선형대수학 비대면 강의

4주 2차시 수업

조 성희

정 리 4.1.1 V 를 체 F 위의 벡터공간이라고 할 때, 임의의 벡터 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ 와 스칼라 $\lambda \in F$ 에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$ 이면 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$ 이다.

(2) $\lambda \mathbf{0} = \mathbf{0}$

(3) $0\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$

(4) $(-1)\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}$

(5) $\lambda(-\boldsymbol{u}) = (-\lambda)\boldsymbol{u} = -(\lambda\boldsymbol{u})$

(6) $\lambda\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ 이면 $\lambda = 0$ 또는 $\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ 이다.

【증명】 (1) V 는 벡터공간이므로 A4에 의하여 원소 $\boldsymbol{u} \in V$ 의 덧셈에 대한 역원 $-\boldsymbol{u} \in V$ 가 존재한다. 이 역원을 등식 $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{w}$ 의 양변에 더해주면,

$$-\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = -\boldsymbol{u} + (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w})$$

이다. 또한 A2 결합법칙이 성립하므로

$$\big((-\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u}\big) + \boldsymbol{v} = \big((-\boldsymbol{u}) + \boldsymbol{u}\big) + \boldsymbol{w},$$

즉 $\mathbf{0} + \boldsymbol{v} = \mathbf{0} + \boldsymbol{w}$ 이므로 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{w}$ 가 성립한다.

(2) SM1이 성립하므로 $\lambda\mathbf{0} = \lambda(\mathbf{0}+\mathbf{0}) = \lambda\mathbf{0}+\lambda\mathbf{0}$ 이다. 좌변에 $\mathbf{0}$ 을 더해주면

$$\mathbf{0}+\lambda\mathbf{0} = \lambda\mathbf{0}+\lambda\mathbf{0}$$

이다. (1)의 결과에 의하여 등식 $\mathbf{0} = \lambda\mathbf{0}$ 가 성립한다.

(3) SM2가 성립하므로 $0\boldsymbol{u} = (0+0)\boldsymbol{u} = 0\boldsymbol{u}+0\boldsymbol{u}$ 이다. 좌변에 $\mathbf{0}$ 을 더해주면

$$\mathbf{0}+0\boldsymbol{u} = 0\boldsymbol{u}+0\boldsymbol{u}$$

이다. (1)의 결과에 의하여 등식 $\mathbf{0} = 0\boldsymbol{u}$ 가 성립한다.

(4) (3)번의 결과와 SM2에 의하여

$$\mathbf{0} = 0\boldsymbol{u} = \big(1+(-1)\big)\boldsymbol{u} = 1\boldsymbol{u}+(-1)\boldsymbol{u}$$

이다. 다시 SM4에 의하여 $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$ 이므로 $\mathbf{0} = \boldsymbol{u}+(-1)\boldsymbol{u}$ 이다. 따라서 $(-1)\boldsymbol{u} = -\boldsymbol{u}$ 이다.

(5) (4)번의 결과와 SM3를 반복적으로 이용하면

$$\lambda(-\boldsymbol{u}) = \lambda\big((-1)\boldsymbol{u}\big) = \big(\lambda(-1)\big)\boldsymbol{u} = (-\lambda)\boldsymbol{u} = \big((-1)\lambda\big)\boldsymbol{u} = (-1)(\lambda\boldsymbol{u}) = -(\lambda\boldsymbol{u})$$

이다.

(6) $\lambda \boldsymbol{u} = \mathbf{0}$ 이고 $\lambda \neq 0$ 이라고 가정하면, λ 의 역원 $\lambda^{-1} \in F$ 가 존재하여 $\lambda^{-1}\lambda = 1$ 를 만족한다.

