선형대수학 비대면 강의

11주 1차시 수업

2020년 05월 26일

조 성희

정 리 6.2.2 선형변환 $T: V \longrightarrow W$ 에 대하여 다음의 등식이 성립한다.

$$\mathrm{nullity}(T) + \mathrm{rank}(T) = \dim(V)$$

【증명】 $\dim(V) = n$ 이라고 하자. 만약 $\mathrm{nullity}(T) = n$ 이라면 $\ker(T) = V$ 이므로 $\mathrm{range}(T) = \{\mathbf{0}\}$ 이고, 정의 4.5.2에 의하여 $\mathrm{rank}(T) = 0$ 으로서 정리가 성립한다.

이제, $\mathrm{nullity}(T) = m(< n)$ 이라고 가정하고,

$$\mathcal{B}_K = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_m\}$$

을 $\ker(T)$ 의 하나의 기저라고 하자.

그러면, 적당한 $n - m$ 개의 벡터 $\boldsymbol{v}_{m+1}, \boldsymbol{v}_{m+2}, \dots, \boldsymbol{v}_n \in V$ 가 존재해서 $\mathcal{B}_K$ 를 포함하는 V 의 기저

$$\mathcal{B}_V = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{v}_{m+1}, \boldsymbol{v}_{m+2}, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$$

를 얻을 수 있다. 이 때,

$$\mathcal{B}_R = \{T(\boldsymbol{v}_{m+1}), T(\boldsymbol{v}_{m+2}), \dots, T(\boldsymbol{v}_n)\}$$ n−m

이 $\mathrm{range}(T)$ 의 기저가 됨을 보이도록 하자.

먼저, $c_{m+1}T(\boldsymbol{v}_{m+1}) + c_{m+2}T(\boldsymbol{v}_{m+2}) + \cdots + c_nT(\boldsymbol{v}_n) = \mathbf{0}_W$ 이라고 하면, T 가 선형변환이므로

$$T(c_{m+1}\boldsymbol{v}_{m+1} + c_{m+2}\boldsymbol{v}_{m+2} + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n) = \mathbf{0}_W$$

이고, 따라서 $c_{m+1}\boldsymbol{v}_{m+1} + c_{m+2}\boldsymbol{v}_{m+2} + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n \in \ker(T)$ 이다.

앞에서 $\mathcal{B}_K$ 가 $\ker(T)$ 의 기저라고 했으므로, 적당한 스칼라 $c_1, c_2, \dots, c_m$ 에 대하여,

$$c_{m+1}\boldsymbol{v}_{m+1} + c_{m+2}\boldsymbol{v}_{m+2} + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{v}_m$$

이다. 따라서

$$(-c_1)\boldsymbol{v}_1 + (-c_2)\boldsymbol{v}_2 + \cdots + (-c_m)\boldsymbol{v}_m + c_{m+1}\boldsymbol{v}_{m+1} + c_{m+2}\boldsymbol{v}_{m+2} + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n = \mathbf{0}_V$$

이다.

여기서 $\mathcal{B}_V = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_m, \boldsymbol{v}_{m+1}, \boldsymbol{v}_{m+2}, \dots, \boldsymbol{v}_n\}$이 기저이므로 선형독립인 집합이다. 그러므로

$$(-c_1) = \cdots = (-c_m) = c_{m+1} = c_{m+2} = \cdots = c_n = 0$$

즉, $\mathcal{B}_R = \{T(\boldsymbol{v}_{m+1}), T(\boldsymbol{v}_{m+2}), \dots, T(\boldsymbol{v}_n)\}$ 은 선형독립인 집합이다.

다음으로, $\langle T(\boldsymbol{v}_{m+1}), T(\boldsymbol{v}_{m+2}), \dots, T(\boldsymbol{v}_n)\rangle = \mathrm{range}(T)$ 를 보이도록 하자.

$\boldsymbol{w} \in \mathrm{range}(T)$ 라고 하면, 적당한 벡터 $\boldsymbol{v} \in V$ 에 대하여 $T(\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{w}$ 이다. $\mathcal{B}_V$ 가 V 의 기저이므로

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{v}_m + c_{n+1}\boldsymbol{v}_{m+1} + c_{m+2}\boldsymbol{v}_{m+2} + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n$$

이고, T 가 선형변환이라는 사실로부터

$$\begin{aligned}\boldsymbol{w} = T(\boldsymbol{v}) &= T(c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{v}_m + c_{m+1}\boldsymbol{v}_{m+1} + c_{m+2}\boldsymbol{v}_{m+2} + \cdots + c_n\boldsymbol{v}_n)\\ &= T(c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{v}_m) + c_{m+1}T(\boldsymbol{v}_{m+1}) + c_{m+2}T(\boldsymbol{v}_{m+2}) + \cdots + c_nT(\boldsymbol{v}_n)\end{aligned}$$

임을 알 수 있다.

