선형대수학 비대면 강의

8주 1차시 수업

조 성희

5.2 내적공간(Inner Product Spaces)

5.1절에서 벡터공간 $\mathbb{R}^3$ 의 두 벡터가 수직일 조건에 대하여 알아보고, 이를 통하여 $\mathbb{R}^n$ 에서 두 벡터의 내적을 정의하였다. 이와 같은 내적의 개념을 일반적인 벡터공간으로 확장해보자.

정 의 5.2.1 V 를 실수체 $\mathbb{R}$ 위의 벡터공간이라고 하자. V 의 곱집합위에서 정의된 함수

$$V \times V \to \mathbb{R}, (\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) \mapsto \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$$

가 다음 조건들을 만족할 때, 이 함수를 벡터공간 V 위의 **내적**(inner product)이라고 한다.

임의의 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in V$ 와 $c \in \mathbb{R}$ 에 대하여

I.1 $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{u} \rangle$,

I.2 $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} \rangle = \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle + \langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{w} \rangle$,

I.3 $c\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \langle c\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$,

I.4 $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle \geq 0$ 그리고 $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = 0 \iff \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$.

또한, 실수체 $\mathbb{R}$ 위의 벡터공간 V 에 이와 같은 내적이 정의되어 있을 때, V 를 **내적공간**(inner product space)라고 한다.

복소수체 $\mathbb{C}$ 위의 벡터공간에도 내적을 정의할 수 있으나, 본 수업에서는 실수체 위의 벡터공간에 정의된 내적, 즉 실수체 위의 내적공간에 대해서 알아보기로 하자.

보 기 5.2.1 정의 5.5.5의 (1)에서 정의된 벡터공간 $\mathbb{R}^n$ 위의 내적, 두 벡터

$$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n), \boldsymbol{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$$

에 대하여

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = \sum_{i=1}^{n} u_i v_i$$

는 정리 5.1.1을 통하여 정의 5.2.1의 조건 I.1~I.4를 만족함을 확인하였다. 이 내적을 벡터공간 $\mathbb{R}^n$ 의 **표준내적**이라고 한다. 표준내적이 적용된 벡터공간 $\mathbb{R}^n$ 을 유클리드 공간이라고 한다.

보 기 5.2.2 벡터공간 $\mathbb{R}^3$ 에서 임의의 두 벡터 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3), \boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ 에 대하여 $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ 를 다음과 같이 정의하면

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = u_1 v_1 + 2u_2 v_2 + 3u_3 v_3,$$

$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ 는 정의 5.2.1의 조건을 모두 만족한다. 따라서 $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle$ 도 $\mathbb{R}^3$ 위의 내적이다. 하지만 이러한 내적을 적용한 벡터공간 $\mathbb{R}^3$ 는 유클리드 공간이 아니다.

보 기 5.2.3 벡터공간 $\mathbb{R}^3$ 에서 임의의 두 벡터 $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, u_3), \boldsymbol{v} = (v_1, v_2, v_3)$ 에 대하여 정의된

$$\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle = u_1 v_1 - 2u_2 v_2 + u_3 v_3$$

는 $\mathbb{R}^3$ 위의 내적이 아니다. $\boldsymbol{u} = (1,2,1)$ 에 대하여 $\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{u} \rangle = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 = -6$ 이므로 정의 5.2.1의 I.4를 만족하지 않는다.

보 기 5.2.~~5~~4 실수체 $\mathbb{R}$ 위의 벡터공간 $Mat_{2\times2}(\mathbb{R})$ 에서 두 벡터

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

에 대하여 정의한 다음의 함수

$$\langle A, B \rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}$$

는 정의 5.2.1의 조건 I.1~I.4를 모두 만족한다. 따라서 $\langle A, B \rangle$ 는 $Mat_{2\times2}(\mathbb{R})$ 위에 정의된 내적이다.

보 기 5.2.~~6~~5 폐구간 $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$ 가 정의역이고 실수를 함숫값으로 가지는 모든 연속함수의 집합을 $C[a, b]$ 로 나타내면, $C[a, b]$ 는 다음과 같이 정의한 덧셈과 스칼라 곱에 대하여 실수체 위의 벡터공간을 이룬다.

$(\sin x,\ x^2,\ \cancel{\tan x},\ \cancel{\sqrt{x}})$ etc.

임의의 $f, g \in C[a, b]$ 와 $k \in \mathbb{R}$ 에 대하여

$$f + g : [a, b] \to \mathbb{R}, (f + g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$kf : [a, b] \to \mathbb{R}, (kf)(x) = kf(x).$$

벡터공간 $C[a, b]$ 의 임의의 두 벡터 f, g 에 대하여 정적분으로 정의된 다음의 함수

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

는 정의 5.2.1의 조건 I.1~I.4를 모두 만족한다. 따라서 $\langle f, g \rangle$ 는 벡터공간 $C[a, b]$ 위에 정의된 내적이다.

정의 5.1.1에서 정의한 유클리드 공간에서의 벡터의 크기, 두 벡터 사이의 거리에 대한 개념을 내적공간 V 로 일반화 하여 생각할 수 있다.

정 의 5.2.2 V 를 내적공간이라고 하자.

