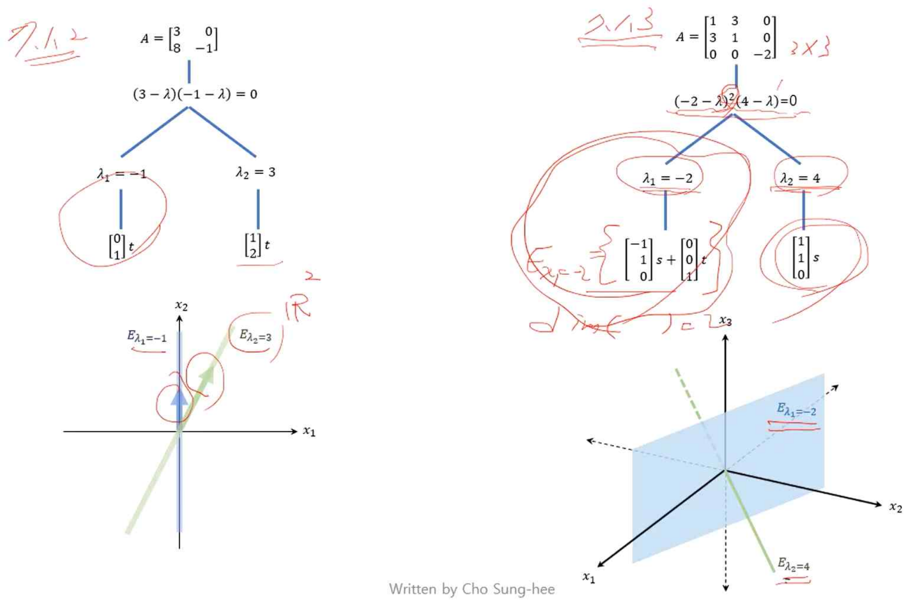
선형대수학 비대면 강의

13주 1차시 수업

2020년 06월 09일

조 성희



보 기 7.1.4 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \in Mat_{3\times3}(\mathbb{R})$ 의 고유값과 고유공간을 모두 구해보자.

A 의 특성방정식은

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & 0 \\ -3 & 5 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(2-\lambda)^2 = 0$$

이므로 A 는 서로 다른 두 개의 고유값 $\lambda_1 = 1$ 과 $\lambda_2 = 2$ 를 가진다. 여기서 고유값 $\lambda_2 = 2$ 의 근의 중복도가 2인 것을 주목하자.

고유값 $\lambda_1 = 1$ 에 해당하는 A 의 고유공간은 제차 연립선형방정식 $(A + I_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 의 해공간이다.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1/8 & 0 \\ 0 & 1 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

으로부터, 고유공간은

$$E_{\lambda_1=1} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix} s \;\middle|\; s \in \mathbb{R} \right\}$$

이다.

다음으로, 고유값 $\lambda_2 = 2$ 에 해당하는 A 의 고유공간은 제차 연립선형방정식 $(A - 2I_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 의 해공간이다.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

으로부터, 고유공간은

$$\dim\left(E_{\lambda_2=2} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} s \;\middle|\; s \in \mathbb{R} \right\} \right) = 1$$

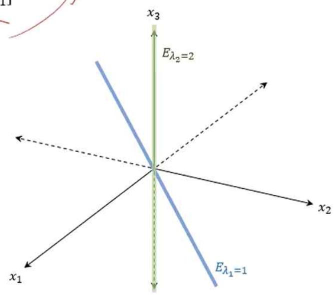
이다.

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix}$

$(1-\lambda)(2-\lambda)^2 = 0$

$\lambda_1 = 1$ $\qquad$ $\lambda_2 = 2$: 2

$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 8 \end{bmatrix} s$ $\qquad$ dim $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} s$) = 1



보 기 7.1.5 행렬 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in Mat_{3\times3}(\mathbb{R})$ 의 고유값과 고유공간을 모두 구해보자.

A 의 특성방정식은

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^3 = 0$$

이므로 A 는 중복도가 3인 하나의 고유값 $\lambda_1 = 2$ 를 가진다. 3

고유값 $\lambda_1 = 2$ 에 해당하는 A 의 고유공간은 제차 연립선형방정식 $(A - 2I_n)\mathbf{x} = \mathbf{0}$ 의 해공간이다.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

3 //

으로부터, 고유공간은

$$\dim\left(E_{\lambda_1=1} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R} \right\} \right) = \boxed{2}$$

이다.