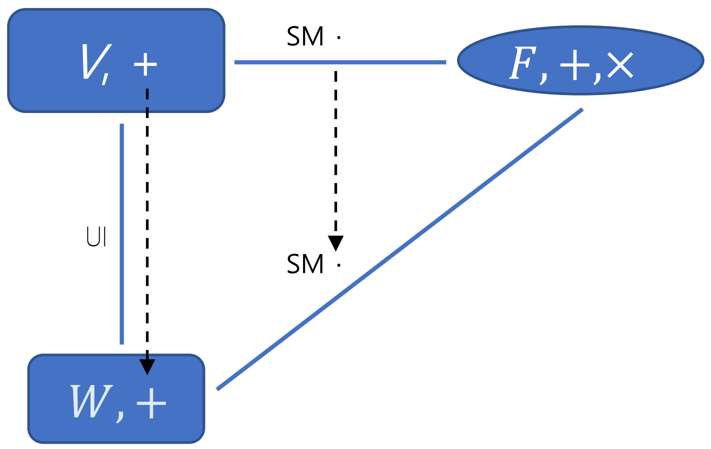
SM4, SM3가 성립하므로

$$\boldsymbol{u} = 1\boldsymbol{u} = (\lambda^{-1}\lambda)\boldsymbol{u} = \lambda^{-1}(\lambda \boldsymbol{u}) = \lambda^{-1}\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

이다.

4.2 부분공간(Subspace)

정 의 4.2.1 V 를 체 F 위의 벡터공간, W 를 V 의 부분집합이라고 하자. 벡터공간 V 에서와 같은 덧셈과 스칼라 곱에 대하여 부분집합 W 가 체 F 위에서 자체적으로 벡터공간을 이룰 때, W를 V의 **부분공간**(subspace)이라고 한다.

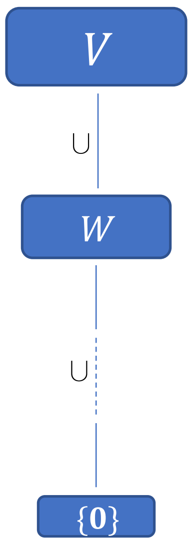


정 리 4.2.1 V 를 체 F 위의 벡터공간, W 를 공집합이 아닌 V 의 부분집합이라고 할 때 다음은 동치이다.

(1) W 는 V 의 부분공간이다.

(2) 임의의 $\lambda \in F$ 와 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in W$ 에 대하여 $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} \in W$ 이고 $\lambda \boldsymbol{u} \in W$ 이다.

【증명】(1)⇒(2) W 를 V 의 부분공간이라고 가정하면 (2)는 자명하게 성립한다. (1)⇐(2) 를 보이도록 하자 W 가 V 에서 정의된 덧셈에 대하여 닫혀 있다고 가정하자. W 의 원소는 V 의 원소이고 V 는 벡터공간 이므로 A1, A2가 성립하는 것은 당연하다. 또한 W 가 F 와의 스칼라 곱에 대하여 닫혀 있다고 가정하고 정리 4.1.1의 (3), (4)를 이용하면, 임의의 $\boldsymbol{w} \in W$ 에 대하여 $0\boldsymbol{w} = \boldsymbol{0} \in W$ 이고 $(-1)\boldsymbol{w} = -\boldsymbol{w} \in W$ 이다. 즉, A3와 A4가 성립한다. 다음으로 W 가 덧셈과 스칼라 곱에 대하여 닫혀 있고, W 의 원소는 V 의 원소라는 사실을 생각하면 SM1~SM4가 성립함은 쉽게 알 수 있다. 그러므로 W 는 V 의 부분공간이다. □



벡터공간 V 에서 V 자신과 영벡터만으로 이루어진 집합 $\{\boldsymbol{0}\}$ 은 항상 V 의 부분공간이 된다. 이러한 두 부분공간을 V 의 **자명한 부분공간**(trivial subspace)이라고 한다.

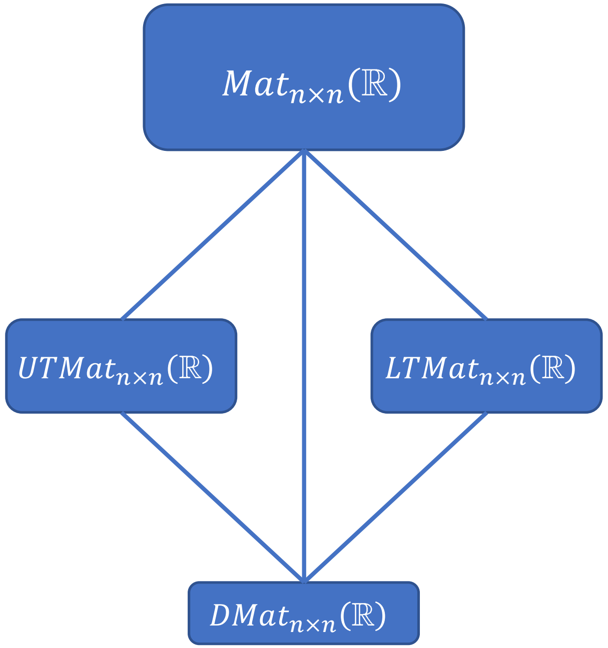
보 기 4.2.1 실수를 성분으로 가지는 $n \times n$ 크기의 모든 행렬들의 집합 $Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ 은 벡터공간이다. 다음과 같이 정의된 $Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ 의 네 개의 부분집합을 생각하자.

