No.

Date. / /

컴퓨터공학과/20171630/남주형

4장 1,2,3절 연습문제 2020년 4월17일

#1 다음에 주어진 집합 V와 체 F에 대하여 V에서의 덧셈과 스칼라곱을 다음과 같이 정의 할 때, V가 F위의 벡터공간이 되는지 조사하여라. 만약, 벡터공간이 아니라면 이유를 설명하여라.(예를 들면, 덧셈이 정의가 안된다, 반례를 제시하고.. 따라서 A2를 만족하지 않는다.. 등등..)

(1) $V=\mathbb{R}^2=\{(x_1,x_2)\mid x_1,x_2\in\mathbb{R}\}$, $F=\mathbb{Q}$ 이고 임의의 $(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in V$와 $\lambda\in F$에 대하여,
$(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2)$, $\lambda(x_1,x_2)=(\lambda x_1,\lambda x_2)$

→ 벡터공간이다.

(2) $V=\mathbb{R}^2=\{(x_1,x_2)\mid x_1,x_2\in\mathbb{R}\}$, $F=\mathbb{C}$ 이고 임의의 $(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in V$와 $\lambda\in F$에 대하여,
$(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2)$, $\lambda(x_1,x_2)=(\lambda x_1,\lambda x_2)$.

→ 벡터공간이다.

(3) $V=\mathbb{Q}^2=\{(x_1,x_2)\mid x_1,x_2\in\mathbb{R}\}$, $F=\mathbb{R}$ 이고 임의의 $(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in V$와 $\lambda\in F$에 대하여,
$(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2)$, $\lambda(x_1,x_2)=(\lambda x_1,\lambda x_2)$

→ 벡터공간이다.

(4) $V=\mathbb{R}^2=\{(x_1,x_2)\mid x_1,x_2\in\mathbb{R}\}$, $F=\mathbb{R}$ 이고 임의의 $(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in V$와 $\lambda\in F$에 대하여,
$(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_1,x_2+y_2)$, $\lambda(x_1,x_2)=(\lambda x_1,x_2)$

→ 벡터공간이다.

(5) $V=\mathbb{R}^2=\{(x_1,x_2)\mid x_1,x_2\in\mathbb{R}\}$, $F=\mathbb{R}$이고 임의의 $(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in V$와 $\lambda\in F$에 대하여,
$(x_1,x_2)+(y_1,y_2)=(x_1+y_2,x_2+y_1)$, $\lambda(x_1,x_2)=(\lambda x_1,\lambda x_2)$

→ 덧셈이 정의가 되지 않는다.

$u=(1,2)$, $v=(3,4)$, $w=(5,6)$ 이라고 하자.

$(u+v)+w=u+(v+w)$ 이 성립하는지 살펴보자

$[(1,2)+(3,4)]+(5,6)=(5,5)+(5,6)=(11,10)$

$(1,2)+[(3,4)+(5,6)]=(1,2)+(9,9)=(10,11)$

$(11,10)\neq(10,11)$ ∴ A2를 만족하지 않는다.

∴ 벡터공간이 아니다.

Date.　　/　　/

2 다음에 주어진 벡터공간 V의 부분집합 W가 V의 부분공간인지를 판단하여라.

판단의 근거를 정확히 적어라.

(1) $V=\mathbb{R}^2$, $W=\{(a,0,0) \mid a\in\mathbb{R}\}$

$\vec{a}=(a,0,0)$, $\vec{b}=(b,0,0)\in W$, $\lambda\in\mathbb{R}$ 에 대하여

$\vec{a}+\vec{b}=(a+b,0,0)$ 이고 $a+b\in\mathbb{R}$ 이다.

$\therefore$ $\vec{a}+\vec{b}\in W$ 이다.

$\lambda\vec{a}=(\lambda\vec{a},0,0)$ 이고 $\lambda\vec{a}\in\mathbb{R}$ 이다.

$\therefore$ $\lambda\vec{a}\in W$ 이다.

$\therefore$ W는 V의 부분공간이다.

