7장. 추정의 기본 개념

점추정

구간추정 : 신뢰구간

모평균 차의 추정

통계적 추론(statistical inference)

모집단으로부터 표본을 추출하여 자료를 얻고 이 자료를 이용하여 모집단의 미지의 값을 추측하거나 결정하는 과정을 통계적 추론이라 한다. 통계적추론에는 추정과 가설검정이 있다.

(1) 추정(estimation)
- 모집단에서 추출된 표본의 데이터를 이용하여 모집단의 어떤 미지의 값을 추측하는 과정

   (a) 점추정(point estimation) - 모수를 하나의 수치로 추정

   (b) 구간추정(interval estimation) - 모수가 포함되리라고 기대하는 범위를 추정

(2) 가설검정(hypothesis testing)
- 모집단에서 추출된 표본을 이용하여 모집단에 대한 가설을 세우고 이 가설의 채택이나 기각을 결정하는 과정

통계량과 추정량

θ는 모수이고 $X_1, X_2, \cdots, X_n$을 모집단 $f(x;\theta)$로부터 추출된 표본이라 하자.

(1) 모수 θ를 포함하지 않는 $(X_1, X_2, \cdots, X_n)$의 함수 $T = T(X_1, X_2, \cdots, X_n)$를 통계량(statistic)이라고 한다.

(2) 통계량 $\widehat{\theta} = \widehat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$을 모수 θ의 추정량(estimator)이라 하고, $\widehat{\theta}(x_1, x_2, \cdots, x_n)$을 θ의 추정값(estimate)이라 한다.

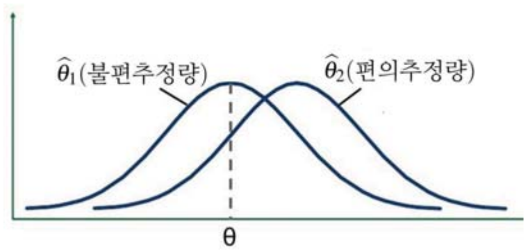
Remark
추정량의 성질로 불편성(비편향성), 유효성, 일치성, 충분성등이 있다. (의미있는 점추정량의 기준)

불편성=비편향성(unbiasedness)

θ는 모수이고 $X_1, X_2, \cdots, X_n$을 모집단 $f(x;\theta)$로부터 추출된 표본이며, $\widehat{\theta} = \widehat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$는 θ의 추정량이라 하자.

(1) $E[\widehat{\theta}] = \theta$이면 $\widehat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$을 θ의 불편추정량(unbiased estimator)이라고 한다.

(2) 불편추정량이 아닌 추정량을 편의추정량=치우친 추정량 (biased estimator)이라고 한다.



Example

모평균이 μ인 모집단으로부터 추출된 임의표본을 X_1, X_2, X_3이라 할 때, 다음 추정량의 불편성(unbiasedness)을 조사하시오.

$$(1)\quad \widehat{\mu}_1 = \frac{X_1 + X_2 + X_3}{3}$$

$$(2)\quad \widehat{\mu}_2 = \frac{2X_1 + X_2 + 2X_3}{5}$$

$$(3)\quad \widehat{\mu}_3 = \frac{2X_1 + X_2 + 3X_3}{4}$$

$E[\hat{\mu}_1] = E\left[\frac{x_1+x_2+x_3}{3}\right] = \frac{1}{3}\left[E[X_1]+E[X_2]+E[X_3]\right] = \frac{1}{3}\cdot 3\mu = \mu$

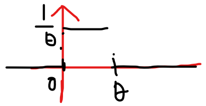
$E[\hat{\mu}_2] = \frac{1}{5}\cdot 5\mu = \mu$ → 불편 추정량

$E[\hat{\mu}_3] = \frac{1}{4}\cdot 6\mu = \frac{3}{2}\mu$ ← 편의 추정 량

Example

X를 $(0, \theta)$에서 정의되는 연속균등분포의 모집단이라 하자. 즉,

$$f_X(x;\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\theta}, & 0 < x < \theta \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$



