컴퓨터공학과/20171630/남주형 Date. / /

3.2절 행렬식의 성질

#1 $A = \begin{vmatrix} \boxed{a \quad b \quad c} \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -6$ 일 때 다음의 행렬식을 구하고 그 이유를 정확히 적어라.

$$|A| = a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg) = -6$$

(1) $E = \begin{vmatrix} \boxed{3a \quad 3b \quad 3c} \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix}$ $\qquad |A| = -ibd + bfg + cdh - afh + iae - cge = -6$

$$|E| = 3a(-4ei + 4fh) - 3b(-4di + 4fg) + 3c(-4dh + 4eg)$$
$$= -12a(ei - fh) + 12b(di - fg) - 12c(dh - eg)$$
$$= -12\left(a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)\right)$$
$$= -12|A| = -12(-6) = 72$$

(2) $E = \begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

$$|E| = (a+g)(ei - fh) - (b+h)(di - fg) + (c+i)(dh - eg)$$
$$= a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg) + \{\cancel{gei} - \cancel{gfh} - \cancel{hdi} + \cancel{hfg} + \cancel{idh} - \cancel{ieg}\}$$
$$= |A| = -6$$

(3) $E = \begin{vmatrix} \boxed{-3a \quad -3b \quad -3c} \\ d & e & f \\ g-4d & h-4e & i-4f \end{vmatrix}$

$$|E| = -3a(ei - 4ef - fh + 4fe) + 3b(di - 4df - fg + 4fd) - 3c(dh - 4de - eg + 4ed)$$
$$= -3\{a(ei - fh) - b(di - fg) + c(dh - eg)\} - 3[a(\cancel{4fe} - \cancel{4ef}) - b(\cancel{4fd} - \cancel{4df}) + c(\cancel{4ed} - \cancel{4de})]$$
$$= -3|A| = -3(-6) = 18$$

#2 삼각법을 이용하여 다음 행렬의 행렬식을 구하여라

(1) $A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow[E_{21}(-\frac{3}{4})]{E_{21}(-\frac{3}{4})} \begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} & 1 \\ 0 & -\frac{19}{4} & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-\frac{19}{3})} \begin{vmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{4} & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{13}{3} \end{vmatrix} = 4 \times \left(-\frac{3}{4}\right) \times \left(-\frac{13}{3}\right) = 13$$

(2) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow[E_{31}(-\frac{1}{2})]{E_{21}(-1)} \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{vmatrix} \xrightarrow{C_{24}} - \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 1 \end{vmatrix} \xrightarrow{E_{43}(-2)} - \begin{vmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -\{2 \times 2 \times (-3) \times 1\}$$

$$= 12$$

#3 적절한 방법을 이용하여 다음 행렬의 행렬식을 구하여라.

(1) $A=\begin{bmatrix}2&1&5&7\\3&0&1&-1\\2&0&0&0\\1&0&3&2\end{bmatrix}$

$$|A|=\begin{vmatrix}2&1&5&7\\3&0&1&-1\\2&0&0&0\\1&0&3&2\end{vmatrix}\xrightarrow[E_{31}(-1),\ E_{41}(-\frac{1}{2})]{E_{21}(-\frac{3}{2})}\begin{vmatrix}2&1&5&7\\0&-\frac{3}{2}&-\frac{13}{2}&-\frac{23}{2}\\0&-1&-5&-7\\0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}\end{vmatrix}\xrightarrow[E_{42}(-\frac{1}{3})]{E_{32}(-\frac{2}{3})}\begin{vmatrix}2&1&5&7\\0&-\frac{3}{2}&-\frac{13}{2}&-\frac{23}{2}\\0&0&-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\0&0&\frac{8}{3}&\frac{7}{3}\end{vmatrix}\xrightarrow{E_{43}(4)}\begin{vmatrix}2&1&5&7\\0&-\frac{3}{2}&-\frac{13}{2}&-\frac{23}{2}\\0&0&-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\0&0&0&5\end{vmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}2&1&5&7\\0&-\frac{3}{2}&-\frac{13}{2}&-\frac{23}{2}\\0&0&-\frac{2}{3}&\frac{2}{3}\\0&0&0&5\end{vmatrix}=2\times\left(-\frac{3}{2}\right)\times\left(-\frac{2}{3}\right)\times 5=10$$

