4장 4,5,6절 연습문제 모범답안

※모든 문제에는 답이 나오기 까지의 논리적인 과정이 명시되어 있어야 합니다. 강의 시간에 언급한 여러 사항에 유의하여 정확한 답안을 작성하여 정해진 기한내에 제출하기 바랍니다.

#1 실수체 $\mathbb{R}$ 위의 벡터공간 $\mathbb{R}^4$ 에서 다음과 같이 주어진 벡터들의 선형독립, 선형종속 여부를 판단하여라. 만약, 선형종속이라면 이들 중 하나의 벡터를 다른 벡터들의 선형결합으로 나타내어라.

(1) $(4,-3,6,2),(1,8,3,1),(3,-2,-1,0)$

【풀이】 $c_1(4,-3,6,2)+c_2(1,8,3,1)+c_3(3,-2,-1,0)=(0,0,0,0)$ 에서,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 1 & 3 & 0 \\ -3 & 8 & -2 & 0 \\ 6 & 3 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

이다. 위의 등식을 만족하는 c_1, c_2, c_3 는 $c_1=c_2=c_3=0$ 만 존재하므로, 세 벡터는 선형독립이다.

(2) $(1,0,-1,0),(-2,-2,0,-4),(-1,1,0,-6),(0,3,1,-2)$

【풀이】 $c_1(1,0,-1,0)+c_2(-2,-2,0,-4)+c_3(-1,1,0,-6)+c_4(0,3,1,-2)=(0,0,0,0)$ 에서

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -6 & -2 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \cdots \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

이다. 임의의 $t \in \mathbb{R}$ 에 대하여

$$t(1,0,-1,0)+t(-2,-2,0,-4)-t(-1,1,0,-6)+t(0,3,1,-2)=(0,0,0,0)$$

이므로 네 벡터는 선형종속이고

$$(-1,1,0,6)=(1,0,-1,0)+(-2,-2,0,-4)+(0,3,1,-2)$$

이다.

(3) $(1,2,3,4),(1,-6,-5,-4),(1,4,5,6)$

【풀이】 $c_1(1,2,3,4)+c_2(1,-6,-5,-4)+c_3(1,4,5,6)=(0,0,0,0)$ 에서,

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -6 & 4 & 0 \\ 3 & -5 & 5 & 0 \\ 4 & -4 & 6 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{5}{4} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

이다. 임의의 $t \in \mathbb{R}$ 에 대하여

$$-\frac{5t}{4}(1,2,3,4)+\frac{t}{4}(1,-6,-5,-4)+t(1,4,5,6)=(0,0,0,0)$$

이므로 세 벡터는 선형종속이고

$$(1,4,5,6)=\frac{5}{4}(1,2,3,4)-\frac{1}{4}(1,-6,-5,-4)$$

이다.

#2 다음과 같이 주어진 벡터들이 선형독립이 되도록 실수 t 의 값을 결정하여라.

(1) $(t,1,1),(1,t,1),(1,1,t)\in\mathbb{R}^3$

【풀이】제차 연립선형방정식

$$\begin{bmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

에서 계수행렬의 행렬식이 0이 아니면 세 벡터가 선형독립이다.

$$\begin{vmatrix} t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \\ 1 & 1 & t \end{vmatrix}=t^3-3t+2=(t-1)^2(t+2)\neq 0$$

으로부터, 정답은 $t\neq 1$ 이고 $t\neq$ -2 인 모든 실수이다.

(2) $(-3,1,t,5),(2t,-2,0,22),(5,-3,2,-t)\in\mathbb{R}^4$

【풀이】Gauss-Jordan소거법을 이용하여 제차 연립선형방정식

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -3 & 2t & 5 & 0 \\ 1 & -2 & -3 & 0 \\ t & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 22 & -t & 0 \end{array}\right]$$

의 기약 행 사다리꼴 행렬을 구해보면, $t\neq -1$인 경우에는

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

이므로 자명한 해 만을 가진다. 따라서 세 벡터는 선형독립이다. 한편, $t=-1$인 경우는

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

이므로 무수히 많은 해를 가진다. 따라서 세 벡터는 선형종속이다. 정답은 $t\neq -1$인 모든 실수

이다.

#3 실수체 $\mathbb{R}$ 위의 벡터공간 $Mat_{2\times 3}(\mathbb{R})$에서 다음과 같이 주어진 네 벡터가 선형종속이 되도록 a, b, c의 값을 결정하여라.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & a \\ -5 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 9 & 8 \\ 2 & b & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 4 & -5 \\ -6 & 2 & 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} c & 30 & 26 \\ -5 & -10 & 19 \end{bmatrix}$$

【풀이】 다음의 등식

$$c_1\begin{bmatrix} 3 & -1 & a \\ -5 & 0 & 2 \end{bmatrix} + c_2\begin{bmatrix} -1 & 9 & 8 \\ 2 & b & 5 \end{bmatrix} + c_3\begin{bmatrix} c & 30 & 26 \\ -5 & -10 & 19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -5 \\ -6 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

의 a_{12}, a_{21}, a_{23} 성분으로부터 다음의 연립선형방정식을 얻는다.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 9 & 30 & 4 \\ -5 & 2 & -5 & -6 \\ 2 & 5 & 19 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

따라서 $c_1 = -1, c_2 = -3, c_3 = 1$ 이다. a_{13} 성분에서 $-a - 24 + 26 = -5$, 즉 $a = 7$. a_{22} 성분에서 $-3b - 10 = 2$, 즉 $b = -4$. a_{11} 성분에서 $-3 + 3 + c = 2$, 즉 $c = 2$.

