컴퓨터공학과/20171630/남주형 Date. / /

5장 연습문제

#1. 다음 벡터공간 W의 기저와 차원을 구하여라. 또한 주어진 벡터 $w \in W$를 앞에서 구한 기저 벡터들의 선형 결합으로 나타내어라.

(1) $W = \{(3a-b+2c, -2a-c, a-3b+2c, -8a+2b-5c) \mid a,b,c \in \mathbb{R}\}$ $w=(1,1,7,-1)$

$(3a-b+2c, -2a-c, a-3b+2c, -8a+2b-5c) = a(3,-2,1,-8)+b(-1,0,-3,2)+c(2,-1,2,-5)$

$\therefore W = \langle (3,-2,1,-8), (-1,0,-3,2), (2,-1,2,-5) \rangle$

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 & -8 \\ -1 & 0 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 2 & -5 \end{bmatrix} \xRightarrow[C_{12}\ C_{23}]{D_2(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 2 & -5 \\ 3 & -2 & 1 & -8 \end{bmatrix} \xRightarrow[E_{31}(-3)\ D_2(-1)]{E_{21}(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & -2 & -8 & -2 \end{bmatrix} \xRightarrow{E_{32}(2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore B = \{(1,0,3,-2), (0,1,4,1)\}$

$\therefore \dim(W) = 2$

$\therefore w = (1,1,7,-1) = 1 \times (1,0,3,-2) + 1 \times (0,1,4,1)$

(2) $W = \{A \in Mat_{3\times3}(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$, $w = A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

$A^T=A$ 는 대칭행렬 이다.

$$\therefore A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & d & e \\ c & e & f \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + c\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ d\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + e\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + f\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\therefore B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$\therefore \dim(W) = 6$

$$\therefore w = A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} = 1\times\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} - 1\times\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + 2\times\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} - 1\times\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 1\times\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

#2 내적공간 V의 두 벡터 $u, v \in V$에 대하여, $u=0$ 또는 $v=0$ 이면 $\langle u,v \rangle = 0$임을 증명하라.

$\langle u,v \rangle = \langle u, 0+v \rangle = \langle u, 0 \rangle + \langle u,v \rangle$ (∵ 정의 5.2.1 - I, 2)

$\therefore \langle u,v \rangle - \langle u,v \rangle = \langle u, 0 \rangle$ ↳ $\langle u, v+w \rangle = \langle u,v \rangle + \langle u,w \rangle$

$\therefore \langle u, 0 \rangle = 0$

$\therefore$ $u=0$ 이면 $\langle u,v \rangle = 0$ 이다. (∵ 정의 5.2.1 - I.4)

↳ $\langle u,u \rangle \geq 0$ 그리고 $\langle u,u \rangle = 0 \Leftrightarrow u=0$

$\langle u,v \rangle = \langle v,u \rangle$ 이므로 위와 같은과정을 반복하면 (∵ 정의 5.2.1 - I.1)

$v=0$ 이면 $\langle u,v \rangle = 0$ 이다. ↳ $\langle u,v \rangle = \langle v,u \rangle$

$\therefore$ $u=0$ 또는 $v=0$이면 $\langle u,v \rangle = 0$ 이다.

(u, v가 모두 0일때, $\langle 0,0 \rangle = 0$ 이므로 역시성립)

#3. 벡터공간 $\mathbb{R}^2$의 두 벡터 $a=(a_1,a_2)$, $b=(b_1,b_2)$에 대하여 아래와 같이 정의된 $\langle a,b \rangle$가 $\mathbb{R}^2$에서의 내적이 되는지 조사하여라. 만약 내적이라면 정의 5.2.1의 네 조건을 만족함을 보이고, 내적이 아니라면 네 조건 1.1~1.4 중, 만족하지 않는 조건을 반례를 이용하여 설명하여라.