(2) $V=\mathbb{R}^2$, $W=\{(a,b,c) \mid b=a+c\}$

$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}(b_1,b_2,b_3)\in W$, $\lambda\in\mathbb{R}$ 에 대하여

$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$ 이고 $(a_2+b_2)=(a_1+a_3)+(b_1+b_3)$ 이다. $\therefore$ $\vec{a}+\vec{b}\in W$ 이다.

$\lambda\vec{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)$ 이고 $\lambda a_2=\lambda a_1+\lambda a_3$ $\rightarrow$ $a_2=a_1+a_3$ 이다. $\therefore$ $\lambda\vec{a}\in W$ 이다.

$\therefore$ W는 V의 부분공간이다.

(3) $V=\mathbb{R}^2$, $W=\{(a,b,c) \mid abc>0\}$

$\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)\in W$, $\lambda\in\mathbb{R}$ 에 대하여

$\vec{a}+\vec{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$ 이고 $(a_1+b_1)(a_2+b_2)(a_3+b_3)>0$ 을 만족해야 한다.

$\vec{a}=(-2,1,-2)$, $\vec{b}=(-1,-3,1)$ 이라 하면

$\vec{a}+\vec{b}=(-3,-2,-1)$ 이고 $(-3)(-2)(-1)=-6<0$. $\therefore$ $abc>0$을 만족하지 않는다.

$\therefore$ 덧셈에 닫혀 있지 않다.

$\therefore$ W는 V의 부분공간이 아니다.

(4) $V = Mat_{2\times2}(\mathbb{R})$, $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \middle| a+b+c+d=0 \right\}$

$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$, $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{bmatrix} \in W$ 와 $\lambda \in \mathbb{R}$ 에 대하여

$\vec{a}+\vec{b} = \begin{bmatrix} a_1+b_1 & a_2+b_2 \\ a_3+b_3 & a_4+b_4 \end{bmatrix}$ $(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+(a_3+b_3)+(a_4+b_4)=0$

$= (a_1+a_2+a_3+a_4)+(b_1+b_2+b_3+b_4)=0$

$\therefore$ $\vec{a}+\vec{b} \in W$ 이다.

$\lambda\vec{a} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 & \lambda a_2 \\ \lambda a_3 & \lambda a_4 \end{bmatrix}$ $\lambda a_1 + \lambda a_2 + \lambda a_3 + \lambda a_4 = \lambda(a_1+a_2+a_3+a_4) = \lambda \cdot 0 = 0$

$\therefore$ $\lambda\vec{a} \in W$ 이다.

$\therefore$ 부분집합 W는 V의 부분공간이다.

(5) $V = P_3[x]$, $W = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mid a_0 = 0, a_3 = a_1 + a_2\}$

$\vec{a} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$, $\vec{b} = b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 \in W$ 와 $\lambda \in \mathbb{R}$ 에 대하여

$\vec{a}+\vec{b} = (a_0+b_0) + (a_1+b_1)x + (a_2+b_2)x^2 + (a_3+b_3)x^3$

$(a_0+b_0) = 0+0 = 0$, $(a_3+b_3) = (a_1+b_1)+(a_2+b_2)$

$(a_3)+(b_3) = (a_1+a_2)+(b_1+b_2)$

$\therefore$ $\vec{a}+\vec{b} \in W$ 이다.

$\lambda\vec{a} = \lambda a_0 + \lambda a_1x + \lambda a_2x^2 + \lambda a_3x^3$

$(\lambda a_0) = \lambda \cdot 0 = 0$, $\lambda a_3 = \lambda a_1 + \lambda a_2$

$\lambda(a_3) = \lambda(a_1+a_2)$

$\therefore$ $\lambda\vec{a} \in W$ 이다.

$\therefore$ W는 V의 부분공간이다.

#3 다음과 같이 주어진 벡터 v : $v_1, v_2, \cdots v_n$에 대하여 v가 $v_1, v_2, \cdots v_n$의 선형 결합인지를 판단하여라.
만약. 선형결합이라면 가능한 모든 방법의 선형결합으로 나타내어라.

