

No. 1

학과: 컴퓨터 공학과

학번: 20171630

이름: 남주형

1. (연습문제 3.2-10) X 와 Y 의 결합 확률밀도 함수가 다음과 같다.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{21}{4}x^2y, & x^2 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

(1) $X=1$ 일 때, Y 의 조건부 확률밀도 함수를 구하시오.

$$\begin{aligned} x^2 \leq y \leq 1 \\ \therefore -1 \leq x \leq 1 \end{aligned} \rightarrow \begin{array}{c} \text{Graph of } y=x^2 \\ \text{Shaded region: } -1 \leq x \leq 1, x^2 \leq y \leq 1 \end{array}$$

 X 의 주변 확률밀도 함수를 구해보자.

※ 주변 확률밀도함수

 $f_{X,Y}$ 를 연속확률밀도함수 (X,Y) 의 결합 확률밀도함수라고 하면

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy = \int_{x^2}^1 \frac{21}{4}x^2y dy$$

$$= \left[\frac{21}{8}x^2y^2 \right]_{x^2}^1 = \frac{21}{8}x^2(1-x^4), \quad -1 \leq x \leq 1$$

$$\therefore f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{21}{4}x^2y}{\frac{21}{8}x^2(1-x^4)} = \frac{2y}{1-x^4}, \quad x^2 \leq y \leq 1$$

※ 조건부 확률분포

 $X=x$ 에 대한 Y 의 조건부 확률밀도(질량)함수

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}, \quad f_X(x) \neq 0$$

(2) $X=\frac{1}{2}$ 일 때, $\frac{1}{3} \leq Y \leq \frac{2}{3}$ 일 조건부 확률을 구하라.

$$f_{Y|X}(y|\frac{1}{2}) = \frac{f_{X,Y}(\frac{1}{2},y)}{f_X(\frac{1}{2})} = \frac{\frac{21}{4}(\frac{1}{4})y}{\frac{21}{8}(\frac{1}{4})(1-\frac{1}{16})} = \frac{32}{15}y, \quad \frac{1}{4} \leq y \leq 1, \quad \text{확률변수 } X \text{와 } Y \text{에 대하여 } Y=x \text{일 때, } a < x \leq b \text{ 일 조건부 확률은 다음과 같다.}$$

$$P[a < X \leq b | Y=x] = \int_a^b f_{Y|X}(y|x) dy$$

 (X,Y) 가 연속인 경우

$$\begin{aligned} \therefore P[\frac{1}{3} \leq Y \leq \frac{2}{3} | X=\frac{1}{2}] &= \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} f_{Y|X}(y|\frac{1}{2}) dy \\ &= \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{32}{15}y dy \\ &= \left[\frac{16}{15}y^2 \right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} = \frac{16}{15} \left(\frac{4}{9} - \frac{1}{9} \right) \\ &= \frac{16}{45} \end{aligned}$$