놈

(1) 벡터 $\boldsymbol{v} \in V$ 에 대하여 $\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v} \rangle}$ 를 $\boldsymbol{v}$ 의 **노름**(norm) 또는 **크기**라고 한다.

(2) 두 벡터 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ 에 대하여 $d(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}) = \|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}\|$ 를 두 벡터 사이의 **거리**(distance)라고 한다.

보 기 5.2.7 보기 5.2.5에서의 내적이 적용된 내적공간 $C[-1,1]$ 에서 두 벡터

$$f(x) = x,\ g(x) = x^2$$

에 대하여 $\|f\|$ 와 $d(f, g)$ 를 구해보자.

【풀이】 먼저 $f(x) = x$ 에 대하여

$$\|f\|^2 = \int_{-1}^{1} x \cdot x\,dx = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \frac{2}{3}$$

이다. 따라서 $\|f\| = \frac{\sqrt{6}}{3}$ 이다. 또한

$$\begin{aligned} \|f - g\|^2 = \int_{-1}^{1} (x - x^2)^2\,dx &= \int_{-1}^{1} (x^2 - 2x^3 + x^4)\,dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} + \frac{x^5}{5}\right]_{-1}^{1} \\ &= \frac{16}{15} \end{aligned}$$

이다. 따라서 $d(f, g) = \|f - g\| = \frac{4\sqrt{15}}{15}$ 이다.

유클리드 공간 $\mathbb{R}^n$ 에서 성립하는 절대 부등식들은 일반적인 내적공간에서도 그대로 성립한다. 증명은 생략하고 알아보기로 하자.

정 리 5.2.1 내적공간 V 의 두 벡터 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ 에 대해서 다음이 성립한다.

(1) $|\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle| \le \|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|$: Cauchy-Schwarz 부등식

(2) $\|\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}\| \le \|\boldsymbol{u}\| + \|\boldsymbol{v}\|$: 삼각 부등식

정리 5.2.1의 (1), Cauchy-Schwarz 부등식에 의하여 다음이 성립함을 알 수 있다.

내적공간 V 의 영벡터가 아닌 두 벡터 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ 에 대하여

$$-1 \le \frac{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|} \le 1 \qquad = \cos\theta$$

이다. 따라서 정의 5.1.2에서와 마찬가지로, 일반적인 내적공간에서도 두 벡터가 이루는 각의 크기와 수직을 정의할 수 있다.

정 의 5.2.3 (1) 내적공간 V의 영벡터가 아닌 두 벡터 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ 에 대하여

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \rangle}{\|\boldsymbol{u}\|\|\boldsymbol{v}\|}}$$

를 만족하는 실수 $\theta\ (0 \le \theta \le \pi)$ 를 벡터 $\boldsymbol{u}$ 와 $\boldsymbol{v}$ 가 이루는 각의 **크기**로 정의한다.

(2) 내적공간 V 의 영벡터가 아닌 두 벡터 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$ 가 $\overset{\langle u, v \rangle}{\cancel{\boldsymbol{u} \cdot \boldsymbol{v}}} = 0$ 을 만족 할 때, 벡터 $\boldsymbol{u}$ 와 $\boldsymbol{v}$ 는 서로 **수직**(orthoginal)이라고 하고 $\boldsymbol{u} \perp \boldsymbol{v}$ 로 나타낸다.

보 기 5.2.8 내적공간 $C[-1,1]$ 의 세 벡터 $f(x) = 1, g(x) = x, h(x) = x^2$ 을 생각하자.

먼저,

$$\langle f, g \rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot x\,dx = \int_{-1}^{1} x\,dx = 0$$

이므로 $f \perp g$ 이다. 또한

$$\langle g, h \rangle = \int_{-1}^{1} x \cdot x^2\,dx = \int_{-1}^{1} x^3\,dx = 0$$

이므로 $g \perp h$ 이다. 마지막으로

$$\langle f, h \rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot x^2\,dx = \int_{-1}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3}(\ne 0)$$

이므로 f 와 h 는 수직이 아니다.

두 벡터 f 와 h 가 이루는 각의 크기를 알아보기 위하여 $\|f\|$ 와 $\|h\|$ 를 구해보자.

$$\|f\|^2 = \langle f, f \rangle = \int_{-1}^{1} 1 \cdot 1\,dx = \int_{-1}^{1} 1dx = 2\,,$$

$$\|h\|^2 = \langle h, h \rangle = \iint_{-1}^{1} x^2 \cdot x^2 dx = \int_{-1}^{1} x^4\,dx = \frac{2}{5}.$$

f 와 g 가 이루는 각의 크기를 $\theta (0 \le \theta \le \pi)$ 라고 하면

$$\cos\theta = \frac{\langle f, h \rangle}{\|f\|\|h\|} = \frac{2/3}{\sqrt{2} \cdot (\sqrt{2}/\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

이다. 따라서

$$\boxed{\theta = \arccos\left(\frac{\sqrt{5}}{3}\right)} \approx 0.73 \text{ radian } (\approx 41.81°)$$

이다.

$\langle u, v \rangle \to \sqrt{\ }\ /\ \mathbb{R}$ //