$E[X] = \frac{\theta}{2}$

$X_1, X_2, \cdots, X_n$을 X에서 추출된 확률표본이라 할 때, 다음 추정량의 불편성(unbiasedness)을 조사하시오.
(단, $X_{(n)}$은 주어진 확률표본의 n번째 순서통계량이다.)

$$(1)\quad \widehat{\theta}_1 = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad (2)\quad \widehat{\theta}_2 = \frac{n+1}{n}X_{(n)}$$

(1) → $E[\overline{X}] = E[X] = \frac{\theta}{2} \neq \theta$ ∴ 편의추정량

(2) → 강의참고(16분) ∴ 불편 추정량

Theorem

모평균이 μ, 모분산이 σ^2인 모집단으로부터 추출된 확률표본을 $X_1, X_2, \cdots, X_n$이라 하자.

(1) $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$는 μ의 불편추정량이다.

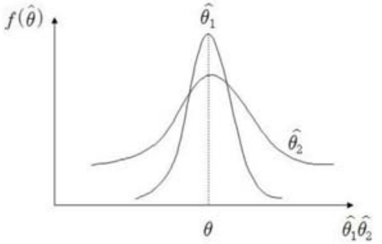
(2) $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$은 σ^2의 불편추정량이다.

유효성(최소분산 불편추정량)

모수 θ에 대한 두 불편추정량을 $\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2$라 하고 각각의 분산을 $\mathrm{Var}[\widehat{\theta}_1], \mathrm{Var}[\widehat{\theta}_2]$이라 하자.

(1) $\mathrm{Var}[\widehat{\theta}_1] < \mathrm{Var}[\widehat{\theta}_2]$이면 추정량 $\widehat{\theta}_1$은 $\widehat{\theta}_2$ 보다 더 유효한 추정량(more efficient estimator)이라 한다.

(2) $\widehat{\theta}_e$이 불편추정량이고 모든 불편추정량 $\widehat{\theta}$에 대하여 $\mathrm{Var}[\widehat{\theta}_e] \leqslant \mathrm{Var}[\widehat{\theta}]$ 이면, $\widehat{\theta}_e$을 θ의 최소분산 불편추정량이라고 한다.



일치추정량(consistent estimator)

θ는 모수이고 $X_1, X_2, \cdots, X_n$을 모집단 $f(x;\theta)$로부터 추출된 확률표본이라 하자. $\widehat{\theta} = \widehat{\theta_n} = \widehat{\theta}(X_1, \cdots, X_n)$이 θ의 추정량이고

$$\widehat{\theta_n} \xrightarrow{P} \theta, \qquad \text{즉,}$$

$$\forall \epsilon > 0, \ \lim_{n\to\infty} P\left[\left|\widehat{\theta}_n - \theta\right| < \epsilon\right] = 1 \quad \text{or} \quad \lim_{n\to\infty} P\left[\left|\widehat{\theta}_n - \theta\right| \geqslant \epsilon\right] = 0, \quad \text{즉,}$$

$$\forall \epsilon > 0, \ \forall 0 < \delta < 1, \ \exists n_0 \in \mathbb{N},$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, \ n > n_0 \to P\left[\left|\widehat{\theta}_n - \theta\right| < \epsilon\right] > 1 - \delta$$

를 만족할 때, $\widehat{\theta} = \widehat{\theta}_n$을 θ의 일치추정량이라고 한다.

Theorem

$X_1, X_2, \cdots, X_n$을 모집단 X로부터의 확률표본이라 하고 $E[X_i] = \mu, \ \ \mathrm{Var}[X_i] = \sigma^2$ 이면, 추정량 $\widehat{\theta} = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$는 μ의 일치추정량이다.

Theorem

$X \sim \mathrm{Ber}(p)$일 때, $\widehat{\theta} = \overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$이라고 하면 $\widehat{\theta}$은 $\mu = p$의 일치추정량이다.

