2.2절 Gauss-Jordan 소거법

다음과 같이 정의되는 단순하고도 특이한 형태의 행렬에 대하여 알아보도록 하자.

정 의 2.2.1 $m \times n$ 크기의 행렬이 다음의 조건을 만족하는지 알아보자.

(1) 만약 모든 성분이 0으로만 이루어진 행(영행, zero row)가 존재한다면 행렬의 제일 아래에 위치한다.

(2) 영행을 제외한 각 행에서 처음으로 나타나는 0이 아닌 성분은 반드시 1이다. (이 때의 1을 "leading 1"이라고 부른다.)

(3) 아래 행의 "leading 1"은 위의 행의 "leading 1"보다 같거나 왼쪽의 열에 위치하지 않는다.

(4) "leading 1"을 포함한 각 열에서 "leading 1"을 제외한 다른 성분은 모두 0이다.

조건 (1)~(3)을 만족하는 행렬을 **행 사다리꼴 행렬**(row-echelon form matrix)라고 하고 (1)~(4)의 네 가지 조건을 모두 만족하는 행렬을 **기약 행 사다리꼴 행렬**(reduced row-echelon form matrix)라고 한다.

보 기 2.2.1 다음의 행렬들은 모두 기약 행 사다리꼴 행렬이다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

기약 행 사다리꼴 행렬은 성분 "0" 이 많이 포함된 단순하면서도 특이한 형태의 행렬이다. 어떤 행렬이 기약 행 사다리꼴 행렬이 아니더라도 다음에 소개할 행 연산들을 반복적으로 실행하여 기약 행 사다리꼴 행렬로 바꿀 수 있다.

정 의 2.2.2 $m \times n$ 크기의 행렬 A의 행(row)에 대한 다음의 3 가지 유형의 변형을 **기본 행 연산**(elementary row operation)이라고 한다.

(Ⅰ) A의 임의의 두 행(i행과 j행)을 서로 바꾼다. (C_{ij}로 나타내자.)

(Ⅱ) A의 임의의 한 행(i행)을 $k(\neq 0)$배 한다. ($D_i(k)$로 나타내자.)

(Ⅲ) A의 임의의 한 행(j행)의 k배를 또 다른 행(i행)에 더해준다. ($E_{ij}(k)$로 나타내자.)

정의 2.2.2에서 행렬 A를 연립선형방정식으로 생각한다면, 즉 A가 어떤 연립선형방정식을 나타내는 덧붙인 행렬이라면, 두 행을 바꾸는 연산인 C_{ij}는 연립선형방정식에서 두 방정식의 위치를 교환하는 것을 의미한다. 또한 i행에 $k(k \neq 0)$배를 하는 연산인 $D_i(k)$는 연립선형방정식에서 i번 째 방정식을 k배 해주는 것이다. 마지막으로 j행의 k배를 i행에 더해주는 연산인 $E_{ij}(k)$는 i번째 방정식을, i번째 방정식에 j번째 방정식의 k배를 더해준 방정식으로 바꾸는 것을 의미한다. 따라서 임의의 기본 행 연산 $E \in \{C_{ij}, D_i(k), E_{ij}(k)\}$에 대해서

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \overset{E}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} A' \end{bmatrix}$$

라고 한다면 연립선형방정식 A와 A'는 같은 해를 가진다는 것을 알 수 있다.

더 나아가, 기약 행 사다리꼴 행렬이 아닌 임의의 행렬 A에 기본 행 연산을 유한 번 실시하여 기약 행 사다리꼴 행렬 R을 얻었다면, 즉 유한 번(k번)의 기본 행 연산 $E_1, E_2, \ldots, E_k \in \{C_{ij}, D_i(k), E_{ij}(k)\}$에 대해서

$$\begin{bmatrix} A \end{bmatrix} \overset{E_1}{\rightarrow} \begin{bmatrix} A_1 \end{bmatrix} \overset{E_2}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} A_2 \end{bmatrix} \overset{E_3}{\Rightarrow} \cdots \overset{E_k}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} R \end{bmatrix}$$

이라고 한다면, 연산과정에서 나타나는 모든 행렬들, 즉 연립선형방정식 $A, A_1, A_2, \ldots, R$ 들은 모두 같은 해를 가짐을 알 수 있다.

