(0,1)}{X} \sim Pois(2)$ 이고 T는 다음 첫번째 지진이 일어날때까지의 시간의 길이 라고 하면
$T \sim G(1, \frac{1}{2})$ 이고 이는 $T \sim exp(\frac{1}{2})$ 이 된다.

$$f_T(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x>0 \\ 0, & o/w \end{cases}$$

$$P[T \geq 4] = \int_4^{\infty} 2e^{-2x} = \left[-e^{-2x}\right]_4^{\infty} = e^{-8}$$

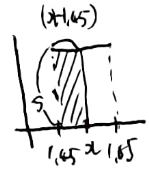
5.1 #5 어느 건전지 제조회사에서 만들어진 1.5볼트 건전지는 실제 1.45볼트에서 1.65볼트 사이에서 균등분포를 이룬다.

(1) 기대되는 전압과 표준편차를 구하라.

건전지의 전압을 X라 하자.
$X \sim U(1.45, 1.65)$ 이다.

$$\therefore \mu = \frac{1.45+1.65}{2} = 1.55, \quad \sigma^2 = \frac{(1.65-1.45)^2}{12} = \frac{(0.2)^2}{12} = \frac{1}{300}$$

(2) 건전지 전압의 분포함수를 구하라.



$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{1.65-1.45} = 5, & 1.45 < x < 1.65 \\ 0, & 0 \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 1.45 \\ 5(x-1.45), & 1.45 < x < 1.65 \\ 1, & x > 1.65 \end{cases}$$

(3) 건전지 전압이 1.5볼트보다 작을 확률을 구하라.

$$P[X \leq 1.5] = F_X(1.5) = 5 \cdot (0.05) = 0.25$$

No : 2　　학과 : 컴퓨터공학과　　학번 : 20171630　　이름 : 남주형

5.1 #5

(4) 20개의 건전지가 들어 있는 상자 안에 1.5볼트보다 전압이 낮은 건전지 수의 평균과 분산을 구하라.

1.5볼트보다 전압이 낮은 건전지 수를 Y라 하자.

$Y \sim B(20, 0.25)$ 이다.

$\therefore \mu = 20\cdot(0.25) = 5$

$\sigma^2 = 20\cdot(0.25)(1-0.25) = 3.75$

(5) (4)에서 1.5볼트보다 낮은 전압을 가진 건전지가 10개 이상 들어 있을 확률을 구하라.

$$P[Y \ge 10] = \sum_{x=10}^{\infty}\binom{20}{x}\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{3}{4}\right)^{20-x} = 1-\sum_{x=0}^{9}\binom{20}{x}\left(\frac{1}{4}\right)^x\left(\frac{3}{4}\right)^{20-x}$$

5.2 #3 약속장소에서 친구를 만나기로 하고 정시에 도착하였으나 친구가 아직 나오지 않았다. 그리고 친구를 만나기 위하여 기다리는 시간은 $\lambda=0.2$인 지수분포에 따른다고 한다.

(1) 친구를 만나기 위한 평균 시간을 구하라.

기다리는 시간을 X라 하면

$X \sim exp\left(\frac{1}{5}\right)$ 이다.

(교재 표현을 따름)

$\therefore \mu = \frac{1}{\lambda} = 5$

(2) 3분이 경과하기 이전에 친구를 만날 확률을 구하라.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}, & x>0 \\ 0, & o/w \end{cases}$$

$$P[X \le 3] = \int_0^3 \frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}dx = \left[-e^{-\frac{x}{5}}\right]_0^3 = 1-e^{-\frac{3}{5}}$$

(3) 10분 이상 기다릴 확률을 구하라.

$$P[X \ge 10] = \int_{10}^{\infty}\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}dx = \left[-e^{-\frac{x}{5}}\right]_{10}^{\infty} = e^{-2}$$

(4) 6분이 경과 했다고 할 때, 추가적으로 더 기다려야 할 시간에 대한 확률 분포를 구하고 모두 합쳐서 10분이상 걸릴 확률을 구하라.

$P[X > x+6 \mid X>6] = P[X>x] = e^{-\frac{x}{5}}$　(∵ 무기억성)

$F(x) = 1-P[X>x] = 1-e^{-\frac{x}{5}}$

$P[X>10 \mid X>6] = P[X>4] = e^{-\frac{4}{5}}$

5.2 #14. 우리나라 동남부 지역은 매년 2건의 비율로 지진이 일어나며, 지진 발생 횟수는 푸아송과정에 따른다고 한다.

지진이 일어나는 횟수를 X라 하자

$\underset{\substack{(0,1) \\ 1년}}{X} \sim Pois(2)$ 이다.

(1) $t=0$ 이후 3번째 지진이 발생할 때까지 걸리는 시간에 대한 확률분포를 구하라.

T를 지진 관측후 세번째 지진이 관측될 때까지 걸리는 시간이라 하자.