(1) $(7,18,18)$: $(-1,2,0)$, $(1,1,1)$, $(3,4,7)$

(X) $(7\times1, 18\times1, 18\times1)$, $(\frac{7}{3}\times3, \frac{18}{4}\times4, \frac{18}{7}\times7)$

(2) $(7,7,-17)$: $(4,1,-2)$, $(7,0,1)$, $(-8,5,-14)$

$(\frac{7}{4}\times4, 7\times1, \frac{17}{2}\times(-2))$, (X), $((-\frac{7}{8})\times(-8), \frac{7}{5}\times5, \frac{17}{14}\times(-14))$

(3) $(1,6,10)$: $(1,-1,2)$, $(-3,9,4)$, $(2,4,14)$

$(1\times1, (-6)\times(-1), \frac{10}{2}\times2)$, $((-\frac{1}{3})\times(-3), \frac{6}{9}\times9, \frac{10}{4}\times4)$, $(\frac{1}{2}\times1, \frac{6}{4}\times4, \frac{10}{14}\times14)$

#4 다음에 주어진 벡터들이 벡터공간 $\mathbb{R}^3$를 생성하는지 알아보아라. 만약 $\mathbb{R}^3$를 생성하지 않는다면
생성하는 공간을 방정식의 형태로 나타내어라.

(1) $(2,-1,3)$, $(4,1,2)$, $(8,-1,8)$

$$\begin{cases} 2c_1 + 4c_2 + 8c_3 = x_1 \\ -c_1 + c_2 - c_3 = x_2 \\ 3c_1 + 2c_3 + 8c_3 = x_3 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 8 & x_1 \\ -1 & 1 & -1 & x_2 \\ 3 & 2 & 8 & x_3 \end{array}\right] \xrightarrow{C_{12}} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & -1 & x_2 \\ 2 & 4 & 8 & x_1 \\ 3 & 2 & 8 & x_3 \end{array}\right] \xrightarrow{D_1(-1)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -x_2 \\ 2 & 4 & 8 & x_1 \\ 3 & 2 & 8 & x_3 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{21}(-2),\ E_{31}(-3)}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -x_2 \\ 0 & 6 & 6 & x_1+2x_2 \\ 0 & 5 & 5 & x_3+3x_2 \end{array}\right] \xrightarrow{D_2(\frac{1}{6})} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -x_2 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{x_1+2x_2}{6} \\ 0 & 5 & 5 & x_3+3x_2 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{12}(1),\ E_{32}(-5)} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & -x_2 + \frac{x_1+2x_2}{6} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{x_1+2x_2}{6} \\ 0 & 0 & 0 & \end{array}\right]$$

$$\to x_3+3x_2 - \frac{5x_1+10x_2}{6} = \frac{-5x_1+8x_2+6x_3}{6}$$

$\therefore$ $-\frac{5}{6}x_1 + \frac{4}{3}x_2 + x_3 = 0$ 일때 해가 존재한다.

$\therefore$ $\langle (2,-1,3), (4,1,2), (8,-1,8) \rangle = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid -\frac{5}{6}x_1 + \frac{4}{3}x_2 + x_3 = 0 \}$

(2) $(3,1,4), (2,-3,5), (5,-2,9), (1,4,-1)$

$c_1(3,1,4) + c_2(2,-3,5) + c_3(5,-2,9) + c_4(1,4,-1) = (x_1, x_2, x_3)$

$$\begin{cases} 3c_1 + 2c_2 + 5c_3 + c_4 = x_1 \\ c_1 + (-3c_2) + (-2c_3) + 4c_4 = x_2 \\ 4c_1 + 5c_2 + 9c_3 + (-c_4) = x_3 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 5 & 1 & x_1 \\ 1 & -3 & -2 & 4 & x_2 \\ 4 & 5 & 9 & -1 & x_3 \end{array}\right] \xRightarrow{C_{12}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -2 & 4 & x_2 \\ 3 & 2 & 5 & 1 & x_1 \\ 4 & 5 & 9 & -1 & x_3 \end{array}\right] \xRightarrow[E_{31}(-4)]{E_{21}(-3)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -2 & 4 & x_2 \\ 0 & 11 & 11 & -11 & x_1 - 3x_2 \\ 0 & 17 & 17 & -17 & x_3 - 4x_2 \end{array}\right]$$