여기서 $\mathcal{B}_K = \{\boldsymbol{v}_1, \boldsymbol{v}_2, \dots, \boldsymbol{v}_m\}$ 이 $\ker(T)$의 기저이므로

$$T(c_1\boldsymbol{v}_1 + c_2\boldsymbol{v}_2 + \cdots + c_m\boldsymbol{v}_m) = \mathbf{0}_W$$

이다. 그러므로

$$\boldsymbol{w} = c_{m+1}T(\boldsymbol{v}_{m+1}) + c_{m+2}T(\boldsymbol{v}_{m+2}) + \cdots + c_nT(\boldsymbol{v}_n)$$

즉, $n - m$ 개의 벡터 $T(\boldsymbol{v}_{m+1}), T(\boldsymbol{v}_{m+2}), \dots, T(\boldsymbol{v}_n)$ 이 $\mathrm{range}(T)$ 를 생성한다.

위의 두 사실로부터 $n - m$ 개의 벡터로 이루어진 집합 $\mathcal{B}_R = \{T(\boldsymbol{v}_{m+1}), T(\boldsymbol{v}_{m+2}), \dots, T(\boldsymbol{v}_n)\}$ 이 $\mathrm{range}(T)$ 의 기저가 됨을 알 수 있고

$$\mathrm{rank}(T) = \dim(\mathrm{range}(T)) = n - m$$

이다.

$\dim(V) = n$, $\mathrm{nullity}(T) = m(< n)$ 이라는 가정으로부터 정리가 성립함을 알 수 있다. □

보 기 6.2.2 선형변환 $T:\mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^3$,

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + 3x_2 + 11x_3 - 3x_4 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + 4x_4 \\ -x_1 + x_2 + 5x_3 - 5x_4 \end{bmatrix}$$

에 대하여 $\ker(T)$ 와 $\mathrm{nullity}(T)$ 그리고 $\mathrm{range}(T)$ 와 $\mathrm{rank}(T)$ 를 구해보자.

먼저,

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 11 & -3 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 5 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$$

이므로 T 의 표준행렬은

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 11 & -3 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 5 & -5 \end{bmatrix}$$

이다. $\ker(T)$ 는 제차 연립방정식 $AX = O$ 의 해공간이므로 연립방정식의 해를 구해보자.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 11 & -3 \\ 2 & 1 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 5 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

으로부터

$$\ker(T) = \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t \;\middle|\; s,t \in \mathbb{R} \right\}$$

이다. 즉, $\ker(T)$ 는

$$\mathcal{B}_K = \{(1,-4,1,0), (-3,2,0,1)\}$$

를 기저로 가지는 $\mathbb{R}^4$ 의 부분공간이므로 $\mathrm{nullity}(T) = 2$ 이다.

또한, $\mathrm{range}(T)$ 는 A 의 열공간(column space)이다.

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 11 & 2 & 5 \\ -3 & 4 & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3/5 \\ 0 & 1 & -4/5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

으로부터

$$\mathrm{range}(T) = \langle (1,0,3/5), (0,1,-4/5) \rangle$$

이다. 즉, $\mathrm{range}(T)$ 는

$$\mathcal{B}_R = \{(1,0,3/5), (0,1,-4/5)\}$$

을 기저로 가지는 $\mathbb{R}^3$ 의 부분공간이므로 $\mathrm{rank}(T) = 2$ 이다. 더 나아가,

6.3 역변환(Inverse Transformation)과 동형변환(Isomorphism)

정 의 6.3.1 선형변환 $T: V \longrightarrow W$ 에서, 벡터 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ 에 대해서

$$\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{v} \;\Rightarrow T(\boldsymbol{u}) \neq T(\boldsymbol{v})$$

일 때, T 를 **일대일 변환**(monomorphism)이라고 한다.

정 리 6.3.1 선형변환 $T: V \longrightarrow W$ 에 대하여 다음의 두 조건은 동치이다.

