선형대수학 비대면 강의

12주 1차시 수업

2020년 06월 02일

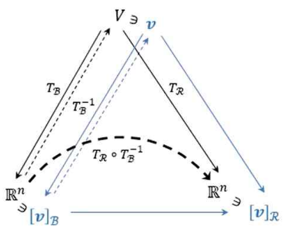
조 성희

실수체 $\mathbb{R}$ 위의 n 차원 벡터공간 V 에서 서로 다른 두 개의 순서기저

$$\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}, \mathcal{R} = \{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \ldots, \boldsymbol{u_n}\}$$

를 생각하자. 각 벡터 $\boldsymbol{v} \in V$ 의 기저 $\mathcal{B}$ 에 대한 좌표벡터 $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}$ 로 부터 기저 $\mathcal{R}$ 에 대한 좌표 벡터 $[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{R}}$ 을 구해보자.

두 순서기저 $\mathcal{B}$ 와 $\mathcal{R}$ 에 의해서 정의되는 각 동형변환 $T_{\mathcal{B}}, T_{\mathcal{R}}: V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 에 대하여, $T_{\mathcal{B}}^{-1}$ 와 $T_{\mathcal{R}}$ 의 합성변환 $T_{\mathcal{R}} \circ T_{\mathcal{B}}^{-1}$ 은 $\mathbb{R}^n$ 에서 $\mathbb{R}^n$ 으로의 자기동형변환이다.



또한, $T_{\mathcal{R}} \circ T_{\mathcal{B}}^{-1}$ 은 각 벡터 $\boldsymbol{v} \in V$ 에 대하여

$$T_{\mathcal{R}} \circ T_{\mathcal{B}}^{-1}([\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}}) = [\boldsymbol{v}]_{\mathcal{R}}$$

을 만족한다.

따라서 동형변환 $T_{\mathcal{R}} \circ T_{\mathcal{B}}^{-1}: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 에 대한 $n \times n$ 크기의 표준행렬 P 가 존재하여, 각 벡터 $\boldsymbol{v} \in V$ 에 대하여

$* \rightarrow$ $$\boxed{P[\boldsymbol{v}]_{\mathcal{B}} = [\boldsymbol{v}]_{\mathcal{R}}}$$ for any $v \in V$

을 만족한다.

이 때의 표준행렬 P 를 기저 $\mathcal{B}$ 에서 기저 $\mathcal{R}$ 로의 **전이행렬**(transition matrix)라고 한다.

전이행렬 P 를

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}$$ $n \times n$

으로 나타내고, P 를 구해보자.

먼저, $\boldsymbol{v_1} \in \mathcal{B}$ 에 대하여, $\boldsymbol{v_1} = 1\boldsymbol{v_1} + 0\boldsymbol{v_2} + \cdots + 0\boldsymbol{v_n}$ 이므로 $[\boldsymbol{v_1}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ 이다. 여기서

전이행렬 P 는 $P[\boldsymbol{v_1}]_{\mathcal{B}} = [\boldsymbol{v_1}]_{\mathcal{R}}$ 을 만족해야 한다.

따라서,

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{[v_1]_{\mathcal{B}}} = \begin{bmatrix} p_{11} \\ p_{21} \\ \vdots \\ p_{n1} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{v_1}]_{\mathcal{R}}$$

이다. 즉, P 의 첫 번째 열은 $[\boldsymbol{v_1}]_{\mathcal{R}}$ 이다.

다음으로, $\boldsymbol{v_2} \in \mathcal{B}$ 에 대하여, $\boldsymbol{v_2} = 0\boldsymbol{v_1} + 1\boldsymbol{v_2} + \cdots + 0\boldsymbol{v_n}$ 이므로 $[\boldsymbol{v_2}]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ 이다. 여기서 전이행렬 P 는 $P[\boldsymbol{v_2}]_{\mathcal{B}} = [\boldsymbol{v_2}]_{\mathcal{R}}$ 을 만족해야 한다.

따라서,

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{12} \\ p_{22} \\ \vdots \\ p_{n2} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{v_2}]_{\mathcal{R}}$$

이다. 즉, P 의 두 번째 열은 $[\boldsymbol{v_2}]_{\mathcal{R}}$ 이다.

이와 같은 방법으로 생각하면, 전이행렬 P 의 각 $j(j = 1,2,\ldots,n)$번 째 열은

$$\begin{bmatrix} p_{1j} \\ p_{2j} \\ \vdots \\ p_{nj} \end{bmatrix} = [\boldsymbol{v_j}]_{\mathcal{R}}$$

임을 알 수 있다. 따라서,

$$P = \left[[\boldsymbol{v_1}]_{\mathcal{R}} \;\middle|\; [\boldsymbol{v_2}]_{\mathcal{R}} \;\middle|\; \cdots \;\middle|\; [\boldsymbol{v_n}]_{\mathcal{R}} \right]$$

이다.

보 기 6.4.3 실수체 $\mathbb{R}$ 위의 벡터공간 $\mathbb{R}^3$ 에서 두 개의 순서기저

$$\mathcal{B} = \{(1,-1,0),(2,-1,1),(0,2,-1)\}, \mathcal{R} = \{(1,1,0),(1,0,1),(0,1,1)\}$$

에 대하여 $\mathcal{B}$ 에서 $\mathcal{R}$ 로의 전이행렬 P 를 구해보자.

$$(1,-1,0) = 0(1,1,0) + 1(1,0,1) + (-1)(0,1,1,) \implies [(1,-1,0)]_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix},$$

$$(2,-1,1) = 0(1,1,0) + 2(1,0,1) + (-1)(0,1,1,) \implies [(2,-1,1)]_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$(0,2,-1) = \frac{3}{2}(1,1,0) + \left(-\frac{3}{2}\right)(1,0,1) + \frac{1}{2}(0,1,1,) \implies [(0,2,-1)]_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 3/2 \\ -3/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

이다. 따라서

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3/2 \\ 1 & -1 & -3/2 \\ -1 & 1 & 1/2 \end{bmatrix}$$

이다.