$T \sim Ga\left(3, \frac{1}{2}\right)$

$$\therefore f_T(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 e^{-2x}}{\Gamma(3)\cdot\frac{1}{8}} = 4x^2 e^{-2x}, & x>0 \\ 0, & o/w \end{cases}$$

(2) 3번째 지진이 $t=0.5$와 $t=1.5$ 사이에 발생할 확률을 구하라.

$$P[0.5<T<1.5] = \int_{0.5}^{1.5} 4x^2 e^{-2x}dx = \left[-(2x^2+2x+1)e^{-2x}\right]_{0.5}^{1.5}$$

≈ 0.4965

5.3 #9. A와 B 두 회사에서 제조된 전구의 수명(시간)은 각각 $X\sim N(425,25)$, $Y\sim N(420,15)$인 정규분포에 따르고, 이 두 전구의 수명은 서로 독립이라고 한다.

(1) A 회사에서 제조된 전구를 436시간 이상 사용할 확률을 구하라.

$X \sim N(425, 25)$

$$P[X \ge 436] = P\left[\frac{X-425}{5} \ge \frac{436-425}{5}\right] = P[Z \ge 2.2]$$

$= 1-P[Z<2.2]$

(2) 어느 하나를 먼저 사용하다 전구의 수명이 끝나면 곧바로 다른 전구를 사용한다. 이와 같이 해서 860시간 이상 사용할 확률을 구하라.

$W = X+Y \sim N(425+420, 25+15) = N(845, 40)$

$$P[W \ge 860] = P\left[\frac{W-845}{\sqrt{40}} \ge \frac{860-845}{\sqrt{40}}\right] = P\left[Z \ge \frac{3\sqrt{10}}{4}\right]$$

$= 1-P\left[Z<\frac{3\sqrt{10}}{4}\right]$

(3) A회사 전구의 수명과 B회사 전구의 수명 차가 3시간 이하일 확률

$S = X-Y \sim N(5, 40)$

$$P[S \le 3] = P\left[Z \le \frac{3-5}{\sqrt{40}}\right] = P\left[Z \le -\frac{\sqrt{10}}{10}\right] = 1-P\left[Z<\frac{\sqrt{10}}{10}\right]$$

No.3 학과: 컴퓨터공학과 학번: 20171630 이름: 남주형

5.3 #11. $X_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ 이고
X_1과 X_2가 독립일 때, 다음을 구하라.

(1) $Y = pX_1 + (1-p)X_2$의 확률분포

$E[pX_1] = p\mu_1$ $E[(1-p)X_2] = (1-p)\mu_2$
$Var[pX_1] = p^2\sigma_1^2$ $Var[(1-p)X_2] = (1-p)^2\sigma_2^2$

$$m_Y(t) = E[e^{tY}] = E[e^{t(pX_1+(1-p)X_2)}] = E[e^{tpX_1}] \cdot E[e^{t(1-p)X_2}]$$

$$= m_{pX_1}(t) \cdot m_{(1-p)X_2}(t)$$

$$= \exp\left[p\mu_1 t + \frac{1}{2}p^2\sigma_1^2 t^2\right] \cdot \exp\left[(1-p)\mu_2 t + \frac{1}{2}(1-p)^2\sigma_2^2 t^2\right]$$

$$= \exp\left[(p\mu_1 + (1-p)\mu_2)t + \frac{1}{2}(p^2\sigma_1^2 + (1-p)^2\sigma_2^2)t^2\right]$$

$\therefore Y \sim N(p\mu_1 + (1-p)\mu_2,\ p^2\sigma_1^2 + (1-p)^2\sigma_2^2)$

(2) Y의 분산이 최소가 되는 p와 최소 분산

$$\sigma_Y^2 = p^2\sigma_1^2 + (1-p)^2\sigma_2^2 = p^2\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2p\sigma_2^2 + p^2\sigma_2^2$$

$$= p^2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2) - 2p\sigma_2^2 + \sigma_2^2$$

$$= (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\left(p - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^2 + \sigma_2^2 - \frac{\sigma_2^4}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$$

$$= (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)\left(p - \frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^2 + \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$$

$\therefore p = \dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$ 일때, 최솟값 $\sigma_Y^2 = \dfrac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}$ 을 가진다.

5.4 #1. $X \sim \chi^2(12)$에 대하여, 다음을 구하라.

(1) $\mu = E(X) = 12$

(2) $\sigma^2 = Var(X) = 2 \cdot 12 = 24$

(3) $P(X > 5.23) = 0.950$

(4) $P(X < 21.03) = 1 - P(X > 21.03) = 1 - 0.05 = 0.95$

(5) $\chi^2_{0.995}(12) = 3.07$

(6) $\chi^2_{0.005}(12) = 28.30$

5.4 #3 표5 t-분포표를 이용하여 $T \sim t(12)$일때
다음을 구하라.

(1) $t_{0.1}(12) = 1.356$

(2) $t_{0.01}(12) = 2.681$

(3) $P(T \le t_0) = 0.995$를 만족하는 t_0

$P(T \le t_0) = 1 - P(T > t_0) = 0.995$

$\therefore P(T > t_0) = 0.005$

$\therefore t_0 = 3.055$

5.4 #4 표6 F-분포표를 이용하여 $F \sim F(8,6)$일때
다음을 구하라.

(1) $f_{0.01}(8,6) = 8.10$

(2) $f_{0.05}(8,6) = 4.15$

(3) $f_{0.90}(8,6) = \dfrac{1}{f_{0.10}(6,8)} = \dfrac{1}{2.67}$

(4) $f_{0.99}(8,6) = \dfrac{1}{f_{0.01}(6,8)} = \dfrac{1}{6.37}$