2,1,2, $\quad$ 2,1,3 $\quad$ 2,1,4, $\quad$ 2,1,2,5

2 $\quad$ 2 $\quad$ 3

2 $\quad$ 1 $\quad$ 1

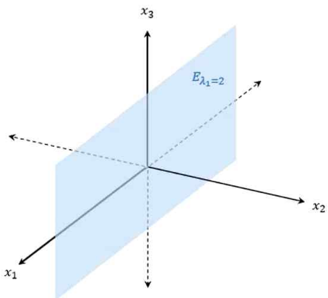
$\quad$ $\quad$ 2

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

$(2-\lambda)^3 = 0$

$\lambda_1 = 2$

$\dim \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t \;\middle|\; s, t \in \mathbb{R} \right\} = 2$



보기 7.1.3 에서 고유값 $\lambda_1 = -2$ 의 특성방정식에서 근의 중복도는 2 이고, 고유공간 $E_{\lambda_1=-2}$ 도 2 차원 공간이다. 그러나 보기 7.1.4 에서 고유값 $\lambda_2 = 2$ 의 특수방정식에서 근의 중복도는 2 이지만 고유공간 $E_{\lambda_2=2}$ 는 1 차원 공간이다. 또한, 보기 7.1.5 에서도 고유값 $\lambda_1 = 2$ 의 특성방정식에서 근의 중복도는 3 이지만 고유공간 $E_{\lambda_1=2}$ 은 2 차원공간이다.

일반적으로 고유값의 특성방정식에서의 근의 중복도와 그에 해당하는 고유공간의 차원(dimension)사이에는 다음과 같은 관계가 성립한다.

스칼라 $\lambda_0 \in F$ 가 행렬 $A \in Mat_{n\times n}(F)$ 의 고유값이라고 하자. 이 때, λ_0 의 특성방정식에서 근의 중복도가 k 라면, 즉

$$\det(A - \lambda I_n) = p(\lambda)(\lambda - \lambda_0)^k, p(\lambda_0) \neq 0$$

이라면,
부등식

$$\dim\left(E_{\lambda=\lambda_0}\right) \leq k$$

이 성립한다.

정 리 7.1.1 F 를 체라고 하자. 스칼라 $\lambda \in F$ 가 행렬 $A \in Mat_{n\times n}(F)$ 의 고유값이고 벡터 $\mathbf{x} \in F^n$ 가 고유값 λ 에 해당하는 A 의 고유벡터이면, 자연수 k 에 대하여 λ^k 는 행렬 A^k 의 고유값이고 벡터 $\mathbf{x} \in F^n$ 은 고유값 λ^k 에 해당하는 A^k 의 고유벡터이다.

【증명】 λ 가 A 의 고유값이고 $\mathbf{x}$ 가 λ 에 해당하는 A 의 고유벡터이므로 $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ 이다.
자연수 k 에 대하여 $(A^k)\mathbf{x} = (\lambda^k)\mathbf{x}$ 가 성립한다고 가정하면,

$$\begin{aligned}(A^{k+1})\mathbf{x} &= A(A^k\mathbf{x}) = A(\lambda^k\mathbf{x}) \\ &= \lambda^k(A\mathbf{x}) = \lambda^k(\lambda\mathbf{x}) = (\lambda^{k+1})\mathbf{x}\end{aligned}$$

이다.
따라서 λ^{k+1} 은 A^{k+1} 의 고유값이고, 벡터 $\mathbf{x}$ 는 λ^{k+1} 에 해당하는 A^{k+1} 의 고유벡터이다. □

7.2 대각화(Diagonalization)

정 의 7.2.1 F 를 체라고 하자. 두 행렬 $A, B \in Mat_{n\times n}(F)$ 에 대하여

$$B = P^{-1}AP$$

를 만족하는 가역행렬(invertible matrix) $P \in Mat_{n\times n}(F)$ 가 존재할 때, 두 행렬 A 와 B 는 **서로 닮은 행렬**(similar matrix)이라고 한다.