$\therefore |A|=10$

(2) $A=\begin{bmatrix}2&1&3&4&5\\3&4&6&7&8\\0&0&4&1&2\\0&0&1&0&2\\0&0&2&0&3\end{bmatrix}$

$$|A|=\begin{vmatrix}2&1&3&4&5\\3&4&6&7&8\\0&0&4&1&2\\0&0&1&0&2\\0&0&2&0&3\end{vmatrix}\xrightarrow{E_{21}(-\frac{3}{2})}\begin{vmatrix}2&1&3&4&5\\0&\frac{5}{2}&\frac{3}{2}&1&\frac{1}{2}\\0&0&4&1&2\\0&0&1&0&2\\0&0&2&0&3\end{vmatrix}\xrightarrow[E_{53}(-\frac{1}{2})]{E_{43}(-\frac{1}{4})}\begin{vmatrix}2&1&3&4&5\\0&\frac{5}{2}&\frac{3}{2}&1&\frac{1}{2}\\0&0&4&1&2\\0&0&0&-\frac{1}{4}&\frac{3}{2}\\0&0&0&-\frac{1}{2}&2\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{54}(-2)}\begin{vmatrix}2&1&3&4&5\\0&\frac{5}{2}&\frac{3}{2}&1&\frac{1}{2}\\0&0&4&1&2\\0&0&0&-\frac{1}{4}&\frac{3}{2}\\0&0&0&0&-1\end{vmatrix}=2\times\frac{5}{2}\times4\times\left(-\frac{1}{4}\right)\times(-1)=5$$

$\therefore |A|=5$

(정리 3.2.4를 사용하여 풀 수도 있다.

$\begin{vmatrix}2&1\\3&4\end{vmatrix}\begin{vmatrix}4&1&2\\1&0&2\\2&0&3\end{vmatrix}=5\times1=5$)

#4 행렬식에 대한 다음의 등식이 성립함을 증명하여라.

(1) $|A|=\begin{vmatrix}a&b&b&b\\a&b&a&a\\a&a&b&a\\b&b&b&a\end{vmatrix}=-(a-b)^4$

$$\begin{vmatrix}a&b&b&b\\a&b&a&a\\a&a&b&a\\b&b&b&a\end{vmatrix}\xrightarrow[E_{31}(-1),\ E_{41}(-\frac{b}{a})]{E_{21}(-1)}\begin{vmatrix}a&b&b&b\\0&0&a-b&a-b\\0&a-b&0&a-b\\0&\frac{-b^2+a\times b}{a}&\frac{-b^2+a\times b}{a}&\frac{a^2-b^2}{a}\end{vmatrix}\xrightarrow{C_{23}}-\begin{vmatrix}a&b&b&b\\0&a-b&0&a-b\\0&0&a-b&a-b\\0&\frac{-b^2+a\times b}{a}&\frac{-b^2+a\times b}{a}&\frac{a^2-b^2}{a}\end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{42}(-\frac{b}{a})}-\begin{vmatrix}a&b&b&b\\0&a-b&0&a-b\\0&0&a-b&a-b\\0&0&\frac{-b^2+a\times b}{a}&a-b\end{vmatrix}\xrightarrow{E_{43}(-\frac{b}{a})}-\begin{vmatrix}a&b&b&b\\0&a-b&0&a-b\\0&0&a-b&a-b\\0&0&0&\frac{a^2+b^2-2a\times b}{a}\end{vmatrix}=-(\cancel{a})\times(a-b)\times(a-b)\times\left(\frac{a^2+b^2-2ab}{\cancel{a}}\right)$$

$$=-(a-b)^2\times(a-b)^2$$

$$=-(a-b)^4$$

Date. / /

(2)

$$|A| = \begin{vmatrix} x & a & b & \boxed{1} \\ a & x & b & \boxed{1} \\ a & b & x & \boxed{1} \\ a & b & c & \boxed{1} \end{vmatrix} = \underline{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

$$|A| = C_{14} + C_{24} + C_{34} + C_{44}$$

$$= -\begin{vmatrix} a & x & b \\ a & b & x \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & a & b \\ a & b & x \\ a & b & c \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x & a & b \\ a & x & b \\ a & b & c \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x & a & b \\ a & x & b \\ a & b & x \end{vmatrix}$$

$$= -(abc + ax^2 + ab^2 - ab^2 - abx - acx)$$
$$+ (bcx + a^2x + ab^2 - ab^2 - bx^2 - a^2c)$$
$$- (cx^2 + a^2b + ab^2 - abx - b^2x - a^2c)$$
$$+ (x^3 + a^2b + ab^2 - abx - b^2x - a^2x)$$
$$= x^3 - x^2(a+b+c) + x(ab+ac+bc) - abc$$
$$= \underline{(x-a)(x-b)(x-c)}$$

∴ 등식이 성립

3.3 절 행렬식과 역행렬, 연립선형방정식

#1 nxn 행렬 A에 대하여 다음의 동치 조건을 증명하여라.

$|A| = 0 \Leftrightarrow |adj(A)| = 0$

이 명제의 대우는 $|A| \neq 0 \Leftrightarrow |adj(A)| \neq 0$ 이다. 이를 증명해보자.

