1주 2차시 과제물 모범답안

1.2절 대각행렬, 삼각행렬, 대칭행렬

#1 정리 1.2.1의 (1)을 증명하여라. (Hint: 수학적 귀납법을 이용한다.)

정리 1.2.1의 (1). 대각행렬 $D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}$에 대하여 다음이 성립한다.

임의의 자연수 k에 대하여 $D^k = \begin{bmatrix} d_{11}^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22}^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn}^k \end{bmatrix}$이다.

【증명】 먼저 $k = 1$ 이면

$$D^1 = D = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

이므로 자명하게 정리가 성립한다. 다음으로 자연수 k에 대하여 $D^k = \begin{bmatrix} d_{11}^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22}^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn}^k \end{bmatrix}$이 성립한다고 가정하면

$$D^{k+1} = D^k D = \begin{bmatrix} d_{11}^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22}^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn}^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11}^{k+1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22}^{k+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn}^{k+1} \end{bmatrix}$$

이다. 따라서 모든 자연수 k에 대하여 정리가 성립함을 알 수 있다. □

#2 정리 1.2.1의 (2)를 증명하여라.

대각행렬 $\mathrm{D} = \begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}$ 가 가역행렬일 필요충분조건은 모든 $i = 1, 2, \ldots, n$ 에 대하여 $d_{ii} \neq 0$ 인 것이다.

【증명】 (⇒) 귀류법을 이용하여 증명하자. 적어도 하나의 i 에 대하여 $d_{ii} = 0$ 이라고 하면, 모든 $n \times n$ 행렬 A 에 대하여 D 와 A 의 행렬의 곱 DA 의 i 번째 행의 모든 성분은 0 이다. 즉, $DA = I_n$ 을 만족하는 $n \times n$ 행렬 A 는 존재하지 않으므로 D 는 가역행렬이 아니다.

(⇐) 모든 $i = 1, 2, \ldots, n$ 에 대하여 $d_{ii} \neq 0$ 이라고 가정하면 $n \times n$ 행렬

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{d_{11}} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_{22}} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{d_{nn}} \end{bmatrix}$$

이 존재하여 $DD^{-1} = D^{-1}D = I_n$ 을 만족한다. 따라서 D 는 가역행렬이다. □

#3 다음의 삼각행렬이 가역행렬일 때 역행렬을 구하여라.

(1) $U = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}$ (2) $L = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{bmatrix}$

【풀이】(1) $U^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & -\frac{b}{ad} & \frac{be-cd}{adf} \\ 0 & \frac{1}{d} & -\frac{e}{df} \\ 0 & 0 & \frac{1}{f} \end{bmatrix}$

(2) 다음의 등식을 만족하는 x_{ij} 를 구해보자.

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ b & c & 0 \\ d & e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(1,1) 성분에서 $ax_{11} = 1$ 이므로 $a \neq 0$ 이고 $x_{11} = \frac{1}{a}$ 이다.

(1,2) 성분과 (1,3) 성분에서 $ax_{12} = ax_{13} = 0$ 인데 $a \neq 0$ 이므로 $x_{12} = x_{13} = 0$ 이다.

(2,1) 성분에서 $\frac{b}{a} + cx_{21} = 0$ 이다. 따라서 $x_{21} = -\frac{b}{ac}$ 이다.

(2,2) 성분에서 $cx_{22} = 1$ 이므로 $c \neq 0$ 이고 $x_{22} = \frac{1}{c}$ 이다.

(2,3) 성분에서 $cx_{23} = 0$ 인데 $c \neq 0$ 이므로 $x_{23} = 0$ 이다.

(3,1) 성분에서 $\frac{d}{a} - \frac{be}{ac} + fx_{31} = 0$ 이다. 따라서 $x_{31} = \frac{be-c}{acf}$ 이다.

(3,2) 성분에서 $\frac{e}{c} + fx_{32} = 0$ 이다. 따라서 $x_{32} = -\frac{e}{cf}$ 이다.

(3,3) 성분에서 $fx_{33} = 1$ 이므로 $f \neq 0$ 이고 $x_{33} = \frac{1}{f}$ 이다.

한편 $[x_{ij}]L = I_n$ 이므로 L 의 역행렬은 $L^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{a} & 0 & 0 \\ -\frac{b}{ac} & \frac{1}{c} & 0 \\ \frac{be-cd}{acf} & -\frac{e}{cf} & \frac{1}{f} \end{bmatrix}$ 이다.

#4 정리 1.2.3의 (4)를 증명하여라.

$m \times r$ 크기의 행렬 A 와 $r \times n$ 크기의 행렬 B 에 대하여 $(AB)^T = B^T A^T$ 이다.

