**선형대수학 비대면 강의**

# 11주 2차시 수업

2020년 05월 29일

조 성희



유한차원 벡터공간의 기저를 말할 때, 기저에 속해 있는 벡터들의 순서까지 생각해야 할 경우가 많이 있다. 이와 같이 기저에 속해 있는 벡터들의 순서까지 고려한 기저를 **순서기저** (ordered basis)라고 한다.

예를 들어, 벡터공간 $\mathbb{R}^2$ 의 기저

$$\mathcal{B}_1 = \{(1,0),(0,1)\}, \mathcal{B}_2 = \{(0,1),(1,0)\}$$

은 일반적인 기저로서는 같은 기저지만, 순서기저로 본다면 서로 다른 기저이다.

**정 리 6.3.3** $V$ 가 체 $F$ 위의 $n$ 차원 벡터공간이면, $V \cong F^n$ 이다.

【증명】 벡터공간 $V$ 의 하나의 순서기저 $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ 을 선택하면, 각 벡터 $\boldsymbol{v} \in V$ 는 단 한가지 방법의 선형결합

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n \ (c_1, c_2, \dots, c_n \in F)$$

으로 나타내어진다.

따라서 다음의 함수가 잘 정의된다는 사실을 알 수 있다.

$$T_{\mathcal{B}}: V \longrightarrow F^n, T_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{v}) = (c_1, c_2, \dots, c_n).$$

이제, $T_{\mathcal{B}}$ 가 동형변환임을 보이도록 하자.

1) 선형 독립
2) 1-1 ⟺ ker(T) = {0}
3) 일대일대응 range(T) = $\mathbb{R}^n$

두 벡터 $\boldsymbol{u} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n$, $\boldsymbol{v} = d_1\boldsymbol{v}_1 + d_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + d_n\boldsymbol{v}_n \in V$ 와 스칼라 $\lambda \in F$ 에 대하여,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} &= (c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n) + (d_1\boldsymbol{v}_1 + d_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + d_n\boldsymbol{v}_n) \\ &= (c_1 + d_1)\boldsymbol{v}_1 + (c_2 + d_2)\boldsymbol{v}_2 + \cdots + (c_n + d_n)\boldsymbol{v}_n\end{aligned}$$

이고

$$\lambda\boldsymbol{u} = \lambda(c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n) = (\lambda c_1)\boldsymbol{v}_1 + (\lambda c_2)\boldsymbol{v}_2 + \cdots + (\lambda c_n)\boldsymbol{v}_n$$

이다. 따라서,

$$\begin{aligned}T_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) &= (c_1 + d_1, c_2 + d_2, \dots, c_n + d_n) \\ &= (c_1, c_2, \dots, c_n) + (d_1, d_2, \dots, d_n) = T_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u}) + T_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{v})\end{aligned}$$

이므로 $T_{\mathcal{B}}$ 는 덧셈을 보존한다. 또한

$$T_{\mathcal{B}}(\lambda\boldsymbol{u}) = (\lambda c_1, \lambda c_2, \dots, \lambda c_n) = \lambda(c_1, c_2, \dots, c_n) = \lambda T_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{u})$$

이므로 $T_{\mathcal{B}}$ 는 스칼라 곱도 보존한다. 그러므로 1 $T_{\mathcal{B}}$ 는 선형변환이다.

다음으로 $\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n \in \ker(T_{\mathcal{B}})$ 라고 하면,

$$T_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{v}) = (c_1, c_2, \dots, c_n) = (0,0,\dots,0)$$

이므로 모든 $i = 1,2,\dots,n$ 에 대하여 $c_i = 0$ 이다. 따라서

$$\boldsymbol{v} = 0\boldsymbol{v}_1 + 0\boldsymbol{v}_2 + \cdots + 0\boldsymbol{v}_n = \boldsymbol{0},$$

즉 $\ker(T_{\mathcal{B}}) = \{\boldsymbol{0}\}$ 이므로 정리 6.3.1에 의하여 $T_{\mathcal{B}}$ 는 2 일대일 변환이다.

마지막으로, $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$ 는 $V$ 의 기저이므로 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_n$ 의 모든 선형결합은 $V$ 의 원소이다. 따라서 임의의 벡터 $(c_1, c_2, \dots, c_n) \in F^n$ 에 대하여

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n \in V$$

이고 $T_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{v}) = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ 이므로 $\mathrm{range}(T_{\mathcal{B}}) = F^n$ 이다. 위의 사실들에 의하여 $T_{\mathcal{B}}$ 는 동형변환이고, 따라서 $V \cong F^n$ 이다. □ 3

**보 기 6.3.1** 벡터공간 $Mat_{2\times2}(\mathbb{R})$ 은 실수체 $\mathbb{R}$ 위의 4차원 벡터공간이다. 따라서

$$Mat_{2\times2}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4$$

이다.

이 사실을 보이기 위해서는 $Mat_{2\times2}(\mathbb{R})$ 에서 $\mathbb{R}^4$ 위로의 동형변환이 존재함을 보여야 한다.

$Mat_{2\times2}(\mathbb{R})$ 의 순서기저 $\mathcal{B} = \left\{\underset{1}{\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}}, \underset{2}{\begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}}, \underset{3}{\begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}}, \underset{4}{\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}}\right\}$ 에 대해서 정의된 함수

$$T_{\mathcal{B}}: Mat_{2\times2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^4, T_{\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\right) = (\underset{1}{a_{11}}, \underset{2}{a_{12}}, \underset{3}{a_{21}}, \underset{4}{a_{22}})$$

는 정리 6.3.3에 의하여 동형변환이다. 따라서, $Mat_{2\times2}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4$ 이다.

