1장. 확률

확률의 정의

확률의 기본성질

조건부 확률

확률현상, 확률실험

- 확률현상(random phenomenon) : 불확실성에 의해서 좌우되는 현상
- 확률실험(random experiment) : 결과가 불확실성에 의해 좌우되는 실험이나 조사

Example (확률현상의 예)

(1) 동전이나 주사위를 던질 때 결과가 나타나는 현상
(2) 각 지역에서의 연 강수량의 변동 현상
(3) 수시로 달라지는 주가의 변동 현상
(4) 월 생산품에 포함되는 불량품(수)의 출현 현상

표본공간, 표본점, 사건

(1) 표본공간(sample space ; Ω) : 한 확률실험에서 얻어질 수 있는 가능한 모든 결과의 집합. 표본공간=전공간
(2) 표본점(sample point; ω_i) : 표본공간의 원소 하나
(3) 사건(event)=사상 : 표본공간의 부분집합
(4) 근원사건(elementary event)= 단순사건(simple event) : 표본점 하나하나로 이루어지는 사건

Example

(1) 하나의 동전을 던지고 윗면에 나타나는 상태를 관찰하는 확률실험: (단, Heads(앞면-그림), Tails(뒷면-금액))
표본 공간 : $\Omega = \{H, T\}$
(2) 하나의 주사위를 던지고 윗면에 나타나는 점의 개수를 관찰하는 확률실험:
표본 공간 : $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

사건의 결합(combination of events)

(1) 여사건: E_1^c

(2) 합사건: $E_1 \cup E_2$

(3) 교사건: $E_1 \cap E_2 = E_1 E_2$

(4) 차사건: $E_1 - E_2$

(5) 무한가산합사건: $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i = \{\omega \in \Omega \mid \exists i \in \mathbb{N}, \omega \in E_i\}$

(8) 무한가산교사건: $\bigcap_{i=1}^{\infty} E_i = \{\omega \in \Omega \mid \forall i \in \mathbb{N}, \omega \in E_i\}$

사전확률, 사후확률

- 사전확률: 한 확률실험에서 모든 결과가 같은 가능성을 갖고 일어난다고 하자. 이 실험에서 일어날 수 있는 가능한 모든 결과의 수가 N, 또 한 사건 E를 일어나게 하는 결과의 수가 n 이면, 이때 사건 E가 일어날 확률은 $P(E) = \dfrac{n}{N}$이다.
- 사후확률: 한 확률실험을 반복한 총 횟수를 N 이라 하고, 또 그 중 사건 E를 일어나게 한 실험의 횟수를 n 이라 하면, 이 때 사건 E가 일어날 확률은 $P(E) = \lim\limits_{N\to\infty} \dfrac{n}{N}$이다.

배반사건(mutually exclusive events)

두 사건 E_1과 E_2가 $E_1 \cap E_2 = \emptyset$을 만족할 때 E_1과 E_2는 상호 배반사건이라 한다.

Example

윷놀이는 4 개의 윷가락을 던져서 하는 게임이다. 4 개의 윷가락을 한 번 던졌을 때 상태를 관찰하여 다음과 같이 도, 개, 걸, 윷, 모라 한다. (그림 참고)

- 도 : 하나만 뒤집어진 경우
- 개 : 2개가 뒤집어진 경우
- 걸 : 3개가 뒤집어진 경우
- 윷 : 4개 모두 뒤집어진 경우
- 모 : 모두 뒤집어지지 않은 경우

4 개의 윷가락을 한 번 던졌을 때 도, 개, 걸, 윷, 모가 나올 확률을 각각 구하시오. 단, 1 개의 윷가락이 뒤집어지거나 뒤집어지지 않을 확률은 모두 $\frac{1}{2}$이라 한다.

공리론적 확률

Ω를 확률실험의 표본공간이라 하고, $\mathcal{F}$를 Ω 위에서 정의된 사건들의 '$\sigma-$집합체'라고 할 때, 집합함수 $P : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$가 다음 세 가지 조건을 만족할 때 P를 확률함수(probability function)라 하고, $(\Omega, \mathcal{F}, P)$를 확률공간(probability space)이라 한다.

(A1) $\forall E \in \mathcal{F},\ \ P(E) \geqslant 0$

(A2) 임의의 상호 배반인 $\mathcal{F}$의 가산무한 사건열 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$에 대하여

$$P\left(\dot{\bigcup_{n=1}^{\infty}} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$$

(A3) $P(\Omega) = 1$

$\sigma-$집합체($\sigma-$field), $\sigma-$집합대수($\sigma-$algebra)

Ω를 확률실험의 표본공간이라 하고, $\mathcal{F}$를 Ω의 부분 집합족이라 할 때, 다음 세가지 조건을 만족할 때 $\mathcal{F}$를 Ω 위에서의 $\sigma-$집합체 또는 $\sigma-$집합대수라 한다.

