선형대수학 비대면 강의

10주 1차시 수업

2020년 05월 19일

조 성희

정 리 6.1.3 선형변환 $T: V \to W$ 에 대해서 다음이 성립한다.

(1) $T(\mathbf{0}_V) = \mathbf{0}_W$.

(2) 벡터 $\boldsymbol{v} \in V$ 에 대하여 $T(-\boldsymbol{v}) = -T(\boldsymbol{v})$.

(3) 벡터 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ 에 대하여 $T(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{u}) - T(\boldsymbol{v})$.

【증명】 (1) $T(\mathbf{0}_V) = T(\mathbf{0}_V + \mathbf{0}_V) = T(\mathbf{0}_V) + T(\mathbf{0}_V)$ 이다.

$T(\mathbf{0}_V) \in W$ 이므로

$$0_W + T(\mathbf{0}_V) = T(\mathbf{0}_V) + T(\mathbf{0}_V)$$

이고, 정리 4.1.1의 (1)에 의하여 $\mathbf{0}_W = T(\mathbf{0}_V)$ 이다.

(2) 정리 4.1.1의 (4)에 의하여

$$T(-\boldsymbol{v}) = T\big((-1)\boldsymbol{v}\big) = (-1)T(\boldsymbol{v}) = -T(\boldsymbol{v})$$

이다.

(3) T 가 선형변환이고, (2)의 결과를 이용하면

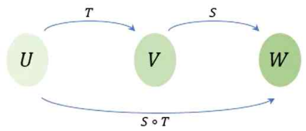
$$T(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{u}+(-\boldsymbol{v})) = T(\boldsymbol{u}) + T(-\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{u}) + (-T(\boldsymbol{v})) = T(\boldsymbol{u}) - T(\boldsymbol{v})$$

이다. □

정 리 6.1.4 체 F 위의 세 벡터공간 U, V, W 에 대하여, 두 함수

$$T: U \longrightarrow V, S: V \longrightarrow W$$

가 선형변환이면 합성함수 $S \circ T: U \longrightarrow W$ 도 선형변환이다.



【증명】 두 벡터 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in U$ 와 스칼라 $\lambda \in F$ 에 대하여,

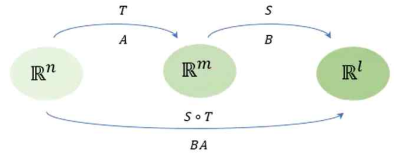
$$(S \circ T)(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = S(T(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v})) = S(T(\boldsymbol{u}) + T(\boldsymbol{v})) = S(T(\boldsymbol{u})) + S(T(\boldsymbol{v}))$$
$$= (S \circ T)(\boldsymbol{u}) + (S \circ T)(\boldsymbol{v})$$

이고

$$(S \circ T)(\lambda \boldsymbol{u}) = S(T(\lambda \boldsymbol{u})) = S(\lambda T(\boldsymbol{u})) = \lambda S(T(\boldsymbol{u})) = \lambda (S \circ T)(\boldsymbol{u})$$

이다. 따라서 $S \circ T$ 는 선형변환이다. □

따름정리 6.1.~~4~~5 두 함수 $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$, $S: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^l$ 가 선형변환이고 $m \times n$ 행렬 A 와 $l \times m$ 행렬 B 를 각각 T 와 S 에 대한 표준행렬이라고 하면, 합성변환 $S \circ T$ 에 대한 표준행렬은 BA 이다.



6.2 핵(Kernel)과 치역(Range)

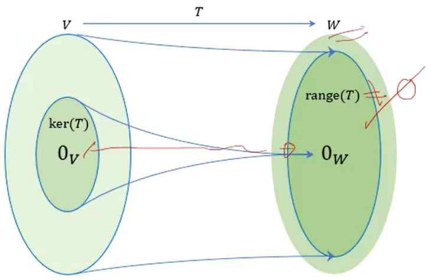
정 의 6.2.1 선형변환 $T: V \longrightarrow W$ 에 대하여, V 의 부분집합인

$$\ker(T) = \{\boldsymbol{v} \in V \mid T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{0}_W\}$$

을 T 의 **핵**(kernel) 또는 **퇴화공간**(null space)라고 한다. 또한 W 의 부분집합인

$$\mathrm{range}(T) = \{T(\boldsymbol{v}) \mid \boldsymbol{v} \in V\}$$

를 T 의 **치역**(range) 또는 **상공간**(image space)이라고 한다.