또한, $Mat_{2\times2}(\mathbb{R})$ 의 다른 순서기저 $\mathcal{S} = \left\{\begin{bmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 0\\1 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0 & 1\\0 & 0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{bmatrix}\right\}$ 에 대해서 정의된 함수

$$T_{\mathcal{S}}: Mat_{2\times2}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}^4, T_{\mathcal{B}}\left(\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\right) = (a_{22}, a_{21}, a_{12}, a_{11})$$

도 정리 6.3.3에 의하여 동형변환이므로, 이 사실로 부터도 $Mat_{2\times2}(\mathbb{R}) \cong \mathbb{R}^4$ 임을 알 수 있다.

일대일 대응함수의 기본성질과 정리 6.1.3, 정리 6.3.2에 의하여 다음의 정리가 성립함을 쉽게 알 수 있다.

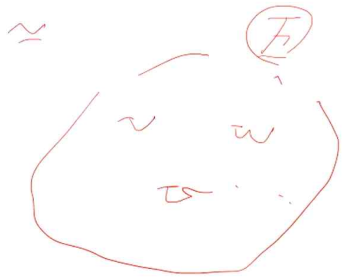
**정 리 6.3.4** 체 $F$ 위의 벡터공간 $U, V, W$ 에 대하여 다음이 성립한다.

(1) 항등함수 $I_V: V \longrightarrow V$ 는 동형변환이다. 따라서 $V \cong V$ 이다.

(2) $T: U \longrightarrow V$ 가 동형변환이면, 역변환 $T^{-1}: V \longrightarrow U$ 도 동형변환이다. 따라서, $U \cong V$ 이면 $V \cong U$ 이다.

(3) $T: U \longrightarrow V$ 와 $S: V \longrightarrow W$ 가 동형변환이면, $S \circ T: U \longrightarrow W$ 도 ~~선~~형변환이다. 따라서, $U \cong V$ 이고 $V \cong W$ 이면 $U \cong W$ 이다.

동





## 6.4 전이행렬(Transition Matrix)

$V$ 를 실수체 $\mathbb{R}$ 위의 $n$ 차원 벡터공간이라고 하고, $V$ 의 하나의 순서기저

$$\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$$

를 생각하자.

각 벡터 $v = c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n \in V$ 에 대하여 정리 6.3.3에서와 같이 정의된 함수 $T_{\mathcal{B}}: V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ 는 동형변환이다.

$$\begin{array}{ccc} V \ni & & v = c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n \\ \big\downarrow T_{\mathcal{B}} & & \big\downarrow \\ \mathbb{R}^n \ni & & T_{\mathcal{B}}(v) = \begin{bmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{bmatrix} \end{array}$$

이 때, 벡터 $v \in V$ 의 함숫값으로 주어지는 벡터 $T_{\mathcal{B}}(v) = \begin{bmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ 를 기저 $\mathcal{B}$ 에 대한 $v \in V$ 의 **좌표벡터**(coordinate vector)라고 하며 $[v]_{\mathcal{B}}$ 로 나타낸다.

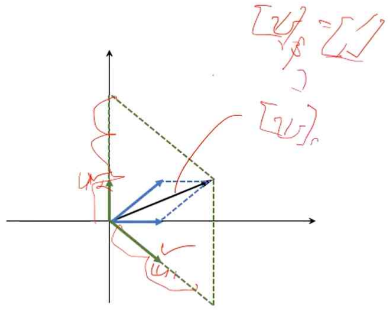
**보 기 6.4.1** 실수체 $\mathbb{R}$ 위의 2차원 벡터공간 $\mathbb{R}^2$ 에서 두 순서기저

$$\mathcal{B} = \{(1,0), (1,1)\}, \mathcal{R} = \{(1,-1), (0,1)\}$$

을 생각하자.

벡터 $(2,1) \in \mathbb{R}^2$ 에 대하여, $(2,1) = 1(1,0) + 1(1,1)$ 이므로 기저 $\mathcal{B}$ 에 대한 $(2,1)$ 의 좌표벡터는 $\boxed{[(2,1)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}}$ 이다.

또한 $(2,1) = 2(1,-1) + 3(0,1)$ 이므로 기저 $\mathcal{R}$ 에 대한 $(2,1)$ 의 좌표벡터는 $\boxed{[(2,1)]_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}}$ 이다.



**보 기 6.4.2** 실수체 $\mathbb{R}$ 위의 3차원 벡터공간 $P_2[x]$ 에서 두 개의 순서기저

$$\mathcal{B} = \{1, x, x^2\}, \mathcal{R} = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2\}$$

을 생각하자.

벡터 $3 + 2x + x^2 \in P_2[x]$ 에 대하여, $3 + 2x + x^2 = 3 \cdot 1 + 2 \cdot x + 1 \cdot x^2$ 이므로

$$[3 + 2x + x^2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

이다. 또한 $3 + 2x + x^2 = 1 \cdot 1 + 1(1 + x) + 1(1 + x + x^2)$ 이므로

$$[3 + 2x + x^2]_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

이다.