Theorem

모평균이 μ, 모분산이 σ^2인 모집단으로부터 추출된 임의표본을 $X_1, X_2, \cdots, X_n$이라 하고 추정량 $\widehat{\theta}_1$과 $\widehat{\theta}_2$이 다음과 같이 정의된다.

$$\widehat{\theta}_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2, \qquad \widehat{\theta}_2 = S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2,$$

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

(1) $\widehat{\theta}_1$은 σ^2의 일치추정량이다.
(2) $\widehat{\theta}_2$는 σ^2의 일치추정량이다.

참고로 $\widehat{\theta}_2$는 σ^2의 불편추정량이고 $\widehat{\theta}_1$은 σ^2의 편의추정량이다.

신뢰구간(confidence interval)

θ는 모수이고 $X_1, X_2, \cdots, X_n$을 모집단 $f(x;\theta)$로부터 추출된 확률표본이라 하자. $\widehat{\theta}_1$과 $\widehat{\theta}_2$이 모수 θ의 추정량이고, 주어진 $\alpha \ (0 < \alpha < 1)$에 대하여

$$P\left[\widehat{\theta}_1 < \theta < \widehat{\theta}_2\right] = 1 - \alpha$$

이면, $\left(\widehat{\theta}_1, \widehat{\theta}_2\right)$를 모수 θ에 대한 신뢰수준(confidence level) $(1-\alpha)$ 또는 신뢰도 $100 \times (1-\alpha)\%$ 인 신뢰구간이라 한다.

모평균 μ의 신뢰구간: σ^2이 알려진 경우

$X_1, X_2, \cdots, X_n$이 분산이 σ^2인 정규분포에서 추출된 확률표본일 때, 모평균 μ의 $100 \times (1-\alpha)\%$ 신뢰구간은

$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$

$$\left(\overline{X} - z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\ \ \overline{X} + z_{\alpha/2} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

이다. 여기서 z_α는 $Z \sim N(0,1)$ 일 때, $P[Z > z] = \alpha$를 만족하는 z이다.

- $X_1, X_2, \cdots, X_n$이 분산이 σ^2인 확률분포에서 추출된 확률표본이고 n이 충분히 큰 경우에도 이 결과는 성립한다.

$X \approx N(\mu, \sigma^2)$, $\sigma^2 = 16$ → $n=100$, $\bar{X}$, $\bar{x}=301.2$

Example

$Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{\bar{x}-\mu}{4/\sqrt{100}} \sim N(0,1)$

1. 어떤 전자 제품의 수명은 근사적으로 정규 분포를 따른다고 한다. 이 부품 100개를 검사하여 $\overline{x} = 301.2$(시간)를 얻었다고 하자. $\sigma^2 = 16$으로 알려졌다고 할 때 μ의 95% 신뢰구간을 구하시오.

   $\left(\bar{X} - z_{0.025} \times \frac{4}{10},\ \bar{X} + z_{0.025} \times \frac{4}{10}\right)$, 301.2, 1.96

2. 어느 해 고등학교 3학년 학생의 모의고사 성적의 평균을 알아보기 위해서 임의로 36명을 뽑아 조사하였다. 모의고사 성적의 모평균 μ는 미지이고 모표준편차는 16이다. 이 표본의 표본평균을 $\overline{x} = 140.8$이라고 할 때 μ의 95% 신뢰구간을 구하시오.

   X, μ, $\sigma^2 = 16^2$ → $n=36$, $\bar{X} \approx N(\mu, \sigma^2/n)$

   $Z = \frac{\bar{X}-\mu}{\sigma/\sqrt{n}} = \frac{140.8-\mu}{16/6} \sim N(0,1)$

   $\left(140.8 - 1.96 \times \frac{16}{6},\ 140.8 + 1.96 \times \frac{16}{6}\right)$

모평균 μ의 신뢰구간: σ^2이 미지인 경우

$X_1, X_2, \cdots, X_n$이 정규분포에서 추출된 확률표본일 때, 모평균 μ의 $100 \times (1-\alpha)\%$ 신뢰구간은

$$\left(\overline{X} - t_{\alpha/2}(n-1) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}},\ \ \overline{X} + t_{\alpha/2}(n-1) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$

이다. 여기서 $S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$이고, $t_{\alpha/2}(n-1)$는 $T \sim t(n-1)$ 일 때 $P[T \geqslant t] = \alpha/2$를 만족하는 t이다.