(1) $\langle a,b \rangle = 5a_1b_1 - a_1b_2 - a_2b_1 + 10a_2b_2$

만족 ① $\langle a,b \rangle = \langle b,a \rangle$

$\langle a,b \rangle = 5a_1b_1 - a_1b_2 - a_2b_1 + 10a_2b_2$

$\langle b,a \rangle = 5b_1a_1 - b_1a_2 - b_2a_1 + 10b_2a_2 = 5a_1b_1 - a_1b_2 - a_2b_1 + 10a_2b_2 = \langle a,b \rangle$

만족 ② $\langle a, b+w \rangle = \langle a,b \rangle + \langle a,w \rangle$, $w=(w_1,w_2)$

$\langle a, b+w \rangle = 5a_1(b_1+w_1) - a_1(b_2+w_2) - a_2(b_1+w_1) + 10a_2(b_2+w_2)$

$\langle a,b \rangle + \langle a,w \rangle = (5a_1b_1 - a_1b_2 - a_2b_1 + 10a_2b_2) + (5a_1w_1 - a_1w_2 - a_2w_1 + 10a_2w_2)$

$= 5a_1(b_1+w_1) - a_1(b_2+w_2) - a_2(b_1+w_1) + 10a_2(b_2+w_2) = \langle a, b+w \rangle$

만족 ③ $c\langle a,b \rangle = \langle ca,b \rangle$

$c\langle a,b \rangle = c5a_1b_1 - ca_1b_2 - ca_2b_1 + c10a_2b_2$

$\langle ca,b \rangle = 5(ca_1)b_1 - (ca_1)b_2 - (ca_2)b_1 + 10(ca_2)b_2 = c\langle a,b \rangle$

만족 ④ $\langle a,a \rangle \geq 0$, $\langle a,a \rangle = 0 \Leftrightarrow a=0$

$\langle a,a \rangle = 5a_1a_1 - a_1a_2 - a_2a_1 + 10a_2a_2 = 5(a_1)^2 - 2a_1a_2 + 10(a_2)^2$ (다음장에서 계속~)

$\langle a,a\rangle = 5(a_1)^2 - 2a_1a_2 + 10(a_2)^2 = 5\left[(a_1 - \frac{1}{5}a_2)^2 + \frac{49}{25}(a_2)^2\right] \geq 0$ $(\langle a,a\rangle \geq 0)$

$\langle a,a\rangle = 0$ 이면 $(a_1 - \frac{1}{5}a_2)$와 a_2가 0 이어야 한다.

$\therefore$ a_2가 0이 되면 a_1도 0이 된다. $\therefore a = (0,0) = 0$ $(\langle a,a\rangle = 0 \Rightarrow a = 0)$

$a = (0,0) = 0$ 이면 위에서 얻은 식에 대입한 결과 $\langle a,a\rangle = 0$ 이 된다. $(a = 0 \Rightarrow \langle a,a\rangle = 0)$

$\therefore \langle a,a\rangle = 0 \Leftrightarrow a = 0$

4가지 조건을 모두 만족하므로 (1)의 $\langle a,b\rangle$는 $\mathbb{R}^2$에서의 내적이 된다.

(2) $\langle a,b\rangle = a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2$

만족 ① $\langle a,b\rangle = \langle b,a\rangle$

$\langle a,b\rangle = a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2$

$\langle b,a\rangle = b_1^2a_1^2 + b_2^2a_2^2 = \langle a,b\rangle$

X ② $\langle a,b+w\rangle = \langle a,b\rangle + \langle a,w\rangle$, $w = (w_1, w_2)$

$\langle a,b+w\rangle = a_1^2(b_1+w_1)^2 + a_2^2(b_2+w_2)^2 = (a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 + a_1^2w_1^2 + a_2^2w_2^2) + 2a_1^2b_1w_1 + 2a_2^2b_2w_2$

$\langle a,b\rangle + \langle a,w\rangle = (a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2) + (a_1^2w_1^2 + a_2^2w_2^2) \neq \langle a,b+w\rangle$

ex) $a = (1,1)$, $b = (2,0)$, $w = (1,0)$

$\langle a,b+w\rangle = 1^2\cdot(2+1)^2 + 1^2\cdot 0^2 = 9$

$\langle a,b\rangle + \langle a,w\rangle = (1^2\cdot 2^2 + 1^2\cdot 0^2) + (1^2\cdot 1^2 + 0^2\times 0^2) = 5$

