선형대수학 비대면 강의

4주 1차시 수업

조 성희

정 의 4.1.2 V 를 덧셈(+)이 정의되어 있는 집합이라고 하고 F 를 체라고 하자.

임의의 원소 $\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v},\ \boldsymbol{w} \in V$ 에 대하여 덧셈에 대한 다음의 네 가지 조건을 생각하자.

A1. $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}+\boldsymbol{u}$

A2. $(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})+\boldsymbol{w}=\boldsymbol{u}+(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w})$

A3. 모든 원소 $\boldsymbol{v} \in V$ 에 대하여 $\boldsymbol{v}+\mathbf{0}=\mathbf{0}+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}$ 를 만족하는 원소 $\mathbf{0} \in V$ 이 존재한다.

A4. 각 원소 $\boldsymbol{v} \in V$ 에 대하여 $\boldsymbol{v}+(-\boldsymbol{v})=(-\boldsymbol{v})+\boldsymbol{v}=\mathbf{0}$ 을 만족하는 원소 $-\boldsymbol{v} \in V$ 가 존재한다.

체 F 와 집합 V 사이에 스칼라 곱(scalar multiplication)이 정의되어 있고, 즉 임의의 원소 $\lambda \in F,\ \boldsymbol{v} \in V$ 에 대하여 $\lambda\boldsymbol{v} \in V$ 이고,

임의의 원소 $\lambda,\ \mu \in F$ 와 $\boldsymbol{u},\ \boldsymbol{v} \in V$ 에 대하여 다음의 네 가지 조건을 생각하자.

SM1. $\lambda(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v})=\lambda\boldsymbol{u}+\lambda\boldsymbol{v}$

SM2. $(\lambda+\mu)\boldsymbol{u}=\lambda\boldsymbol{u}+\mu\boldsymbol{u}$

SM3. $(\lambda\mu)\boldsymbol{u}=\lambda(\mu\boldsymbol{u})$

SM4. $1\boldsymbol{u}=\boldsymbol{u}$

체 F 와 집합 V 가 위에서 언급한 8 가지 조건들을 만족할 때, V 를 F 위의 **벡터공간**(vector space)라고 한다.

이 때, F 의 원소를 **스칼라**(scalar), V 의 원소를 **벡터**(vector)라고 부른다.

V 가 벡터공간이면 정의 4.1.2의 A4에 의하여 벡터 사이의 뺄셈도 다음과 같이 정의된다.

임의의 원소 $\boldsymbol{u}, \ \boldsymbol{v} \in V$ 에 대하여

$$\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{v})$$

이다.

보 기 4.1.1 $V = Mat_{m\times n}(\mathbb{R}) = \left\{ [a_{ij}]_{m\times n} \,\middle|\, a_{ij} \in \mathbb{R} \right\}$은 실수를 성분으로 가지는 $m \times n$ 크기의 모든 행렬들의 집합이고,

$F = \mathbb{R}$ 이라고 하자. 이 때, $Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ 이 $\mathbb{R}$ 위의 벡터공간이 되는지 알아보자

$Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ 위에서 다음과 같이 정의된 덧셈과 스칼라 곱을 생각하자

임의의 $A = [a_{ij}]_{m\times n}$, $B = [b_{ij}]_{m\times n} \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ 과 $\lambda \in \mathbb{R}$ 에 대하여,

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m\times n}$$

이고

$$\lambda A = [\lambda a_{ij}]_{m\times n}$$

이다.

위에서 정의된 덧셈과 스칼라 곱은 정의 4.1.2의 8 가지 조건들을 모두 만족시킨다.

그러므로 실수를 성분으로 가지는 같은 크기의 행렬들의 집합 $Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ 은 $\mathbb{R}$ 위의 벡터공간이다.

따라서 행렬은 벡터이고 이 때의 스칼라는 실수이다.

보 기 4.1.2 실수를 계수로 가지는 모든 다항식(polynomial)들의 집합을 $\mathbb{R}[x]$ 로 나타내자.