【증명】 $A = [a_{ij}]_{m \times r}$, $B = [b_{ij}]_{r \times n}$ 이라고 하면, $(AB)^T$ 의 (i,j) 성분은 AB 의 (j,i) 성분이므로 A 의 j 번째 행벡터와 B 의 i 번째 열벡터의 곱인 $\sum_{k=1}^{r} a_{jk} b_{ki}$ 이다. 한편 $B^T A^T$의 (i,j)성분은 B^T의 i 번째 행벡터, 즉 B 의 i 번째 열벡터와 A^T의 j 번째 열벡터, 즉 A 의 i 번째 행벡터의 곱인 $\sum_{k=1}^{r} b_{ki} a_{jk}$이다. 모든 $k = 1,2,\dots,n$ 에 대하여 $a_{jk} b_{ki} = b_{ki} a_{jk}$이므로 $(AB)^T$ 의 (i,j) 성분과 $B^T A^T$의 (i,j)성분은 같다. 그러므로 $(AB)^T = B^T A^T$ 이다. □

#5 정리 1.2.3의 (5)를 증명하여라

$n \times n$ 행렬 A 가 가역행렬이면 A^T도 가역행렬이고 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ 이다.

【증명】 A 가 가역행렬이므로 역행렬 A^{-1} 가 존재하여 $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ 이다. 따라서

$$(AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T = {I_n}^T = I_n$$

이고

$$(A^{-1}A)^T = A^T (A^{-1})^T = {I_n}^T = I_n$$

이므로 $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ 이다. □

#6 정리 1.2.4의 (4)을 증명하여라.

대칭행렬 A 가 가역행렬이면 역행렬 A^{-1} 도 대칭행렬이다.

【증명】A 는 대칭행렬이고 가역행렬이므로 $A^T = A$ 이고 역행렬 A^{-1}이 존재하여 $AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$ 이다. 따라서

$$(AA^{-1})^T = (A^{-1})^T A^T = (A^{-1})^T A = {I_n}^T = I_n$$

이고

$$(A^{-1}A)^T = A^T (A^{-1})^T = A(A^{-1})^T = {I_n}^T = I_n$$

이다. 즉 $A^{-1} = (A^{-1})^T$ 이므로 A^{-1} 또한 대칭행렬이다. □

2.1절 연립선형방정식

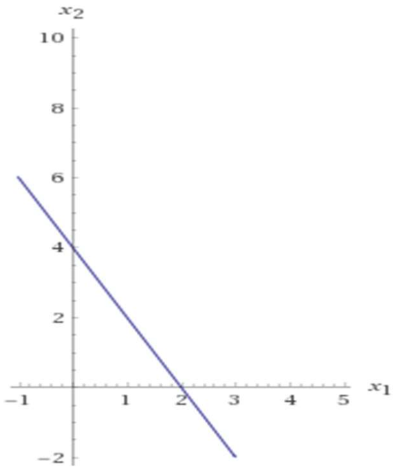
#1 다음 선형방정식의 해집합을 좌표평면 위에 나타내어라.

(1) $\{(x_1, x_2) |\ 2x_1 + x_2 = 4\}$

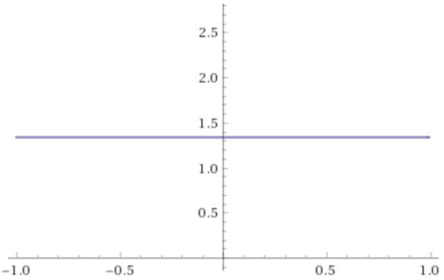
(2) $\{(x_1, x_2) | -3x_2 = -4\}$

(3) $\{(x_1, x_2) | x_1 - 3x_2 = 0\}$

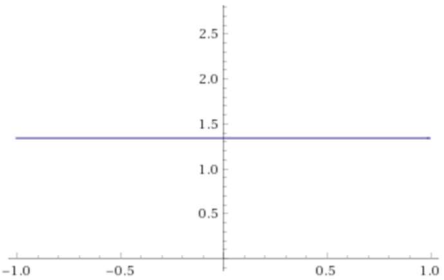
【풀이】(1)



(2)



(3)



#2 다음 연립선형방정식을 행렬의 곱을 이용하여 나타내어라. 또한 덧붙인 행렬로 나타내어라.

(1) $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 9 \\ -x_1 + 3x_2 = -4 \\ 2x_1 - 5x_2 + 5x_3 = 17 \end{cases}$

(2) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 + 8x_4 = 2 \\ -x_1 + x_2 + 2x_4 = 0 \end{cases}$

(3) $\begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 17 \\ 4x_1 + 3x_2 = 7 \\ x_1 - 5x_2 = -2 \end{cases}$

(4) $\begin{cases} 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 + 15x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 0 \end{cases}$

【풀이】(1) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 2 & -5 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -4 \\ 17 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 9 \\ -1 & 3 & 0 & -4 \\ 2 & -5 & 5 & 17 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 & 8 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 & 8 & 2 \\ -1 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 4 & 3 \\ 1 & -5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 \\ 7 \\ -2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} -1 & 3 & 17 \\ 4 & 3 & 7 \\ 1 & -5 & -2 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 \\ 1 & 15 & 1 \\ -2 & 6 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 3 & -3 & 4 & 0 \\ 1 & 15 & 1 & 0 \\ -2 & 6 & 3 & 0 \end{bmatrix}$