제1장 행렬(Matrix)

1.1절 행렬의 정의와 연산

자연수 m,n에 대하여 원소 $a_{ij}\,(i=1,2,\ldots,m\,,\,j=1,2,\ldots,n)$를 아래와 같이 직사각형 모양으로 늘어놓고 괄호로 묶어 놓은 것을 $m\times n$ **행렬**(matrix)이라고 하고 알파벳 대문자를 써서 나타낸다.

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

이와 같은 행렬 A를 $A=[a_{ij}]_{m\times n}$또는 $m\times n$행렬 $A=[a_{ij}]$로 간단히 나타내기도 한다. 위의 행렬 A에서 원소 a_{ij}를 A의 (i,j)**성분**(component)이라고 한다. 또한 각 $i\;(i=1,2,\ldots,m\,)$에 대하여 $1\times n$행렬

$$[a_{i1}\;a_{i2}\;\ldots\;a_{ij}\;\ldots\;a_{in}]$$

을 행렬 A의 i**행**($i-$th row)또는 i번째 **행벡터**($i-$th row vector)라고 하며, 각 j $(j=1,2,\ldots,m\,)$에 대하여 $m\times 1$행렬

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

을 행렬 A의 j**열**($i-$th column)또는 i번째 **열벡터**($j-$th column vector)라고 한다. 특히 행의 개수와 열의 개수가 같은 $n\times n$행렬을 n차의 **정사각행렬**(square matrix)이라고 한다. 행렬 A의 모든 성분 a_{ij}가 실수일 때 A를 실수를 성분으로 가지는 행렬이라고 한다. 실수를 성분으로 가지는 $m \times n$크기의 모든 행렬들의 집합을 $Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$으로 나타내기로 하자. 크기가 같은 두 개의 $m \times n$행렬 $A = [a_{ij}]$와 $B = [b_{ij}]$에서 모든 $i = 1,2,\ldots,m,\ j = 1,2,\ldots,n$에 대하여 $a_{ij} = b_{ij}$일 때 두 행렬은 **같은 행렬**이라고 하며 $A = B$로 나타낸다.

정 의 1.1.1 $A = [a_{ij}] \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$이고 $k \in \mathbb{R}$ 이라고 하자. 행렬 A의 모든 성분 a_{ij}에 k를 곱한 ka_{ij}를 (i,j)성분으로 하는 $m \times n$행렬

$$kA = [ka_{ij}]_{m \times n}$$

을 행렬 A를 k배한 행렬이라고 한다.

정 의 1.1.2 두 행렬 $A = [a_{ij}], B = [b_{ij}] \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$에 대하여, 각 행렬의 (i,j)성분을 더한 $a_{ij} + b_{ij}$을 (i,j)성분으로 하는 $m \times n$행렬

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

을 행렬 A와 B를 더한 행렬이라고 한다.

정의 1.1.2 에서의 행렬의 덧셈 $A + B$는 두 행렬 A와 B의 크기가 같은 행렬일 때에만 정의된다. 크기가 다른 두 행렬에 대해서는 덧셈을 정의할 수가 없다.

정 리 1.1.1 [행렬의 덧셈과 실수배에 관한 성질]
임의의 $A, B, C \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$과 $k, l \in \mathbb{R}$ 에 대하여 다음이 성립한다.

A1. $A + B = B + A$ (덧셈에 대한 교환법칙)

A2. $(A + B) + C = A + (B + C)$ (덧셈에 대한 결합법칙)

A3. 임의의 행렬 $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$에 대하여

$$A + O = O + A = A$$

를 만족시키는 모든 성분이 "0"으로만 이루어진 행렬 $O \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$가 존재한다. 이러한 행렬 O를 영행렬(zero matrix)이라고 한다. (덧셈에 대한 항등원)

A4. 각 행렬 $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$에 대하여

$$A + (-A) = (-A) + A = O$$

를 만족시키는 행렬 $-A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$가 존재한다. $A = [a_{ij}]$에 대하여

$-A=[-a_{ij}]$ 이다. (덧셈에 대한 역원)

SM1. $k(A+B)=kA+kB$

SM2. $(k+l)A=kA+lA$

SM3. $(kl)A=k(lA)$

SM4. $1A=A$

정리 1.1.1 의 A4에 의하면 임의의 행렬에 대해서 덧셈에 대한 역원이 존재함을 알 수 있다. 따라서 같은 크기의 두 행렬 A와 B에 대하여 A에 B의 덧셈에 대한 역원을 더하는 연산인 **빼셈**을 정의할 수 있다. 즉,

$$A-B=A+(-B)$$

이다.