$T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(n-1)$

Example

1. 어떤 공장에서 생산하는 비누 무게(X)의 평균(μ)을 알아보기 위하여 ($n=$) 10개를 추출하여 비누 무게를 알아본 결과 다음과 같았다. 실제 평균 비누 무게 μ의 95% 신뢰구간을 구하시오. 단, 비누 무게는 정규분포를 따른다고 한다.

   $T = \frac{\bar{X}-\mu}{S/\sqrt{n}} \sim t(9)$

   94 96 97 85 86 79 93 89 92 78 → $\bar{x} = 88.9$, $s^2 = 45.4333$

   $\left(\bar{x} - t_{0.025}(9) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}},\ \bar{x} + t_{0.025}(9) \cdot \frac{s}{\sqrt{n}}\right)$, 2.262

2. 어떤 도시의 공장에서 일하는 근로자의 한달간 임금(X)을 알아보기 위하여 75 명을 임의로 뽑아 조사한 결과, 평균은 $\overline{x} = 230$(만원), 표본표준편차는 $s = 22.5$(만원)이었다. 근로자의 평균 임금의 99% 신뢰구간을 구하시오.

   X, μ, σ^2 → $n=75$, $\bar{X}$, $\bar{x}=230$, $s^2 = 22.5^2$

   ① $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ 가정
   ② $\bar{X} \approx N(\mu, \sigma^2/75)$
   * S^2이 σ^2의 일치추정량 $S^2 \approx \sigma^2$

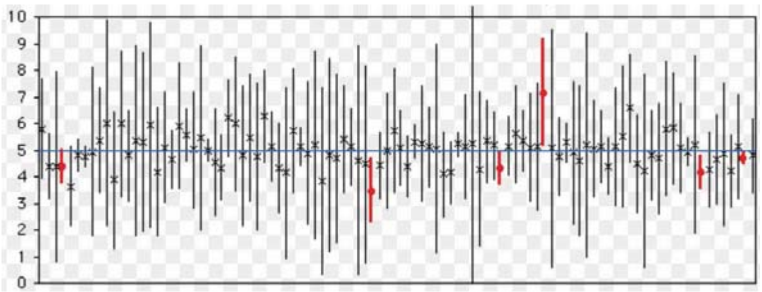
모평균 μ의 95% 신뢰구간

- σ^2이 알려진 경우

$$\left(\overline{X} - 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}},\quad \overline{X} + 1.96 \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

- σ^2이 미지인 경우

$$\left(\overline{X} - t_{0.025}(n-1) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}},\quad \overline{X} + t_{0.025}(n-1) \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}\right)$$



모비율의 신뢰구간

$X_1, X_2, \cdots, X_n$이 $X \sim \text{Ber}(p)$로부터의 확률표본이고 $\widehat{p}$ 이 표본비율이면, 충분히 큰 n에 대하여 모비율 p의 $100 \times (1-\alpha)\%$ 신뢰구간은

$$\left(\widehat{p} - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}},\quad \widehat{p} + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\widehat{p}(1-\widehat{p})}{n}}\right)$$

$\bar{x} = \hat{p} \doteq p$

이다.

$\bar{X} \approx N\left(p, \frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}\right)$

$X \sim Ber(p)$ $\xrightarrow{n=150}$

$\bar{X}$

$\hat{p} = \bar{x} = \frac{92}{150}$

Example

어떤 지역의 유권자 중에서 임의로 150명을 선발하여 이 지역 자치단체장 특정 후보에 대한 지지여부를 조사한다고 한다. 92명이 지지를 나타냈을 때 다음 물음에 답하시오.