즉, $\mathbb{R}[x] = \{\, p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n \mid a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R} \,\}$이다. 또한 $F = \mathbb{R}$ 이라고 하자

이 때, 집합 $\mathbb{R}[x]$ 가 $\mathbb{R}$ 위의 벡터공간이 되는지 알아보자.

먼저, $\mathbb{R}[x]$ 위에서 다음과 같이 정의된 덧셈과 스칼라 곱을 생각하자.

임의의

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n,\ q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n + \cdots + b_m x^m \in \mathbb{R}[x] \ \ (n \le m)$$

와 $\lambda \in \mathbb{R}$ 에 대하여

$$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_n + b_n)x^n + \cdots + b_m x^m,$$

$$\lambda p(x) = \lambda a_0 + \lambda a_1 x + \cdots + \lambda a_n x^n$$

이다.

위에서 정의된 덧셈과 스칼라 곱은 정의 4.1.2의 8 가지 조건들을 모두 만족시킨다.

그러므로 다항식들의 집합 $\mathbb{R}[x]$ 는 $\mathbb{R}$ 위의 벡터공간이고, 따라서 다항식도 벡터이다.

보 기 4.1.3 모든 항이 실수로 이루어진 무한수열 $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ 을 $\{a_n\}$ 으로 나타내고 이러한 무한수열을 모두 모아 놓은 집합을 $\mathrm{Seq}(\mathbb{R})$ 로 나타내자. 집합 $\mathrm{Seq}(\mathbb{R})$ 이 $\mathbb{R}$ 위의 벡터공간이 되는지 알아보자.

$\mathrm{Seq}(\mathbb{R})$ 위에서 다음과 같이 정의된 덧셈과 스칼라 곱을 생각하자.

임의의 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\} \in \mathrm{Seq}(\mathbb{R})$ 와 $\lambda \in \mathbb{R}$ 에 대하여

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}$$

이고

$$\lambda\{a_n\} = \{\lambda a_n\}$$

이다.

이와 같이 정의된 덧셈과 스칼라 곱은 정의 4.1.2의 8가지 조건들을 모두 만족시키므로 모든 무한수열들의 집합 $\mathrm{Seq}(\mathbb{R})$은 $\mathbb{R}$ 위의 벡터공간이다. 따라서 무한수열도 벡터이고 이 때의 스칼라는 실수이다

보 기 4.1.4 체 F 와 양의 정수 n 에 대하여 다음과 같이 정의된 집합

$$F^n = \{ (a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1, a_2, \dots, a_n \in F \}$$

는 다음과 같이 정의된 덧셈과 스칼라 곱에 관하여 체 F 위의 벡터공간을 이룬다.

임의의 $(a_1, a_2, \dots, a_n)$, $(b_1, b_2, \dots, b_n) \in F^n$ 과 $\lambda \in F$ 에 대하여

$$(a_1, a_2, \dots, a_n) + (b_1, b_2, \dots, b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \dots, a_n + b_n)$$

이고

$$\lambda(a_1, a_2, \dots, a_n) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \dots, \lambda a_n).$$

이다.

특히, $\mathbb{R}^n = \{ (a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R} \}$ 는 실수체 $\mathbb{R}$ 위의 벡터공간이다.

이러한 벡터공간 $\mathbb{R}^n$ 을 **Euclidean n-공간(space)**이라고 부른다. $n = 1, 2, 3$ 일 때의 벡터공간 $\mathbb{R}^n$ 의 벡터를 각각 직선벡터, 평면벡터, 공간벡터라고 부르며, $\vec{a}, \vec{b}, \dots$ 와 같이 화살표를 이용하여 나타내기도 한다.

물론 $\mathbb{C}^n = \{ (a_1, a_2, \dots, a_n) \mid a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{C} \}$ 도 복소수체 $\mathbb{C}$ 위의 벡터공간이다.