→ $A \cdot adj(A) = (\det A) I_n$

$\det(A \cdot adj(A)) = \det((\det A) I_n)$

$\det(A) \cdot \det(adj(A)) = (\det A)^n \det(I_n)$ (∵ 정리 3.2.1 (3-1) $\det(kA) = k^n(\det A)$)

$\det(A) \cdot \det(adj(A)) = (\det A)^n$

$\det(adj(A)) = (\det A)^{n-1}$

$|adj(A)| = (|A|)^{n-1}$

∴ $|A| \neq 0 \Leftrightarrow |adj(A)| \neq 0$

∴ $|A| = 0 \Leftrightarrow |adj(A)| = 0$ 이 성립한다.

#2 다음의 제차 연립선형방정식이 자명한 해 만을 가지도록 상수 k의 값을 결정하여라.

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + kx_3 = 0 \end{cases}$$

이 연립선형방정식이 자명한 해를 가질려면
계수행렬의 행렬식이 0이되면 안된다 ($\det A \neq 0$)

$$\det A = \begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = k^3+1+1-k-k-k = k^3-3k+2$$

$k^3-3k+2 \neq 0$ 이어야 한다.

$(k-1)^2(k+2) \neq 0 \quad \therefore k \neq 1, k \neq -2$

#3 적절한 방법을 이용하여 다음연립선형 방정식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = k \\ a^2x_1 + b^2x_2 + c^2x_3 = k^2 \end{cases}$$

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = bc^2+a^2c+ab^2-a^2b-b^2c-ac^2$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & b & c \\ k^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = bc^2+k^2c+kb^2-k^2b-b^2c-kc^2$$

$$x_1 = \frac{bc^2+k^2c+kb^2-k^2b-b^2c-kc^2}{bc^2+a^2c+ab^2-a^2b-b^2c-ac^2} = \frac{\det A_1}{\det A}$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & k & c \\ a^2 & k^2 & c^2 \end{vmatrix} = kc^2+a^2c+ak^2-a^2k-k^2c-ac^2$$

$$x_2 = \frac{kc^2+a^2c+ak^2-a^2k-k^2c-ac^2}{bc^2+a^2c+ab^2-a^2b-b^2c-ac^2} = \frac{\det A_2}{\det A}$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & k \\ a^2 & b^2 & k^2 \end{vmatrix} = bk^2+a^2k+ab^2-a^2b-b^2k-ak^2$$

$$x_3 = \frac{bk^2+a^2k+ab^2-a^2b-b^2k-ak^2}{bc^2+a^2c+ab^2-a^2b-b^2c-ac^2} = \frac{\det A_3}{\det A}$$

#4 다음 연립선형 방정식의 계수행렬을 A라고 할 때 아래의 물음에 답하여라.

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

(1) Gauss-Jordan 소거법을 이용하여 해를 구하여라.

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_{12}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 3 & -5 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{31}(1)]{E_{21}(-3)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_{23}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & -2 & 1 & -11 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[E_{32}(2)]{E_{12}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{13}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} x_1 &= 20 \\ x_2 &= 9 \\ x_3 &= 7 \end{aligned}$$

(2) det A와 adj A를 계산하고 이를 이용하여 해를 구하여라

$$\det A = -3 - 5 - 4 + 2 + 6 + 5$$

$$\det A = 1$$

$$\mathrm{Cofac}(A) = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{adj}A = \mathrm{Cofac}(A)^T = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & C_{31} \\ C_{12} & C_{22} & C_{32} \\ C_{13} & C_{23} & C_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -5 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -5 & -2 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & +1 & 3 \\ 0 & 1 & +1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\mathrm{adj}(A) = \mathrm{adj}(A)$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \quad \therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix} \quad \therefore \begin{aligned} x_1 &= 20 \\ x_2 &= 9 \\ x_3 &= 7 \end{aligned}$$

(3) Cramer의 공식을 이용하여 해를 구하여라.

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 4 & -1 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 25 - 16 - 10 + 2 + 20 = 20$$

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{20}{1} = 20$$

$$\det A_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 12 + 1 - 10 - 8 + 15 - 1 = 9$$

$$x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{9}{1} = 9$$

$$\det A_3 = \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = -15 + 20 + 2 - 1 - 24 + 25 = 7$$

$$x_2 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{7}{1} = 7$$

(4) 위의 세가지 방법 중 가장 쉬운 방법이 무엇이라고 생각하는가? 자신의 생각을 적어라.

크기가 n x n인 행렬 A 가 있을때 n이 3보다 작거나 같다면 (2),(3) 방법이 편할것이다. 하지만 n이 3보다 작거나 같아도 간단하게 할수 있다면 (1) 방법도 괜찮을 것이다. 만약 n이 3보다 커지면 detA를 구하는 방법이 복잡해지므로 (1)의 방법이 좋은 방법이라고 생각한다.