MAT 2410 (02) 응용 수학I (HW7)

No: 1 학과: 컴퓨터공학과 학번: 20171630 이름: 남주형

1. 어떤 공장에서 생산되는 전전지의 평균수명은 1000시간, 분산이 2500시간이다. 만일 100개의 전전지를 임의 표본으로 추출했을 때 표본평균이 990시간 이상 1005시간 미만일 확률을 구하시오.

전전지의 수명을 X라하자. $\longrightarrow$ $\bar{X} = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} X_i$

X의 평균 : 1000

X의 분산 : 2500

$\bar{X} \approx N\left(1000, \frac{2500}{100}\right)$

$X' \sim N\left(1000, \frac{2500}{100}\right)$

$P[990 \le \bar{x} < 1005] \doteqdot P[990 \le X' < 1005]$

$= P\left[\frac{990-1000}{5} \le \frac{X'-1000}{5} \le \frac{1005-1000}{5}\right]$

$= P[-2 \le Z \le 1]$

2. 도시 인구의 60%가 복지시설에 기부금을 내는 제안에 호의적이라고 한다. 임의로 뽑은 150명 중 이 제안에 호의적인 사람들의 비율이 0.56보다 작을 확률을 구하시오

복지시설에 기부금을 내는 제안에 호의적인 사람의 수를 X라하자.

$X \sim Ber(0.6) \xrightarrow{n=150} \bar{X} = \frac{1}{150}\sum_{i=1}^{150} X_i$

$\mu = 0.6$

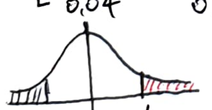
$\sigma^2 = 0.6 \times 0.4$

$\hat{p} = \bar{X} \sim N\left(0.6, \frac{0.6\times0.4}{150}\right)$

$X' \sim N\left(0.6, \frac{0.6\times0.4}{150}\right)$

$P[\hat{p} < 0.56] \doteqdot P[X' < 0.56] = P\left[\frac{X'-0.6}{0.04} < \frac{0.56-0.6}{0.04}\right]$

$= P[Z < -1] = P[Z > 1]$



3. 어떤 공장에서 엔진의 휘발유 소비량은 평균 16인 정규분포를 따른다고 하자. 16대 엔진을 시험가동 했을 때 휘발유 소비량의 표본표준편차가 4였다. 이때 표본평균 $\bar{X}$가 13.053 보다 크지 않을 확률을 구하시오.

휘발유 소비량을 X라하자.

$X \sim N(16, \sigma^2) \xrightarrow{n=16}$ $S=4$ $T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} = \frac{\bar{X}-16}{4/\sqrt{16}} = \bar{X}-16 \sim t(15)$

$P[\bar{X} \le 13.053] = P[\bar{X}-16 \le 13.053-16] = P[T \le -2.947]$

$= P[T \ge 2.947]$

$= 0.005$

4. 분산이 각각 $\sigma_1^2=8$, $\sigma_2^2=6$인 두 정규모집단 X, Y에서 크기 m=5, n=7의 각 확률표본의 표본분산을 각각 S_X^2, S_Y^2이라 하자. 이 때, $P[S_X^2 > c \cdot S_Y^2] = 0.05$를 만족하는 상수 c를 구하시오.

$F = \frac{S_X^2/\sigma_1^2}{S_Y^2/\sigma_2^2} = \frac{S_X^2/8}{S_Y^2/6} \sim F(4,6)$

$P\left[\frac{S_X^2}{S_Y^2} > c\right] = P\left[F > c \times \frac{6}{8}\right] = 0.05$

$c \times \frac{3}{4} = 4.53 \quad \therefore c = 4.53 \times \frac{4}{3}$

5. 평균이 같고 분산이 각각 $\sigma_1^2=81$, $\sigma_2^2=64$인 두 정규모집단 X, Y에서 크기 m=25, n=16의 각 확률표본의 표본평균을 각각 $\bar{X}, \bar{Y}$라 할 때, 확률 $P[|\bar{X}-\bar{Y}| \le 5]$을 구하시오.

$(\bar{X}-\bar{Y}) \sim N\left(\mu_1-\mu_2, \frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}\right)$

$(\bar{X}-\bar{Y}) \sim N\left(0, \left(\frac{81}{25}+\frac{64}{16}\right) = \frac{181}{25}\right)$

$P[|\bar{X}-\bar{Y}| \le 5] = P[-5 \le \bar{X}-\bar{Y} \le 5]$

$= P\left[\frac{-5-0}{181/25} \le Z \le \frac{5-0}{181/25}\right]$

$= P\left[-\frac{125}{181} \le Z \le \frac{125}{181}\right]$

6. 교재 (공학인증을 위한 확률과 통계) 연습문제 7.2 #11 A교수의 과거 경험에 따르면 학생들의 통계학점수는 평균 77점 그리고 표준편차 15점이라고 한다. 현재 이 교수는 36명과 64명인 두 반을 강의 하고있다.

(1) 두 반의 평균성적이 72점과 82점사이일 확률을 각각 구하라.

36명인 반의 평균성적을 $\bar{X}$

64명인 반의 평균성적을 $\bar{Y}$ 라하자.