$\therefore \langle a,b+w\rangle \neq \langle a,b\rangle + \langle a,w\rangle$

X ③ $c\langle a,b\rangle = \langle ca,b\rangle$

$c\langle a,b\rangle = c\times a_1^2b_1^2 + c\times a_2^2b_2^2$

$\langle ca,b\rangle = (ca_1)^2\cdot b_1^2 + (ca_2)^2\cdot b_2^2 \neq c\langle a,b\rangle$

ex) $a = (1,1)$, $b = (2,2)$, $c = 3$

$c\langle a,b\rangle = 3\cdot 1^2\cdot 2^2 + 3\cdot 1^2\cdot 2^2 = 24$

$\langle ca,b\rangle = (3\cdot 1)^2\cdot 2^2 + (3\cdot 1)^2\cdot 2^2 = 72$

$\therefore c\langle a,b\rangle \neq \langle ca,b\rangle$

I.2 와 I.3을 만족하지 못하므로 (2)의 $\langle a,b\rangle$는 $\mathbb{R}^2$에서의 내적이 아니다.

만족 ④ $\langle a,a\rangle \geq 0$, $\langle a,a\rangle = 0 \Leftrightarrow a = 0$

$\langle a,a\rangle = a_1^2\cdot a_1^2 + a_2^2\cdot a_2^2 \geq 0$ $(\langle a,a\rangle \geq 0)$

$\langle a,a\rangle = 0$ 이면 a_1, a_2가 0이 되어야한다. $\therefore a = (0,0)$이다. $(\langle a,a\rangle = 0 \Rightarrow a = 0)$

$a = 0 = (0,0)$ 이면 위 식에 의해 $\langle a,a\rangle = 0$이다. $(a = 0 \Rightarrow \langle a,a\rangle)$

$\therefore \langle a,a\rangle = 0 \Leftrightarrow a = 0$

barunson

(3) $\langle a,b\rangle = 3a_1b_1 + 5a_2b_2$

① $\langle a,b\rangle = \langle b,a\rangle$

만족 $\langle a,b\rangle = 3a_1b_1 + 5a_2b_2$

$\langle b,a\rangle = 3b_1a_1 + 5b_2a_2 = \langle a,b\rangle$

② $\langle a, b+w\rangle = \langle a,b\rangle + \langle a,w\rangle$, $w=(w_1,w_2)$

만족 $\langle a, b+w\rangle = 3a_1(b_1+w_1) + 5a_2(b_2+w_2)$

$\langle a,b\rangle + \langle a,w\rangle = (3a_1b_1 + 5a_2b_2) + (3a_1w_1 + 5a_2w_2)$

$= 3a_1(b_1+w_1) + 5a_2(b_2+w_2) = \langle a, b+w\rangle$

③ $c\langle a,b\rangle = \langle ca,b\rangle$

만족 $c\langle a,b\rangle = c\cdot 3a_1b_1 + c\cdot 5a_2b_2$

$\langle ca,b\rangle = 3(ca_1)b_1 + 5(ca_2)b_2 = c\langle a,b\rangle$

④ $\langle a,a\rangle \geq 0$, $\langle a,a\rangle = 0 \Leftrightarrow a=0$

만족 $\langle a,a\rangle = 3a_1\cdot a_1 + 5a_2\cdot a_2 = 3(a_1)^2 + 5(a_2)^2 \geq 0$

$\langle a,a\rangle=0$ 이면 a_1과 a_2가 0이 되어야 한다. ∴ $a=(0,0)=0$ $(\langle a,a\rangle=0 \Rightarrow a=0)$

$a=0=(0,0)$ 이면 위 식에 따라 $\langle a,a\rangle=0$이 된다. $(a=0 \Rightarrow \langle a,a\rangle=0)$

∴ $\langle a,a\rangle=0 \Leftrightarrow a=0$

4가지 조건을 모두 만족하므로 (3)의 $\langle a,b\rangle$는 $\mathbb{R}^2$에서의 내적이다.

