3주 1차시 과제물 모범답안

3.2절 행렬식의 성질

#1 $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -6$ 일 때 다음의 행렬식을 구하고 그 이유를 정확히 적어라.

(1) $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix} = (-6)\cdot 3\cdot(-1)\cdot 4 = 72$

(2) $\begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -6$ 주어진 행렬에 $E_{13}(1)$ 을 실시하여 얻은 행렬의 행렬식이다.

(3) $\begin{vmatrix} -3a & -3b & -3c \\ d & e & f \\ g-4d & h-4e & i-4f \end{vmatrix} = 18$ (과정생략)

#2 삼각법을 이용하여 다음 행렬의 행렬식을 구하여라.

(1) $\begin{bmatrix} 4 & 5 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ 은 기본 행 연산 $E_{12}(1), E_{21}(-3), E_{31}(-3), E_{32}(-7/3)$ 을 차례대로 실행하여 삼각행렬 $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -13/3 \end{bmatrix}$ 으로 변환된다. 따라서 두 행렬의 행렬식은 13으로 같은 값을 가진다.

(2) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} = 12$

#3 적절한 방법을 이용하여 다음 행렬의 행렬식을 구하여라.

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 5 & 7 \\ 3 & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} = 10$ (과정생략)

(2) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 6 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \end{bmatrix} = 5$ (과정생략)

#4 행렬식에 대한 다음의 등식이 성립함을 증명하여라.

(1) $\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ b & b & b & a \end{vmatrix} = -(a-b)^4$

【증명】 주어진 행렬에 $E_{21}(-1), E_{31}(-1), E_{41}(-1)$ 을 실행하면

$$\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ a & b & a & a \\ a & a & b & a \\ b & b & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ 0 & 0 & a-b & a-b \\ 0 & a-b & 0 & a-b \\ -(a-b) & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}$$

이다. 우변의 행렬식을 1열에 대하여 전개하면

$$a\begin{vmatrix} 0 & a-b & a-b \\ a-b & 0 & a-b \\ 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} + (a-b)\begin{vmatrix} b & b & b \\ 0 & a-b & a-b \\ a-b & 0 & a-b \end{vmatrix}.$$

먼저 좌측의 행렬식을 3행에 대하여 전개하면 $-(\mathrm{a}-\mathrm{b})^3$ 이고 우측의 행렬식을 3행에 대하여 전개하면 $b(a-b)^2$ 이다. 따라서 행렬식은 $-a(a-b)^3 + b(a-b)^3 = -(a-b)^4$ 이다.

(2) $\begin{bmatrix} x & a & b & 1 \\ a & x & b & 1 \\ a & b & x & 1 \\ a & b & c & 1 \end{bmatrix} = -(x-a)(x-b)(x-c)$

【증명】 주어진 행렬에 $E_{14}(-1), E_{24}(-1), E_{34}(-1)$ 을 실행하면

$$\begin{vmatrix} x & a & b & 1 \\ a & x & b & 1 \\ a & b & x & 1 \\ a & b & c & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x-a & a-b & b-c & 0 \\ 0 & x-b & b-c & 0 \\ 0 & 0 & x-c & 0 \\ a & b & c & 1 \end{vmatrix}$$

이다. 우변의 행렬식을 4열에 대하여 전개하면 $(x-a)(x-b)(x-c)$ 이다.

3.3절 행렬식과 역행렬, 연립선형방정식

#1 $n \times n$ 행렬 A 에 대하여 다음의 동치조건을 증명하여라.

$$|A| = 0 \Leftrightarrow |\mathrm{adj}(A)| = 0$$

【증명】 정리 3.3.1에 의하여 $A \cdot \mathrm{adj}(A) = |A| I_n$ 이다. 양변의 행렬식을 구하면 $|A||\mathrm{adj}(A)| = |A|^n$ 이다.

($\Rightarrow$) $|A| = 0$ 이라고 가정하면 첫 번째 등식에 의하여 $A \cdot \mathrm{adj}(A) = O$ (영행렬)이다. 두 경우로 나누어 정리를 증명하자.

먼저 $\mathrm{A}=\mathrm{O}$ (영행렬)인 경우에는 $\operatorname{adj}(A)=O$ 이고 따라서 $|\operatorname{adj}(\mathrm{A})|=0$ 이 자명하게 성립한다.

다음으로 $\mathrm{A}\neq\mathrm{O}$인 경우를 알아보자. 만약, $|\operatorname{adj}(\mathrm{A})|\neq 0$,즉 $\operatorname{adj}(A)$ 가 가역행렬이라면 역행렬 $\operatorname{adj}(\mathrm{A})^{-1}$ 이 존재한다. 역행렬 $\operatorname{adj}(\mathrm{A})^{-1}$ 을 등식 $A\cdot\operatorname{adj}(A)=O$ 의 양변의 우측에 곱해주면 $\mathrm{A}=\mathrm{O}$ 이다. 이는 $\mathrm{A}\neq\mathrm{O}$ 라는 사실에 모순이므로 $\operatorname{adj}(A)$ 는 가역행렬이 아니고 따라서 $|\operatorname{adj}(\mathrm{A})|=0$ 이다.

($\Leftarrow$) $|\mathrm{A}|\neq 0$ 이라고 가정하면

$$|\operatorname{adj}(A)|=|A|^{n-1}$$

이므로 $|\operatorname{adj}(\mathrm{A})|\neq 0$ 이다. 따라서 대우명제인 "$|\mathrm{A}|=0\Leftarrow|\operatorname{adj}(\mathrm{A})|=0$" 이 성립한다.

