**선형대수학 비대면 강의**

# 13주 2차시 수업

2020년 06월 11일

조 성희



**보 기 7.2.3** 보기 7.1.3에 의하여 행렬

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

의 고유값과 고유공간은 다음과 같다.

$$A=\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}$$

$$(-2-\lambda)^2(4-\lambda)=0$$

$$\lambda_1=-2 \qquad\qquad \lambda_2=4$$

$$\begin{bmatrix}-1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}s+\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}t \qquad\qquad \begin{bmatrix}1\\ 1\\ 0\end{bmatrix}s$$

$A$ 는 선형독립인 고유벡터를 3 개 가지므로 대각화 가능한 행렬이고, 다음과 같이 대각화 할 수 있다.

$$\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 3 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$$

**보 기 7.2.4** 보기 7.1.4에 의하여 행렬

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ -3 & 5 & 2\end{bmatrix}\in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

의 고유값과 고유공간은 다음과 같다.

$$P^{-1}A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ -3 & 5 & 2\end{bmatrix}P \neq D$$

$$(1-\lambda)(2-\lambda)^2=0$$

$$\lambda_1=1 \qquad\qquad \lambda_2=2$$

$$\begin{bmatrix}1\\ -1\\ 8\end{bmatrix}s \qquad\qquad \begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}s$$

고유값 $\lambda_2=2$ 의 특성방정식에서의 근의 중복도는 2 이지만 $\dim(E_{\lambda_2=2})=1$ 이다. 따라서 $A$ 는 많아야 2 개의 선형독립인 고유벡터를 가지므로 대각화 가능한 행렬이 아니다.

**보 기 7.2.5** 보기 7.1.5에 의하여 행렬

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in Mat_{3\times3}(\mathbb{R})$$

의 고유값과 고유공간은 다음과 같다.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(2-\lambda)^3 = 0$$

$$\lambda_1 = 2$$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t$$

$A$ 는 하나의 고유값 $\lambda_1 = 2$ 를 가진다. $\lambda_1 = 2$ 의 특성방정식에서의 중복도는 3 이지만 $\dim(E_{\lambda_1=2}) = 2$ 이므로 $A$ 는 많아야 2 개의 고유벡터를 가진다. 따라서, $A$ 는 대각화 가능한 행렬이 아니다.

**정 리 7.2.3** 행렬 $A \in Mat_{n\times n}(F)$ 가 서로 다른 $k(\le n)$ 개의 고유값 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ 를 가진다고 하자. 벡터 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k \in F^n$ 가 각각 $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ 에 해당하는 $A$ 의 고유벡터이면, 이러한 $k$ 개의 고유벡터들은 항상 선형독립이다.

【증명】 $\mathcal{E} = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_k\}$ 가 선형종속인 집합이라고 가정하고,

$$\mathcal{S} = \{\mathbf{x}_{i_1}, \mathbf{x}_{i_2}, \ldots, \mathbf{x}_{i_r}\}\ (r < k)$$

을 $\mathcal{E}$ 의 선형독립인 최대(maximal)의 부분집합이라고 하자. 그러면 적당한 $\mathbf{x}_{i_{r+1}} \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{S}$ 가 존재하여 $\mathcal{S}' = \{\mathbf{x}_{i_1}, \mathbf{x}_{i_2}, \ldots, \mathbf{x}_{i_r}, \mathbf{x}_{i_{r+1}}\}$ 은 선형종속인 집합이다. 따라서

$$c_1\mathbf{x}_{i_1} + c_2\mathbf{x}_{i_2} + \cdots + c_r\mathbf{x}_{i_r} + c_{r+1}\mathbf{x}_{i_{r+1}} = \mathbf{0} \tag{1}$$

을 만족하는 동시에 0 이 아닌 스칼라 $c_1, c_2, \ldots, c_r, c_{r+1} \in F$ 가 존재한다.