(1) 특정 후보자의 지지율에 대한 95% 신뢰구간을 구하시오.

(2) 95% 신뢰도에서 예측오차 $d = |p - \widehat{p}|$가 0.02를 넘지 않을 표본의 크기를 구하시오.

$$\left(\hat{p} - z_{0.025} \times \sqrt{\frac{\hat{p} \times (1-\hat{p})}{150}},\ \hat{p} + z_{0.025} \times \sqrt{\frac{\hat{p} \times (1-\hat{p})}{150}}\right)$$

$d = z_{0.025} \times \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \leq 0.02 \rightarrow n \geq \sim$

모분산 σ^2의 신뢰구간

$X_1, X_2, \cdots, X_n$이 정규분포 $N(\mu, \sigma^2)$에서 추출된 확률표본일 때, 모분산 σ^2의 $100 \times (1-\alpha)\%$ 신뢰구간은 다음과 같다.

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2}}(n-1)},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1)}\right) = \left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{\frac{\alpha}{2},n-1}},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{1-\frac{\alpha}{2},n-1}}\right)$$

여기서 $\chi^2_{\alpha,n} = \chi^2_\alpha(n)$는 $V \sim \chi^2_\alpha(n)$ 일 때, $P[V \geqslant v] = \alpha$를 만족하는 v이다.

Example

1. 어떤 공장에본서 생산된 철판의 두께는 정규분포를 따른다고 한다. 16 개의 임의표본을 추출된 결과 두께의 표표준편차가 2.2 였다면 철판 두께의 분산에 대한 95% 신뢰구간을 구하시오.

2. 어떤 제약 회사에서 생산되는 알약의 무게는 약간씩 차이를 보이고 전체는 정규 분포를 따른다고 한다. 이 회사에서 만든 같은 알약 10개를 임의로 추출하여 무게를 측정한 결과

2.58,	2.71,	2.60,	2.54,	2.57,
2.61,	2.59,	2.66,	2.51,	2.54

를 얻었다고 한다(단위 mg). 이 자료를 기초로 이 회사의 제품 전체의 분산에 대한 95% 신뢰구간을 구하시오.

모평균 차 $\mu_1 - \mu_2$의 신뢰구간: σ_1^2, σ_2^2이 알려진 경우

모평균 μ_1, 모분산 σ_1^2인 모집단 1로부터 추출된 임의표본을 $X_1, X_2, \cdots, X_m$, 모평균 μ_2, 모분산 σ_2^2인 모집단 2로부터 추출된 임의표본을 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$이라 하자. $X_1, X_2, \cdots, X_m$, $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 은 서로 독립이고 m과 n이 충분히 크다고 가정하자.

(1) 표본평균의 차 $\overline{X} - \overline{Y}$는 정규분포를 따른다. 즉,

$$\overline{X} - \overline{Y} \approx N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}\right)$$

(2) 모평균의 차 $\mu_1 - \mu_2$의 $100 \times (1-\alpha)\%$ 신뢰구간:

$$\left((\overline{X} - \overline{Y}) - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}},\ \ (\overline{X} - \overline{Y}) + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}\right)$$

모평균 차 $\mu_1 - \mu_2$의 신뢰구간: σ_1^2, σ_2^2이 알려진 경우

$X_1, X_2, \cdots, X_m$이 정규모집단 $N(\mu_1, \sigma_2^2)$에서 추출된 확률표본이고 $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$이 정규모집단 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$에서 추출된 확률표본이며, $X_1, X_2, \cdots, X_m$, $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 은 서로 독립이라 하자.