(4) $\langle a,b\rangle = a_1a_2 + b_1b_2$

① $\langle a,b\rangle = \langle b,a\rangle$

만족 $\langle a,b\rangle = a_1a_2 + b_1b_2$

$\langle b,a\rangle = b_1b_2 + a_1a_2 = \langle a,b\rangle$

② $\langle a, b+w\rangle = \langle a,b\rangle + \langle a,w\rangle$, $w=(w_1,w_2)$

X $\langle a, b+w\rangle = a_1a_2 + (b_1+w_1)(b_2+w_2)$

$\langle a,b\rangle + \langle a,w\rangle = (a_1a_2 + b_1b_2) + (a_1a_2 + w_1w_2) \neq \langle a, b+w\rangle$

ex) $a=(1,1)$, $b=(1,2)$, $w=(2,1)$

$\langle a, b+w\rangle = 1\cdot 1 + (1+2)(2+1) = 10$

$\langle a,b\rangle + \langle a,w\rangle = (1\cdot 1 + 1\cdot 2) + (1\cdot 1 + 2\cdot 1) = 6$

$\langle a, b+w\rangle \neq \langle a,b\rangle + \langle a,w\rangle$

③ $c\langle a,b\rangle = \langle ca,b\rangle$

X $c\langle a,b\rangle = c\cdot a_1a_2 + c\cdot b_1b_2$

$\langle ca,b\rangle = (ca_1)(ca_2) + b_1b_2 = c^2a_1a_2 + b_1b_2 \neq c\langle a,b\rangle$

ex) $a=(1,1)$, $b=(2,1)$, $c=3$

$c\langle a,b\rangle = 3\cdot1\cdot1 + 3\cdot2\cdot1 = 9$

$\langle ca,b\rangle = (3\cdot1)\cdot(3\cdot1) + 2\cdot1 = 11$

$\therefore c\langle a,b\rangle \neq \langle ca,b\rangle$

④ $\langle a,a\rangle \geq 0$, $\langle a,a\rangle = 0 \Leftrightarrow a=0$

X $\langle a,a\rangle = a_1a_2 + a_1a_2 = 2a_1a_2$

ex) $a=(1,-1)$

$\langle a,a\rangle = 1\cdot(-1) + 1\cdot(-1) = -2 < 0$

$\langle a,a\rangle = 0$ 이면 위식에 의해 a_1 또는 a_2 중 하나라도 0이면 된다.

ex) $a=(1,0)$

$\langle a,a\rangle = 1\cdot0 + 0\cdot1 = 0$

I.2, I.3, I.4 를 만족하지 못하므로 (4)의 $\langle a,b\rangle$ 는 $\mathbb{R}^2$에서의 내적이 아니다.

#4. 내적공간 V의 부분공간 W에 대하여 다음과 같이 정의된 집합

$$W^{\perp} = \{v \in V \mid \text{모든 } w \in W \text{ 에 대하여 } \langle v,w\rangle = 0\}$$

을 W의 수직 보공간이라고 한다. 이 때, 다음 물음에 답하라.

(1) $W^{\perp}$이 V의 부분공간임을 증명하여라.

$w_1, w_2 \in W$, $\langle v, w_1 + w_2\rangle = \langle v,w_1\rangle + \langle v,w_2\rangle = 0+0=0$

$\therefore w_1 + w_2 \in W$

$\langle v, \lambda w_1\rangle = \lambda\langle v,w_1\rangle = \lambda\cdot 0 = 0$

$\therefore \lambda w_1 \in W$

$\therefore W^{\perp}$는 V의 부분공간이다.

(2) $\mathbb{R}^3$의 부분공간 $W = \langle (1,2,3) \rangle$에 대하여, $W^\perp$의 기저와 차원을 구하여라.

W의 기저는 $B = \{(1,2,3)\}$이다. $\dim(W) = 1$

1차원 이므로 $B_\perp = \{(1,2,3)\}$ 이다.

