6장 연습문제

※ 모든 문제에는 답이 나오기 까지의 논리적인 풀이 과정이 명시되어 있어야 합니다. 풀이 과정이 부족하거나 과정이 없는 답안은 답이 맞더라 하더라도 감점, 또는 점수가 없을 수도 있음을 명심하기 바랍니다. 강의 시간에 언급한 여러 사항에 유의하여 정확한 답안을 각자 작성하여, 정해진 기한내에 제출하기 바랍니다

#1. $\mathbb{R}$ 위의 두 벡터공간 사이에 정의된 다음의 함수가 선형변환인지를 판정하여라. 만약 선형변환이라면 증명하고, 선형변환이 아니라면 그 이유를 정확히 밝혀라.

(1) 내적공간 V에 대하여 $T: V \longrightarrow \mathbb{R}$, $T(\boldsymbol{v}) = \|\boldsymbol{v}\|$.

(2) 임의의 고정된 벡터 $\boldsymbol{v_0} \in \mathbb{R}^3$에 대하여 $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3, T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{v_0}$.

(3) 임의의 고정된 행렬 $A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$에 대하여 $T: Mat_{n\times r}(\mathbb{R}) \longrightarrow Mat_{m\times r}(\mathbb{R})\,, T(X) = AX$.

(4) $T: P_2[x] \longrightarrow P_2[x], T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = [a_0] + [a_1]x + [a_2]x^2$.

(임의의 $x \in \mathbb{R}$ 에 대하여 $[x]$ 는 $n \le x < n+1$ 을 만족하는 정수 n 이다.)

(5) 내적공간 V 와 영벡터가 아닌 벡터 $\boldsymbol{w} \in V$에 대하여,

$$T: V \longrightarrow \langle \boldsymbol{w} \rangle\,, T(\boldsymbol{v}) = \mathrm{proj}_{\boldsymbol{w}} v.$$

#2. 다음 명제들에 대하여 참(True)과 거짓(False)을 판단하여라. 만약, 명제가 참이라면 그 이유를 간단히 설명하고, 거짓인 명제는 참인 명제로 바꿔 적어라.

문제 (1)~(6)에서 $T: \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m (m < n)$ 은 선형변환이고 T 의 표준행렬을 A 라고 하자.

(1) $\ker(T)$ 는 A 의 행공간이다.

(2) $\mathrm{range}(T)$ 는 A 의 열공간이다.

(3) $\mathrm{rank}(T)$ 는 A 의 기약 행 사다리꼴 행렬에서 나타나는 자유변수(free variable)의 개수이다.

(4) $\mathrm{nullity}(T)$ 는 A 의 선형독립인 열벡터의 최대 개수이다.

(5) $\mathrm{nullity}(T) \le n - m$

(6) $\mathrm{nullity}(T) = n - m$ 이면 연립선형방정식 $AX = B$ 가 임의의 $B \in \mathbb{R}^m$ 에 대하여 해를 가진다.

#3. $k \in \mathbb{R}$ 일 때, 함수

$$T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, T(x_1, x_2) = (x_1 + kx_2, -x_2)$$

에 대하여 다음의 물음에 답하여라.

(1) 모든 실수 k 에 대하여 T 는 $\mathbb{R}^2$ 위의 자기 동형변환임을 보여라.

(2) 역변환 $T^{-1}(y_1, y_2)$를 구하여라.

#4. 선형연산자 $T: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ 가

$$T(1,0,0,0) = (1,-2,4,12), T(1,1,0,0) = (0,6,0,6), T(1,1,1,0) = (2,5,5,24), T(1,1,1,1) = (1,8,2,16)$$

일 때, 다음의 물음에 답하여라.

(1) $T(x_1, x_2, x_3, x_4)$ 를 구하여라.

(2) $\ker(T)$ 의 기저와 $\text{nullity}(T)$ 를 구하여라.

(3) $\text{range}(T)$ 의 기저와 $\text{rank}(T)$ 를 구하여라.

(4) 역변환 T^{-1}가 존재하는가? 존재한다면 $T^{-1}(y_1, y_2, y_3, y_4)$ 를 구하고, 존재하지 않는다면 그 이유를 설명하여라.

#5. $T: V \longrightarrow W$ 는 동형변환(isomorphism)이고 $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$ 이 V 의 기저일 때,

$$T(\mathcal{B}) = \{T(\boldsymbol{v_1}), T(\boldsymbol{v_2}), \dots, T(\boldsymbol{v_n})\}$$

이 W의 기저가 됨을 증명하여라. (주의. 증명 내용을 분명히 파악할 수 있도록 <u>정확한 문장</u>과 수식을 이용하여 답안을 작성하기 바랍니다.)

#6. $W = \{A \in Mat_{2\times 2}(\mathbb{R}) | A^T = A\}$ 라고 할 때, $W \cong \mathbb{R}^3$ 를 증명하여라.(주의. 수업시간에 배운 정리를 이용하지 말고 "≅ " 의 정의를 만족함을 보여라.)

#7. 벡터공간 $P_2[x]$ 의 두 순서기저

$$\mathcal{B} = \{1 + x, x + x^2, 1 + x^2\}, \mathcal{R} = \{1, 1 + x, 1 + x + x^2\}$$

에 대하여 다음의 물음에 답하여라.

(1) 기저 $\mathcal{B}$ 에서 기저 $\mathcal{R}$ 으로의 전이행렬(transition matrix)를 구하여라.

(2) 다항식 $p(x) \in P_2[x]$ 에 대하여 $[p(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 일 때, $p(x)$ 와 $[p(x)]_{\mathcal{R}}$ 을 구하여라.

(3) 다항식 $q(x) \in P_2[x]$ 에 대하여 $[q(x)]_{\mathcal{R}} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ 일 때, $q(x)$ 와 $[q(x)]_{\mathcal{B}}$ 를 구하여라.