선형대수학 비대면 강의

7주 2차시 수업

조 성희

정 의 5.1.1 (1) 벡터공간 $\mathbb{R}^n$ 의 두 벡터

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

에 대하여 다음과 같이 정의된 실수

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n$$

을 $\boldsymbol{a}$ 와 $\boldsymbol{b}$ 의 내적(inner product or dot product)라고 하고 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ 로 나타낸다.

(2) 임의의 벡터 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ 에 대하여 다음과 같이 정의된 실수

$$\sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}} = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2}$$

를 $\boldsymbol{a}$ 의 **길이**(length) 또는 **크기**(magnitude)라고 하고 $\|\boldsymbol{a}\|$ 로 나타낸다. 특히, $\|\boldsymbol{a}\| = 1$ 인 벡터 $\boldsymbol{a}$ 를 **단위벡터**(unit vector)라고 한다.

(3) 두 벡터 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n) \in \mathbb{R}^n$ 에 대하여, 음이 아닌 실수

$$\|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}\|$$

을 $\boldsymbol{a}$ 와 $\boldsymbol{b}$ 사이의 **거리**(distance)라고 하고 $d(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$ 로 나타낸다.

추가

보 기 5.1.1 벡터 $\boldsymbol{a} = (0, -2, 1, 4, -2), \boldsymbol{b} = (1, 2, 0, 0, 5) \in \mathbb{R}^5$ 에 대하여

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + (-2) \cdot 5 = -14$$

이다. 또한 $\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 1^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{25} = 5$ 이고,

$$\frac{1}{\|\boldsymbol{a}\|}\boldsymbol{a} = \frac{1}{5}(0, -2, 1, 4, -2) = \left(0, -\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{2}{5}\right)$$

는 $\boldsymbol{a}$ 와 같은 방향을 가지는 단위벡터이다.

정 리 5.1.1 임의의 벡터 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ 와 스칼라 $k \in \mathbb{R}$ 에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$

(2) $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$, $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$

(3) $k(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = (k\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot (k\boldsymbol{b})$

(4) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = \|\boldsymbol{a}\|^2 \geq 0$ 그리고 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$

정리 5.1.1의 증명은 자명하므로 생략하기로 하고, 이를 이용하여 다음의 보기를 알아보도록 하자.

보 기 5.1.2 벡터 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ 에 대하여 $\|\boldsymbol{a}\| = 2,\ \ \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = -3,\ \|\boldsymbol{b}\| = 3$ 일 때,

$$(\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}) \cdot (3\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$$

를 구하여라.

【풀이】 정리 5.1.2의 (1),(2),(3)을 반복적으로 이용하면,

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}) \cdot (3\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) &= \boldsymbol{a} \cdot (3\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + (2\boldsymbol{b}) \cdot (3\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \\ &= \boldsymbol{a} \cdot (3\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + (2\boldsymbol{b}) \cdot (3\boldsymbol{a}) + (2\boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{b} \\ &= 3(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + 6(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}) + 2(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}) \\ &= 3\|\boldsymbol{a}\|^2 + 7(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) + 2\|\boldsymbol{b}\|^2 \\ &= 3 \cdot 2^2 + 7 \cdot (-3) + 2 \cdot 3^2 \\ &= 9\end{aligned}$$

이다.

Written by Cho Sung-hee

정 리 5.1.2 The Cauchy-Schwarz 부등식 $(|a_1b_1 + \cdots + a_nb_n|)^2 \le \sqrt{\ } \sqrt{\ }$

두 벡터 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ 에 대하여 다음의 부등식이 성립한다.

$$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}| \le \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$$

【증명】 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$ 또는 $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}$ 이면 "=" 가 자명하게 성립한다. 따라서 $\boldsymbol{a} \ne \boldsymbol{0}$ 이고 $\boldsymbol{b} \ne \boldsymbol{0}$ 인 경우에 대하여 증명하도록 하자.

임의의 $t \in \mathbb{R}$ 에 대하여 벡터 $t\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$ 를 생각하면

$$(t\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\cdot(t\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \|t\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\|^2 \ge 0$$

이 성립하므로

$$(t\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\cdot(t\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \|\boldsymbol{a}\|^2t^2 + 2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})t + \|\boldsymbol{b}\|^2 \ge 0$$

이다. 즉, 임의의 $t \in \mathbb{R}$ 에 대한 이차 절대 부등식이 성립하므로 "판별식≤ 0"을 만족한다.