보 기 1.1.1 두 개의 3×3 행렬

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -4 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

에 대하여

$$3A=\begin{bmatrix} 3 & 6 & 12 \\ -9 & 0 & -3 \\ 6 & 3 & 6 \end{bmatrix},\ -B=\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -3 \\ 1 & -3 & -2 \end{bmatrix},$$

$$3A-B=\begin{bmatrix} 1 & 6 & 12 \\ -10 & 4 & -6 \\ 7 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

이다.

다음으로 특이하게 정의되는 행렬의 곱셈에 대해서 알아보도록 하자.

정 의 1.1.3 행렬 $A=[a_{ij}]_{m\times r}$를 $m\times r$크기의 행렬이고 $B=[b_{ij}]_{r\times n}$를 $r\times n$크기의 행렬이라고 하자. 다음과 같이 정의되는 $m\times n$크기의 행렬을 A와 B를 곱한 행렬이라고 한다.

$$AB=\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ir} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \cdots & b_{1j} & \cdots \\ \cdots & b_{2j} & \cdots \\ & \vdots & \\ \cdots & b_{rj} & \cdots \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} & \vdots & \\ \cdots & c_{ij} & \cdots \\ & \vdots & \end{bmatrix},$$

여기서 $c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{ir}b_{rj}$ 이다.

행렬의 곱 AB는 행렬 A의 열의 개수와 행렬 B의 행의 개수가 같을 때에만 정의

할 수 있다. 또한 곱 AB가 정의된다 할지라도 반대의 곱 BA가 항상 정의되는 것은 아니다. 예를 들면, A를 2×3 행렬, B를 3×2 행렬 그리고 C를 3×4 행렬이라 한다면, A와 B의 곱 AB는 2×2 행렬로 정의되고 반대의 곱 BA도 3×3 행렬로 정의된다. 하지만, A와 C의 곱 AC는 2×4 행렬로 정의되지만 C의 열의 개수는 4이고 A의 행의 개수가 2로서 다르므로 반대의 곱 CA는 정의할 수가 없다.

보 기 1.1.2 행렬

$$A=\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 4 & -2\\ 5 & 0\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}3 & 0 & -1\\ -2 & 1 & 5\end{bmatrix},\ C=\begin{bmatrix}0\\ 1\\ -2\end{bmatrix},\ D=[3\ 2\ -1],\ E=\begin{bmatrix}-3 & 2\\ -4 & 1\end{bmatrix}$$

에 대하여,

$$AB=\begin{bmatrix}-9 & 3 & 16\\ 16 & -2 & -14\\ 15 & 0 & -5\end{bmatrix},\ BA=\begin{bmatrix}-8 & 9\\ 31 & -8\end{bmatrix},\ AE=\begin{bmatrix}-9 & 1\\ -4 & 6\\ -15 & 10\end{bmatrix},$$

$$EB=\begin{bmatrix}-13 & 2 & 13\\ -14 & 1 & 9\end{bmatrix},\ CD=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 3 & 2 & -1\\ -6 & -4 & 2\end{bmatrix},\ DC=[4]$$

이다. 또한 행렬의 곱 EA, BE, AC, BD 등은 정의되지 않는다.

