

2017.1630 / 남주형

6장 연습문제

#1. \mathbb{R} 위의 두 벡터공간 사이에 정의된 다음의 함수가 선형 변환임을 판정하여라. 만약 선형 변환이라면 증명하고 선형 변환이 아니라면 그 이유를 충분히 밝히라.

(1) 내적공간 V 에 대하여 $T: V \rightarrow \mathbb{R}$, $T(v) = \|v\|$.

내적공간 V 를 \mathbb{R}^2 의 표준내적 벡터공간이라 하자.

두 벡터 $u = (1, 1)$, $v = (2, 1) \in V$ 에 대하여

$$T(u+v) = T((1,1) + (2,1)) = T((3,2)) = \|(3,2)\| = \sqrt{13}$$

$$T(u) = T((1,1)) = \|(1,1)\| = \sqrt{2}$$

$$T(v) = T((2,1)) = \|(2,1)\| = \sqrt{5}$$

$$\therefore T(u+v) = \sqrt{13} \neq (\sqrt{2} + \sqrt{5}) = T(u) + T(v)$$

$\therefore T$ 가 덧셈을 보존하지 못하므로 선형 변환이 아니다.

(2) 임의의 고정된 벡터 $v_0 \in \mathbb{R}^3$ 에 대하여 $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $T(v) = v \times v_0$

두 벡터 $u = (x_1, x_2, x_3)$, $v = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ 와 스칼라 $\alpha \in \mathbb{R}$ 에 대하여

$(v_0 = (a, b, c) \in \mathbb{R}^3)$ 이라 하자.

$$T(u+v) = T((x_1, x_2, x_3) + (y_1, y_2, y_3)) = T((x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3))$$

$$= (u+v) \times v_0 = (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) \times (a, b, c)$$

$$= (c(x_2+y_2) - b(x_3+y_3), -c(x_1+y_1) + a(x_3+y_3), b(x_1+y_1) - a(x_2+y_2))$$

$$T(u) = T((x_1, x_2, x_3)) = (x_1, x_2, x_3) \times (a, b, c)$$

$$= (cx_2 - bx_3, -cx_1 + ax_3, bx_1 - ax_2)$$

$$T(v) = T((y_1, y_2, y_3)) = (y_1, y_2, y_3) \times (a, b, c)$$

$$= (cy_2 - by_3, -cy_1 + ay_3, by_1 - ay_2)$$

$$T(u) + T(v) = (cx_2 - bx_3, -cx_1 + ax_3, bx_1 - ax_2) + (cy_2 - by_3, -cy_1 + ay_3, by_1 - ay_2)$$

$$= (c(x_2+y_2) - b(x_3+y_3), -c(x_1+y_1) + a(x_3+y_3), b(x_1+y_1) - a(x_2+y_2))$$

$$\therefore T(u+v) = T(u) + T(v)$$

$\therefore T$ 는 덧셈을 보존한다.

$$\begin{aligned}
 T(\lambda u) &= T(\lambda(x_1, x_2, x_3)) = T((\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)X(a, b, c) \\
 &= (\lambda cx_2 - \lambda bx_3, -\lambda ax_1 + \lambda ax_3, \lambda bx_1 - \lambda ax_2) \\
 &= \lambda (cx_2 - bx_3, -ax_1 + ax_3, bx_1 - ax_2) \\
 &= \lambda T(u)
 \end{aligned}$$

∴ T는 스칼라 곱도 보존한다.

∴ 선형 변환이다.

(3) 임의의 고정된 행렬 $A \in \text{Mat}_{n \times n}(\mathbb{R})$ 에 대하여 $T: \text{Mat}_{n \times r}(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Mat}_{n \times r}(\mathbb{R}), T(X) = AX$.

두 행렬 $X, Y \in \text{Mat}_{n \times r}(\mathbb{R})$ 과 스칼라 $\lambda \in \mathbb{R}$ 에 대하여

$$T(X+Y) = A(X+Y) = AX + AY = T(X) + T(Y)$$

∴ T는 덧셈을 보존한다.

$$T(\lambda X) = A(\lambda X) = \lambda(AX) = \lambda T(X)$$

∴ T는 스칼라 곱도 보존한다.

∴ 선형 변환이다.

$$(4) T: P_2[x] \rightarrow P_2[x], T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = [a_0] + [a_1]x + [a_2]x^2.$$

(임의의 $x \in \mathbb{R}$ 에 대하여 $[x]$ 는 $n \leq x < n+1$ 을 만족하는 정수 n 이다.)

