8장. 가설 검정의 기본 개념

가설 검정의 기본 원리

정규분포에 관한 여러 검정

가설검정(hypothesis testing)

모집단의 분포에 대한 가설을 세우고 모집단으로부터 추출된 표본을 토대로 모집단에 대한 가설의 채택(accept)이나 기각(reject)을 판정하는 과정 또는 통계적 기법

귀무가설, 대립가설(null/alternative hypothesis)

(1) 귀무가설 (H_0) : 기각을 전제로 세우는 가설

(2) 대립가설 (H_1) : 귀무가설이 기각될 때 상대적으로 채택되는 가설

- 단측가설, 양측가설

(3) 유의성검정 : 귀무가설에 대한 반증의 강도를 제공하는 과정

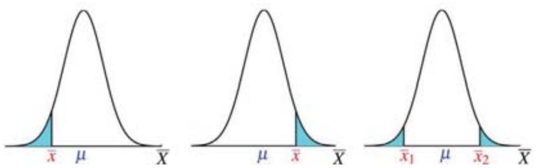
유의확률(significance probability), 꼬리확률, p-값(p-value)

귀무가설(H_0) 하에서 실제 관측된 값보다 대립가설(H_1)을 지지하는 방향으로 검정통계량이 치우쳐서 나타날 확률을 유의확률 또는 p-값이라고 한다. 즉,

- 귀무가설을 기각할 수 있는 최소한의 확률
- 관측값을 통해 구한 통계량이 분포이론에 의해 계산해 보았을 때 우리가 가진 증거(관측값)보다 귀무가설을 반대하는 증거가 나올 확률

Remark

유의확률이 작을수록 H_0에 대한 반증이 강함을 의미한다. 즉, p-값이 작을수록 대립가설 H_1이 참인 증거가 강함을 의미한다.



Example

어떤 공장에서 기존 공법으로 생산하는 포장용 종이상자의 중량은 평균이 $500g$으로 알려져있다. 새로운 공법으로 생산되는 제품 10개의 표본평균을 통해 새로운 공법이 제품을 경량화 한다고 할 수 있는지를 확인하려고 한다. 새로운 공법으로 생산되는 제품 10개의 표본평균이 $\bar{x} = 478g, 485g, 496g$ 일 때 유의확률을 구하시오. 단, 기존 공법으로 생산하는 포장용 종이상자의 중량은 정규분포를 따르고 표준편차는 $\sigma = 30g$으로 가정한다.

유의수준(level of significance), 기각역(critical region)

(1) 귀무가설(H_0)에 대한 반증의 강도에 대한 기준값을 유의수준이라 한다.

(2) 유의확률이 유의수준 α 이하이면, 조사결과가 유의수준 α에서 통계적으로 유의하다고 한다. (귀무가설이 기각되고 대립가설이 유의하다는 의미)

(3) 유의수준 α가 지정된 경우, 귀무가설 H_0에 대한 반증으로 통계적 유의성이 있는 검정통계량의 영역을 기각역이라고 한다.

가설검정(유의성검정) 절차

$\boxed{\text{Step 1}}$ 귀무가설 H_0와 대립가설 H_1을 설정

$\boxed{\text{Step 2}}$ 유의수준 α를 지정

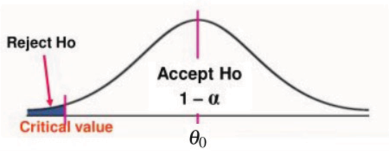
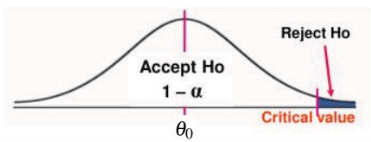
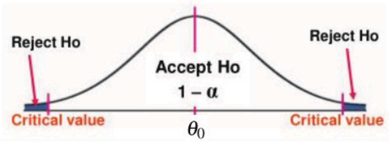
$\boxed{\text{Step 3}}$ 자료로부터 검정통계량의 관측값 계산

$\boxed{\text{Step 4}}$ 기각역을 구함(유의확률 계산)

$\boxed{\text{Step 5}}$ 검정통계량과 기각역을 이용하여 통계적 유의성을 판단

- 검정통계량의 값이 기각역에 속하면 귀무가설 H_0를 기각
- 검정통계량의 값이 기각역에 속하지 않으면 귀무가설 H_0를 채택

기각역

	H_0, H_1	기각역
좌단측검정	$H_0 : \theta = \theta_0$ $H_1 : \theta < \theta_0$	
우단측검정	$H_0 : \theta = \theta_0$ $H_1 : \theta > \theta_0$	
양측검정	$H_0 : \theta = \theta_0$ $H_1 : \theta \neq \theta_0$	