(1) 표본평균의 차 $\overline{X} - \overline{Y}$는 정규분포를 따른다. 즉,

$$\overline{X} - \overline{Y} \sim N\left(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}\right)$$

(2) 모평균의 차 $\mu_1 - \mu_2$의 $100 \times (1-\alpha)\%$ 신뢰구간:

$$\left((\overline{X} - \overline{Y}) - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}},\ \ (\overline{X} - \overline{Y}) + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m} + \frac{\sigma_2^2}{n}}\right)$$

Example

같은 기능을 갖는 A, B 두 종류 전자부품의 수명을 비교한다. A 종류 45개, B 종류 65개를 이용한 실험의 평균수명은 각각 41개월, 35개월이었다. 두 종류의 모분산이 각각 36과 64라는 가정하에 두 부품의 평균수명의 차 $\mu_A - \mu_B$에 대한 96% 신뢰구간을 구하시오.

Example

독립인 두 정규모집단 $N(\mu_1, 9)$와 $N(\mu_2, 4)$로부터 각각 크기 16과 36인 표본을 추출하여 표본평균 $\overline{x} = 22$, $\overline{y} = 21$을 얻었다.

(1) 모평균 차 $\mu_1 - \mu_2$의 점추정값을 구하시오.

(2) 모평균 차 $\mu_1 - \mu_2$에 대한 95% 신뢰구간을 구하시오.

모평균 차 $\mu_1 - \mu_2$의 신뢰구간 : $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = \sigma^2$이고 미지인 경우

$X_1, X_2, \cdots, X_m$이 정규모집단 $N(\mu_1, \sigma^2)$에서 추출된 확률표본,
$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$이 정규모집단 $N(\mu_2, \sigma^2)$에서 추출된 확률표본이고
$X_1, X_2, \cdots, X_m$, $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 은 서로 독립 일 때,
모평균 차 $\mu_1 - \mu_2$의 $100 \times (1-\alpha)\%$ 신뢰구간:

$$\left((\overline{X} - \overline{Y}) - t_{\alpha/2} \cdot S_p \sqrt{\tfrac{1}{m} + \tfrac{1}{n}},\ \ (\overline{X} - \overline{Y}) + t_{\alpha/2} \cdot S_p \sqrt{\tfrac{1}{m} + \tfrac{1}{n}} \right)$$

여기서

- $t_{\alpha/2}$는 $T \sim t(m+n-2)$ 일 때 $P[T \geqslant t] = \alpha/2$를 만족하는 t
- $S_p^2 = \dfrac{(m-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2}{m+n-2}$은 등분산 σ^2의 합동추정량으로 표본합동분산이라 한다.

Proof.

(1) $\dfrac{(m-1)}{\sigma^2} S_X^2 \sim \chi^2(m-1), \quad \dfrac{(n-1)}{\sigma^2} S_Y^2 \sim \chi^2(n-1)$

(2) $V = \dfrac{(m-1)S_X^2 + (n-1)S_Y^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(m+n-2)$

(3) $Z = \dfrac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{m} + \frac{\sigma^2}{n}}} \sim N(0,1)$

(4) $T = \dfrac{Z}{\sqrt{\frac{V}{(m+n-2)}}} = \dfrac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (\mu_1 - \mu_2)}{S_p \cdot \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}} \sim t(m+n-2)$

Example

임의로 뽑은 젖소의 두 집단에 사료 A와 B를 주고 우유 생산량에 미치는 영향의 차이를 조사하였다. 사료 A를 13마리의 젖소에게 주고 사료 B를 12마리의 젖소에게 준 결과 다음과 같은 자료를 얻었다.

사료 A	44	44	56	46	47	38	58	53	49	35	46	30	41
사료 B	35	47	55	29	40	39	32	41	42	57	51	39	

사료에 따른 우유 생산량은 각각 정규분포를 따르고 분산은 같다고 할 때, 사료에 따른 우유 생산량의 평균 차이에 대한 95% 신뢰구간을 구하시오.