정 리 6.2.1 선형변환 $T: V \longrightarrow W$ 에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $\ker(T)$ 는 V 의 부분공간이다.

(2) $\mathrm{range}(T)$ 는 W 의 부분공간이다.

【증명】 (1) 먼저, 정리 6.1.3의 (1)에 의하여 $T(\boldsymbol{0}_V) = \boldsymbol{0}_W$ 이므로 $\boldsymbol{0}_V \in \ker(T)$, 즉 $\ker(T) \neq \emptyset$.
다음으로, $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in \ker(T)$, $\lambda \in F$ 라고 하면, $T(\boldsymbol{v}_1) = T(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{0}_W$ 이다. 따라서

$$T(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = T(\boldsymbol{v}_1) + T(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{0}_W + \boldsymbol{0}_W = \boldsymbol{0}_W$$

이므로 $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 \in \ker(T)$ 이다. 또한,

$$T(\lambda \boldsymbol{v}_1) = \lambda T(\boldsymbol{v}_1) = \lambda \boldsymbol{0}_W = \boldsymbol{0}_W$$

이므로 $\lambda \boldsymbol{v}_1 \in \ker(T)$ 이다. 정리 4.2.1에 의하여 $\ker(T)$ 는 V 의 부분공간이다.

(2) 먼저, 정리 6.1.3의 (1)에 의하여 $T(\boldsymbol{0}_V) = \boldsymbol{0}_W$ 이므로 $\boldsymbol{0}_W \in \mathrm{range}(T)$, 즉 $\mathrm{range}(T) \neq \emptyset$.
다음으로, $\boldsymbol{w}_1, \boldsymbol{w}_2 \in \mathrm{range}(T)$, $\lambda \in F$ 라고 하면, 적당한 벡터 $\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2 \in V$ 에 대하여

$$\boldsymbol{w}_1 = T(\boldsymbol{v}_1), \boldsymbol{w}_2 = T(\boldsymbol{v}_2)$$

이다. 벡터 $\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2, \lambda \boldsymbol{v}_1 \in V$ 에 대하여

$$T(\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = T(\boldsymbol{v}_1) + T(\boldsymbol{v}_2) = \boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2$$

이므로 $\boldsymbol{w}_1 + \boldsymbol{w}_2 \in \mathrm{range}(T)$ 이고,

정 의 6.2.2 체 F 위의 벡터공간 V, W 에서 $T: V \longrightarrow W$ 를 선형변환이라고 할 때, V 의 부분공간인 $\ker(T)$ 의 차원을 T 의 **퇴화차수**(nullity)라고 하고 $\text{nullity}(T)$ 로 나타낸다. 또한 W 의 부분공간인 $\text{range}(T)$ 의 차원을 T 의 **계급수**(rank)라고 하며 $\text{rank}(T)$ 로 나타낸다. 즉,

$$\dim_F(\ker(T)) = \text{nullity}(T)\,, \dim_F(\text{range}(T)) = \text{rank}(T)$$

이다.

보 기 6.2.1 선형변환 $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ 의 표준행렬을 $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ 라고 하면,

$$\text{벡터 } X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \text{ 에 대하여 } T(X) = AX$$

이다.

따라서 $\ker(T) = \{X \in \mathbb{R}^n | T(X) = O\} = \{X \in \mathbb{R}^n | AX = O\}$ 이므로, $\ker(T)$ 는 제차 연립선형방정식 $AX = O$ 의 해공간(solution space)이다.

또한, $\text{range}(T) = \{T(X) | X \in \mathbb{R}^n\} = \{AX | X \in \mathbb{R}^n\}$ 이므로, $\text{range}(T)$ 는 A 의 열공간(column space)이다.

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ $\{AX | X \in \mathbb{R}^n\}$ $=$ A의 열공간.

$= \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix} x_2 + \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} x_3$