1. 선형연립방정식 $AX=b$의 $b$를 다음의 세 가지 경우에 대하여 푼다고 하자.

$$Av_1=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\qquad Av_2=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix},\qquad Av_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

만약 세 개의 해 $v_1, v_2, v_3$가 행렬 $X$의 열벡터들이면 $AX$는 무엇인가?

$$X=\begin{bmatrix} | & | & | \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ | & | & | \end{bmatrix},\quad AX=\begin{bmatrix} | & | & | \\ Av_1 & Av_2 & Av_3 \\ | & | & | \end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

2. '문제1'의 세 개의 연립방정식의 해가 각각 $v_1=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$, $v_2=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$, $v_3=\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$ 라고 한다. 이 때,

선형연립방정식 $Av=\begin{bmatrix}3\\5\\8\end{bmatrix}$을 풀어라. (문제1의 결과 등을 이용하여 계산을 가능한 줄이고 구할 것)

방법.1

$$AX=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

$$X=A^{-1}=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}$$

$$v=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&0\\1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\5\\8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\8\\16\end{bmatrix}$$

방법.2

$$A(c_1v_1+c_2v_2+c_3v_3)=c_1\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}+c_2\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}+c_3\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}3\\5\\8\end{bmatrix},\quad c_1=3,\ c_2=5,\ c_3=8$$

$$v=3\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}+5\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}+8\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\8\\16\end{bmatrix}$$

3.

(1) 두 행렬 $A=\begin{bmatrix}1&4&0\\4&3&4\\0&4&0\end{bmatrix}$와 $B=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&4&2\\1&1&1\end{bmatrix}$의 rank(계수)를 구하시오.

(2) 세 벡터

$v_1=[3,0,2,2]$, $v_2=[-6,42,24,54]$, $v_3=[21,-21,0,-15]$

의 집합은 선형종속이다. 집합 $S=\{v_1,v_2,v_3\}$과 같은 공간을 생성하는 $S$의 부분집합을 구하시오.

(1)

$$A=\begin{bmatrix}1&4&0\\4&3&4\\0&4&0\end{bmatrix}\xrightarrow{E_{21}(-4)}\begin{bmatrix}1&4&0\\0&-13&4\\0&4&0\end{bmatrix}\xrightarrow{E_{32}(\frac{4}{13})}\begin{bmatrix}1&4&0\\0&-13&4\\0&0&\frac{16}{13}\end{bmatrix}$$

$\therefore \operatorname{rank}(A)=3$

$$B=\begin{bmatrix}1&2&1\\2&4&2\\1&1&1\end{bmatrix}\xrightarrow[E_{31}(-1)]{E_{21}(-2)}\begin{bmatrix}1&2&1\\0&0&0\\0&-1&0\end{bmatrix}\xrightarrow{P_{23}}\begin{bmatrix}1&2&1\\0&-1&0\\0&0&0\end{bmatrix}$$

$\therefore \operatorname{rank}(B)=2$

(2) $\begin{bmatrix} \cancel{v_1} \\ \cancel{v_2} \\ \cancel{v_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ -6 & 42 & 24 & 54 \\ 21 & -21 & 0 & -15 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{31}(-7)]{E_{21}(2)} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 42 & 28 & 58 \\ 0 & -21 & -14 & -29 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{E_{32}(\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 42 & 28 & 58 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\therefore$ $V_3$은 $V_1$과 $V_2$의 선형 결합이다.

$\therefore$ $S_1 = \{V_1, V_2\}$은 $S = \{V_1, V_2, V_3\}$과 같은 공간을 생성한다.

4. 다음 행렬은 선형연립방정식에 대응되는 덧붙인 행렬이다. 해집합의 원소를 열벡터로 표현하시오.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{P_{23}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{12}(-2)]{D_2(\frac{1}{3})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{23}(-\frac{2}{3})]{E_{13}(-\frac{2}{3})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ 0 & -6 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[D_2(-\frac{1}{6})]{E_{12}(\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{23}(-\frac{2}{3})]{E_{13}(-3)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -\frac{5}{3} \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \; s \in \mathbb{R} \right\}$

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$

$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4 \;\middle|\; \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{bmatrix} = s\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}, \; s, t \in \mathbb{R} \right\}$