두 모비율 차 $p_1 - p_2$의 신뢰구간

$X_1, X_2, \cdots, X_m$이 모집단 $X \sim \mathrm{Ber}(p_1)$에서 추출된 확률표본이고
$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$이 모집단 $Y \sim \mathrm{Ber}(p_2)$에서 추출된 확률표본이며,
$X_1, X_2, \cdots, X_m$, $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 은 서로 독립이라 하자.
m, n이 충분히 클 때,
(또는 $m\widehat{p_1} \geqslant 5,\ m(1-\widehat{p_1}) \geqslant 5,\ n\widehat{p_2} \geqslant 5,\ n(1-\widehat{p_2}) \geqslant 5$ 일 때,)

두 모비율 차 $p_1 - p_2$의 $100 \times (1-\alpha)\%$ 신뢰구간:

$$\left((\widehat{p_1} - \widehat{p_2}) - z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\tfrac{\widehat{p_1}(1-\widehat{p_1})}{m} + \tfrac{\widehat{p_2}(1-\widehat{p_2})}{n}},\ (\widehat{p_1} - \widehat{p_2}) + z_{\alpha/2} \cdot \sqrt{\tfrac{\widehat{p_1}(1-\widehat{p_1})}{m} + \tfrac{\widehat{p_2}(1-\widehat{p_2})}{n}} \right)$$

Proof.

(1) $\widehat{p_1} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} X_i = \overline{X} \approx N\left(p_1, \frac{p_1(1-p_1)}{m}\right)$

(2) $\widehat{p_2} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j = \overline{Y} \approx N\left(p_2, \frac{p_2(1-p_2)}{n}\right)$

(3) $\widehat{p_1} - \widehat{p_2} \approx N\left(p_1 - p_2, \frac{p_1(1-p_1)}{m} + \frac{p_2(1-p_2)}{n}\right)$

(4) $Z = \dfrac{(\widehat{p_1} - \widehat{p_2}) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{m} + \frac{p_2(1-p_2)}{n}}} \approx N(0,1)$

Example

새로 개발되는 예방약의 효과를 평가 하기 위한 실험을 하였다. 모두 200명을 대상으로 100명에는 기존의 약을 나머지 100명에는 새로운 약을 사용하여 일정 기간 지난 후 그 효과를 관찰하였다. 새 예방약에서는 91명이 그리고 기존의 예방약에서는 72명이 효과를 본 것으로 판단되었다. 이 자료를 통하여 두 예방약 효과의 실제 차에 대한 95% 신뢰구간을 구하시오.

두 모분산 비의 신뢰구간

$X_1, X_2, \cdots, X_m$이 정규모집단 $N(\mu_1, \sigma_1^2)$에서 추출된 확률표본, $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$이 정규모집단 $N(\mu_2, \sigma_2^2)$에서 추출된 확률표본이고 $X_1, X_2, \cdots, X_m$, $Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$ 은 서로 독립일 때,
두 모분산 비 $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ 의 $100 \times (1-\alpha)\%$ 신뢰구간:

$$\left(\frac{S_X^2}{S_Y^2} \cdot \frac{1}{F_{\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)}, \; \frac{S_X^2}{S_Y^2} \cdot \frac{1}{F_{1-\frac{\alpha}{2}}(m-1, n-1)} \right)$$

여기서 $F_\alpha(m,n)$은 $F \sim F(m,n)$ 일 때 $P[F > t] = \alpha$를 만족하는 t이다.

Proof. $F = \dfrac{S_X^2/\sigma_1^2}{S_Y^2/\sigma_2^2} \sim F(m-1, n-1)$

Example

어떤 농작물에 영향을 주는 곰팡이의 독소를 조사하기 위해 10회에 걸쳐 곰팡이를 배양하여 독성을 측정한 결과 다음을 얻었다.

$$1.2 \quad 0.8 \quad 0.6 \quad 1.1 \quad 1.2 \quad 0.9 \quad 0.9 \quad 1.5 \quad 0.9 \quad 1.0$$

(1) 평균 $\overline{x}$와 표준편차 s를 구하시오.
(2) 정규모집단이라 가정하고 모분산에 대한 90% 신뢰구간을 구하시오.