$$UTMat_{n\times n}(\mathbb{R}) = \{\, [a_{ij}] \mid i > j \text{ 이면 } a_{ij} = 0 \,\}$$

$$LTMat_{n\times n}(\mathbb{R}) = \{\, [a_{ij}] \mid i < j \text{ 이면 } a_{ij} = 0 \,\}$$

$$DMat_{n\times n}(\mathbb{R}) = \{\, [a_{ij}] \mid i = j \text{ 이면 } a_{ij} = 0 \,\}$$

$$InvertMat_{n\times n}(\mathbb{R}) = \{\, A = [a_{ij}] \mid \det A \neq 0 \,\}$$

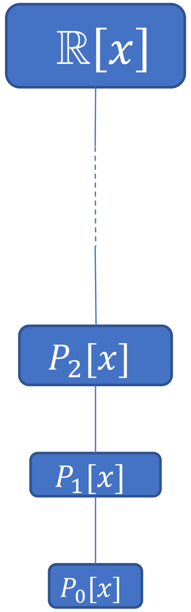


즉, $UTMat_{n\times n}(\mathbb{R})$ 은 상삼각행렬들의 집합이고 $LTMat_{n\times n}(\mathbb{R})$ 은 하삼각행렬들의 집합이다. 먼저 $A, B \in UTMat_{n\times n}(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$ 이라고 하면, $A + B \in UTMat_{n\times n}(\mathbb{R})$이고 $\lambda A \in UTMat_{n\times n}(\mathbb{R})$ 인 것은 자명하므로 정리 4.2.1 에 의하여 $UTMat_{n\times n}(\mathbb{R})$ 은 $Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ 의 부분공간이다. 같은 이유로 $LTMat_{n\times n}(\mathbb{R})$도 $Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ 의 부분공간이다. 그리고 모든 대각행렬들의 집합 $DMat_{n\times n}(\mathbb{R})$ 역시 같은 이유로 $Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ 의 부분공간이고 또한 $LTMat_{n\times n}(\mathbb{R})$ 와 $LTMat_{n\times n}(\mathbb{R})$ 의 부분공간이기도 하다. 하지만 $InvertMat_{n\times n}(\mathbb{R})$ 은 $Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ 의 부분공간이 아니다. $I_n , -I_n \in InvertMat_{n\times n}(\mathbb{R})$ 이지만 $I_n + (-I_n) = O \notin InvertMat_{n\times n}(\mathbb{R})$ 이므로 $InvertMat_{n\times n}(\mathbb{R})$ 는 덧셈에 닫혀 있지 않기 때문이다.

보 기 4.2.2 실수를 계수로 가지는 모든 다항식들을 원소로 가지는 벡터공간 $\mathbb{R}[x]$ 를 생각하자. 음이 아닌 정수 n 에 대하여 다음과 같이 정의된 $\mathbb{R}[x]$ 의 부분집합

$$P_n[x] = \{\, p(x) \in \mathbb{R}[x] \mid \deg p(x) \leq n \,\}$$

은 $\mathbb{R}[x]$ 의 부분공간이다.



