선형대수학 비대면 강의

5주 2차시 수업

조 성희

4.4 선형독립(linearly independent)과 선형종속(linearly dependent)

정 의 4.4.1 V 는 체 F 위의 벡터공간이고, $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n} \in V$ 이라고 하자. 다음의 등식

$$c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + \cdots + c_n\mathbf{v_n} = \mathbf{0}$$

을 만족하는 동시에 0 이 아닌 스칼라 $c_1, c_2, \dots, c_n \in F$ 이 존재 할 때, n 개의 벡터 $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n}$ 은 **선형종속**(linearly dependent) 또는 **일차종속**이라고 한다. 한편, $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n}$이 선형종속이 아닐 때, 즉 $c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + \cdots + c_n\mathbf{v_n} = \mathbf{0}$ 을 만족하는 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 은 $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ 만이 존재할 때, 벡터 $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n}$ 은 **선형독립**(linearly independent) 또는 **일차독립**이라고 한다.

정 리 4.4.1 V 는 체 F 위의 벡터공간이고, $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n} \in V$ 이라고 할 때, 다음은 동치이다.

(1) $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n}$ 은 선형종속이다.

(2) $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n}$ 중 적어도 하나의 벡터는 나머지 벡터들의 선형결합이다.

【증명】 (1)⟹(2) $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n}$이 선형종속이라고 하면

$$c_1\mathbf{v_1} + c_2\mathbf{v_2} + \cdots + c_n\mathbf{v_n} = \mathbf{0}$$

을 만족하는 동시에 0이 아닌 스칼라 $c_1, c_2, \dots, c_n \in F$가 존재한다. $c_i \neq 0$ 라고 하면, 역원 c_i^{-1} 가 체 F 에 존재한다. 위의 등식으로부터

$$c_i\mathbf{v_i} = (-c_1\mathbf{v_1}) + \cdots + (-c_{i-1}\mathbf{v_{i-1}}) + (-c_{i+1}\mathbf{v_{i+1}}) + \cdots + (-c_n\mathbf{v_n})$$

이고, 양변을 c_i^{-1}배 해주면

$$\mathbf{v_i} = (-c_1c_i^{-1})\mathbf{v_1} + \cdots + (-c_{i-1}c_i^{-1})\mathbf{v_{i-1}} + (-c_{i+1}c_i^{-1})\mathbf{v_{i+1}} + \cdots + (c_nc_i^{-1})\mathbf{v_n}$$

이다. 따라서 $\mathbf{v_i}$ 는 나머지 벡터들의 선형결합이다.

(2)⟹(1) 벡터 $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n}$ 중 하나의 벡터 $\mathbf{v_i}$ 가 나머지 벡터들의 선형결합이라고 가정하자. 즉, 적당한 스칼라 $c_1, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_n \in F$ 이 존재하여

$$\mathbf{v_i} = c_1\mathbf{v_1} + \cdots + c_{i-1}\mathbf{v_{i-1}} + c_{i+1}\mathbf{v_{i+1}} + \cdots + c_n\mathbf{v_n}$$

이라고 하자. 위 등식의 양변에 $-\mathbf{v_i} = (-1)\mathbf{v_i}$ 를 더해주면

$$\mathbf{0} = c_1\mathbf{v_1} + \cdots + c_{i-1}\mathbf{v_{i-1}} + (-1)\mathbf{v_i} + c_{i+1}\mathbf{v_{i+1}} + \cdots + c_n\mathbf{v_n}$$

이다. 따라서 n 개의 벡터 $\mathbf{v_1}, \mathbf{v_2}, \dots, \mathbf{v_n}$ 은 선형종속이다. □

(1) $v_1, v_2, \cdots v_n$ 은 선형독립이다.

(2) $v_1, v_2, \cdots v_n$ 중 어떠한 벡터라 할지라도 그것을 제외한 나머지 벡터들의 선형결합이 아니다.

보 기 4.4.1 벡터공간 $\mathbb{R}^3$의 세 벡터 $(1,1,-2),(2,5,-1),(0,1,1)$이 선형독립 또는 선형종속인지를 알아보자.

다음의 등식

$$c_1(1,1,-2)+c_2(2,5,-1)+c_3(0,1,1)=(0,0,0)$$

을 만족하는 c_1,c_2,c_3 는 제차 연립선형방정식

$$\begin{cases} c_1 \quad +2c_2 \qquad\quad =0 \\ c_1 \quad +5c_2 \quad +c_3 \;=0 \\ -2c_1 \quad -c_2 \quad +c_3 \;=0 \end{cases}$$

의 해를 의미한다.