$$\xRightarrow{E_{32}(-\frac{17}{11})} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -2 & 4 & x_2 \\ 0 & 11 & 11 & -11 & x_1 - 3x_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_3 - 4x_2 - \frac{17}{11}x_1 + \frac{51}{11}x_2 \end{array}\right]$$

∴ $-\frac{17}{11}x_1 + \frac{7}{11}x_2 + x_3 = 0$ 일때 해가 존재한다.

∴ $\langle (3,1,4), (2,-3,5), (5,-2,9), (1,4,-1) \rangle = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid -\frac{17}{11}x_1 + \frac{7}{11}x_2 + x_3 = 0 \}$

(3) $(1,2,-6), (3,4,1), (4,3,1), (1,4,-1)$

$$\begin{cases} c_1 + 3c_2 + 4c_3 + c_4 = x_1 \\ 2c_1 + 4c_2 + 3c_3 + 4c_4 = x_2 \\ -6c_1 + c_2 + c_3 - c_4 = x_2 \end{cases}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 & x_1 \\ 2 & 4 & 3 & 4 & x_2 \\ -6 & 1 & 1 & -1 & x_3 \end{array}\right] \xRightarrow[E_{31}(6)]{E_{21}(-2)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 & x_1 \\ 0 & -2 & -5 & 2 & x_2 - 2x_1 \\ 0 & 19 & 25 & 5 & x_3 + 6x_1 \end{array}\right] \xRightarrow{D_2(-\frac{1}{2})}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 & x_1 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & -1 & -\frac{1}{2}x_2 + x_1 \\ 0 & 19 & 25 & 5 & x_3 + 6x_1 \end{array}\right] \xRightarrow[E_{32}(-19)]{E_{12}(-3)} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{7}{2} & 4 & -2x_1 + \frac{3}{2}x_2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & -1 & +x_1 - \frac{1}{2}x_2 \\ 0 & 0 & -\frac{45}{2} & 24 & -13x_1 + \frac{19}{2}x_2 + x_3 \end{array}\right] \xRightarrow{D_3(-\frac{2}{45})} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{7}{2} & 4 & -2x_1 + \frac{3}{2}x_2 \\ 0 & 1 & \frac{5}{2} & -1 & x_1 - \frac{1}{2}x_2 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{16}{15} & -\frac{2}{45}(-13x_1 + \frac{19}{2}x_2 + x_3) \end{array}\right]$$

$$\xRightarrow[E_{23}(-\frac{5}{2})]{E_{13}(+\frac{7}{2})} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{15} & * \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{3} & * \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{16}{15} & * \end{array}\right]$$

∴ $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$에 대해서 유일한 해를 가진다.

∴ $\mathbb{R}^3 = \langle (3,1,4), (2,-3,5), (5,-2,9), (1,4,-1) \rangle$

∴ 벡터공간 $\mathbb{R}^3$을 생성 한다.

(4) $(1,1,1)$, $(0,1,2)$

$$\begin{cases} c_1 = x_1 \\ c_1 + c_2 = x_2 \\ c_1 + 2c_2 = x_3 \end{cases} \quad \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 1 & 1 & x_2 \\ 1 & 2 & x_3 \end{array}\right] \underset{E_{31}(-1)}{\overset{E_{21}(-1)}{\Rightarrow}} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 2 & x_3 - x_1 \end{array}\right] \overset{E_{32}(-2)}{\Rightarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & x_2 - x_1 \\ 0 & 0 & x_1 - 2x_2 + x_3 \end{array}\right]$$

$x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ 일 때, 해가 존재한다.

$\therefore \langle (1,1,1), (0,1,2) \rangle = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \}$