보 기 4.2.3 각 항이 실수로 이루어진 모든 수열들의 집합 $\mathrm{Seq}(\mathbb{R})$ 은 벡터공간이다. 이러한 수열 중에서 수렴하는 수열만을 모두 모아 놓은 집합을 W 라고 하면, W 는 $\mathrm{Seq}(\mathbb{R})$ 의 부분공간이다. 한편, 발산하는 수열만을 모두 모아 놓은 집합을 U 라고 하면, U 는 $\mathrm{Seq}(\mathbb{R})$ 의 부분공간이 아니다. 수열 $\{(-1)^n\}$ 과 $\{(-1)^{n+1}\}$ 은 모두 발산하므로 U 의 원소이다. 하지만 두 수열을 더한 수열은 모든 항이 0으로 이루어진 상수수열 $\{0\}$ 이다. 이 수열은 0으로 수렴하므로 U 의 원소가 아니다. 따라서 U 는 덧셈에 대하여 닫혀 있지 않다.

보 기 4.2.4 벡터공간 $\mathbb{R}^2$ 의 부분집합 $W=\{(x_1,x_2)|2x_1+x_2=0\}$ 는 $\mathbb{R}^2$ 의 부분공간이다. 기하학적으로 보면 W 는 평면위의 원점을 지나는 직선을 나타낸다. 그러나 다음의 두 부분집합

$$U_1=\{(x_1,x_2)\mid x_1-x_2=-1\},$$

$$U_2=\{(x_1,x_2)\mid {x_1}^2+{x_2}^2=1\}$$

은 $\mathbb{R}^2$ 의 부분공간이 아니다. 정리 4.2.1을 이용하여 그 이유를 알아보자.

두 벡터 $\vec{a}=(a_1,a_2),\ \vec{b}=(b_1,b_2)\in W$ 와 $\lambda\in\mathbb{R}$ 에 대하여, $\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2)$ 이고

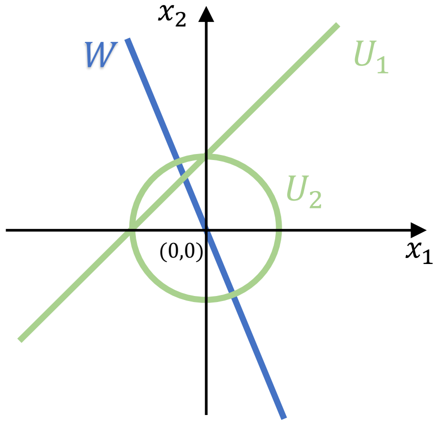
$$2(a_1+b_1)+(a_2+b_2)=(2a_1+a_2)+(2b_1+b_2)=0+0=0$$

이므로 $\vec{a}+\vec{b}\in W$ 이다. 또한 $\lambda\vec{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2)$ 이고

$$2(\lambda a_1)+\lambda a_2=\lambda(2a_1+a_2)=\lambda\cdot 0=0$$

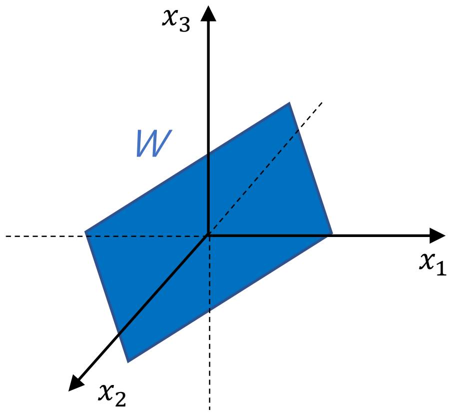
이므로 $\lambda\vec{a}\in W$ 이다. 정리 4.2.1에 의하여 W 는 $\mathbb{R}^2$ 의 부분공간이다.

한편 $(-1,0),(0,1)\in U_1$ 이지만 $(-1,0)+(0,1)=(-1,1)\notin U_1$, 즉 U_1 은 덧셈에 대하여 닫혀 있지 않다. 더 나아가 U_1 은 스칼라 곱에 대하여도 닫혀 있지 않다. 따라서 U_1 은 벡터공간 $\mathbb{R}^2$ 의 부분공간이 아니다. 같은 이유로 U_2 도 부분공간이 아니다.



벡터공간 $\mathbb{R}^2$

보 기 4.2.5 벡터공간 $\mathbb{R}^3$ 의 부분집합 $W=\{(x_1,x_2,x_3)|a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3=0\}$ 은 $\mathbb{R}^3$ 의 부분공간이다. 기하학적으로 보면 W 는 공간위의 원점을 지나는 평면을 나타낸다.



벡터공간 $\mathbb{R}^3$