

No.1

학과: 컴퓨터공학과

학번: 20171630

이름: 남주형

1. (연습문제 3.2-10) X 와 Y 의 결합 확률밀도 함수가 다음과 같다.

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{21}{4}x^2y, & x^2 \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

(1) $X=x$ 일 때, Y 의 조건부 확률밀도 함수를 구하시오.

$$x^2 \leq y \leq 1 \rightarrow \begin{array}{c} \text{graph of } y=x^2 \text{ and } y=1 \\ \text{shaded region between them} \end{array}$$

X 의 주변 확률밀도 함수를 구해보자.

* 주변 확률밀도 함수

$f_{X,Y}$ 를 연속 확률 벡터 (X,Y) 의 결합 확률밀도 함수라 하면

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy$$

* 조건부 확률 분포

$X=x$ 에 대한 Y 의 조건부 확률밀도(조건부) 함수

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}, f_X(x) \neq 0$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) dy = \int_{x^2}^1 \frac{21}{4}x^2y dy$$

$$= \left[\frac{21}{8}x^2y^2 \right]_{x^2}^1 = \frac{21}{8}x^2(1-x^4), -1 \leq x \leq 1$$

$$\therefore f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)} = \frac{\frac{21}{4}x^2y}{\frac{21}{8}x^2(1-x^4)} = \frac{2y}{1-x^4}, x^2 \leq y \leq 1$$

(2) $X=\frac{1}{2}$ 일 때, $\frac{1}{3} \leq Y \leq \frac{2}{3}$ 일 조건부 확률을 구하라.

* 조건부 확률

확률변수 X 와 Y 에 대하여 $Y=y$ 일 때,

$a < X \leq b$ 일 조건부 확률은 다음과 같다.

$$P[a < X \leq b | Y=y] = \int_a^b f_{X|Y}(x|y) dx$$

(X,Y) 가 연속인 경우

$$\therefore P\left[\frac{1}{3} \leq Y \leq \frac{2}{3} | X=\frac{1}{2}\right] = \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} f_{Y|X}(y|\frac{1}{2}) dy$$

$$= \int_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} \frac{32}{15}y dy$$

$$= \left[\frac{16}{15}y^2 \right]_{\frac{1}{3}}^{\frac{2}{3}} = \frac{16}{15} \left(\frac{4}{9} - \frac{1}{9} \right)$$

$$= \frac{16}{45}$$