MAT2410(02) 응용 수학 I (HW5)

No: 1 학과: 컴퓨터공학과 학번: 20171630 이름: 남주형

1) 다음 확률변수의 적률생성 함수를 구하시오.

(1) $X \sim B(n,p)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}, & x \in R_X = \{0,1,2,\cdots,n\} \\ 0 & o/w \end{cases}$$

$$m_X(t) = E[e^{tX}] = \sum_{x\in R} e^{tx} f_X(x) = \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} \binom{n}{x} (pe^t)^x (1-p)^{n-x}$$

$$= (pe^t + (1-p))^n$$

(2) $X \sim Ge(p)$

$$f_X(x) = \begin{cases} (1-p)^{x-1} \cdot p, & x \in R_X = \{1,2,3\cdots\} \\ 0 & o/w \end{cases}$$

$$m_X(t) = E[e^{tX}] = \sum_{x\in R} e^{tx} f_X(x) = \sum_{x=1}^{\infty} e^{tx} \cdot (1-p)^{x-1} \cdot p$$

$$= \frac{p}{1-p} \sum_{x=1}^{\infty} ((1-p)\cdot e^t)^x = \frac{p}{1-p} \cdot \frac{(1-p)e^t}{1-(1-p)e^t}$$

$$= \frac{p \cdot e^t}{1-(1-p)e^t} \quad \left(\begin{array}{l} 1-(1-p)e^t > 0 \\ \Leftrightarrow (1-p)e^t < 1 \end{array}\right)$$

(3) $X \sim Pois(m)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{m^x e^{-m}}{x!}, & x \in R_X = \{0,1,2,\cdots\} \\ 0, & o/w \end{cases}$$

$$m_X(t) = E[e^{tX}] = \sum_{x\in R} e^{tx} f_X(x) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{m^x e^{-m}}{x!}$$

$$= e^{-m} \sum_{x=0}^{\infty} \frac{(me^t)^x}{x!} = e^{-m} \cdot e^{me^t} = e^{m(e^t-1)}$$

2. 어떤 프린터기의 출력물에서는 오자가 평균적으로 100m당 1개 관찰된다고 한다. 그러나 이 구간에서 오자가 2개이상 발견되는 경우는 거의 없다고 한다. 중복되지 않은 출력의 구간에 나타나는 오자의 수는 확률적으로 서로 독립이라고 가정한다.

⇔ 오자의개수를 X 라고하자. 이 X는 100m당 평균 1개가 관찰된다.

∴ 푸아송분포를 따른다.

∴ $X_{(0,100)} \sim Pois(1)$

(1) 이 프린터의 출력물 300m에서 발견되는 오자가 4개이상일 확률

$X_{(0,300)} \sim Pois(3)$ $f_X(x) = \begin{cases} \frac{3^x e^{-3}}{x!}, & x \in R_X = \{0,1,2,\cdots\} \\ 0, & o/w \end{cases}$

$$P[X \geq 4] = \sum_{x=4}^{\infty} \frac{3^x e^{-3}}{x!} = 1 - \sum_{x=0}^{3} \frac{3^x e^{-3}}{x!} = 1 - \left(e^{-3} + 3e^{-3} + \frac{9e^{-3}}{2} + \frac{9e^{-3}}{2}\right)$$

$$= 1 - 13e^{-3}$$

(2) 프린터 출력물 300m 길이의 서로 다른 10개 구간에서 오자를 관찰하였을 때, 4개 이상의 오자가 발견되는 구간이 10개의 구간중 많아야 2구간이 될 확률을 구하시오.

⇒ 4개 이상의 오자가 발견되는 구간의 횟수를 X 라하자

이 확률변수 X는 이항분포를 따른다.

∴ $X \sim B(10, 1-13e^{-3})$ ∵ p는 (1) 에서 구하였다.

$$f_X(x) = \begin{cases} \binom{10}{x} (1-13e^{-3})^x (13e^{-3})^{n-x}, & x \in R_X = \{0,1,2,\cdots 10\} \\ 0, & o/w \end{cases}$$

$$P[X \leq 2] = f_X(0) + f_X(1) + f_X(2)$$

$$= {}_{10}C_0 \cdot (1-13e^{-3})^0 (13e^{-3})^{10}$$
$$+ {}_{10}C_1 \cdot (1-13e^{-3})^1 (13e^{-3})^9$$
$$+ {}_{10}C_2 \cdot (1-13e^{-3})^2 (13e^{-3})^8$$

$$= 1 \cdot 1 \cdot 13^{10} e^{-30}$$
$$+ 10 \cdot (1-13e^{-3}) \cdot (13^9 e^{-27})$$
$$+ 45 \cdot (1 - 2\cdot 13e^{-3} + 13^2 e^{-6}) \cdot (13^8 e^{-24})$$

$$= 13^{10} e^{-30}$$
$$+ 10 \cdot 13^9 e^{-27} - 10 \cdot 13^{10} e^{-30}$$
$$+ 45 \cdot 13^8 e^{-24} - 90 \cdot 13^9 \cdot e^{-27} + 45 \cdot 13^{10} e^{-30}$$

$$= 45 \cdot 13^8 e^{-24} - 80 \cdot 13^9 \cdot e^{-27} + 36 \cdot 13^{10} e^{-30}$$

3. 교재 연습문제

4.1#3 X는 2와 11사이의 정수들에 대하여 이산균등분포를 따른다고 한다. $X \sim U_{\{2,3,\cdots 11\}}$

(1) X의 확률질량함수를 구하라.

