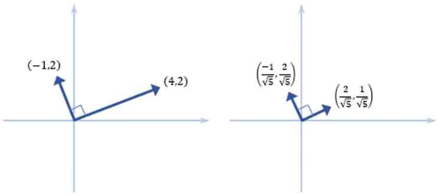
선형대수학 비대면 강의

8주 2차시 수업

조 성희

정 의 5.2.4 V 를 n 차원 내적공간이라고 하자. $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ 이 V 의 기저이면서 모든 $i \neq j$ 에 대해서 $\boldsymbol{v_i} \perp \boldsymbol{v_j}$ 를 만족할 때, $\mathcal{B}$ 를 V 의 **수직기저**(orthogonal basis)라고 한다. 또한, V 의 수직기저 $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ 에서 모든 i 에 대하여 $\|\boldsymbol{v_i}\| = 1$ 일 때, $\mathcal{B}$ 를 V 의 **정규수직기저**(orthonormal basis)라고 한다.

보 기 5.2.8 $\mathcal{B} = \{(4,2), (-1,2)\}$ 는 $\mathbb{R}^2$ 의 수직기저이고, $\mathcal{S} = \left\{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)\right\}$ 는 $\mathbb{R}^2$ 의 정규수직기저이다.



정 리 5.2.2 V 를 n 차원 내적공간이고 $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ 이 V 의 수직기저이면, 각 벡터 $\boldsymbol{v} \in V$ 에 대하여,

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v_i} \rangle}{\|\boldsymbol{v_i}\|^2} \boldsymbol{v_i}$$

이다.

【증명】 $\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v_1} + c_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + c_i\boldsymbol{v_i} + \cdots + c_n\boldsymbol{v_n}$ 이라고 하면, 각 $i = 1,2, \ldots, n$ 에 대하여

$$\begin{aligned}\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v_i} \rangle &= \langle c_1\boldsymbol{v_1} + c_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + c_i\boldsymbol{v_i} + \cdots + c_n\boldsymbol{v_n}, \boldsymbol{v_i} \rangle \\ &= c_1\langle \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_i} \rangle + c_2\langle \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_i} \rangle + \cdots + c_i\langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_i} \rangle + \cdots + c_n\langle \boldsymbol{v_n}, \boldsymbol{v_i} \rangle\end{aligned}$$

이다.

$\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ 가 수직기저이므로, $j \neq i$ 이면 $\langle \boldsymbol{v_j}, \boldsymbol{v_i} \rangle = 0$ 이고 $\langle \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{v_i} \rangle = \|\boldsymbol{v_i}\|^2$ 이다. 따라서 각 $i = 1,2, \ldots, n$ 에 대하여

$$\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v_i} \rangle = c_i\|\boldsymbol{v_i}\|^2$$

이므로, 등식

$$\boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{v_i} \rangle}{\|\boldsymbol{v_i}\|^2} \boldsymbol{v_i}$$

이 성립한다. □

보 기 5.2.9 $\mathcal{B} = \{(1,1,-1), (2,-1,1), (0,1,1)\}$ 은 $\mathbb{R}^3$ 의 기저이다. 또한

$$(1,1,-1) \cdot (2,-1,1) = 0,$$
$$(2,-1,1) \cdot (0,1,1) = 0,$$
$$(1,1,-1) \cdot (0,1,1) = 0$$

이므로 $\mathcal{B}$ 는 $\mathbb{R}^3$ 의 수직기저이다. 벡터 $(1,2,3) \in \mathbb{R}^3$ 에 대하여

$$\begin{aligned}(1,2,3) &= \frac{0}{3}(1,1,-1) + \frac{3}{6}(2,-1,1) + \frac{5}{2}(0,1,1) \\ &= \frac{1}{2}(2,-1,1) + \frac{5}{2}(0,1,1)\end{aligned}$$

이다.

5.3 정사영벡터(Projection vector)와 Gram-Schmidt의 직교화 과정

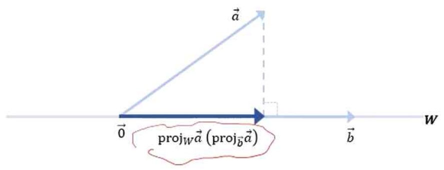
내적공간 $\mathbb{R}^3$의 1차원 부분공간 W와 W의 기저 $\mathcal{B} = \{\vec{b}\}$ 를 생각하자.
벡터 $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ 에 대하여, $\vec{a}$ 의 수직 정사영(orthogonal projection)으로 나타나는 W 의 벡터를 W 위로의 $\vec{a}$ 의 **정사영벡터**(projection vector of $\vec{a}$ onto W)라고 하고

$$\mathrm{proj}_W \vec{a}$$

로 나타낸다. 또는 이와 같은 정사영벡터를 $\vec{b}$ 위로의 $\vec{a}$ 의 정사영벡터라고도 하며

$$\mathrm{proj}_{\vec{b}} \vec{a}$$

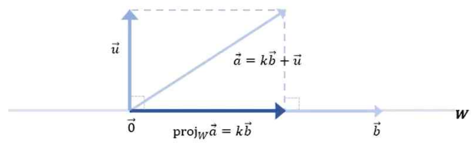
와 같이 나타내기도 한다.



