선형대수학 비대면 강의

14주 2차시 수업

2020년 06월 19일

조 성희

정리 7.3.1에 의하여 대칭행렬 A 는 대각화 가능한 행렬이고, 보기 7.3.1에서 A 를 대각화하는데 사용되는 가역행렬 P 를 $P^{-1} = P^T$ 를 만족하는 행렬로 선택할 수 있었다.

정 의 7.3.1 행렬 $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$가 가역행렬이고 $A^{-1} = A^T$ 일 때, A 를 **수직행렬** (orthogonal matrix)이라고 한다.

정 리 7.3.2 행렬 $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$에 대하여 다음의 세 조건은 모두 동치이다.

(1) A 는 수직행렬이다.

(2) A 의 모든 열벡터들의 집합은 벡터공간 $\mathbb{R}^n$ 의 정규 수직기저이다.

(3) A 의 모든 행벡터들의 집합은 벡터공간 $\mathbb{R}^n$ 의 정규 수직기저이다.

보 기 7.3.2 2×2 행렬

$$P = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

은

$$P^TP = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = I_2$$

즉, $P^{-1} = P^T$ 이므로 P 는 수직행렬이다.

정 리 7.3.3 대칭행렬 $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ 의 서로 다른 고유값 λ_1 과 λ_2 에 해당하는 고유벡터를 각각 $\mathbf{x}_1$ 과 $\mathbf{x}_2$ 라고 하면, $\mathbf{x}_1$ 과 $\mathbf{x}_2$는 서로 수직이다.

【증명】 고유벡터 $\mathbf{x}_1$ 과 $\mathbf{x}_2$를 각각 다음과 같이 나타내면,

$$\mathbf{x}_1 = \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ \vdots \\ x_{1n} \end{bmatrix}, \mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ \vdots \\ x_{2n} \end{bmatrix}$$

$A\mathbf{x}_1 = \lambda_1\mathbf{x}_1$ 이고 $A\mathbf{x}_2 = \lambda_2\mathbf{x}_2$ 이고, $\mathbf{x}_1$과 $\mathbf{x}_2$의 내적을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1^T\mathbf{x}_2$$

이러한 사실을 이용하면,

$$\begin{aligned} \lambda_1(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2) &= (\lambda_1\mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{x}_2 \\ &= (A\mathbf{x}_1) \cdot \mathbf{x}_2 \\ &= (A\mathbf{x}_1)^T\mathbf{x}_2 \\ &= (\mathbf{x}_1^TA^T)\mathbf{x}_2 \\ &= \mathbf{x}_1^T(A^T\mathbf{x}_2) \\ &= \mathbf{x}_1^T(A\mathbf{x}_2) \\ &= \mathbf{x}_1^T(\lambda_2\mathbf{x}_2) \\ &= \mathbf{x}_1 \cdot (\lambda_2\mathbf{x}_2) \\ &= \lambda_2(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2). \end{aligned}$$

따라서 $(\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2) = 0$ 인데, $\lambda_1 \neq \lambda_2$ 이므로 $(\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{x}_2) = 0$ 이다. 그러므로

$$\mathbf{x}_1 \perp \mathbf{x}_2$$

이다. □

정 의 7.3.2 행렬 $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ 에 대하여

$$P^{-1}AP = D$$

를 만족하는 적당한 수직행렬 P 와 대각행렬 D 가 존재하면 A 를 **수직 대각화 가능한** (orthogonally diagonalizable)행렬이라고 한다..

$P^{-1} = P^T$

정 리 7.3.4 ~~행렬~~ 행렬 $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$에 대한 다음의 두 조건은 동치이다.

(1) A 는 대칭행렬이다.

(2) A 는 수직 대각화 가능한 행렬이다.

【증명】(1)⇒(2) 정리 7.3.1, 정리 7.3.3과 Gram-schmidt의 수직화 과정 이론에 의하여 성립함을 알 수 있다.

(1)⇐(2) 행렬 A 가 수직 대각화 가능한 행렬이라고 가정하면, $P^{-1}AP = D$ 를 만족하는 수직행렬 P 와 대각행렬 D 가 존재한다. 여기서 P 는 수직행렬 이므로 $P^{-1} = P^T$ 이고, 따라서 $A = PDP^{-1} = PDP^T$ 이다. 이 사실을 이용하면,

$$\begin{aligned} A^T &= (PDP^T)^T \\ &= (P^T)^T D^T p^T \\ &= PDP^T \\ &= A \end{aligned}$$

이다. 그러므로 A 는 대칭행렬이다. □

보 기 7.3.2 행렬 $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ 은 대칭행렬이므로 수직 대각화 가능한 행렬이다.

$P^{-1}AP = D$ 를 만족하는 수직행렬 P 와 대각행렬 D 를 구해보자.

먼저 A 의 특성방정식을 구해보면

$$\det(A - \lambda I_2) = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = -6 + \lambda + \lambda^2 = (-3-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

이다. 따라서 서로 다른 두 개의 고유값 $\lambda_1 = -3, \lambda_2 = 2$ 를 가진다.

$\lambda_1 = -3$ 에 해당하는 고유공간을 구해보면,

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} s \ (s \in \mathbb{R})$$

$$E_{\lambda_1=-3} = \langle (-2,1) \rangle$$

이다. $\lambda_2 = 2$ 에 해당하는 고유공간을 구해보면,

$$\left[\begin{array}{cc|c} -4 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Longrightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} s \ (s \in \mathbb{R})$$

$$E_{\lambda_1=2} = \langle (1,2) \rangle.$$

A 는 두 개의 선형독립인 고유벡터 $\mathbf{p_1} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ 과 $\mathbf{p_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 를 가지며, 정리 7.3.3에 의하여 $\mathbf{p_1} \perp \mathbf{p_2}$ 이다.

