4장 1,2,3절 연습문제

2020년 4월 17일

#1 다음에 주어진 집합 V 와 체 F 에 대하여 V 에서의 덧셈과 스칼라 곱을 다음과 같이 정의할 때, V 가 F위의 벡터공간이 되는지 조사하여라. 만약, 벡터공간이 아니라면 이유를 설명하여라.(예를 들면, 덧셈이 정의가 안된다, 반례를 제시하고..따라서 A2를 만족하지 않는다..등등..)

(1) $V = \mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) | x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$, $F = \mathbb{Q}$ 이고 임의의 $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in V$ 와 $\lambda \in F$ 에 대하여,

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),\ \lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2).$$

(2) $V = \mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) | x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$, $F = \mathbb{C}$ 이고 임의의 $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in V$ 와 $\lambda \in F$ 에 대하여,

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),\ \lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2).$$

(3) $V = \mathbb{Q}^2 = \{(x_1, x_2) | x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$, $F = \mathbb{R}$ 이고 임의의 $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in V$ 와 $\lambda \in F$ 에 대하여,

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),\ \lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2).$$

(4) $V = \mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) | x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$, $F = \mathbb{R}$ 이고 임의의 $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in V$ 와 $\lambda \in F$ 에 대하여,

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),\ \lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, x_2).$$

(5) $V = \mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) | x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$, $F = \mathbb{R}$ 이고 임의의 $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in V$ 와 $\lambda \in F$ 에 대하여,

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_2, x_2 + y_1),\ \lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2).$$

#2 다음에 주어진 벡터공간 V의 부분집합 W가 V의 부분공간인지를 판단하여라. 판단의 근거를 정확히 적어라.

(1) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \{(a, 0, 0) | a \in \mathbb{R}\}$

(2) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \{(a, b, c) | b = a + c\}$

(3) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \{(a, b, c) | abc > 0\}$

(4) $V = Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$, $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a + b + c + d = 0 \right\}$

(5) $V = P_3[x]$, $W = \{a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \mid a_0 = 0, a_3 = a_1 + a_2\}$

#3 다음과 같이 주어진 벡터 $\boldsymbol{v}: \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}$에 대하여 $\boldsymbol{v}$가 $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}$의 선형결합인지를 판단하여라. 만약, 선형결합이라면 가능한 모든 방법의 선형결합으로 나타내어라.

(1) $(7,18,18): (-1,2,0), (1,1,1), (3,4,7)$

(2) $(7,7,-17): (4,1,-2), (7,0,1), (-8,5,-14)$

(3) $(1,6,10): (1,-1,2), (-3,9,4), (2,4,14)$

#4 다음에 주어진 벡터들이 벡터공간 $\mathbb{R}^3$를 생성하는지 알아보아라. 만약, $\mathbb{R}^3$를 생성하지 않는다면 생성하는 공간을 방정식의 형태로 나타내어라.

(1) $(2,-1,3), (4,1,2), (8,-1,8)$

(2) $(3,1,4), (2,-3,5), (5,-2,9), (1,4,-1)$

(3) $(1,2,-6), (3,4,1), (4,3,1), (1,4,-1)$

(4) $(1,1,1), (0,1,2)$