기약 행 사다리꼴 행렬이 아닌 임의의 행렬 A에 적절한 기본 행 연산을 유한 번 실시하여 기약 행 사다리꼴 행렬 R로 바꾸는 것을 **Gauss-Jordan 소거법**이라고 말한다. 우리에게 어떠한 연립선형방정식 A가 주어졌을 때 Gauss-Jordan 소거법을 이용하여 기약 행 사다리꼴 행렬 R을 구하고, R로부터 해를 구해낼 수 있다. 이러한 과정을 "Gauss-Jordan 소거법을 이용하여 연립선형방정식의 해를 구한다"라고 말한다.

Gauss-Jordan 소거법을 이용하여 연립방정식의 해를 구하는 과정을 다음의 간단한 연립선형방정식을 통하여 알아보도록 하자.

두 개의 미지수를 가지고 두 개의 선형방정식이 연립된 연립선형방정식

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 8 \\ x_1 + 3x_2 = 9 \end{cases}$$

의 해를 구해보자. 연립선형방정식을 행렬로 표현하면

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 9 \end{bmatrix}$$

이고 이 행렬은 기약 행 사다리꼴 행렬이 아니다. 적절한 기본 행 연산을 실시하여 기약 행 사다리꼴 행렬로 바꾸어 보자. 먼저 1행 1열의 원소를 "leading 1"으로 만들기 위해서 C_{12} 을 시행하면 A 는

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 1 & 8 \end{bmatrix}$$

으로 바뀌게 된다. 다음으로는 1열의 'leading 1"을 제외한 다른 성분 2를 0으로 바꾸기 위해서 $E_{21}(-2)$ 를 시행하면 A_1 은

$$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & -5 & -10 \end{bmatrix}$$

으로 바뀌게 된다. 다음 행인 2행으로 내려와서 처음으로 나타나는 0 이 아닌 성분인 −5를 'leading 1"으로 바꾸기 위해서 $D_2(-1/5)$ 를 시행하면 A_2 는

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

가 된다. 다음으로 2열의 'leading 1"을 제외한 다른 성분인 3을 0으로 만들기 위하여 $E_{12}(-3)$ 을 시행하면 A_3 는

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

이 되고 이는 기약 행 사다리꼴 행렬이다. 우리는 행렬 A 에 4번의 기본 행 연산을 실시하여 기약 행 사다리꼴 행렬 R 로 만들었다. 이 과정에서 얻어지는 행렬들 A, A_1, A_2, A_3 그리고 R 을 모두 연립선형방정식으로 본다면 이들의 해는 모두 같다. 우리는 마지막 연립방정식인 R 로부터 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$ 라는 해를 얻으며 이 해는 처음에 주어진 연립선형방정식 A 의 해 이기도 하다.

Gauss−Jordan 소거법을 이용하여 다양한 형태의 해를 가지는 연립선형방정식의 해를 구하는 방법을 아래의 몇 가지 보기를 통하여 알아보도록 하자.

보 기 2.2.2 연립선형방정식

$$\begin{cases} 3x_1 - 5x_2 - 2x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \end{cases}$$

의 해를 구해보자. 이 연립선형방정식을 행렬로 나타내고 그의 기약 행 사다리꼴 행렬을 구해보면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} 3 & -5 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 4 \\ -1 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \overset{C_{12}}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 3 & -5 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \underset{E_{31}(1)}{\overset{E_{21}(-3)}{\Rightarrow}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & -2 & 1 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

$$\overset{C_{23}}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & -2 & 1 & -11 \end{bmatrix} \underset{E_{32}(2)}{\overset{E_{12}(1)}{\Rightarrow}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 13 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix} \overset{E_{13}(1)}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 20 \\ 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

마지막 기약 행 사다리꼴 행렬로부터 주어진 연립선형방정식은 유일한 해

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 9 \\ 7 \end{bmatrix}$$

를 가짐을 알 수 있다.