두 행렬 $u, v \in P_2[x]$ 와 스칼라 $\lambda \in \mathbb{R}$ 에 대하여

$$u = 1.5 + 1.5x + 1.5x^2, v = 1.6 + 1.6x + 1.6x^2 \text{라 하자.}$$

$$T(u+v) = T(3.1 + 3.1x + 3.1x^2) = [3.1] + [3.1]x + [3.1]x^2 = 3 + 3x + 3x^2$$

$$\begin{aligned}
 T(u) + T(v) &= T(1.5 + 1.5x + 1.5x^2) + T(1.6 + 1.6x + 1.6x^2) = ([1.5] + [1.5]x + [1.5]x^2) + ([1.6] + [1.6]x + [1.6]x^2) \\
 &= (1 + 1x + 1x^2) + (1 + 1x + 1x^2) = 2 + 2x + 2x^2
 \end{aligned}$$

$$\therefore T(u+v) \neq T(u) + T(v)$$

∴ T는 덧셈을 보존하지 못하므로 선형 변환이 아니다.

(5) 내적 공간 V 와 영 벡터가 아닌 벡터 $w \in V$ 에 대하여

$$T: V \rightarrow \langle w \rangle, T(v) = \text{proj}_w v$$

벡터 $u, v \in V$, 스칼라 $\lambda \in \mathbb{R}$ 에 대하여

$$T(u+v) = \text{proj}_w(u+v) = \frac{\langle u+v, w \rangle}{\|w\|^2} w = \frac{\langle u, w \rangle}{\|w\|^2} w + \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2} w = T(u) + T(v)$$

$$T(\lambda u) = \text{proj}_w(\lambda u) = \frac{\langle \lambda u, w \rangle}{\|w\|^2} w = \lambda \frac{\langle u, w \rangle}{\|w\|^2} w = \lambda T(u)$$

$\therefore T$ 는 덧셈과 스칼라 곱을 보존하므로 선형 변환이다.

#2 다음 명제들에 대하여 참(True)과 거짓(False)을 판단하여라. 만약 명제가 참이라면 그 이유를 간단히 설명하고, 거짓인 명제는 참인 명제로 바꿔 적어라.
문제 (가) (6)에서 $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m (m < n)$ 은 선형 변환이고 T 의 표준행렬을 A 라고 하자.

$A \in \text{Mat}_{m \times n}(\mathbb{R})$ 라 하면 벡터 $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ 에 대하여 $T(X) = AX$ 이다.

(1) $\ker(T)$ 는 A 의 핵공간이다. <거짓>

$\ker(T) = \{X \in \mathbb{R}^n | T(X) = 0\} = \{X \in \mathbb{R}^n | AX = 0\}$ 이므로
 $\ker(T)$ 는 제차연립방정식 $AX=0$ 의 핵공간이다.

(2) $\text{range}(T)$ 는 A 의 열공간이다. <참>

$\text{range}(T) = \{T(X) | X \in \mathbb{R}^n\} = \{AX | X \in \mathbb{R}^n\}$ 이므로
 $\text{range}(T)$ 는 A 의 열공간이다.

(3) $\text{rank}(T)$ 는 A 의 기약 행 사다리꼴 행렬에서 나타나는 자유행의 개수이다. <거짓>

$\text{rank}(T)$ 는 A 의 기약 행 사다리꼴에서의 영행이 아닌 행벡터의 개수
즉, 선형변수의 개수이다. (\because 정의 6.2.4) $\dim(\text{range}(T)) = \text{rank}(T)$

(4) $\text{nullity}(T)$ 는 A 의 선형독립인 열벡터의 최대 개수이다. <거짓>

$\text{nullity}(T)$ 는 A 의 기약 행 사다리꼴 행렬에서 나타나는 자유행의 개수이다

(5) $\text{nullity}(T) \leq n-m$ <거짓>

$$\text{nullity}(T) = \text{nullity}(A)$$

$$n = \text{rank}(A) + \text{nullity}(A), m = \text{rank}(A^T) + \text{nullity}(A^T)$$

$$n-m = \text{rank}(A) - \text{rank}(A^T) + \text{nullity}(A) - \text{nullity}(A^T)$$

$$= \text{nullity}(A) - \text{nullity}(A^T) \quad (\because \text{rank}(A) = \text{rank}(A^T))$$

$$\therefore \text{nullity}(A) \geq \text{nullity}(A) - \text{nullity}(A^T)$$

$$\therefore \text{nullity}(T) \geq n-m$$

(6) $\text{nullity}(T) = n-m$ 이면 연립방정식 $AX=B$ 가 임의의 $B \in \mathbb{R}^m$ 에 대하여 해를 가진다. <참>

$$n-m = \text{nullity}(A) - \text{nullity}(A^T) = \text{nullity}(T) \quad \therefore \text{nullity}(A^T) = 0 \quad \therefore \text{rank}(A) = m$$

$\therefore A$ 의 기약 행 사다리꼴에서의 선형변수의 개수가 m 개 이므로 A 의 영행이 존재한다.

