MAT 2410(02) 응용수학 I (HW4)

No: 1

컴퓨터공학과/2017630/남주형

1. 연속 확률변수 X의 확률밀도함수가

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x^2}{3}, & -2<x<1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

이라 하자. 확률변수 $Y = X^2$의 확률밀도함수를 구하고 이를 이용하여 $E[Y]$를 구하시오.

$$F_Y(y) = P[Y \le y] = P[X^2 \le y] = \begin{cases} P(\phi)=0, & y<0 \\ P[-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}], & y \ge 0 \end{cases}$$

$y \ge 0$이면,

$$P[-\sqrt{y} \le X \le \sqrt{y}] = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f_X(x)\,dx$$

$$= \begin{cases} \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{x^2}{3}dx = \frac{2}{9}y\sqrt{y} & 0 \le y \le 1 \\ \int_{-\sqrt{y}}^{1} \frac{x^2}{3}dx = \frac{1}{9}(1+y\sqrt{y}) & 1<y<4 \\ \int_{-2}^{1} \frac{x^2}{3}dx = 1 & y \ge 4 \end{cases}$$

이다. 따라서 Y의 분포함수와 확률밀도함수는 다음과 같다.

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y<0 \\ \frac{2}{9}y\sqrt{y}, & 0 \le y \le 1 \\ \frac{1}{9}(1+y\sqrt{y}), & 1<y<4 \\ 1, & y \ge 4 \end{cases}, \quad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3}\sqrt{y}, & 0 \le y \le 1 \\ \frac{1}{6}\sqrt{y}, & 1<y<4 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

Y의 확률밀도함수 $f_Y(y)$를 이용하여 평균 $E[Y]$를 구하면

$$E[Y] = \int_{-\infty}^{\infty} y f_Y(y)\,dy = \int_0^1 y \cdot \frac{1}{3}\sqrt{y}\,dy + \int_1^4 y \cdot \frac{1}{6}\sqrt{y}\,dy$$

$$= \left[\frac{2}{15}y^{\frac{5}{2}}\right]_0^1 + \left[\frac{1}{15}y^{\frac{5}{2}}\right]_1^4$$

$$= \frac{2}{15} + \frac{31}{15} = \frac{33}{15} = \frac{11}{5}$$

2. 확률변수 X의 확률밀도 함수가 다음과 같이 주어져있다.

$$f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \quad x \in (-\infty, \infty)$$

(1) 확률변수 X의 적률생성함수를 구하시오.

$$m_X(t) = E[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\frac{1}{2}e^{-|x|}\,dx$$

i) $x \ge 0$

$$m_X(t) = E[e^{tX}] = \int_0^{\infty} e^{tx}\frac{1}{2}e^{-x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{(t-1)x}\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2(t-1)}e^{x(t-1)}\right]_0^{\infty}$$

$$= -\frac{1}{2(t-1)}, \quad t<1$$

ii) $x<0$

$$m_X(t) = E[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{0} e^{tx}\frac{1}{2}e^{x}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{(t+1)x}\,dx$$

$$= \left[\frac{1}{2(t+1)}e^{x(t+1)}\right]_{-\infty}^{0}$$

$$= \frac{1}{2(t+1)}, \quad t>-1$$

$\therefore$

$$m_X(t) = E[e^{tX}] = \int_0^{\infty} e^{tx}\frac{1}{2}e^{-x}dx + \int_{-\infty}^{0} e^{tx}\frac{1}{2}e^{x}dx$$

$$= -\frac{1}{2(t-1)} + \frac{1}{2(t+1)}$$

$$= -\frac{1}{t^2-1}, \quad (-1<t<1)$$

(2) 적률 생성함수를 이용하여 X의 평균과 분산을 구하시오

$$E[X] = m'_X(0) = \frac{+2t}{(t^2-1)^2} = 0$$

$$Var[X] = E[X^2] - E[X]^2 = m''_X(0) - (m'_X(0))^2 = -\frac{6t^2+2}{(t^2-1)^3} - 0$$

$$= 2$$

No: 2

컴퓨터공학과 / 20171630 / 남주형

3. 교재 (공학인증을 위한 확률과 통계) 연습문제

3.1

#7 X와 Y의 결합질량함수가 다음과 같다.

$$f(x,y)=\frac{x+y}{110},\ x=1,2,3,4,\ y=1,2,3,4,5$$

(1) X와 Y의 주변질량함수를 구하여라.

$$f_X(x)=\sum_{y=1}^{5}\frac{x+y}{110}=\frac{x+3}{22},\ x=1,2,3,4 \qquad f_Y(y)=\sum_{x=1}^{4}\frac{x+y}{110}=\frac{2y+5}{55},\ y=1,2,3,4,5$$

(2) E(X), E(Y)를 구하라.

$$E(X)=\sum_{1}^{4}\frac{x(x+3)}{22}=\frac{30}{11},\quad E(Y)=\sum_{1}^{5}\frac{y(2y+5)}{55}=\frac{37}{11}$$