(1) T 는 일대일변환이다.

(2) $\ker(T) = \{\boldsymbol{0}_V\}$

【증명】 (1)⇒(2) T 가 일대일 변환이라고 가정하자. $\boldsymbol{v} \in \ker(T)$ 라고 하면, 정리 6.1.3의 (1)에 의하여

$$T(\boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{0}_V) = \boldsymbol{0}_W$$

이다. 가정에 의하여 $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}_V$ 이다. 따라서 $\ker(T) = \{\boldsymbol{0}_V\}$ 이다.

(1)⇐(2) $\ker(T) = \{\boldsymbol{0}_V\}$를 가정하자. 두 벡터 $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \in V$ 가 $\boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{v}$ 라고 하면 $\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v} \neq \boldsymbol{0}_V$ 이다. 가정과 정리 6.1.3의 (3)에 의하여

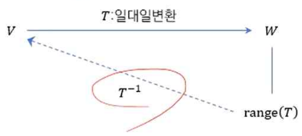
$$\boldsymbol{0}_W \neq T(\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}) = T(\boldsymbol{u}) - T(\boldsymbol{v})$$

이다. 따라서 $T(\boldsymbol{u}) \neq T(\boldsymbol{v})$ 이므로 T 는 일대일 변환이다. □

정 리 6.3.2 선형변환 $T: V \longrightarrow W$ 가 일대일 변환이면, T 의 역함수

$$T^{-1}: \mathrm{range}(T) \longrightarrow V$$

도 선형변환이다. 이 때, T^{-1} 를 T 의 **역변환**(inverse transformation)이라고 한다.



【증명】 $\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2} \in \mathrm{range}(T)$ 라고 하면, 적당한 벡터 $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2} \in V$ 에 대하여 $T(\boldsymbol{v_1}) = \boldsymbol{w_1}, T(\boldsymbol{v_2}) = \boldsymbol{w_2}$ 이다. 또한, T 가 일대일 함수이므로 $T^{-1}(\boldsymbol{w_1}) = \boldsymbol{v_1}, T^{-1}(\boldsymbol{w_2}) = \boldsymbol{v_2}$ 이다. 따라서,

$$\begin{aligned} T^{-1}(\boldsymbol{w_1} + \boldsymbol{w_2}) &= T^{-1}\big(T(\boldsymbol{v_1}) + T(\boldsymbol{v_2})\big) = T^{-1}\big(T(\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2})\big) \\ &= \boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2} = T^{-1}(\boldsymbol{w_1}) + T^{-1}(\boldsymbol{w_2}), \end{aligned}$$

즉, T^{-1} 는 덧셈을 보존한다.

다음으로 스칼라 $\lambda \in F$ 에 대하여,

$$\begin{aligned} T^{-1}(\lambda \boldsymbol{w_1}) &= T^{-1}(\lambda T(\boldsymbol{v_1})) = T^{-1}\big(T(\lambda \boldsymbol{v_1})\big) \\ &= \lambda \boldsymbol{v_1} = \lambda T^{-1}(\boldsymbol{w_1}), \end{aligned}$$

즉, T^{-1} 는 스칼라 곱을 보존한다. 그러므로 T^{-1} 는 선형변환이다. □

정 의 6.3.2 체 F 위의 두 벡터공간 V, W 에 대하여, 선형변환 $T: V \longrightarrow W$ 가 일대일 변환이고 $\text{range}(T) = W$ 일 때, 즉 일대일 대응변환 T 를 V 에서 W 위로의 **동형변환**(isomorphism)이라고 한다. 또한 동형변환 $T: V \longrightarrow W$ 가 존재할 때, V 와 W 는 서로 **동형**(isomorphic)인 벡터공간이라고 하고, $V \cong W$ 로 나타낸다.

동형변환 $T: V \longrightarrow W$ 는 선형변환이므로 벡터공간의 덧셈과 스칼라 곱을 보존한다. 또한, V 의 벡터와 W 의 벡터가 일대일로 대응하므로, 동형인 두 벡터공간은 벡터공간이라는 대수적인 구조면에서 볼 때에는 본질적으로 같은 공간이라고 말할 수 있다.

isomorphic

$V \cong W$

1) 덧셈

2) 곱

3) 1대1 함수 $\Longleftrightarrow$ $\ker(T) = \{0\}$

4) $\text{range}(T) = W$