따라서

$$(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2 \le \|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2$$

이고 양변에 제곱근을 씌우면

$$|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}| \le \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|$$

이다. □

정리 5.1.2에 의하면, 영벡터가 아닌 두 벡터 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ 에 대하여

$$-1 \le \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|} \le 1$$

이 성립함을 알 수 있다. 이로 부터 두 벡터가 이루는 각의 크기를 다음과 같이 정의 할 수 있다.

정 의 5.1.2 (1) 벡터공간 $\mathbb{R}^n$ 의 영벡터가 아닌 두 벡터 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 에 대하여

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}$$

를 만족하는 실수 θ $(0 \le \theta \le \pi)$ 를 벡터 $\boldsymbol{a}$ 와 $\boldsymbol{b}$ 가 이루는 **각의 크기**로 정의한다.

(2) 벡터공간 $\mathbb{R}^n$ 의 영벡터가 아닌 두 벡터 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 가 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$ 을 만족 할 때, 벡터 $\boldsymbol{a}$ 와 $\boldsymbol{b}$ 는 서로 **수직**(orthoginal)이라고 하고 $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ 로 나타낸다.

보 기 5.1.3 두 벡터 $\boldsymbol{a} = (1,-1,0,1), \boldsymbol{b} = (-1,2,-1,0) \in \mathbb{R}^4$ 가 이루는 각의 크기를 θ 라 고 하면, $(0 \le \theta \le \pi)$

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|} = \frac{-3}{\sqrt{3}\sqrt{6}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

에서

$$\theta = \frac{3\pi}{4}$$

이다.

보 기 5.1.4 두 벡터 $\boldsymbol{a} = (1,3,-1,2,0), \boldsymbol{b} = (-1,4,5,-3,2) \in \mathbb{R}^5$ 의 내적을 구해보면

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 1\cdot(-1) + 3\cdot 4 + (-1)\cdot 5 + 2\cdot(-3) + 0\cdot 2$$
$$= 0$$

이다. 따라서

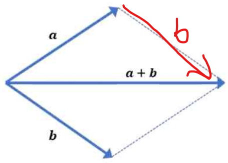
$$\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$$

이다.

정 리 5.1.3 삼각 부등식 (The Triangle Inequality)

벡터공간 $\mathbb{R}^n$ 의 두 벡터 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 에 대하여 다음의 부등식이 성립한다.

$$\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\| \le \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|$$



【증명】 정리 5.1.1에 의하여

$$\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\|^2 = (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} + 2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}$$
$$= \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) + \|\boldsymbol{b}\|^2$$
$$\le \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}| + \|\boldsymbol{b}\|^2$$

이다. 정리 5.1.2에 의하여 $\boxed{|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}| \le \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|}$ 이므로

$$\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\|^2 \le \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}| + \|\boldsymbol{b}\|^2$$
$$\le \|\boldsymbol{a}\|^2 + 2\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| + \|\boldsymbol{b}\|^2$$
$$= (\|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|)^2$$

이다. $\|a + b\| \ge 0$ 이고 $\|a\| + \|b\| \ge 0$ 이므로, 부등식

$$\boxed{\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\| \le \|\boldsymbol{a}\| + \|\boldsymbol{b}\|}$$

이 성립한다. □

정리 5.1.3에서 두 벡터 $\boldsymbol{a}$ 와 $\boldsymbol{b}$ 가 서로 수직인 벡터라고 가정하면 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} = 0$ 이다. 따라서 다음의 정리가 성립한다.

따름정리 5.1.4 피타고라스의 정리

벡터공간 $\mathbb{R}^n$ 의 영벡터가 아닌 두 벡터 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 에 대해서 다음의 두 조건은 동치이다.

(1) $\boldsymbol{a} \perp \boldsymbol{b}$ $\to a\cdot b = 0$

(2) $\|\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}\|^2 = \|\boldsymbol{a}\|^2 + \|\boldsymbol{b}\|^2$ $\to a\cdot b = 0$