검정의 오류

(1) 제 1종 오류 : 귀무가설 H_0가 참일 때 H_0가 기각(즉, 대립가설 H_1이 채택)되는 오류

$$\alpha = P\Big[H_0 : \text{기각} \Big| H_0 : \text{참}\Big] = P\Big[H_1 : \text{ 채택} \Big| H_0 : \text{참}\Big] = \text{유의수준}$$

(2) 제 2종 오류 : 대립가설 H_1이 참(즉, 귀무가설 H_0가 거짓)일 때 H_1이 기각되는 오류

$$\beta = P\Big[H_1 : \text{ 기각} \Big| H_1 : \text{참}\Big] = P\Big[H_0 : \text{채택} \Big| H_1 : \text{ 참}\Big]$$

	귀무가설 H_0 : 참	대립가설 H_1 : 참
H_0 : 채택	옳은 결정 $(1-\alpha)$	제 2종 오류 (β)
H_0 : 기각	제 1종 오류 (α)	옳은 결정 $(1-\beta)$

모평균 μ에 관한 검정 : σ^2이 알려진 경우

$X_1, X_2, \cdots, X_n$이 분산이 σ^2인 정규모집단에서 추출된 확률표본이면,

$$Z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

는 μ에 관한 검정 통계량이고 유의수준이 α로 주어졌을 때,

(1) $\begin{cases} H_0 : & \mu \geqslant \mu_0 \\ H_1 : & \mu < \mu_0 \end{cases}$ 인 경우, $Z \leqslant -z_\alpha$이면 H_0 기각

(2) $\begin{cases} H_0 : & \mu \leqslant \mu_0 \\ H_1 : & \mu > \mu_0 \end{cases}$ 인 경우, $Z \geqslant z_\alpha$이면 H_0 기각

(3) $\begin{cases} H_0 : & \mu = \mu_0 \\ H_1 : & \mu \neq \mu_0 \end{cases}$ 인 경우, $|Z| \geqslant z_{\alpha/2}$이면 H_0 기각

Example

모표준편차가 $\sigma = 4.1$인 정규모집단에 대하여 귀무가설 $H_0 : \mu = 30$에 대한 주장을 확인하기 위하여 크기 36인 표본을 임의로 추출하여 조사한 결과 $\overline{x} = 31.1$을 얻었다.

(1) 기각역을 구하여 유의수준 $\alpha = 0.05$에서 양측검정하시오.

(2) p-값을 구하여 유의수준 $\alpha = 0.05$에서 양측검정하시오.

Example

어느 병원에서 실시하는 비만 환자들을 대상으로 한 체중감량 치료 프로그램을 통해 체중감량 정도를 측정한다. 병원 담당자는 이 프로그램에 참여하면 적어도 평균 $10kg$ 초과의 체중감량 효과가 있다고 주장한다. 실제 참가한 10명의 환자를 대상으로 감량된 체중을 기록하였더니 아래와 같다.

8.9,	11.9,	11.2,	10.8,	9.8
12.7,	9.4,	10.3,	8.1,	12.2

병원 측의 주장이 맞는지 유의수준 5%에서 검정하시오.(단, 체중감량은 $\sigma = 3kg$인 정규분포를 따르는 것으로 알려져 있다.)

모평균 μ에 관한 검정 : σ^2이 미지인 경우

$X_1, X_2, \cdots, X_n$이 정규모집단에서 추출된 확률표본이면

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

는 μ에 관한 검정 통계량이고 유의수준이 α로 주어졌을 때,

(1) $\begin{cases} H_0 : & \mu \geqslant \mu_0 \\ H_1 : & \mu < \mu_0 \end{cases}$ 인 경우, $T \leqslant -t_\alpha(n-1)$이면 H_0 기각

(2) $\begin{cases} H_0 : & \mu \leqslant \mu_0 \\ H_1 : & \mu > \mu_0 \end{cases}$ 인 경우, $T \geqslant t_\alpha(n-1)$이면 H_0 기각

(3) $\begin{cases} H_0 : & \mu = \mu_0 \\ H_1 : & \mu \neq \mu_0 \end{cases}$ 인 경우, $|T| \geqslant t_{\alpha/2}(n-1)$이면 H_0 기각

Example

정규모집단에 대하여 귀무가설 $H_0 : \mu \leqslant 10.5$라는 주장에 대한 타당성을 조사하기 위하여 크기 20인 표본을 임의로 추출하여 조사한 결과 $\bar{x} = 11.9,\ s^2 = 3.5^2$을 얻었다.