Gauss-Jordan소거법을 이용하면,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2/3 & 0 \\ 0 & 1 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

이므로 위의 제차 연립선형방정식은 무수히 많은 해를 가진다. 즉, 위의 등식을 만족하는 c_1,c_2,c_3 가 $c_1=c_2=c_3=0$ 이외에도 무수히 많이 존재하므로 문제에서 주어진 세 벡터는 선형종속이다.

만약, 위의 제차 연립선형방정식에서 계수행렬의 행렬식이 0이 아니라면, 즉

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0$$

라고 가정한다면, 연립방정식의 해는 유일한 해 $c_1=c_2=c_3=0$ 만이 존재할 것 이다. 따라서 세 벡터는 선형독립일 것 이다.

보 기 4.4.2 벡터공간 $\mathbb{R}^3$ 의 임의의 네 벡터

$$(a_1,a_2,a_3),(b_1,b_2,b_3),(c_1,c_2,c_3),(d_1,d_2,d_3)$$

가 선형독립 또는 선형종속인지를 알아보자.

다음의 등식

$$c_1(a_1,a_2,a_3)+c_2(b_1,b_2,b_3)+c_3(c_1,c_2,c_3)+c_4(d_1,d_2,d_3)=(0,0,0)$$

을 만족하는 c_1,c_2,c_3 는 제차 연립선형방정식

$$(*)\left[\begin{array}{cccc|c} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & 0 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 & 0 \end{array}\right]$$

의 해를 의미한다.

제차 연립선형방정식(*)을 살펴보면 미지수가 4개이고 방정식의 개수가 3개이므로 (*)의 기약 행사다리꼴 행렬은 적어도 1개의 자유변수를 가진다. 따라서 (*)은 자명한 해, $c_1=c_2=c_3=0$ 이외에도 무수히 많은 해를 가짐을 알 수 있다. 그러므로 벡터공간 $\mathbb{R}^3$ 의 임의의 네 벡터는 항상 선형종속이다.

정 리 4.4.2 벡터공간 $\mathbb{R}^n$ 에서 m 개의 벡터

$$\boldsymbol{v_1}=(a_{11},a_{12},\ldots,a_{1n}),\boldsymbol{v_2}=(a_{21},a_{22},\ldots,a_{2n}),\ldots,\boldsymbol{v_m}=(a_{m1},a_{m2},\ldots,a_{mn})$$

에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $m<n$ 일 때에는 다음이 성립한다.

$$\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2},\ldots,\boldsymbol{v_m} \text{ 이 선형독립이다.} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{mm} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

(2) $m=n$ 일 때에는 다음이 성립한다.

$$\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2},\ldots,\boldsymbol{v_n} \text{ 이 선형독립이다.} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

(3) $m>n$ 이면 $\boldsymbol{v_1},\boldsymbol{v_2},\ldots,\boldsymbol{v_m}$ 은 항상 선형종속이다.

정사각행렬 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ 에 대하여 $|A|=|A^T|$ 이므로, 정리 4.4.2의 (2)에서 다음의 명제도 동치이다.

"행렬 A 의 n 개의 행벡터

$$(a_{11},a_{21},\ldots,a_{n1}),(a_{12},a_{22},\ldots,a_{n2}),\ldots,(a_{1n},a_{2n},\ldots,a_{nn})$$

도 선형독립이다."

보 기 4.4.3 벡터공간 $P_3[x]$ 의 세 벡터

$$2+x^2-x^3,-x+x^2+3x^3,-1-x+2x^2$$

이 선형독립 또는 선형종속인지를 알아보자.

등식

$$c_1(2+x^2-x^3)+c_2(-x+x^2+3x^3)+c_3(-1-x+2x^2)=0$$

을 만족하는 c_1,c_2,c_3 는 제차 연립선형방정식

$$\begin{cases} 2c_1 \qquad\qquad -c_3 \;=0 \\ \qquad -c_2 \quad -c_3 \;=0 \\ c_1 \quad +c_2 \quad +2c_3 \;=0 \\ -c_1 \quad +3c_2 \qquad\quad =0 \end{cases}$$

의 해이다.

Gauss-Jordan소거법을 이용하면

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

이므로 연립방정식은 자명한 해 $c_1=c_2=c_3=0$ 을 유일하게 가진다. 따라서, 세 벡터(다항식)은 선형독립이다.