(i) $E \in \mathcal{F} \Rightarrow E^c \in \mathcal{F}$

(ii) 임의의 $\mathcal{F}$의 가산무한 사건열 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$에 대하여 $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{F}$

(iii) $\emptyset \in \mathcal{F}$

Theorem($\sigma-$집합체의 기본성질)

$\mathcal{F}$를 Ω 위에서의 $\sigma-$집합체라 하자.

(1) $\Omega \in \mathcal{F}$

(2) 임의의 $\mathcal{F}$의 가산무한 사건열 $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$에 대하여, $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{F}$

Borel $\sigma-$집합체

$\mathbb{R}$의 부분집합들의 집합족 $\{(-\infty, x] \,|\, x \in \mathbb{R}\}$를 포함하는 $\mathbb{R}$ 위에서의 가장 작은 σ-집합체 $\mathfrak{B}$를 Borel $\sigma-$집합체라고 한다.

- Borel $\sigma-$집합체 $\mathfrak{B}$는 $\mathbb{R}$의 모든 형태의 구간, 즉, 다음과 같은 형태의 구간을 포함한다.

$$\begin{array}{lllll} (-\infty, a], & (-\infty, a), & [a, \infty), & (a, \infty), & (-\infty, \infty) \\ (a, b), & (a, b], & [a, b), & [a, b] & \end{array}$$

여기서,

$$(-\infty, a) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (-\infty, a - \tfrac{1}{n}]$$

Theorem

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$가 확률공간일 때,

(1) 임의의 상호 배반인 $\mathcal{F}$의 유한 사건열 $\{E_1, E_2, \cdots, E_n\}$에 대하여

$$P(E_1 \cup E_2 \cup \cdots \cup E_n) = P\left(\dot{\bigcup_{i=1}^{n}} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i)$$

(2) $\forall E \in \mathcal{F},\ \ P(E^c) = 1 - P(E)$

(3) $\forall E \in \mathcal{F},\ \ 0 \leqslant P(E) \leqslant 1$

(4) $P(\emptyset) = 0$

Theorem(합의 법칙)

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$가 확률공간이면, 임의의 $E_1, \cdots, E_n \in \mathcal{F}$에 대하여,

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) - \sum_{i<j} P(E_i \cap E_j) + \sum_{i<j<k} P(E_i \cap E_j \cap E_k) + \cdots + (-1)^{n+1} P(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n)$$

- $P(E_1 \cup E_2) = P(E_1) + P(E_2) - P(E_1 \cap E_2)$
- $P(E_1 \cup E_2 \cup E_3) = P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) - P(E_1 \cap E_2) - P(E_1 \cap E_3) - P(E_2 \cap E_3) + P(E_1 \cap E_2 \cap E_3)$

Example

한 개의 좋은 주사위를 두 번 던지는 확률실험에서, 첫 번째 결과에서 점의 개수가 2를 넘지 않거나 두 번째 결과에서 점의 개수가 적어도 5가 될 확률을 구하시오.

Solution.

$\Omega = \{(a, b) \,|\, a, b = 1, 2, \cdots, 6\}$
$\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega) = \Omega$의 모든 부분집합의 모임
$P(\{(a, b)\}) = \frac{1}{36} \quad \forall (a, b) \in \Omega$

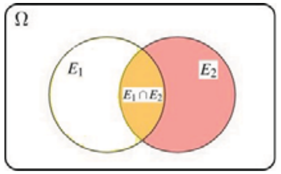
사건 E_1, E_2:

$E_1 =$ 첫 번째 결과에서 점의 개수가 2를 넘지 않을 사건
$E_2 =$ 두 번째 결과에서 점의 개수가 적어도 5가 될 사건

조건부 확률(conditional probability)

확률공간 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$에서 $E_1,\ E_2 \in \mathcal{F}$이고 $P(E_2) > 0$일 때, 사건 E_2가 일어났다는 조건에서 사건 E_1이 일어날 확률을 **사건 E_2에 대한 사건 E_1의 조건부 확률**이라 하며 $P(E_1|E_2)$로 나타내고 다음과 같이 정의한다.

$$P(E_1|E_2) = \frac{P(E_1 \cap E_2)}{P(E_2)} = \frac{P(E_1E_2)}{P(E_2)}$$



Theorem(조건부 확률 정의의 타당성)

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$가 확률 공간이면, $P(B) > 0$인 임의의 사건 $B \in \mathcal{F}$에 대하여, 집합함수 $P(\cdot\ |B)\ :\ \mathcal{F} \to \mathbb{R}$는 확률함수이다. 즉, $(\Omega, \mathcal{F}, P|_B)$는 확률 공간이다.