(3) $P(X<Y)$

$$\begin{pmatrix} (1,2) & (2,3) & (3,4) & (4,5) \\ (1,3) & (2,4) & (3,5) & \\ (1,4) & (2,5) & & \\ (1,5) & & & \end{pmatrix}$$

$$P(X<Y)=\sum_{y=2}^{5}f(1,y)+\sum_{y=3}^{5}f(2,y)+\sum_{y=4}^{5}f(3,y)+f(4,5)$$

$$=\sum_{y=2}^{5}\frac{1+y}{110}+\sum_{y=3}^{5}\frac{2+y}{110}+\sum_{y=4}^{5}\frac{3+y}{110}+\frac{4+5}{110}$$

$$=\frac{18}{110}+\frac{18}{110}+\frac{15}{110}+\frac{9}{110}=\frac{60}{110}=\frac{6}{11}$$

(4) $P(Y=2X)$

$$\begin{pmatrix} (1,2) \\ (2,4) \end{pmatrix}$$

$$P(Y=2X)=f(1,2)+f(2,4)=\frac{3}{110}+\frac{6}{110}=\frac{9}{110}$$

(5) $P(X+Y=5)$

$$\begin{pmatrix} (1,4) \\ (2,3) \\ (3,2) \\ (4,1) \end{pmatrix}$$

$$P(X+Y=5)=f(1,4)+f(2,3)+f(3,2)+f(4,1)=\frac{5}{110}+\frac{5}{110}+\frac{5}{110}+\frac{5}{110}=\frac{20}{110}=\frac{2}{11}$$

(6) $P(3\le X+Y\le 5)$

(1,2) (2,1) (3,1) (4,1)
(1,3) (2,2) (3,2)
(1,4) (2,3)

$$P(3\le X+Y\le 5)=f(1,2)+f(1,3)+f(1,4)+f(2,1)+f(2,2)+f(2,3)+f(3,1)+f(3,2)+f(4,1)$$

$$=\frac{3+4+5+3+4+5+4+5+5}{110}=\frac{38}{110}=\frac{19}{55}$$

#21 두 확률변수 X와 Y의 결합밀도함수가 다음과 같다.

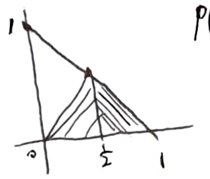
$$f(x,y)=\begin{cases}24xy, & 0<y<1-x,\ 0<x<1\\ 0, & \text{다른 곳에서}\end{cases}$$

(1) X와 Y의 주변밀도 함수를 구하라.

$$f_X(x)=\int_0^{1-x}24xy\,dy=\left[12xy^2\right]_0^{1-x}=12x(1-x)^2,\ 0<x<1$$

$$f_Y(y)=\int_0^{1-y}24xy\,dx=\left[12x^2y\right]_0^{1-y}=12y(1-y)^2,\ 0<y<1$$

(2) $P(X>Y)$를 구하라.



$$P(X>Y)=\int_0^{\frac{1}{2}}\int_0^{x}24xy\,dy\,dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\int_0^{1-x}24xy\,dy\,dx=\frac{3}{16}+\frac{5}{16}=\frac{1}{2}$$

3.2

#1 확률변수 X와 Y가 다음 결합 확률질량함수를 갖는다고 한다.

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{2x+y}{12}, & (x,y)=(0,1),(0,2),(1,2),(1,3)\\ 0, & \text{다른 곳에서}\end{cases}$$

(1) $P(X=1\mid Y=2)$를 구하라.

$$P(X=1\mid Y=2)=\frac{f(1,2)}{f_Y(2)}=\frac{f(1,2)}{f(0,2)+f(1,2)}=\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}$$

(2) Y=2일 때, X의 조건부 확률함수를 구하라.

$$f(x\mid y=2)=\frac{f(x,2)}{f_Y(2)}=\frac{\frac{2x+2}{12}}{\frac{1}{2}}=\frac{x+1}{3},\ x=0,1$$

#11 두 확률변수 X와 Y가 결합 밀도함수

~~$f(x,y)=\begin{cases}k(e^{x+y}+e^{x-y}), & 0\le x\le 2,\ 0\le y\le 2\\ 0, & \text{다른 곳에서}\end{cases}$~~

$$f(x,y)=\begin{cases}24xy, & 0<y<1-x,\ 0<x<1\\ 0, & \text{다른 곳에서}\end{cases}$$

을 갖는다고 하자. 이때 $P(Y<X\mid X=\frac{1}{3})$을 구하라.

$$f_X(x)=\int_0^{1-x}24xy\,dy=12x(1-x)^2,\ 0<x<1$$

$$f_X\left(\tfrac{1}{3}\right)=\frac{16}{9}$$

$$P(Y\mid X=\tfrac{1}{3})=\frac{f(\frac{1}{3},y)}{f_X(\frac{1}{3})}=\frac{8y}{\frac{16}{9}}=\frac{9}{2}y,\ 0<y<\frac{2}{3}$$

$$P(Y<X\mid X=\tfrac{1}{3})=\int_0^{\frac{1}{3}}\frac{9}{2}y\,dy=\left[\frac{9}{4}y^2\right]_0^{\frac{1}{3}}=\frac{1}{4}$$