정 의 7.2.2 F 를 체, $A \in Mat_{n\times n}(F)$ 라고 하자. A 가 적당한 대각행렬 $D \in Mat_{n\times n}(F)$ 와 서로 닮은 행렬일 때, 즉

$$D = P^{-1}AP$$

를 만족하는 적당한 가역행렬 $P \in Mat_{n\times n}(F)$ 와 대각행렬 $D \in Mat_{n\times n}(F)$ 가 존재할 때, A 를 **대각화 가능한 행렬**(diagonalizable matrix)라고 한다.

A 가 대각화 가능한 행렬일 때, 가역행렬 P 와 대각행렬 D 를 구해서

$$D = P^{-1}AP$$

의 형태로 나타내는 것을 "A 를 대각화 한다"라고 말한다.

$P^{-1}\underset{n\times n}{A}P = D$?

보 기 7.2.1 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ 에 대하여, 가역행렬 $P = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ 가 존재하여 다음의 등식을 만족한다.

$$\begin{aligned}P^{-1}AP &= \begin{bmatrix} -1/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

따라서 A 는 대각화 가능한 행렬이다.

정 리 7.2.1 두 행렬 $A, B \in Mat_{n\times n}(F)$ 가 서로 닮은 행렬이면 A 와 B 는 같은 고유값을 가진다.

【증명】 A 와 B 가 서로 닮은 행렬이라고 하면, 등식 $B = P^{-1}AP$ 를 만족하는 가역행렬 P 가 존재한다. 행렬식의 성질에 의하여

$$\begin{aligned}|B - \lambda I_n| &= |P^{-1}AP - \lambda I_n| \\ &= |P^{-1}AP - P^{-1}\lambda I_n P| \\ &= |P^{-1}(A - \lambda I_n)P| \\ &= |P^{-1}||A - \lambda I_n||P| \\ &= |A - \lambda I_n|\end{aligned}$$

이므로

$$\{\lambda \in F \,|\, |A - \lambda I_n| = 0\} = \{\lambda \in F \,|\, |B - \lambda I_n| = 0\}$$

가 성립한다. □

정 리 7.2.2 행렬 $A \in Mat_{n\times n}(F)$ 가 대각화 가능한 행렬이기 위한 필요충분조건은 A 가 선형독립인 n 개의 고유벡터를 가지는 것이다.

【증명】 행렬 A 에 대한 다음의 세 가지 조건이 모두 동치임을 주목하자.

- A 는 대각화 가능한 행렬이다.
- 등식 $P^{-1}AP = D$ 를 만족하는 가역행렬 P 와 대각행렬 D 가 존재한다.
- 등식 $AP = PD$ 를 만족하는 가역행렬 P 와 대각행렬 D 가 존재한다.

여기서 가역행렬 P 와 대각행렬 D 를 각각 다음과 같이 나타내면

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \cdots & p_{nn} \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

등식 $AP = PD$ 가 성립한다는 사실은 모든 $i = 1,2,\dots,n$ 에 대하여,

$$A\begin{bmatrix} p_{1i} \\ p_{2i} \\ \vdots \\ p_{ni} \end{bmatrix} = \lambda_i \begin{bmatrix} p_{1i} \\ p_{2i} \\ \vdots \\ p_{ni} \end{bmatrix}$$

이 성립한다는 사실과 동치이다.

따라서, 대각행렬 D 의 i 번 째 대각성분 λ_i 는 A 의 고유값이고, 행렬 P 의 i 번 째 열벡터는 고유값 λ_i 에 해강하는 A 의 고유벡터이다, 또한, 행렬 P 는 가역행렬이므로 P 의 n 개의 열벡터 즉, A 의 n 개의 고유벡터는 선형독립이다. □

보 기 7.2.2 행렬 $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$ 가 대각화 가능한 행렬인지 알아보자.

보기 7.1.2에 의하여 A 의 모든 고유값과 고유공간은 다음과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(3-\lambda)(-1-\lambda) = 0$$

$$\lambda_1 = -1 \qquad \lambda_2 = 3$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} t \qquad \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} t$$

2×2 행렬 A 가 선형독립인 2 개의 고유벡터 $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 를 가지므로 정리 7.2.2에 의하여 A 는 대각화 가능한 행렬이고, 다음과 같이 대각화 된다.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$