(1) 기각역을 구하여 유의수준 $\alpha = 0.05$에서 검정하시오.

(2) p-값을 구하여 유의수준 $\alpha = 0.05$에서 검정하시오.

모비율 p에 관한 검정

$X_1, X_2, \cdots, X_n$이 $X \sim \mathrm{Ber}(p)$로부터의 확률표본이면,

$$Z = \frac{\widehat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)/n}}$$

는 p에 관한 검정 통계량이고 유의수준이 α로 주어졌을 때,

(1) $\begin{cases} H_0 : & p \geqslant p_0 \\ H_1 : & p < p_0 \end{cases}$ 인 경우, $Z \leqslant -z_\alpha$이면 H_0 기각

(2) $\begin{cases} H_0 : & p \leqslant p_0 \\ H_1 : & p > p_0 \end{cases}$ 인 경우, $Z \geqslant z_\alpha$이면 H_0 기각

(3) $\begin{cases} H_0 : & p = p_0 \\ H_1 : & p \neq p_0 \end{cases}$ 인 경우, $|Z| \geqslant z_{\alpha/2}$이면 H_0 기각

Example

어떤 종합병원에서 출생한 여자아이와 남자아이의 비는 같다고 한다. 남자아이와 여자아이의 출생률에 차이가 있는지를 알아보기 위하여 300명의 신생아를 임의로 뽑아 조사한 결과 163명이 여자아이였다. 남자아이와 여자아이의 출생률은 다르다고 할 수 있는지를 유의수준 5%에서 검정하시오.

모분산 σ^2에 관한 검정

$X_1, X_2, \cdots, X_n$을 $X \sim N(\mu, \sigma^2)$으로부터의 확률표본이면

$$V = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$$

는 σ^2에 관한 검정 통계량이고 유의수준이 α로 주어졌을 때,

(1) $\begin{cases} H_0 : & \sigma^2 \geqslant \sigma_0^2 \\ H_1 : & \sigma^2 < \sigma_0^2 \end{cases}$ 인 경우, $V \leqslant \chi^2_{1-\alpha}(n-1)$이면 H_0 기각

(2) $\begin{cases} H_0 : & \sigma^2 \leqslant \sigma_0^2 \\ H_1 : & \sigma^2 > \sigma_0^2 \end{cases}$ 인 경우, $V \geqslant \chi^2_{\alpha}(n-1)$이면 H_0 기각

(3) $\begin{cases} H_0 : & \sigma^2 = \sigma_0^2 \\ H_1 : & \sigma^2 \neq \sigma_0^2 \end{cases}$ 인 경우, $V \leqslant \chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)$ 또는 $V \geqslant \chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)$이면 H_0 기각

Example

강철봉은 강도가 중요한 요소인데 어떤 제조법으로 만든 18개의 강철봉 강도의 측정값 표본분산은 $s^2 = 55$이다. 측정값이 정규모집단에서 추출된 임의표본이라 가정할 때 대립가설 $\sigma^2 > 50$ 에 대해서 귀무가설 $\sigma^2 = 50$을 유의수준 5%에서 검정하시오. 단, 강철봉의 강도는 정규분포를 따른다고 한다.

$\mu_1 - \mu_2$에 관한 검정 : σ_1^2, σ_2^2이 알려진 경우

$X_1, X_2, \cdots, X_m$이 정규모집단 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$에서 추출된 확률표본이고 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$이 정규모집단 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$에서 추출된 확률표본이며, $X_1, X_2, \cdots, X_m, Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 은 서로 독립이라 하자.

$$Z = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - d}{\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}}$$

는 $\mu_1 - \mu_2$에 관한 검정통계량이고 유의수준이 α로 주어졌을 때,

(1) $\begin{cases} H_0: & \mu_1 - \mu_2 \geqslant d \\ H_1: & \mu_1 - \mu_2 < d \end{cases}$ 인 경우, $Z \leqslant -z_\alpha$이면 H_0 기각

(2) $\begin{cases} H_0: & \mu_1 - \mu_2 \leqslant d \\ H_1: & \mu_1 - \mu_2 > d \end{cases}$ 인 경우, $Z \geqslant z_\alpha$이면 H_0 기각