정 리 1.1.2 [행렬의 곱셈에 관한 성질]

(1) $m\times n$ 행렬 A, $n\times r$ 행렬 B, $r\times p$ 행렬 C 에 대하여

$$(AB)C=A(BC).$$

(2) $m\times n$ 행렬 A와 $n\times r$ 행렬 B,C에 대하여

$$A(B+C)=AB+AC.$$

(3) $m\times n$ 행렬 A와 $n\times r$ 행렬 B 그리고 $k\in\mathbb{R}$ 에 대하여

$$(kA)B=k(AB)=A(kB).$$

(4) $m\times n$ 행렬 A와 $n\times r$, $p\times m$ 크기의 영행렬 $O_{n\times r}$, $O_{p\times m}$ 에 대하여

$$AO_{n\times r}=O_{m\times r} \text{ 이고 } O_{p\times m}A=O_{p\times n}.$$

(5) $m\times n$ 행렬 A와 다음과 같은 $r\times r$ 크기의 정사각행렬

$$I_r=\begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}_{r\times r}$$

에 대하여

$$AI_n=A \text{ 이고 } I_mA=A.$$

실수에서의 곱셈에서는 기본적으로 성립하지만 행렬의 곱셈에서는 성립하지 않는 다음의 몇 가지의 법칙들에 대하여 주의하도록 하자.

Remark (1) 두 행렬 A와 B에 대하여 곱 AB와 BA가 모두 정의된다고 해도

$$AB \neq BA.$$

(2) $AB = O \not\Rightarrow A = O$ 또는 $B = O$ (O 는 영행렬이다.)

(즉, $A \neq O$ 이고 $B \neq O$ 이라도 $AB = O$ 일 수 있다.)

(3) $AB = AC$ 이고 $A \neq O \not\Rightarrow B = C$

같은 크기의 정사각 행렬들로만 이루어진 집합인 $Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$은 정의 1.1.3에서 정의된 행렬의 곱셈에 대하여 잘 닫혀있으며 곱셈에 대한 항등원 역할을 하는 행렬

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}_{n\times n}$$

이 존재한다. 즉, 임의의 $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$에 대하여

$$AI_n = A = I_n A$$

이다. 따라서 I_n 을 n차의 **항등행렬**(identity matrix)이라고 한다.

정 의 1.1.4 $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$라고 하자. A의 곱셈에 대한 역원이 존재할 때, 즉

$$AB = I_n = BA$$

를 만족하는 $n\times n$ 행렬 B가 존재할 때, A를 **가역행렬**(invertible matrix) 또는 **정칙행렬**(nonsingular matrix)이라고 한다. 또한 이 때의 행렬 B를 A의 **역행렬**(inverse matrix)이라고 하며 A^{-1}로 나타낸다.

보 기 1.1.3 3×3 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -6 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ 에 대하여

$$A\begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 \\ -3 & -3 & -1 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 \\ -3 & -3 & -1 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix}A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

이므로 A는 가역행렬이고 A의 역행렬은 $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -1 \\ -3 & -3 & -1 \\ -2 & -4 & -1 \end{bmatrix}$이다.

임의의 정사각 행렬 A에 대하여 A가 가역행렬인지를 판단하는 것과 만약 A가 가역행렬이라면 역행렬 A^{-1}를 구하는 것은 행렬대수에 있어서 매우 중요한 문제이다. 이에 대해서는 2장과 3장을 통하여 자세히 공부하도록 하자.

먼저, 역행렬에 대하여 성립하는 다음의 간단한 결과를 알아보도록 하자. 증명은 간단하니 각자가 생각해 보도록 한다.

정 리 1.1.3 $n \times n$ 행렬 A와 B를 가역행렬이라고 하면 다음이 성립한다.

(1) A의 역행렬 A^{-1}는 유일하게 존재한다.

(2) A^{-1}도 가역행렬이고 $(A^{-1})^{-1} = A$ 이다.

(3) 임의의 자연수 n에 대하여 A^n도 가역행렬이고 $(A^n)^{-1} = (A^{-1})^n$ 이다.

(4) 0이 아닌 상수 k에 대하여 kA도 가역행렬이고 $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}(A^{-1})$ 이다.

(5) AB도 가역행렬이고 $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$이다.