그러므로 수직행렬 $P = \begin{bmatrix} -{}^2/_{\sqrt{5}} & {}^1/_{\sqrt{5}} \\ {}^1/_{\sqrt{5}} & {}^2/_{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$ 에 대하여

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -{}^2/_{\sqrt{5}} & {}^1/_{\sqrt{5}} \\ {}^1/_{\sqrt{5}} & {}^2/_{\sqrt{5}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -{}^2/_{\sqrt{5}} & {}^1/_{\sqrt{5}} \\ {}^1/_{\sqrt{5}} & {}^2/_{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = D$$

이다.

보 기 7.3.3 대칭행렬

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ -2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$$

에 대하여 $P^{-1}AP = D$ 를 만족하는 수직행렬 P 와 대각행렬 D 를 구해보자.

먼저 행렬 A 의 특성방정식을 구하면

$$\det(A - \lambda I_3) = (6+\lambda)(3-\lambda)^2 = 0$$

이므로 A 는 중복도가 1인 고유값 $\lambda_1 = -6$과 중복도가 2인 고유값 $\lambda_2 = 3$을 가진다.

다음으로, 각 고유값에 대한 고유공간을 구해보면 다음과 같다.

A

$\lambda_1 = -6$ (중복도 1) $\qquad\qquad$ $\lambda_2 = 3$ (중복도 2)

$$E_{\lambda_1=-6} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} t \,\middle|\, t \in \mathbb{R} \right\} \qquad E_{\lambda_2=3} = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t \,\middle|\, s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\Cup \qquad\qquad\qquad \Cup$$

$$\boldsymbol{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{v_2} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{v_3} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

대칭행렬 A 에 대한 다음의 사실들이 성립함을 주목해보자.

(1) A 의 고유값 $\lambda_1 = -6$ 과 $\lambda_2 = 3$ 은 모두 실수이다. [정리 7.3.1의 (1)]

(2) A 의 각 고유값의 중복도와 고유공간의 차원은 같다. [정리 7.3.1의 (2)]

$$\lambda_1 = -6 \text{ 의 중복도} = 1 = \dim(E_{\lambda_1=-6}),$$

$$\lambda_2 = 3 \text{ 의 중복도} = 2 = \dim(E_{\lambda_2=3})$$

(3) 앞의 두 사실에 의하여 A 는 대각화 가능한 행렬이다. [정리 7.3.1의 (3)]

(4) 서로 다른 고유값에 해당하는 고유벡터들은 서로 수직이다.[정리 7.3.3]

$$\boldsymbol{v_1} \perp \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_1} \perp \boldsymbol{v_3}$$

여기서 $\boldsymbol{v_2} \cdot \boldsymbol{v_3} = -4 \neq 0$ 이므로 $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}\}$ 는 고유공간 $E_{\lambda_2=3}$ 의 수직기저가 아니다.

Gram-Schmidt의 수직화 과정을 이용하여 $E_{\lambda_2=3}$ 의 수직기저 $\mathcal{B}_\perp = \{\boldsymbol{w_2}, \boldsymbol{w_3}\}$ 를 구하면

$$\boldsymbol{w_2} = \boldsymbol{v_2} = (2,1,0),$$

$$\boldsymbol{w_3} = \boldsymbol{v_3} - \left(\frac{\boldsymbol{v_3} \cdot \boldsymbol{w_2}}{\|\boldsymbol{w_2}\|^2} \right) \boldsymbol{w_2} = \left(-\frac{2}{5}, \frac{4}{5}, 1 \right)$$

이다.

A 의 서로 수직인 세 개의 고유벡터 $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{w_2}, \boldsymbol{w_3}$ 에서

$$\boldsymbol{p_1} = \frac{\boldsymbol{v_1}}{\|\boldsymbol{v_1}\|} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{p_2} = \frac{\boldsymbol{w_2}}{\|\boldsymbol{w_2}\|} = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{p_3} = \frac{\boldsymbol{w_3}}{\|\boldsymbol{w_3}\|} = \begin{bmatrix} -2/3\sqrt{5} \\ 4/3\sqrt{5} \\ 5/3\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

로 놓으면 세 벡터 $\boldsymbol{p_1}$, $\boldsymbol{p_2}$, $\boldsymbol{p_3}$ 는 A 의 고유벡터로서 서로 수직이며,

$$\|\boldsymbol{p_1}\| = \|\boldsymbol{p_2}\| = \|\boldsymbol{p_3}\| = 1$$

인 단위벡터이다.

따라서 $\boldsymbol{p_1}$, $\boldsymbol{p_2}$, $\boldsymbol{p_3}$를 열로 가지는 행렬을 P 라고 하면,

$$P = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/\sqrt{5} & -2/3\sqrt{5} \\ -2/3 & 1/\sqrt{5} & 4/3\sqrt{5} \\ 2/3 & 0 & 5/3\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

행렬 P 는 $P^TP = I_3$, 즉 $P^{-1} = P^T$ 인 수직행렬이다.

위의 사실들에 의하여 행렬 A 는 수직 대각화 가능한 행렬이며 다음과 같이 대각화 할 수 있다.

$$P^{-1}AP = P^TAP = \begin{bmatrix} -6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$ //

The End.

Written by Cho Sung-hee