먼저, $\mathrm{proj}_W \vec{a} \in W$ 이고 $\mathcal{B} = \{\vec{b}\}$는 W 의 기저이므로, 적당한 스칼라 $k \in \mathbb{R}$에 대하여

$$\mathrm{proj}_W \vec{a} = k\vec{b}$$

이다.



또한, W 의 모든 벡터에 수직이면서

$$\vec{a} = \mathrm{proj}_W \vec{a} + \vec{u} = k\vec{b} + \vec{u}$$

를 만족하는 벡터 $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ 가 유일하게 존재한다. $\vec{a}$ 와 $\vec{b}$ 의 내적을 계산해보면,

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= (k\vec{b} + \vec{u}) \cdot \vec{b} \\ &= k(\vec{b} \cdot \vec{b}) + (\vec{u} \cdot \vec{b}) \\ &= k|\vec{b}|^2 \end{aligned}$$

이다. 따라서 $k = \frac{(\vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{b}|^2}$ 이므로

$$\mathrm{proj}_W \vec{a} (= \mathrm{proj}_{\vec{b}} \vec{a}) = \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right)\vec{b}$$

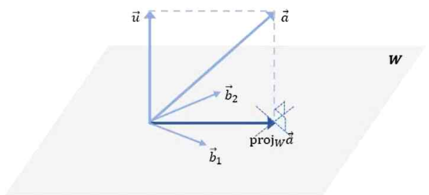
이다.

정 의 5.3.1 내적공간 V 의 두 벡터 $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}$ ($\boldsymbol{w} \neq \boldsymbol{0}$) 에 대하여, 다음과 같이 정의된 벡터

$$\mathrm{proj}_{\boldsymbol{w}} \boldsymbol{v} = \frac{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \rangle}{\|\boldsymbol{w}\|^2} \boldsymbol{w}$$

를 $\boldsymbol{w}$ 위로의 (또는 $\{\boldsymbol{w}\}$ 를 기저로 가지는 1차원 공간위로의) $\boldsymbol{v}$ 의 **정사영벡터**라고 한다.

내적공간 $\mathbb{R}^3$ 에서 $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ 를 기저로 가지는 2차원 부분공간을 W 라고 하고, 벡터 $\vec{a} \in \mathbb{R}^3$ 의 W 위로의 정사영벡터 $\mathrm{proj}_W \vec{a}$ 를 구해보자.



$\mathrm{proj}_W \vec{a} \in W$ 이고 $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ 가 W 의 기저이므로 적당한 스칼라 $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ 에 대하여

$$\mathrm{proj}_W \vec{a} = k_1\vec{b}_1 + k_2\vec{b}_2$$

이다. 또한 W 의 모든 벡터에 수직이면서

$$\vec{a} = \mathrm{proj}_W \vec{a} + \vec{u} = k_1\vec{b}_1 + k_2\vec{b}_2 + \vec{u}$$

를 만족하는 벡터 $\vec{u} \in \mathbb{R}^3$ 가 존재한다.

$\vec{a}$ 와 $\vec{b}_1, \vec{b}_2$ 의 내적을 각각 구해보면

$$\vec{a} \cdot \vec{b}_1 = (k_1\vec{b}_1 + k_2\vec{b}_2 + \vec{u}) \cdot \vec{b}_1 = k_1|\vec{b}_1|^2 + k_2(\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2),$$
$$\vec{a} \cdot \vec{b}_2 = (k_1\vec{b}_1 + k_2\vec{b}_2 + \vec{u}) \cdot \vec{b}_2 = k_1(\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2) + k_2|\vec{b}_2|^2$$

이므로 k_1, k_2 는 다음 연립 선형방정식의 해이다.

$$\begin{cases} |\vec{b}_1|^2 k_1 + (\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2)k_2 = \vec{a} \cdot \vec{b}_1, \\ (\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2)k_1 + |\vec{b}_2|^2 k_2 = \vec{a} \cdot \vec{b}_2. \end{cases}$$

여기서,

$$D = \begin{vmatrix} |\vec{b}_1|^2 & \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 \\ \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 & |\vec{b}_2|^2 \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} \vec{a} \cdot \vec{b}_1 & \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 \\ \vec{a} \cdot \vec{b}_2 & |\vec{b}_2|^2 \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} |\vec{b}_1|^2 & \vec{a} \cdot \vec{b}_1 \\ \vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 & \vec{a} \cdot \vec{b}_2 \end{vmatrix}$$

으로 나타내면, Cramer's Rule에 의하여

$$k_1 = \frac{D_1}{D}, k_2 = \frac{D_2}{D}$$

이고, 이로 부터 $\mathrm{proj}_W \vec{a}$ 를 구할 수 있다.

여기서, $\mathcal{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2\}$ 가 수직기저라고 가정하면 $\vec{b}_1 \cdot \vec{b}_2 = 0$ 이므로 다음의 중요한 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned} \mathrm{proj}_W \vec{a} &= \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}_1}{|\vec{b}_1|^2}\right)\vec{b}_1 + \left(\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}_2}{|\vec{b}_2|^2}\right)\vec{b}_2 \\ &= \mathrm{proj}_{\vec{b}_1} \vec{a} + \mathrm{proj}_{\vec{b}_2} \vec{a} \end{aligned}$$

Written by Cho Sung-hee