$\bar{X} \approx N\left(77, \left(\frac{15}{6}\right)^2\right) = N\left(77, \left(\frac{5}{2}\right)^2\right)$

$\bar{Y} \approx N\left(77, \left(\frac{15}{8}\right)^2\right)$

$P[72 \le \bar{X} \le 82] = P\left[\frac{72-77}{(5/2)} \le \frac{\bar{X}-77}{(5/2)} \le \frac{82-77}{(5/2)}\right]$

$\doteqdot P[-2 \le Z \le 2] = 2P[0 \le Z \le 2] = 2[P[Z \le 2] - 0.5]$

$P[72 \le \bar{Y} \le 82] = P\left[\frac{72-77}{(15/8)} \le \frac{\bar{Y}-77}{(15/8)} \le \frac{82-77}{(15/8)}\right]$

$\doteqdot P\left[-\frac{8}{3} \le Z \le \frac{8}{3}\right] = 2P\left[0 \le Z \le \frac{8}{3}\right] = 2\left[P[Z \le \frac{8}{3}] - 0.5\right]$

No: 2 학과: 컴퓨터공학과 학번: 20171630 이름: 남주형

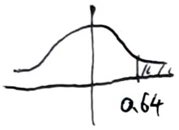
(2) 36명인 반의 평균성적이 64명인 반보다 2점이상 더 클 근사확률을 구하라.

$$P[\bar{X} \geq \bar{Y}+2] = P[\bar{X}-\bar{Y} \geq 2]$$

$$\bar{X}-\bar{Y} \approx N\left(0, \left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(\frac{15}{8}\right)^2\right) = N\left(0, \left(\frac{25}{8}\right)^2\right)$$

$$P[\bar{X}-\bar{Y} \geq 2] \fallingdotseq P\left[Z \geq \frac{2}{(25/8)}\right] = P[Z \geq 0.64]$$

$$= 1 - P[Z \leq 0.64]$$



7.3 #4. 두 정규모집단 A와 B의 모분산은 동일하고, 평균은 각각 $\mu_X = 700$, $\mu_Y = 680$ 이라 한다. 이때 두 모집단으로부터 표본을 추출하여 다음과 같은 결과를 얻었다. 이때 단위는 mg이다.

A표본: $n=17$, $\bar{x}=704$, $S_X = 39.25$

B표본: $m=10$, $\bar{y}=675$, $S_Y = 43.75$

(1) 합동표본분산의 관측값 S_p^2을 구하라.

$$S_p^2 = \frac{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}{m+n-2} = \frac{16\cdot(39.25)^2 + 9\cdot(43.75)^2}{25}$$

(2) 두 표본 평균의 차 $T = \bar{X}-\bar{Y}$에 대한 확률분포를 구하라.

$$\frac{(\bar{X}-\bar{Y}) - (700-680)}{S_p\sqrt{\frac{1}{17}+\frac{1}{10}}} = \frac{T-20}{S_p\sqrt{\frac{1}{17}+\frac{1}{10}}} \sim t(25)$$

(S_p는 (1)에서 구한 값을 대입)

(3) $P(T \geq t_0) = 0.05$인 t_0을 구하라.

$$P[T \geq t_0] = P\left[\frac{T-20}{S_p\sqrt{\frac{1}{17}+\frac{1}{10}}} \geq \frac{t_0-20}{S_p\sqrt{\frac{1}{17}+\frac{1}{10}}}\right] = 0.05$$

$$t_{0.05}(25) = 1.708$$

$$\therefore \frac{t_0-20}{S_p\sqrt{\frac{1}{17}+\frac{1}{10}}} = 1.708$$

$$\therefore t_0 = 20 + (1.708)\cdot\left(S_p\sqrt{\frac{1}{17}+\frac{1}{10}}\right)$$

7.4 #8. 2005년 통계조사에 따르면 25세 이상 남성과 여성 중 대졸이상은 각각 37.8%와 25.4%로 조사되었다. 남성 500명과 여성 450명을 표본조사한 결과, 남성과 여성의 비율의 차가 11.5% 이하일 확률을 구하라.

대졸이상의 남자의 비율을 $p_1 = 0.378$, 여자의 비율은 $p_2 = 0.254$ 이다.

$$\hat{p}_1 \approx N\left(0.378, \frac{(0.378)\cdot(0.622)}{500}\right)$$

$$\hat{p}_2 \approx N\left(0.254, \frac{(0.254)\cdot(0.746)}{450}\right)$$

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \approx N\left(0.378-0.254, \frac{(0.378)\cdot(0.622)}{500} + \frac{(0.254)\cdot(0.746)}{450}\right)$$

$$\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \approx N\left(0.124, \frac{(0.378)\cdot(0.622)}{500} + \frac{(0.254)(0.746)}{450}\right)$$

$$P[\hat{p}_1 - \hat{p}_2 \leq 0.115] = P\left[Z \leq \frac{0.115-0.124}{\sqrt{\frac{(0.378)(0.622)}{500} + \frac{(0.254)(0.746)}{450}}}\right]$$