$v = (x, y, z)$ 가 $W_\perp$에 있을려면 위 직교기저의 벡터와 직교 해야 한다.

$\therefore\ x + 2y + 3z = 0$ $\quad y = s,\ z = t$ 라하면

해집합 $V = s\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 이다.

$\therefore\ W_\perp = \langle (-2,1,0),\ (-3,0,1) \rangle$

$$\begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xRightarrow{E_{12}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xRightarrow{E_{21}(3)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -2 \end{bmatrix} \xRightarrow[E_{12}(-1)]{D_2(\frac{1}{3})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

$\therefore\ W_\perp$ 기저는 $B_{w^\perp} = \{(1, 0, -\frac{1}{3}), (0, 1, -\frac{2}{3})\}$ 이다. $\therefore \dim(W^\perp) = 2$

(3) $\mathbb{R}^3$의 부분공간 $W = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$에 대하여 $W^\perp$의 기저와 차원을 구하여라.

$x_2 = s,\ x_3 = t$ 라하면

$X = s\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ 이다. $\quad \therefore\ W = \langle (-2,1,0), (1,0,1) \rangle$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xRightarrow{E_{21}(2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \therefore B = \{(1,0,1), (0,1,2)\}$$

$B_\perp = \{\underset{w_1}{(1,0,1)}, \underset{w_2}{(-1,1,1)}\}$, $\dim(W) = 2$

↳ $w_1 = (1,0,1)$

$w_2 = (0,1,2) - \mathrm{proj}_{w_1} v_2$

$\mathrm{proj}_{w_1} v_2 = \dfrac{\langle (0,1,2), (1,0,1) \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = \dfrac{2}{2}(1,0,1)$

$w_2 = (0,1,2) - (1,0,1) = (-1, 1, 1)$

$v = (x, y, z)$

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{cases} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xRightarrow{E_{21}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$z = t$ 라하면

$x = -t,\ y = -2t,\ z = t$

$X = t\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad \therefore\ W^\perp = \langle (-1,-2,1) \rangle$

$\therefore\ B_{w^\perp} = \{(1, 2, -1)\}$ $\quad \dim(W^\perp) = 1$

(4) $\mathbb{R}^4$의 부분공간 $W = \langle (1,2,-1,0), (3,-1,1,2) \rangle$에 대하여, $W^\perp$의 기저와 차원을 구하라.

$\langle (1,2,-1,0), (3,-1,1,2) \rangle = 3-2-1+0 = 0$ 이므로

$B_\perp = \{(1,2,-1,0), (3,-1,1,2)\}$ 이다. $\dim(W) = 2$

$v = (x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xRightarrow{E_{21}(-3)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -7 & 4 & 2 \end{bmatrix} \xRightarrow{D_2(-\frac{1}{7})} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

$$\xRightarrow{E_{12}(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{4}{7} \\ 0 & 1 & -\frac{4}{7} & -\frac{2}{7} \end{bmatrix}$$

$x_3 = s$, $x_4 = t$ 라하자.

$$v = s\begin{bmatrix} -\frac{1}{7} \\ \frac{4}{7} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -\frac{4}{7} \\ \frac{2}{7} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \therefore W^\perp = \langle (-\tfrac{1}{7}, \tfrac{4}{7}, 1, 0), (-\tfrac{4}{7}, \tfrac{2}{7}, 0, 1) \rangle$$

$$\begin{bmatrix} -\frac{1}{7} & \frac{4}{7} & 1 & 0 \\ -\frac{4}{7} & \frac{2}{7} & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{D_2(-7)}{\xRightarrow{D_1(-7)}} \begin{bmatrix} 1 & -4 & -7 & 0 \\ 4 & -2 & 0 & -7 \end{bmatrix} \underset{D_2(\frac{1}{7})}{\xRightarrow{E_{21}(-4)}} \begin{bmatrix} 1 & -4 & -7 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & -1 \end{bmatrix} \underset{D_2(\frac{1}{2})}{\xRightarrow{E_{12}(2)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