No.3

컴퓨터공학과 / 20171630 / 남주형

#15 X와 Y의 결합확률밀도함수가 다음과 같다.

$$f(x,y) = \begin{cases} k(x^2-2)y, & 1 \le x \le 4,\ 0 \le y \le 4 \\ 0, & \text{다른 곳에서} \end{cases}$$

(1) 상수 k를 구하라.

$$\int_1^4\int_0^4 f(x,y)\,dy\,dx = \int_1^4\int_0^4 k(x^2-2)y\,dy\,dx$$
$$= \int_1^4 8k(x^2-2)\,dx$$
$$= 120k = 1$$
$$\therefore k = \frac{1}{120}$$

(2) X와 Y의 주변확률밀도함수가 다음과 같다.

$$f_X(x) = \int_0^4 \frac{1}{120}(x^2-2)y\,dy = \frac{1}{15}(x^2-2), \quad 1 \le x \le 4$$
$$f_Y(y) = \int_1^4 \frac{1}{120}(x^2-2)y\,dx = \frac{1}{8}y, \quad 0 \le y \le 4$$

(3) X와 Y는 독립인지 보여라.

$$f(x,y) = \frac{1}{120}(x^2-2)y = \frac{1}{15}(x^2-2)\cdot\frac{1}{8}y = f_X(x)\cdot f_Y(y)$$
$$(1 \le x \le 4,\ 0 \le y \le 4)$$
$$f(x,y) = f_X(x)\cdot f_Y(y)$$
∴ 독립이다.

(4) Y=3일 때, X의 조건부 확률밀도함수를 구하여라

$$f(x|Y=3) = \frac{f(x,3)}{f_Y(3)} = \frac{\frac{1}{120}(x^2-2)\cdot 3}{\frac{1}{8}\cdot 3} = \frac{1}{15}(x^2-2)$$

3.3

#2. 확률변수 X와 Y가 다음 결합확률질량함수를 갖는다고 한다.

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & (x,y) = (0,1),(1,0),(2,1) \\ 0, & \text{다른곳에서} \end{cases}$$

(1) X와 Y의 독립성을 조사하라

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & x = 0,1,2 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases} \qquad f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{3} & y = 0 \\ \frac{2}{3} & y = 1 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

$$f_X(0)\cdot f_Y(1) = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} \ne \frac{1}{3} = f(0,1)$$
∴ 독립이 아니다.

(2) X와 Y의 공분산을 구하라.

$$E(X) = 0 + \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$
$$E(Y) = 0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$
$$E(XY) = 0 + 0 + \frac{2}{3} = \frac{2}{3}$$
$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)\cdot E(Y) = \frac{2}{3} - 1\cdot\frac{2}{3} = 0$$

#4 연속확률변수 X와 Y의 결합밀도함수가 다음과 같다.

$$f(x,y) = \frac{3}{16}, \quad x^2 \le y \le 4, \quad 0 \le x \le 2$$

(1) X와 Y의 평균과 표준편차를 구하라.

$$f_X(x) = \int_{x^2}^4 \frac{3}{16}\,dy = \frac{3}{16}(4-x^2), \quad 0 \le x \le 2$$
$$f_Y(y) = \int_0^{\sqrt{y}} \frac{3}{16}\,dx = \frac{3}{16}\sqrt{y}, \quad 0 \le y \le 4$$

$$E(X) = \int_0^2 x\cdot\frac{3}{16}(4-x^2)\,dx = \frac{3}{4}$$
$$E(Y) = \int_0^4 y\cdot\frac{3}{16}\sqrt{y}\,dy = \frac{12}{5}$$
$$E(X^2) = \int_0^2 x^2\cdot\frac{3}{16}(4-x^2)\,dx = \frac{4}{5}$$
$$E(Y^2) = \int_0^4 y^2\frac{3}{16}\sqrt{y}\,dy = \frac{48}{7}$$

$$Var(X) = \frac{4}{5} - \frac{3}{16} = \frac{19}{80}$$
$$Var(Y) = \frac{48}{7} - \frac{144}{25} = \frac{192}{175}$$

$$\sigma_X = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\frac{19}{80}} = \frac{\sqrt{95}}{20}$$
$$\sigma_Y = \sqrt{Var(Y)} = \sqrt{\frac{192}{175}} = \frac{8\sqrt{21}}{35}$$

(2) X와 Y의 공분산을 구하라.

$$E(XY) = \int_0^2\int_{x^2}^4 \frac{3}{16}xy\,dy\,dx = \int_0^2 \frac{3}{32}x(16-x^4)\,dx = 2$$

$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)\cdot E(Y)$$
$$= 2 - \frac{3}{4}\cdot\frac{12}{5} = \frac{1}{5}$$

(3) X와 Y의 상관계수를 구하라.

$$\rho = \frac{Cov(X,Y)}{\sigma_X\sigma_Y} = \frac{\frac{1}{5}}{\frac{\sqrt{95}}{20}\cdot\frac{8\sqrt{21}}{35}} = \frac{\sqrt{1995}}{114}$$