등식 (1)의 양변에 행렬 $A$ 를 곱해주면

$$c_1A\mathbf{x}_{i_1} + c_2A\mathbf{x}_{i_2} + \cdots + c_rA\mathbf{x}_{i_r} + c_{r+1}A\mathbf{x}_{i_{r+1}} = \mathbf{0}. \tag{2}$$

여기서 $\mathbf{x}_{i_1}, \mathbf{x}_{i_2}, \ldots, \mathbf{x}_{i_r}, \mathbf{x}_{i_{r+1}}$은 각각 고유값 $\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \ldots, \lambda_{i_r}, \lambda_{i_{r+1}}$ 에 해당하는 $A$ 의 고유벡터이므로 모든 $j = 1,2, \ldots, r, r+1$ 에 대하여 $A\mathbf{x}_{i_j} = \lambda_{i_j}\mathbf{x}_{i_j}$ 이다. 따라서 등식 (2)는

$$c_1\lambda_{i_1}\mathbf{x}_{i_1} + c_2\lambda_{i_2}\mathbf{x}_{i_2} + \cdots + c_r\lambda_{i_r}\mathbf{x}_{i_r} + c_{r+1}\lambda_{i_{r+1}}\mathbf{x}_{i_{r+1}} = \mathbf{0} \tag{3}$$

이다.

한편, 등식 (1)의 양변을 $\lambda_{i_{r+1}}$배 해주면 다음의 등식을 얻는다.

$$c_1\lambda_{i_{r+1}}\mathbf{x}_{i_1} + c_2\lambda_{i_{r+1}}\mathbf{x}_{i_2} + \cdots + c_r\lambda_{i_{r+1}}\mathbf{x}_{i_r} + c_{r+1}\lambda_{i_{r+1}}\mathbf{x}_{i_{r+1}} = \mathbf{0}. \tag{4}$$

등식 (3)에서 등식 (4)를 빼주면

$$c_1(\lambda_{i_1} - \lambda_{i_{r+1}})\mathbf{x}_{i_1} + c_2(\lambda_{i_2} - \lambda_{i_{r+1}})\mathbf{x}_{i_2} + \cdots + c_r(\lambda_{i_r} - \lambda_{i_{r+1}})\mathbf{x}_{i_r} = \mathbf{0}$$

이다. 여기서 $\mathbf{x}_{i_1}, \mathbf{x}_{i_2}, \ldots, \mathbf{x}_{i_r}$ 은 선형독립이므로, 모든 $j = 1,2, \ldots, r$ 에 대하여 $c_j(\lambda_{i_j} - \lambda_{i_{r+1}}) = 0$ 이고, 또한 $\lambda_{i_j} \ne \lambda_{i_{r+1}}$ 이므로 $c_j = 0$ 이다. 이 사실을 등식 (1)에 대입하면 $c_{r+1}\mathbf{x}_{i_{r+1}} = \mathbf{0}$ 이고 따라서 $c_{r+1} = 0$ 이다. 즉, 스칼라 $c_1, c_2, \ldots, c_r, c_{r+1}$ 이 동시에 0 이 아니라는 사실에 모순이다. 그러므로, $\mathcal{E}$ 는 선형독립인 집합이다. □



## 7.3 대칭행렬(Symmetric Matrix)과 수직 대각화(Orthogonal Diagonalization)

일반적으로 정사각 행렬 $A$ 가 대각화 가능한 행렬인지의 여부를 판단하려면 $A$ 의 고유값과 고유공간을 모두 구해야 한다. 그러나 고유값과 고유공간을 구하지 않고도, 대각화 가능한 행렬인지를 바로 알 수 있는 행렬도 존재한다.

대표적인 예로서 서로 다른 $n$ 개의 대각 성분을 가지는 삼각행렬을 $U$ 라고 하면, $U$ 의 경우에는 대각성분이 고유값이므로 서로 다른 $n$ 개의 고유값을 가지며 각 고유값에 해당하는 고유공간은 1차원 공간이다. 정리 7.2.3에 의하여 삼각행렬 $U$ 는 선형독립인 $n$ 개의 고유벡터를 가진다. 그러므로 정리 7.2.2에 의하여 $U$ 는 대각화 가능한 행렬이다.

또한 정사각 행렬 $A$ 로서

$\in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$

$$A = A^T$$

를 만족하는 대칭행렬(symmetric matrix) $A$ 도 대각화 가능성 여부를 바로 판단할 수 있는 대표적인 행렬이다. 대칭행렬의 대각화 가능성에 대한 다음의 중요한 정리를 알아보자. 증명은 생략한다.