$B = \{(1,0,1,-2), (0,1,2,-\tfrac{1}{2})\}$ $\quad \dim(W^\perp) = 2$

$B_\perp = \{(1,0,1,-2), (-\tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2})\}$

$w_1 = v_1 = (1,0,1,-2)$

$w_2 = (0,1,2,-\tfrac{1}{2}) - \text{proj}_{w_1} v_2 = (-\tfrac{1}{2}, 1, \tfrac{3}{2}, \tfrac{1}{2})$

$\text{proj}_{w_1} v_2 = \dfrac{\langle w_1, v_2 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = \dfrac{3}{6}(1,0,1,-2) = (\tfrac{1}{2}, 0, \tfrac{1}{2}, -1)$

(5) 위결과를 참고삼아 $\dim(W)$ 와 $\dim(W^\perp)$ 사이에 어떤 관계가 있다고 생각하는가?

↳ $\dim(\mathbb{R}^n) = \dim(W) + \dim(W^\perp)$

위에 결과들이 이 식의 형태를 띄고있습니다

#5 보기 5.2.5에서 정의된 내적공간 $V = C[-1,1]$의 세 벡터 $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = e^x$에 대하여 다음의 물음에 답하여라.

(1) $proj_f h$를 구하여라.

$$proj_f h = \frac{\langle h, f \rangle}{\|f\|^2} f$$

1.) $\langle h, f \rangle = \int_{-1}^{1} x e^x dx$

$= [xe^x]_{-1}^{1} - [e^x]_{-1}^{1}$

$= 2e^{-1}$

2.) $\|f\|^2 = \int_{-1}^{1} x^2 dx = \left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$

$\therefore proj_f h = \frac{2e^{-1}}{\frac{2}{3}} x = 3e^{-1} x$

(2) $W = \langle f, g \rangle$라고 할 때, $proj_W h$를 구하여라.

$$proj_W h = \frac{\langle h, W \rangle}{\|W\|^2} W$$

1.) $W = \langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} x^3 dx = \left[\frac{1}{4}x^4\right]_{-1}^{1} = 0$ $(f \perp g)$

2.) $\langle h, W \rangle = \langle h, 0 \rangle = 0$ $\therefore (h \perp g)$

$\therefore proj_W h = 0$

6. 내적공간 W의 순서기저 $\beta = \{V_1, V_2, V_3\}$, $V_1 = (0,2,1,0)$, $V_2 = (1,-1,0,0)$, $V_3 = (1,2,0,-1)$로부터 Gram-Schmidt의 수직화 과정을 이용하여 수직기저 $\beta_\perp = [W_1, W_2, W_3]$을 구하여라.

$W_1 = V_1 = (0,2,1,0)$

$W_2 = V_2 - proj_{W_1} V_2 = (1,-1,0,0) - (0, -\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, 0) = (1, -\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 0)$

↳ $proj_{W_1} V_2 = \frac{\langle V_2, W_1 \rangle}{\|W_1\|^2} W_1 = \frac{-2}{5}(0,2,1,0) = (0, -\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, 0)$

$W_3 = V_3 - (proj_{W_1} V_3 + proj_{W_2} V_3) = (1,2,0,-1) - (0, \frac{8}{5}, \frac{4}{5}, 0) - (\frac{1}{2}, -\frac{1}{10}, \frac{1}{5}, 0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, -1)$

↳ $proj_{W_1} V_3 = \frac{\langle V_3, W_1 \rangle}{\|W_1\|^2} W_1 = \frac{4}{5}(0,2,1,0) = (0, \frac{8}{5}, \frac{4}{5}, 0)$

↳ $proj_{W_2} V_3 = \frac{\langle V_3, W_2 \rangle}{\|W_2\|^2} W_2 = \frac{3/5}{6/5}(1, -\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 0)$

$= \frac{1}{2}(1, -\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 0) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{10}, \frac{1}{5}, 0)$

$\therefore W_1 = (0,2,1,0)$, $W_2 = (1, -\frac{1}{5}, \frac{2}{5}, 0)$, $W_3 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1, -1)$