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & x \in R_X = \{2,3,\cdots 11\} \\ 0, & o/w \end{cases}$$

(2) Y=X-1의 확률질량함수를 구하라.

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & y \in R_X = \{1,2,\cdots 10\} \\ 0, & o/w \end{cases}$$

(3) Y=X-1의 평균과 분산을 구하라.

$$E[Y] = \sum_{y\in R_X} y f_Y(y) = \sum_{y=1}^{10} y \frac{1}{10} = 55 \cdot \frac{1}{10} = 5.5$$

$$E[Y^2] = \sum_{y\in R_X} y^2 f_Y(y) = \frac{1}{10} \sum_{y=1}^{10} y^2 = 38.5$$

$$Var[Y] = E[Y^2] - (E[Y])^2 = 38.5 - (5.5)^2 = 8.25$$

(4) X의 평균과 분산을 구하라.

$E(X) = E(Y+1) = E(Y)+1 = 5.5+1 = 6.5$

$Var(X) = Var(Y+1) = Var(Y) = 8.25$

4.3 #5 형광등의 수명이 800시간 이상일 확률은 0.8이라 한다. 이러한 형광등 5개에 대하여 다음을 구하라.

$X \sim B(5, 0.8)$ $f_X(x) = \begin{cases} \binom{5}{x}(0.8)^x(1-0.8)^{n-x}, & x=0,1,\dots,5 \\ 0, & o/w \end{cases}$

(1) 수명이 800시간 이상인 형광등의 평균 개수

$E(X) = n \cdot p = 5 \cdot 0.8 = 4$

(2) 정확히 3개의 형광등이 800시간 이상 지속할 확률

$P[X=3] = f_X(3) = {}_5C_3 (0.8)^3 (0.2)^2 = 0.2048$

(3) 4개 이상의 형광등이 800시간 이상 지속할 확률

$P[X \geq 4] = f_X(4) + f_X(5) = {}_5C_4 (0.8)^4 (0.2)^1 + {}_5C_5 (0.8)^5 (0.2)^0$

$= 0.73728$

4.4 #11 컴퓨터 시뮬레이션을 통하여 0에서 9까지의 숫자를 무작위로 선정하며 각 숫자가 선정될 가능성은 동일하다고 한다. 이때 다음을 구하라.

~~$X \sim NB($~~

(1) 처음으로 숫자 0이 나올 때까지 시뮬레이션을 반복한 횟수에 관한 확률분포

$X \sim G\left(\frac{1}{10}\right)$

$f_X(x) = \begin{cases} \left(1-\frac{1}{10}\right)^{x-1} \cdot \left(\frac{1}{10}\right), & x \in R_X = \{1,2,3,\dots\} \\ 0, & o/w \end{cases}$

(2) (1)의 확률분포에 대한 평균 μ와 분산 σ^2

$\mu = E[X] = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{10}} = 10$

$\sigma^2 = Var[X] = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1-\frac{1}{10}}{\left(\frac{1}{10}\right)^2} = \frac{\frac{9}{10}}{\left(\frac{1}{10}\right)^2} = 90$

(3) 시뮬레이션 10번을 실시해서 비로서 4번째 0이 나올 확률

$X \sim NB\left(4, \frac{1}{10}\right)$ $f_X(x) = \begin{cases} \binom{x-1}{4-1}\left(\frac{1}{10}\right)^4\left(1-\frac{1}{10}\right)^{x-4}, & x \in R_X = \{4,5,\dots\} \\ 0, & o/w \end{cases}$

$P[X=10] = {}_9C_3\left(\frac{1}{10}\right)^4\left(\frac{9}{10}\right)^6$

(4) 4번째 0을 얻기 위하여 시뮬레이션을 반복한 평균횟수

$E[X] = \frac{r}{p} = \frac{4}{\frac{1}{10}} = 40$

4.5 #10 1분동안에 계수기를 통과한 방사능 물질의 수가 $\lambda=3$인 푸아송과정에 따른다고 한다.

$X_{(0,1)} \sim Pois(3)$

$f_X(x) = \begin{cases} \frac{3^x e^{-3}}{x!}, & x \in R_X = \{0,1,2,\dots\} \\ 0, & o/w \end{cases}$

(1) 1분 동안에 정확히 2개의 방사능 물질이 계수기를 통과할 확률을 구하라.

$P[X=2] = f_X(2) = \frac{9e^{-3}}{2}$

(2) 1분 동안에 5개 이상의 방사능 물질이 계수기를 통과할 확률을 구하라.

$P[X \geq 5] = \sum_{x=5}^{\infty} f_X(x) = 1 - \sum_{x=0}^{4} f_X(x)$

$= 1 - \left(e^{-3} + 3e^{-3} + \frac{9e^{-3}}{2} + \frac{9e^{-3}}{2} + \frac{27e^{-3}}{8}\right)$

$= 1 - \frac{131}{8}e^{-3}$