#2 다음의 제차 연립선형방정식이 자명한 해 만을 가지도록 상수 k 의 값을 결정하여라.

$$\begin{cases} kx_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + kx_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 + kx_3 = 0 \end{cases}$$

【풀이】 $\begin{vmatrix} k & 1 & 1 \\ 1 & k & 1 \\ 1 & 1 & k \end{vmatrix} = k^3-3k+2=(k-1)^2(k+2)\neq 0$ 에서 $k\neq 1,-2$ 인 모든 실수.

#3 적절한 방법을 이용하여 다음 연립선형방정식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ ax_1 + bx_2 + cx_3 = k \\ a^2x_1 + b^2x_2 + c^2x_3 = k^2 \end{cases}$$

【풀이】 먼저 계수행렬의 행렬식을 구해보면

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & b-a & c-a \\ 0 & b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b-a & c-a \\ b^2-a^2 & c^2-a^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

이다.

<u>Case1.</u> a,b,c 가 서로 다른 세 수이면 계수행렬의 행렬식이 0이 아니므로 계수행렬은 가역행렬이다. 따라서 주어진 연립선형방정식은 k 의 값에 관계없이 유일한 해를 가진다. Cramer의 법칙을 이용하여 해를 구해보자.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ k & b & c \\ k^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (k-b)(b-c)(c-k), \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & k & c \\ a^2 & k^2 & c^2 \end{vmatrix} = (a-k)(k-c)(c-a)$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & k \\ a^2 & b^2 & k^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-k)(k-a)$$

이므로 해는 다음과 같다.

$$x_1=\frac{(k-a)(c-k)}{(a-b)(c-a)}, x_2=\frac{(a-k)(k-c)}{(a-b)(b-c)}, x_3=\frac{(b-k)(k-a)}{(b-c)(c-a)}$$

<u>Case2</u>. a,b,c 에서 두 개는 같은 수이고 나머지 하나가 다른 수이면 계수행렬의 행렬식이 0

이므로 주어진 연립선형방정식은 k 의 값에 따라서 해를 가지지 않거나 무수히 많은 해를 가진다. 이 경우는 아래와 같이 9가지의 경우로 다시 분류된다. 각 경우의 해는 Gauss-Jordan 소거법을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다. 아래의 방정식에서 문자가 다르면 다른 수로 생각한다.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a & c & k \\ a^2 & a^2 & c^2 & k^2 \end{array}\right] \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \ \therefore \text{해를 가지지 않는다.}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a & c & a \\ a^2 & a^2 & c^2 & a^2 \end{array}\right] \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \ \therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a & c & c \\ a^2 & a^2 & c^2 & c^2 \end{array}\right] \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \ \therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & a & k \\ a^2 & b^2 & a^2 & k^2 \end{array}\right] \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \ \therefore \text{해를 가지지 않는다.}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & a & a \\ a^2 & b^2 & c^2 & a^2 \end{array}\right] \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \ \therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & a & b \\ a^2 & b^2 & a^2 & b^2 \end{array}\right] \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \ \therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & b & k \\ a^2 & b^2 & b^2 & k^2 \end{array}\right] \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \ \therefore \text{해를 가지지 않는다.}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & b & a \\ a^2 & b^2 & b^2 & a^2 \end{array}\right] \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \ \therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & b & b \\ a^2 & b^2 & b^2 & b^2 \end{array}\right] \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \ \therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

<u>Case3.</u> $a = b = c$ 인 경우에도 계수행렬의 행렬식이 0 이므로 주어진 연립선형방정식은 k 의 값에 따라서 해를 가지지 않거나 무수히 많은 해를 가진다. 이 경우는 아래와 같이 2가지의 경우로 다시 분류된다. 각 경우의 해는 Gauss-Jordan 소거법을 이용하여 다음과 같이 구할 수 있다. 위의 경우 에서와 마찬가지로 아래의 방정식에서도 문자가 다르면 다른 수로 생각한다.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a & a & k \\ a^2 & a^2 & a^2 & k^2 \end{array}\right] \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \ \therefore \text{해를 가지지 않는다.}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & a & a & a \\ a^2 & a^2 & a^2 & a^2 \end{array}\right] \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \ \therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

#4 다음 연립선형방정식의 계수행렬을 A 라고 할 때 아래의 물음에 답하여라.

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

(1) Gauss−Jordan 소거법을 이용하여 해를 구하여라.

【풀이】 $\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -5 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right] \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right] \quad \therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix}$

(2) $\det A$ 와 $\operatorname{adj} A$ 를 계산하고 이를 이용하여 해를 구하여라.

【풀이】 $\begin{vmatrix} 3 & -5 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 1, \mathrm{adj(A)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$

$\therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \left(\frac{1}{\mathrm{detA}}\right)\mathrm{adj}(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix}.$

(3) Cramer의 공식을 이용하여 해를 구하여라.

【풀이】 $\begin{vmatrix} 1 & -5 & -2 \\ 4 & -1 & -1 \\ 5 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 20, \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 9, \begin{vmatrix} 3 & -5 & 1 \\ 1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 7.$

$$\mathrm{x}_1 = \frac{20}{1} = 20, \qquad \mathrm{x}_2 = \frac{9}{1} = 9, \qquad \mathrm{x}_3 = \frac{7}{1} = 7.$$

(4) 위의 세 가지 방법 중 가장 쉬운 방법이 무엇이라고 생각하는가? 자신의 생각을 적어라.