$\therefore AX=B$ 가 임의의 $B \in \mathbb{R}^m$ 에 대하여 해를 가진다. ($X=A^+B$)

#3. $k \in \mathbb{R}$ 일 때 함수

$$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x_1, x_2) = (x_1 + kx_2, -x_2)$$

에 대하여 다음에 물음에 답하여라.

(1) 모든 실수 k 에 대하여 T 는 \mathbb{R}^2 위의 자기 동형 변환임을 보여라.등각터 $u = (x_1, x_2), v = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ 와 스칼라 $\lambda \in \mathbb{R}$ 에 대하여

$$T(u+v) = T(x_1+y_1, x_2+y_2) = ((x_1+y_1) + k(x_2+y_2), -(x_2+y_2))$$

$$T(u) + T(v) = T(x_1, x_2) + T(y_1, y_2) = (x_1 + kx_2, -x_2) + (y_1 + ky_2, -y_2) = (x_1 + y_1 + k(x_2 + y_2), -(x_2 + y_2))$$

$$\therefore T(u+v) = T(u) + T(v)$$

 $\therefore T$ 는 덧셈을 보존한다.

$$T(\lambda u) = T(\lambda x_1, \lambda x_2) = (\lambda x_1 + k\lambda x_2, -\lambda x_2) = \lambda(x_1 + kx_2, -x_2) = \lambda T(u)$$

 $\therefore T$ 는 스칼라 곱도 보존한다. $\therefore T$ 는 선형 변환이다. $u = (x_1, x_2) \in \ker(T)$ 라고 하면

$$T(u) = T(x_1, x_2) = (x_1 + kx_2, -x_2) = (0, 0)$$

$$\therefore x_1 + kx_2 = 0, -x_2 = 0$$

$$\therefore x_1 = 0, x_2 = 0 \text{ 이다.}$$

$$\therefore u = (0, 0), \therefore \ker(T) = \{0\} \quad \text{이므로}$$

정리 6.3.1에 의해 T 는 일대일 변환이다.

$$u = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \text{ 이고}$$

$$T(u) = T(x_1, x_2) = (x_1 + kx_2, -x_2) \text{ 이므로}$$

$$\text{Range}(T) = \mathbb{R}^2 \text{ 이다.}$$

위의 사실들에 의하여 T 는 동형 변환이고 \mathbb{R}^2 에서 \mathbb{R}^2 으로의 자기 동형 변환이다.(2) 역변환 $T^{-1}(y_1, y_2)$ 를 구하여라.

$$x_1 + kx_2 = y_1, -x_2 = y_2$$

$$\hookrightarrow x_1 = y_1 + ky_2, x_2 = -y_2$$

$$\therefore T^{-1}(y_1, y_2) = (y_1 + ky_2, -y_2)$$

$$(T(y_1 + ky_2, -y_2) = (y_1, y_2))$$

#4 선형 변환자 $T: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ 가

$$T(1,0,0,0) = (1,2,4,12), T(1,1,0,0) = (0,6,0,6), T(1,1,1,0) = (2,5,5,24), T(1,1,1,1) = (1,8,2,16)$$

일때, 다음의 문제에 답하여라.

$$v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^4$$

(1) $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 + \lambda_4 v_4$ 라 하자.

$$1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4 = v_1 = (1, 2, 4, 12)$$

$$1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4 = v_1 + v_2 = (0, 6, 0, 6) \quad \therefore v_2 = (-1, 8, -4, -6)$$

$$1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4 = v_1 + v_2 + v_3 = (2, 5, 5, 24) \quad \therefore v_3 = (2, -1, 5, 18)$$

$$1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 + 1 \cdot v_4 = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = (1, 8, 2, 16) \quad \therefore v_4 = (-1, 3, -3, -8)$$

$$\begin{aligned} \therefore T(x_1, x_2, x_3, x_4) &= (x_1(1, 2, 4, 12) + x_2(-1, 8, -4, -6) + x_3(2, -1, 5, 18) + x_4(-1, 3, -3, -8)) \\ &= (x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4, 2x_1 + 8x_2 - x_3 + 3x_4, 4x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 3x_4, 12x_1 - 6x_2 + 18x_3 - 8x_4) \end{aligned}$$