(3) $\begin{cases} H_0: & \mu_1 - \mu_2 = d \\ H_1: & \mu_1 - \mu_2 \neq d \end{cases}$ 인 경우, $|Z| \geqslant z_{\alpha/2}$이면 H_0 기각

Example

두 가지 담배 A와 B의 니코틴 함량을 비교하고 있다. 담배 A, B의 니코틴 함량은 근사적으로 정규분포를 따르며, 분산은 각각 $\sigma_A^2 = 3$, $\sigma_B^2 = 4$임이 알려져 있다. 두 가지 담배에 들어 있는 니코틴 함량에 차이가 있는가를 알아보기 위해서 A와 B에서 각각 10개와 15개의 표본을 추출하고 추출된 담배의 니코틴 함량을 알아보았더니 니코틴 평균함량은 각각 $\overline{x} = 16.5$와 $\overline{y} = 15.5$이었다. 두 가지 담배의 니코틴 함량은 차이가 있는지를 유의수준 5%에서 검정하시오.

$\mu_1 - \mu_2$에 관한 검정 : $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$이고 미지인 경우

$X_1, X_2, \cdots, X_m$이 정규모집단 $N(\mu_1, \sigma^2)$에서 추출된 확률표본이고 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$이 정규모집단 $N(\mu_2, \sigma^2)$에서 추출된 확률표본이며, $X_1, X_2, \cdots, X_m, Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 은 서로 독립이라 하자.

$$T = \frac{(\overline{X} - \overline{Y}) - d}{S_p \cdot \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \qquad \text{where} \quad s_p^2 = \frac{(m-1)s_X^2 + (n-1)s_Y^2}{m+n-2}$$

는 $\mu_1 - \mu_2$에 관한 검정 통계량이고 유의수준이 α로 주어졌을 때,

(1) $\begin{cases} H_0: & \mu_1 - \mu_2 \geqslant d \\ H_1: & \mu_1 - \mu_2 < d \end{cases}$, $T \leqslant -t_\alpha(m+n-2)$이면 H_0 기각

(2) $\begin{cases} H_0: & \mu_1 - \mu_2 \leqslant d \\ H_1: & \mu_1 - \mu_2 > d \end{cases}$, $T \geqslant t_\alpha(m+n-2)$이면 H_0 기각

(3) $\begin{cases} H_0: & \mu_1 - \mu_2 = d \\ H_1: & \mu_1 - \mu_2 \neq d \end{cases}$, $|T| \geqslant t_{\alpha/2}(m+n-2)$이면 H_0 기각

Example

어떤 산부인과 병원에서 신생아의 남아와 여아의 체중에 차이가 있는지를 알아보기 위하여 다음과 같은 자료를 얻었다. 남아와 여아의 체중은 다르다고 할 수 있는지를 유의수준 5%에서 검정하시오. 단, 신생아의 남아와 여아의 체중은 정규분포를 따르고 분산은 같다고 한다.

	표본의 크기	표본평균	표본표준편차
남아	$n_1 = 50$	$\overline{x_1} = 3.40(kg)$	$s_1 = 0.5(kg)$
여아	$n_2 = 50$	$\overline{x_2} = 3.25(kg)$	$s_2 = 0.6(kg)$

모분산 비 σ_1^2/σ_2^2에 관한 검정

$X_1, X_2, \cdots, X_m$이 정규모집단 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$에서 추출된 확률표본이고 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$이 정규모집단 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$에서 추출된 확률표본이며, $X_1, X_2, \cdots, X_m$, $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 은 서로 독립이라 하자.

$$F = \frac{S_X^2}{S_Y^2}$$

은 두 모분산 비 σ_1^2/σ_2^2 에 관한 검정통계량이고 유의수준이 α로 주어졌을 때,

$$\begin{cases} H_0: & \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} = 1 \\ H_1: & \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \neq 1 \end{cases}$$

인 경우, $F > F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)$ 또는 $F < F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)$이면 H_0를 기각한다.

Example

인천과 서울 지역의 고등학교 3학년 학생들의 6월 수능모의평가 수리영역의 점수를 비교하기 위해서 인천과 서울 지역의 고등학교 3학년 학생들을 각각 80명, 90명씩을 임의추출하여 모의평가를 시행한 결과 다음과 같은 결과를 얻었다.

	표본의 크기	평균	표준편차
인천	80	66.4	8.2
서울	90	71.2	7.6

인천과 서울 전체 고등학교 3학년 학생들의 수능모의평가 수리영역 점수의 분산이 같은지를 유의수준 5%에서 검정하시오.