#4 다음 벡터공간 W 의 기저와 차원을 구하여라. 또한 주어진 벡터 $\boldsymbol{w} \in W$ 를 앞에서 구한 기저 벡터들의 선형결합으로 나타내어라.(주의, 각자가 구한 기저에 따라서 점수가 달라질 수 있습니다.)

(1) $W = \{(2t - s, s, t) | s, t \in \mathbb{R}\}, \boldsymbol{w} = (9, -5, 2)$

【풀이】 $(2t - s, s, t) = s(-1,1,0) + t(2,0,1)$ 이므로 $\mathrm{W} = \langle(-1,1,0), (2,0,1)\rangle$ 이다. 여기서 $(-1,1,0)$과 $(2,0,1)$ 은 선형독립이다. 따라서

$$\mathcal{B} = \{(-1,1,0), (2,0,1)\},$$
$$\dim(W) = 2,$$
$$\boldsymbol{w} = (9, -5, 2) = -5(-1,1,0) + 2(2,0,1).$$

(2) $W = \{(-a + b + c, a - b + c, a + b - c) | a, b, c \in \mathbb{R}\}, \boldsymbol{w} = (1,2,3)$

【풀이】 $(-a + b + c, a - b + c, a + b - c) = a(-1,1,1) + b(1,-1,1) + c(1,1,-1)$ 이므로

$$\mathrm{W} = \langle(-1,1,1), (1,-1,1), (1,1,-1)\rangle$$

이다. 여기서

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

이므로 $\mathrm{W} = \mathbb{R}^3$이다. 따라서

$$\mathcal{B} = \{(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)\},$$
$$\dim(W) = 3,$$
$$\boldsymbol{w} = (1,2,3) = 1(1,0,0) + 2(0,1,0) + 3(0,0,1).$$

(3) $W = \{(a + 2b + c, -3a - b + 2c, a - 2b - 3c) | a, b, c \in \mathbb{R}\}, \boldsymbol{w} = (-5,10,-1)$

【풀이】 $(a + 2b + c, -3a - b + 2c, a - 2b - 3c) = a(1,-3,1) + b(2,-1,-2) + c(1,2,-3)$

이므로

$$W = \langle (1,-3,1), (2,-1,-2), (1,2,-3) \rangle$$

이다.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -7/5 \\ 0 & 1 & -4/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

으로부터

$$\mathcal{B} = \{(1,0,-7/5), (0,1,-4/5)\},$$
$$\dim(W) = 2,$$
$$\boldsymbol{w} = (-5,10,1) = -5(1,0,-7/5) + 10(0,1,-4/5).$$

(4) $W = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) | x_1 - 2x_3 + 3x_5 = 0\}, \boldsymbol{w} = (1,-1,5,0,3)$

【풀이】제차 선형방정식 $[1\ 0\ -2\ 0\ 3|0]$ 에서 자유변수인 $\mathrm{x}_2, \mathrm{x}_3, \mathrm{x}_4, \mathrm{x}_5$ 를 각각 $\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2, \mathrm{c}_3, \mathrm{c}_4$ 라고

하면 $\mathrm{x}_1 = 2\mathrm{c}_2 - 3\mathrm{c}_4$ 이다. 따라서

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = c_1(0,1,0,0,0) + \mathrm{c}_2(2,0,1,0,0)$$
$$+\mathrm{c}_3(0,0,0,1,0) + \mathrm{c}_4(-3,0,0,0,1),$$

즉, $\mathrm{W} = \langle (0,1,0,0,0), (2,0,1,0,0), (0,0,0,1,0), (-3,0,0,0,1) \rangle$ 이다. 이로부터

$$\mathcal{B} = \{(0,1,0,0,0), (2,0,1,0,0), (0,0,0,1,0), (-3,0,0,0,1)\},$$
$$\dim(W) = 4,$$
$$\mathbf{w} = (1,-1,5,0,3) = -1(0,1,0,0,0) + 5(2,0,1,0,0) + 3(-3,0,0,0,1).$$

(5) $W = \left\{ \begin{bmatrix} a - b & b - c \\ a + b & b + c \end{bmatrix} \middle| a, b, c \in \mathbb{R} \right\}, \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 4 & 9 \end{bmatrix}$

【풀이】 $\begin{bmatrix} a - b & b - c \\ a + b & b + c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 이므로

$$\mathrm{W} = \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle$$

이다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

으로부터

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \right\},$$

$$\dim(\mathrm{W}) = 3,$$

$$\boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 2 & -7 \\ 4 & 9 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - 7\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(6) $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 3 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \in Mat_{2\times 4}(\mathbb{R})$에 대하여, W는 제차 연립선형방정식 $AX = 0$의 해공간.

$\boldsymbol{w} = (1,2,-3,-1)$

【풀이】

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

에서 자유변수인 $\mathrm{x}_3, \mathrm{x}_4$ 를 각각 $\mathrm{c}_1, \mathrm{c}_2$ 로 나타내면 $\mathrm{x}_1 = -\mathrm{c}_1 + 2\mathrm{c}_2$, $x_2 = -c_2$ 이다. 따라서

$$\mathrm{X} = (x_1, x_2, x_3, x_4) = c_1(-1,0,1,0) + c_2(2,-2,0,1),$$

즉 $\mathrm{W} = \langle (-1,0,1,0), (2,-2,0,1) \rangle$ 이다. 이로부터

$$\mathcal{B} = \{(-1,0,1,0), (2,-2,0,1)\},$$

$$\dim(\mathrm{W}) = 2,$$

$$\boldsymbol{w} = (1,2,-3,-1) = -3(-1,0,1,0) - 1(2,-2,0,1).$$