(2) $\ker(T)$ 의 기저와 $\text{nullity}(T)$ 를 구하여라.

$$\ker(T) = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid T(v) = (0, 0, 0, 0)\}$$

$$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0$$

$$-2x_1 + 8x_2 - x_3 + 3x_4 = 0$$

$$4x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 0$$

$$12x_1 - 6x_2 + 18x_3 - 8x_4 = 0$$

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & 8 & -1 & 3 \\ 4 & -4 & 5 & -3 \\ 12 & -6 & 18 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{E_2(2) \\ E_3(-4) \\ E_4(-12)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 6 & -6 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{D_2(\frac{1}{6}) \\ E_4(-1) \\ D_3(-\frac{1}{3})}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{3} & -\frac{5}{6} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -9 & 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$x_4 = t \text{ 라 하면 } x_1 = 0, x_2 = -\frac{1}{3}t, x_3 = \frac{1}{3}t \text{ 이다.}$$

$$\therefore \ker(T) \text{의 기저는 } B_K = \left\{ \left(0, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1 \right) \right\} \text{ 이다. } \therefore B_K \left[\left(0, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1 \right) \right]$$

$$\therefore \dim(\ker(T)) = \text{nullity}(T) \text{ 이므로 } \text{nullity}(T) = 1 \text{ 이다.}$$

(3) $\text{range}(T)$ 의 기저와 $\text{rank}(T)$ 를 구하여라.

$$\text{range}(T) = \{T(v) \mid v \in \mathbb{R}^4\}$$

$$\text{range}(T) = \langle (1, 2, 4, 12), (-1, 8, -4, -6), (2, -1, 5, 18), (-1, 3, -3, -8) \rangle$$

$$\begin{aligned} &\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -1 & 8 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & 5 & 18 \\ -1 & 3 & -3 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{E_2(1) \\ E_3(2) \\ E_4(1)}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{D_2(\frac{1}{6}) \\ E_{12}(2) \\ E_{32}(-3) \\ E_{42}(-1)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{E_{34}(3) \\ E_{44}(-4)}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{range}(T) \text{의 기저는 } B_R = \{(1, 0, 0, 2), (0, 1, 0, 1), (0, 0, 1, 3)\} \text{ 이다.}$$

$$\therefore \dim(\text{range}(T)) = \text{rank}(T) \text{ 이므로 } \text{rank}(T) = 3 \text{ 이다.}$$

(4) 역변환 T^{-1} 가 존재하는가? 존재한다면 $T^{-1}(y_1, y_2, y_3, y_4)$ 를 구하고, 존재하지 않는다면 그 이유를 설명하여라.

정리 6.3.1 의미해

$$\ker(T) = \{0\} \quad \text{이 아니므로}$$

일대일 변환이 아니다. \therefore 역변환 T^{-1} 가 존재하지 않는다.

#5. $T: V \rightarrow W$ 는 동형변환이고 $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 이 V 의 기저일 때,

$$T(\beta) = \{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$$

이 W 의 기저가 됨을 증명하여라.

$$i) \quad 0 = c_1 T(v_1) + c_2 T(v_2) + \dots + c_n T(v_n)$$

$$\textcircled{6} \quad = T(c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n)$$

$T(0) = 0$ 이고 T 가 일대일 변환이므로 $(c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n) = 0$ 이 된다.

$\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 은 V 의 기저이므로 선형독립이다.

$\therefore c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$ 이 위식을 만족하는 유일한 해이다.

$\therefore \{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ 은 선형독립이다.

ii) 벡터 y 에 대해 $T(x) = y$ 를 만족하는 V 의 벡터가 존재한다. ($x = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$)

$\therefore y = T(c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n) = c_1 T(v_1) + c_2 T(v_2) + \dots + c_n T(v_n)$ (W 의 임의의 벡터 y 가 $T(\beta)$ 의 선형결합으로 표현된다.)

$\therefore \{T(v_1), T(v_2), \dots, T(v_n)\}$ 이 W 를 생성한다.

ii), i) 의미해 $T(\beta)$ 가 W 의 기저가 된다.

#6. $W = \{A \in \text{Mat}_{2 \times 2}(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$ 라고 할 때, $W \cong \mathbb{R}^3$ 을 증명하여라.