보 기 2.2.3 연립선형방정식

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 2x_3 \qquad\quad = 1 \\ 2x_1 - 6x_2 - 3x_3 + 4x_4 = 4 \\ 3x_1 - 9x_2 - 4x_3 + 8x_4 = 7 \end{cases}$$

의 해를 구해보자. 이 연립선형방정식을 행렬로 나타내고 그의 기약 행 사다리꼴 행렬을 구하여보자.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & -6 & -3 & 4 & 4 \\ 3 & -9 & -4 & 8 & 7 \end{bmatrix} \underset{E_{31}(-3)}{\overset{E_{21}(-2)}{\Rightarrow}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 8 & 4 \end{bmatrix} \underset{E_{32}(-2)}{\overset{E_{12}(2)}{\rightarrow}} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 8 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

마지막 기약 행 사다리꼴 행렬을 살펴보면 미지수 x_1과 x_3의 자리에는 “leading 1”이 위치하고 x_2와 x_4의 자리에는 “leading 1”이 위치하지 않는다. 첫 번째 방정식에서 x_1을 x_2와 x_4로, 두 번째 방정식에서 x_3를 x_4로 표시하면

$$\begin{cases} x_1 = 3x_2 - 8x_4 + 5 \\ x_3 = \qquad\; - 4x_4 + 2 \end{cases}$$

이다. 따라서 해는 “leading 1”이 위치하지 않은 미지수인 x_2와 x_4의 값이 임의로 정해지면 나머지 미지수의 값도 결정된다. 이런 이유로, “leading 1”이 위치하지 않은 자리에 해당하는 미지수를 “**자유변수**(free variable)”라고 부르도록 하자. $x_2 = s$, $x_4 = t$라고 하면 해는

$$\begin{cases} x_1 = 3s - 8t + 5 \\ x_2 = \;\; s \\ x_3 = \qquad - 4t + 2 \\ x_4 = \qquad\quad t \end{cases}, (s, t \in \mathbb{R})$$

이다. 또한 이러한 해를 벡터를 이용하여 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -8 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (s, t \in \mathbb{R})$$

보 기 2.2.4 다음 연립선형방정식

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 = 1 \\ 4x_1 + 5x_2 - 6x_3 = 8 \end{cases}$$

의 해를 구해보자. 위에서와 마찬가지로 연립방정식을 행렬로 나타내고, 기약 행 사다리꼴 행렬을 구하기 위해 적절한 기본 행 연산을 4번 실시하면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & -6 & 8 \end{bmatrix} \overset{E_{12}(-1)}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 5 & -6 & 8 \end{bmatrix} \underset{E_{31}(-4)}{\overset{E_{21}(-2)}{\Rightarrow}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & 10 & -5 \\ 0 & 1 & 10 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\overset{E_{32}(-1)}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -14 & 8 \\ 0 & 1 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

마지막 행렬은 기약 행 사다리꼴 행렬은 아니다. 하지만 이 행렬의 3 행은 선형방정식

$$0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$$

을 의미하고, 이 방정식은 해를 가지지 않는다. 따라서 주어진 연립선형방정식을 해를 가지지 않는다.

보기 2.2.4 에서 볼 수 있듯이 기약 행 사다리꼴 행렬을 구하는 과정에서 나타나는 어떤 행렬에서 마지막 열을 제외한 모든 열의 성분이 "0" 이지만 마지막 열의 성분은 "0" 이 아닌 다른 성분을 가지는 행이 하나라도 존재한다면 주어진 연립선형방정식은 해가 존재하지 않음을 알 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & * \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$