**정 리 7.3.1** 대칭행렬 $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ 에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $A$ 의 고유값은 모두 실수이다.

(2) $A$ 의 각 고유값 $\lambda_i$ 에 대하여 $\lambda_i$ 의 특성방정식에서의 중복도와 $\lambda_i$ 의 고유공간의 차원은 같다.

(3) 위의 두 사실에 의하여 대칭행렬 $A$ 는 대각화 가능한 행렬이다.

정리 7.3.1을 Real Spectral Theorem 이라고 하고, 대각행렬 $A$ 의 모든 고유값들을 원소로 가지는 집합을 $A$ 의 **스펙트럼**(Spectrum)이라고 부른다.

칭

**보 기 7.3.1** 행렬

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

4×4

는 대칭행렬이다. 따라서 대각화 가능한 행렬이다.

먼저 $A$ 의 특성방정식이

$$\begin{aligned} |A - \lambda I_4| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 & 0 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 1-\lambda \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 2-\lambda \end{vmatrix} \\ &= \{(1-\lambda)^2 - 4\}\{(2-\lambda)^2 - 1\} \\ &= (-3 - 2\lambda + \lambda^2)(3 - 4\lambda + \lambda^2) \\ &= (-1-\lambda)(1-\lambda)(3-\lambda)^2 \\ &= 0 \end{aligned}$$

이므로 $A$ 는 서로 다른 3 개의 고유값 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$ 을 가진다.

$\dim(E_{\lambda_1}) = 1$ $\dim(E_{\lambda_2=1}) = 1$ $\dim(E_{\lambda_3}) = 2$

$x_1$ $x_2$ $x_3, x_4$

$$\lambda_1 = -1, \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s(s \in \mathbb{R}),$$

$$E_{\lambda_1=-1} = \langle (1,1,0,0) \rangle.$$

$$\lambda_2 = 1, \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} s(s \in \mathbb{R}),$$

$$E_{\lambda_2=1} = \langle (0,0,-1,1) \rangle.$$

$$\lambda_3 = 3, \left[\begin{array}{cccc|c} -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t \ (s,t \in \mathbb{R}),$$

$$E_{\lambda_3=3} = \langle (-1,1,0,0), (0,0,-1,1) \rangle.$$

$P^{-1} = P^T$

따라서 아래와 같은 가역행렬 $P$ 와 대각행렬 $D$ 에 대하여

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1}AP = D$$

$A$ 는 대각화 가능한 행렬이다.

보기 7.3.1에서 대칭행렬 $A$ 를 대각화 하는데 사용된 가역행렬 $P$ 의 각 열벡터 즉, $A$ 의 선형독립인 4 개의 고유벡터를 차례대로

$$\mathbf{p}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{p}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \mathbf{p}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \mathbf{p}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\sqrt{2}$

로 나타내면, 모든 $i, j \in \{1,2,3,4\}, i \neq j$ 에 대하여 $\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j = 0$ 즉, $\mathbf{p}_i \perp \mathbf{p}_j$ 이다.

따라서

$$P^T P = \begin{bmatrix} \cancel{\|\mathbf{p}_1\|^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cancel{\|\mathbf{p}_2\|^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cancel{\|\mathbf{p}_3\|^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cancel{\|\mathbf{p}_4\|^2} \end{bmatrix}$$

이다.

여기서 $A$ 의 선형독립인 4 개의 고유벡터를 단위벡터로 선택하면 가역행렬 $P$ 는

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

으로서 $P^{-1}AP = D$ 를 만족한다. 또한 $PP^T = I_n = P^T P$ 를 만족하므로

$$P^{-1} = P^T$$

이다.

$P^{-1} = P^T$  $P^T P = I_n$



정리 7.3.1에 의하여 대칭행렬 $A$ 는 대각화 가능한 행렬이고, 보기 7.3.1에서 $A$ 를 대각화 하는데 사용되는 가역행렬 $P$ 를 $P^{-1} = P^T$ 를 만족하는 행렬로 선택할 수 있었다.

**정 의 7.3.1** 행렬 $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$가 가역행렬이고 $A^{-1} = A^T$ 일 때, $A$ 를 **수직행렬**(orthogonal matrix)이라고 한다.