곱의 법칙

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$가 확률공간이고, $E_1,\ E_2,\ \cdots, E_n\ \in \mathcal{F}$, $P(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n) > 0$ 이면,

$$\begin{aligned}&P(E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_n)\\ &= P(E_1)P(E_2|E_1)\cdots P(E_n|E_1 \cap E_2 \cap \cdots \cap E_{n-1})\end{aligned}$$

특히, $n = 3$이면,

$$P(E_1 \cap E_2 \cap E_3) = P(E_1)P(E_2 \mid E_1)P(E_3 \mid E_1 \cap E_2)$$

Example

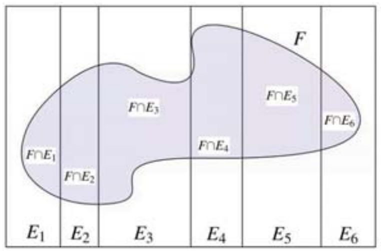
상자 안에 30 개의 전구가 있는데 그 중 5 개는 불량품이다. 3 개를 비복원추출한다고 할 때, 3 개 모두 불량품일 확률을 구하시오.

표본공간의 분할(partition)

확률공간 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$에서 $\mathcal{F}$의 유한 또는 무한가산 사건열 $\{E_i\}_{i\in I}$가 다음 조건을 만족할 때, $\{E_i\}_{i\in I}$를 **표본공간 Ω의 분할**이라고 한다.

(i) 임의의 $i, j \in I$에 대하여 $i \neq j$이면 $E_i \cap E_j = \emptyset$이다.

(ii) $\bigcup_{i\in I} E_i = \Omega$



Theorem

확률공간 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$에서 $\{E_i\}_{i\in I}$는 표본공간 Ω의 분할이고, $\forall i \in I,\ P(E_i) > 0$ 라고 하자.

- **전확률의 법칙**(rule of total probability)

$$\forall F \in \mathcal{F}, \quad P(F) = \sum_{i\in I} P(E_i)P(F|E_i)$$

- **베이즈의 법칙**(Bayes' rule)
  $F \in \mathcal{F}$이고 $P(F) > 0$이면,

$$P(E_j|F) = \frac{P(E_j)P(F|E_j)}{\sum_{i\in I} P(E_i)P(F|E_i)}$$

Example

두 개의 항아리가 있다. 첫째 항아리에는 노란 구슬 2 개와 빨간 구슬 4 개가 들어있고 둘째 항아리에는 노란 구슬 3 개와 빨간 구슬 5 개가 들어있다. 둘째 항아리에서 하나의 구슬을 꺼내어 첫째 항아리에 넣고 첫째 항아리에서 하나의 구슬을 꺼낼 때 노란 구슬이 나올 확률을 구하시오.

Example

어떤 공장의 생산품은 a, b, c 세 생산설비를 통해서 만들어진다. 이 때 a에서는 50%, b에서는 25%, c에서도 25%를 만들고 있고, 불량률이 a가 2%, b가 2%, c가 4%라 한다. 이 공장에서 만들어진 생산품을 임의로 하나 선택했을 때, 이것이 불량품일 확률을 구하고, 이 불량품이 a 생산설비를 통해서 만들어졌을 확률을 구하시오.

두 사건의 독립

확률공간 $(\Omega, \mathcal{F}, P)$에서 두 사건 $E_1, E_2 \in \mathcal{F}$가

$$P(E_1 \cap E_2) = P(E_1) \cdot P(E_2)$$

를 만족할 때, E_1, E_2는 확률적으로 독립, 또는 간단히 독립이라 하고, 독립이 아닌 사건을 서로 종속이라고 한다.

Theorem(독립 사건에 관한 성질)

(1) 두 사건 E_1과 E_2는 독립이고 $P(E_2) > 0$ 이면, $P(E_1|E_2) = P(E_1)$이다.

(2) 두 사건 E_1과 E_2는 독립이면, E_1과 E_2^c도 독립이다.

Example

두 개의 동전을 던질 때 앞면의 수가 0 개 또는 1 개인 사건을 A라 하고 앞면과 뒷면이 각각 1 개인 사건을 B라 하자. 사건 A와 B가 독립인지 조사하시오.

Example

동전을 세 번 던지는 실험에서, 사건 E_1, E_2, E_3를 다음과 같이 정의하자.

E_1 = 첫 번째가 앞면일 사건,

E_2 = 두 번째가 앞면일 사건,

E_3 = 두 번만 연속해서 앞면일 사건

사건 E_1, E_2, E_3 중 2 개가 서로 독립인지 확인하시오.

독립사건의 일반적인 정의

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$가 확률공간이고 $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ 라 할 때, $\mathcal{C}$의 임의의 유한 개의 서로 다른 사건 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 에 대하여

$$P\left[\bigcap_{i=1}^{n} E_i\right] = \prod_{i=1}^{n} P(E_i) = P(E_1)P(E_2)\cdots P(E_n)$$

이면 $\mathcal{C}$ 안의 사건들은 (확률적으로)독립이라고 한다.

Example

동전을 두 번 던지는 실험에서, 사건 A, B, C가 독립인지 확인하시오. 단,

A = 첫 번째가 앞면일 사건,

B = 두 번째가 앞면일 사건,

C = 첫 번째와 두 번째가 같은 면일 사건