선형대수학 비대면 강의

9주 2차시 수업

2020년 05월 15일

조 성희

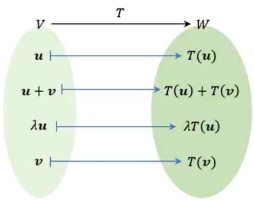
6장 선형변환 (Linear Transformation)

6.1 선형변환과 선형연산자

정 의 6.1.1 체 F 위의 벡터공간 V, W 에 대하여, 함수 $T: V \longrightarrow W$ 가 덧셈과 스칼라 곱을 보존할 때, 즉 임의의 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ 와 $\lambda \in F$ 에 대하여

$$T(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v}),$$
$$T(\lambda \boldsymbol{u}) = \lambda T(\boldsymbol{u})$$

일 때, T 를 V 에서 W 로의 **선형변환**(linear transformation)이라고 한다. 특히, V 에서 V 자신으로의 선형변환 $T: V \longrightarrow V$ 를 V 위의 **선형연산자**(linear Operator)라고도 한다.



보 기 6.1.1 아래와 같이 정의된 함수 $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ 가 선형변환인지 알아보자.

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ 3x_2 \end{bmatrix}$$

두 벡터 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ 와 스칼라 $\lambda \in \mathbb{R}$ 에 대하여,

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} (x_1+y_1) - (x_2+y_2) \\ 3(x_2 + y_2) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ 3x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 - y_2 \\ 3y_2 \end{bmatrix} = T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}\right)$$

이므로 T 는 덧셈을 보존한다. 또한

$$T\left(\lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = T\left(\begin{bmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \lambda x_1 - \lambda x_2 \\ 3\lambda x_2 \end{bmatrix}$$
$$= \lambda \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ 3x_2 \end{bmatrix} = \lambda T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right)$$

이므로 T 는 스칼라 곱도 보존한다. 따라서 T 는 $\mathbb{R}^2$ 에서 $\mathbb{R}^2$ 로의 선형변환, 즉 $\mathbb{R}^2$ 위의 선형연산자이다.

보 기 6.1.2 함수 $T: Mat_{m\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow Mat_{n\times m}(\mathbb{R})$, $T(A) = A^T$ 가 선형변환인지 알아보자.
두 벡터 $A, B \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ 과 스칼라 $\lambda \in \mathbb{R}$ 에 대하여,

$$T(A+B) = (A+B)^T = A^T + B^T = T(A) + T(B),$$
$$T(\lambda A) = (\lambda A)^T = \lambda A^T = \lambda T(A)$$

이므로 T 는 덧셈과 스칼라 곱을 보존한다. 따라서 T 는 $Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ 에서 $Mat_{n\times m}(\mathbb{R})$ 으로의 선형변환이다.

보 기 6.1.3 다음과 같이 정의된 세 함수 $T_1, T_2, T_3: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ 는 모두 선형변환이 아니다.

$$T_1\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x^2 \\ 2y+z \end{bmatrix},$$
$$T_2\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} xy \\ yz \end{bmatrix},$$
$$T_3\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+2y+1 \\ -y+z \end{bmatrix}.$$

정 리 6.1.1 임의의 행렬 $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ 에 대하여 정의된 함수 $T_A: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$,

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ 에 대하여 } T_A(X) = AX,$$

는 선형변환이다.

【증명】

두 벡터 $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ 와 스칼라 $\lambda \in \mathbb{R}$ 에 대하여,

$$T_A(X+Y) = A(X+Y) = AX + AY = T_A(X) + T_A(Y),$$
$$T_A(\lambda X) = A(\lambda X) = \lambda(AX) = \lambda T_A(X)$$

이므로 T_A 는 선형변환이다. □

정 리 6.1.2 함수 $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 가 선형변환이면,

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ 에 대하여 } T(X) = AX (= T_A(X))$$

를 만족하는 행렬 $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ 가 유일하게 존재한다.

【증명】 선형변환 $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$가 벡터공간 $\mathbb{R}^n$ 의 표준기저 $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ 에 대하여

$$T(\boldsymbol{e_1}) = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, T(\boldsymbol{e_2}) = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, T(\boldsymbol{e_n}) = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

이라고 하면
임의의 $X = [x_1\ x_2 \cdots x_n]^T \in \mathbb{R}^n$ 에 대하여

$$T(X) = T(x_1\boldsymbol{e_1} + x_2\boldsymbol{e_2} + \cdots + x_n\boldsymbol{e_n}) = x_1T(\boldsymbol{e_1}) + x_2T(\boldsymbol{e_2}) + \cdots + x_nT(\boldsymbol{e_n})$$
$$= \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} x_2 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n$$
$$= \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

이다.

정리 6.1.1과 정리 6.1.2에 의하여 다음의 사실을 알 수 있다.

$$
\begin{array}{ccc}
\{T:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m \mid T \text{ 는 선형변환}\} & \xleftrightarrow{\text{일대일 대응}} & Mat_{m\times n}(\mathbb{R}) \\
\rotatebox[origin=c]{90}{$\in$} & & \rotatebox[origin=c]{90}{$\in$} \\
T & \xleftrightarrow[T(X)=AX]{} & A
\end{array}
$$

$A_{m\times n}$: $\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ is a lin. trans.

선형변환 $T:\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 에 대하여 $T(X) = AX$ 를 만족하는 행렬 A 를 선형변환 T 의 **(표준) 행렬**(standard matrix)이라고 한다.

$\mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 + \end{bmatrix}$

2×2 is a lin. trans.

보 기 6.1.4 다음과 같이 함수 $T:\mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$,

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_1 + 3x_3 \end{bmatrix}$$

는 선형변환이다.

여기서

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ -x_1 + 3x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

이다.

따라서 선형변환 T 의 표준행렬은 $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ 이다. 실제로 A 의 각 열벡터는 $\mathbb{R}^3$ 의 표준 기저의 벡터 $\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \boldsymbol{e_3}$ 가 T 에 의해서 대응된 벡터이다.

$$T(\boldsymbol{e_1}) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, T(\boldsymbol{e_2}) = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, T(\boldsymbol{e_3}) = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$$