W 의 순서기저 $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$ 을 선택하면 각 벡터 $v \in W$ 는 단 한가지

방법의 선형결합 $v = c_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R})$

으로 나타낼 수 있다. $T_B: W \rightarrow \mathbb{R}^3, T_B\left(\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}\right) = (a, b, c)$

따라서 위 함수가 잘 정의된다는 사실을 알 수 있다.

두 벡터 $u = c_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, v = d_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in W$ 와 $\lambda \in \mathbb{R}$ 에

대하여 $u + v = c_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + d_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + d_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= (c_1 + d_1) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (c_2 + d_2) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + (c_3 + d_3) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ 이고}$$

$$\lambda u = \lambda (c_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}) = (\lambda c_1) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + (\lambda c_2) \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + (\lambda c_3) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ 이다.}$$

따라서 $T_B(u+v) = (c_1+d_1, c_2+d_2, c_3+d_3)$
 $= (c_1, c_2, c_3) + (d_1, d_2, d_3) = T_B(u) + T_B(v)$

이므로 T_B 는 덧셈을 보존한다.

$$T_B(\lambda u) = (\lambda c_1, \lambda c_2, \lambda c_3) = \lambda(c_1, c_2, c_3) = \lambda T_B(u)$$

이므로 T_B 는 스칼라 곱도 보존한다. 그러므로 T_B 는 선형 변환이다.

다음으로 $v = c_1|0\rangle + c_2|1\rangle + c_3|2\rangle \in \ker(T_B)$ 라고 하면

$$T_B(v) = (c_1, c_2, c_3) = (0, 0, 0) \text{ 이므로 } c_1=0, c_2=0, c_3=0 \text{ 이다.}$$

$$\text{따라서 } v = 0|0\rangle + 0|1\rangle + 0|2\rangle = 0,$$

즉 $\ker(T_B) = \{0\}$ 이므로 정리 6.3.1에 의하여 T_B 는 일대일 변환이다.

마지막으로, $B = \{|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle\}$ 는 W 의 기저 이므로 $|0\rangle, |1\rangle, |2\rangle$ 의 모든 선형결합은 W 의 원소이다.

따라서 임의의 벡터 $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ 에 대하여

$$v = c_1|0\rangle + c_2|1\rangle + c_3|2\rangle \in W$$

$$\text{이것 } T_B(v) = (c_1, c_2, c_3) \text{ 이므로 } \text{range}(T_B) = \mathbb{R}^3 \text{ 이다.}$$

위 사실들에 의하여 T_B 는 동형 변환이고 따라서 $W \cong \mathbb{R}^3$ 이다.

#7. 벡터공간 $P_2[x]$ 의 두 순서기

$$B = \{1+x, 1+x^2, 1+x^2\}, R = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$$

에 대하여 다음의 질문에 답하여라.

(1) 기저 B 에서 기저 R 으로의 전이행렬을 구하여라.

$$(1+x) = 0(1) + 1(1+x) + 0(1+x+x^2) \Rightarrow [(1+x)]_R = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(1+x^2) = (-1)(1) + 0(1+x) + 1(1+x+x^2) \Rightarrow [(1+x^2)]_R = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$(1+x^2) = 1(1) + (-1)(1+x) + 1(1+x+x^2) \Rightarrow [(1+x^2)]_R = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{전이행렬 } P = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

2/2

(2) 다항식 $p(x) \in P_2[x]$ 에 대하여 $[p(x)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 일 때, $p(x)$ 와 $[p(x)]_R$ 을 구하시라.

$$[p(x)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (-1)(1+x) + (-1)(x+x^2) + 2(1+x^2) = \underline{(1-2x+x^2) = p(x)}$$

$$p(x) = (1-2x+x^2) = 3(1) + (-3)(1+x) + 1(1+x+x^2) \Rightarrow \underline{[p(x)]_R = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}}$$

(3) 다항식 $q(x) \in P_2[x]$ 에 대하여 $[q(x)]_R = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ 일 때, $q(x)$ 와 $[q(x)]_B$ 을 구하시라.

$$[q(x)]_R = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow (-1)(1) + 3(1+x) + (-2)(1+x+x^2) = \underline{(x-2x^2) = q(x)}$$

$$q(x) = (x-2x^2) = \frac{3}{2}(1+x) + (-\frac{1}{2})(x+x^2) + (\frac{3}{2})(1+x^2) \Rightarrow \underline{[q(x)]_B = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}}$$