대응비교(paired comparison)

두 표본을 이용하여 두 모평균의 유의적인 차를 생각할 때, 두 표본이 독립이 아니고 또 모분산도 서로 같다는 가정을 할 수 없는 경우가 자주 있다. 특히, 의도적(계획적)이거나 아니거나 한 쪽 표본의 값(처리 1)들이 다른 쪽의 표본값(처리 2)들과 일대일로 대응이 이루어질 수 있는 경우를 생각할 수 있다. 이때 각 쌍으로 얻은 관측값의 차를 이용하여 두 모평균을 비교하는 방법을 대응비교라 한다.

처리 1과 처리 2의 값을 각각 X, Y라 할 때, 모집단 $D = X - Y$를 평균이 μ_D이고 분산이 σ_d^2인 정규분포를 따른다고 가정하자. 즉,

$$D \sim N(\mu_D, \sigma_D^2)$$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$과 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$을 각각 모집단 X와 Y로부터 추출된 확률표본이라하자. 그리고 $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \cdots, (X_n, Y_n)$ 은 서로 독립이라 한다. 그러면

$$D_1 = X_1 - Y_1,\ D_2 = X_2 - Y_2,\ \cdots,\ D_n = X_n - Y_n$$

은 모집단 D로부터 추출된 크기 n의 확률표본이 되고 $D_1, D_2, \cdots, D_n$의 표본평균과 표본분산은 각각 다음과 같다.

$$\overline{D} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i, \qquad S_D^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(D_i - \overline{D})^2$$

$E[X] = \mu_1,\ E[Y] = \mu_2$라 하면

$$E[\overline{D}] = E[D] = E[X - Y] = E[X] - E[Y] = \mu_1 - \mu_2$$

이므로 $\mu_D = \mu_1 - \mu_2$이고 Theorem에 의해 다음이 성립한다.

$$T = \frac{\overline{D} - (\mu_1 - \mu_2)}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}} \sim t(n-1)$$

- $\mu_1 - \mu_2$의 $100 \times (1-\alpha)\%$ 신뢰구간 :

$$\left(\overline{D} - t_{\alpha/2}(n-1) \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}},\quad \overline{D} + t_{\alpha/2}(n-1) \cdot \frac{S_D}{\sqrt{n}}\right)$$

- $T = \dfrac{\overline{D} - \delta_0}{\frac{S_D}{\sqrt{n}}}$는 $\mu_1 - \mu_2$에 관한 검정 통계량이고, 유의수준이 α 일 때,

(1) $\begin{cases} H_0 : & \mu_1 - \mu_2 \geqslant \delta_0 \\ H_1 : & \mu_1 - \mu_2 < \delta_0 \end{cases}$, $T \leqslant -t_\alpha(n-1)$이면 H_0 기각

(2) $\begin{cases} H_0 : & \mu_1 - \mu_2 \leqslant \delta_0 \\ H_1 : & \mu_1 - \mu_2 > \delta_0 \end{cases}$, $T \geqslant t_\alpha(n-1)$이면 H_0 기각

(3) $\begin{cases} H_0 : & \mu_1 - \mu_2 = \delta_0 \\ H_1 : & \mu_1 - \mu_2 \neq \delta_0 \end{cases}$, $|T| \geqslant t_{\alpha/2}(n-1)$이면 H_0 기각

Example

어떤 약품회사에서 고혈압 환자를 위한 약을 개발하였다. 이 약이 고혈압 환자에게 효과가 있는지를 알아보기 위해서 15명에게 임상실험을 하였다. 약을 투여하기 전의 혈압(x)과 6달간 약을 투여한 후의 혈압(y)을 측정하고 이들의 혈압의 차이를 조사한 결과 다음 표와 같았다.(단, 약을 투여하기 이전의 혈압과 이후의 혈압은 각각 정규분포를 따른다고 가정한다)

(1) 약의 투여에 따른 혈압의 차이에 대한 95% 신뢰구간을 구하시오.

(2) 이 약이 혈압감소에 효과적이라고 할 수 있는지를 유의수준 5%에서 검정하시오.

사람번호	투약 전(x)	투약 후(y)	차이($x-y$)
1	95	93	2
2	105	97	8
3	97	87	10
4	101	95	6
5	101	83	18
6	101	91	10
7	97	93	4
8	103	77	26
9	107	89	18
10	89	97	−8
11	99	99	0
12	117	85	32
13	99	99	0
14	93	97	−4
15	109	99	10