1. 4×4 행렬 A와 B의 곱셈의 결과가 행렬 A의 1행과 3행이 서로 바뀌고 2행과 4행은 변하지 않는 행렬이 되도록 행렬 B를 구하시오.

$$B=\begin{bmatrix}0&0&1&0\\0&1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

2. 행렬A를 행렬B로 변화시키기 위한 elimination matrix E_{21}을 구하시오.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2&1\\4&8&9&3\\0&3&2&1\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}1&2&2&1\\0&0&1&-1\\0&3&2&1\end{bmatrix}$$

$$E_{21}(-4)=\begin{bmatrix}1&0&0\\-4&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

3. 행렬 $A=\begin{bmatrix}0&1&1\\1&0&0\\4&0&1\end{bmatrix}$에 대하여, 다음을 만족하는permutation P와 elimination matrix E_{23}, E_{31}을 구하시오.

$$E_{23}E_{31}PA=I,\ I=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$P_{12}=\begin{bmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad E_{31}(-4)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-4&0&1\end{bmatrix},\quad E_{23}(-1)=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix}$$

4. 다음 두 행렬에 대하여 A^2, A^3을 각각 계산하고 A^n을 예측하시오.

$$A=\begin{bmatrix}1&2\\0&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&0\\3&0\end{bmatrix}$$

$$A^2=\begin{bmatrix}1&2\\0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\0&0\end{bmatrix}\qquad B^2=\begin{bmatrix}1&0\\3&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\3&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\3&0\end{bmatrix}$$

$$A^3=\begin{bmatrix}1&2\\0&0\end{bmatrix}\cdot A^2=\begin{bmatrix}1&2\\0&0\end{bmatrix}\qquad B^3=\begin{bmatrix}1&0\\3&0\end{bmatrix}\cdot B^2=\begin{bmatrix}1&0\\3&0\end{bmatrix}$$

$$A^n=\begin{bmatrix}1&2\\0&0\end{bmatrix}\qquad B^n=\begin{bmatrix}1&0\\3&0\end{bmatrix}$$

5. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 12 & 3 \end{bmatrix}$은 한 선형 연립방정식에 대응되는 덧붙인 행렬(augmented matrix)이라 한다. 가우스 소거법을 이용하여 해를 적절한 벡터의 선형결합을 형태로 표시하시오.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & 12 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{12}(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 3 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\{(x, y, z, w) \mid (5t+3s-6,\ -3t-5s+3,\ t,\ s),\ t, s \in \mathbb{R}\}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 5 \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 3 \\ -5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R}$$

6. 선형 연립방정식의 해의 형태는 없거나 하나의 해를 갖거나 무수히 많은 해를 갖는다. 즉, 해가 단 두 개일 수는 없다. 만약 $v=(x_1, y_1)$과 $w=(x_2, y_2)$이 모두 $AX=b$의 해 일 때, 또 다른 해를 임의로 구하시오.

($AX=b$ 가 해를가지지 않거나 하나의 해를 갖는다면 다른 해는 존재 하지 않는다.

$Av=b,\ Aw=b$

$A(v+w)=2b$

$A\left(\frac{v+w}{2}\right)=b$

$\therefore\ \frac{v+w}{2}$ 역시 $AX=b$의 해이다.

$\therefore$ 해가 단 두 개일 수 없다.