3.2 행렬식의 성질

3.1절에서 공부한 바와 같이 행렬의 한 행 또는 한 열에 대하여 행렬식을 전개하여 구하는 것은 쉬운 일이 아니다. 이번 절에서는 행렬식의 성질을 공부하고 이를 이용하여 행렬식을 구하는 방법을 알아보자.

정 리 3.2.1 [행렬식의 성질] $n\times n$ 크기의 정사각행렬 A에 대하여 다음이 성립한다.

(1) 만약 모든 성분이 "0"으로만 구성된 영행이 행렬 A에 존재한다면 $\det A=0$ 이다.

(2) A에 기본 행 연산 C_{ij}를 시행해서 얻은 행렬을 A'이라고 하면

$$\det A' =-(\det A).$$

(2-1) A의 두 행이 같으면 $\det A=0$이다.

(3) A에 기본 행 연산 $D_i(k)$를 시행해서 얻은 행렬을 A'이라고 하면

$$\det A' = k(\det A).$$

(3-1) $\det(kA) = k^n(\det A)$.

(3-2) A의 한 행이 다른 한 행의 상수 배이면 $\det A = 0$이다.

(4) A에 기본 행 연산 $E_{ij}(k)$를 시행해서 얻은 행렬을 A'이라 하면

$$\det A' = \det A.$$

(5) $\det A = \det\left(A^T\right)$

【증명】 (1) 존재하는 영행에 대하여 행렬식을 전개하면 행렬식은 0 임을 자명하게 알 수 있다.

(2) 행렬의 크기 "n"에 대한 수학적 귀납법을 적용하여 증명하자. 먼저 2×2행렬 $A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$에 대하여 C_{12}를 시행한 행렬을 $A'=\begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{bmatrix}$라고 하면,

$$\det A' = a_{21}a_{12}-a_{22}a_{11} =-\left(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\right)=-(\det A)$$

이다. 즉, 결과가 성립한다.

다음으로, A를 $n\times n$크기의 행렬이라 하고 A에 C_{ij}를 시행하여 얻은 행렬을 A'이라고 했을 때, $\det A' =-(\det A)$ 임을 가정하자.

이제, A는 $(n+1)\times(n+1)$크기의 행렬이고 A에 C_{ij}를 시행하여 얻은 행렬을 A'

이라 하자. 이제, $\det A'$을 i행과 j행이 아닌 k행에 대하여 전개하면,

$$\det A' = a_{k1} C_{k1}' + a_{k2} C_{k2}' + \cdots a_{k(n+1)} C_{k(n+1)}',$$

여기서 C_{kj}'는 행렬 A'의 (k,j)번째 여인수(cofactor)이다. C_{kj}을 A의 (k,j)번째 여인수라고 한다면, 가정에 의하여

$$C_{kj}' = -C_{kj}\ (j = 1,2,\ldots,n+1)$$

이다. 따라서

$$\begin{aligned}\det A' &= a_{k1}(-C_{k1}) + a_{k2}(-C_{k2}) + \cdots a_{k(n+1)}(-C_{k(n+1)}) \\ &= -(a_{k1}C_{k1} + a_{k2}C_{k2} + \cdots + a_{k(n+1)}C_{k(n+1)}) \\ &= -(\det A)\end{aligned}$$

이다. 모든 크기의 정사각행렬에 대해서 결과는 성립한다.

(2-1) 행렬 A의 i행과 j행이 같다고 하면, A에 기본 행 연산 C_{ij}를 시행해도 A이다. 따라서 (2)번의 결과에 의하여 $\det A = -(\det A)$이다. 즉, $2(\det A) = 0$이므로 $\det A = 0$이다.

(3) 행렬 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$에 기본 행 연산 $D_i(k)$를 시행하여 얻은 행렬을 A'이라 하자. A'의 행렬식을 i행에 대하여 전개해보면,

$$\begin{aligned}\det A' &= (ka_{i1})C_{i1} + (ka_{i2})C_{i2} + \cdots + (ka_{\in})C_{\in} \\ &= k(a_{i1}C_{i1} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{\in}C_{\in}) \\ &= k(\det A)\end{aligned}$$

이다.

(3-1) 한 행에 k배를 하면 행렬식이 k배 차이가 나는데, kA는 A의 모든 n개의 행에 k배를 한 행렬이므로 kA의 행렬식은 A의 행렬식의 k^n배이다.

(3-2) 행렬 A를 i행과 j행이 같은 행렬이고, A의 j행에 k배를 한 행렬을 A'이라 하자. 즉, A'은 j행이 i행의 k배인 행렬이다. A'의 행렬식을 j행에 대하여 전개해보면, (3)번과 (2-1)번의 결과에 의하여

$$\det A' = k(\det A) = k \cdot 0 = 0$$

이다.

Written by Cho, sunghee.

(4) 행렬 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ 에 기본 행 연산 $E_{ij}(k)$ 를 시행하여 얻은 행렬을 A' 이라 하고, A' 의 행렬식을 i 행에 대하여 전개하면

$$\begin{aligned}\det A' &= (a_{i1}+ka_{j1})C_{i1}+(a_{i2}+ka_{j2})C_{i2}+\cdots+(a_{in}+ka_{jn})C_{in}\\ &= (a_{i1}C_{i1}+a_{i2}C_{i2}+\cdots+a_{in}C_{in})+k(a_{j1}C_{i1}+a_{j2}C_{i2}+\cdots+a_{jn}C_{in})\end{aligned}$$

이다. 여기서 첫 번째 $(\cdots)$ 는 행렬 A 의 행렬식이고 두 번째 $(\cdots)$ 는 i 행과 j 행이 같은 행렬의 행렬식을 i 행에 대하여 전개한 것이므로 (2-1)의 결과에 의하여 0 이다. 따라서,

$$\det A' = \det A + k\cdot 0 = \det A$$

이다. □

(4)번의 증명과정에서 나타난 결과에 의하면, 정사각행렬 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$ 에 대하여,

$$a_{j1}C_{i1}+a_{j2}C_{i2}+\cdots+a_{jn}C_{in}=\begin{cases}\det A, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases}$$

임을 알 수 있다.

정리 3.2.1 의 기본 행 연산에 대한 행렬식의 성질을 이용하면 비교적 큰 크기의 정사각행렬의 행렬식을 좀 더 쉽게 구할 수 있다.

보 기 3.2.1 다음 행렬식을 계산해보자.

$$\begin{vmatrix}3&5&-2&6\\1&2&-1&1\\2&4&1&5\\3&7&5&3\end{vmatrix}$$

주어진 행렬에 C_{12} 를 시행하면, 정리 3.2.1 의 (2)에 의하여

$$\begin{vmatrix}3&5&-2&6\\1&2&-1&1\\2&4&1&5\\3&7&5&3\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1&2&-1&1\\3&5&-2&6\\2&4&1&5\\3&7&5&3\end{vmatrix}$$

이다. $E_{21}(-3), E_{31}(-2)$ 그리고 $E_{41}(-3)$ 을 차례로 시행하면,

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

이다. $E_{42}(1)$을 시행하면

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 9 & 3 \end{vmatrix}$$

이고, $E_{43}(-3)$을 시행하면 다음과 같은 삼각행렬의 행렬식으로 바뀐다.

$$= -\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{vmatrix}$$

삼각행렬의 행렬식은 대각성분들의 곱이라는 사실을 이용하면,

$$= (-1)\cdot 1\cdot(-1)\cdot 3\cdot(-6) = -18$$

이다.

위의 보기에서와 같이 주어진 정사각행렬에 적절한 기본 행 연산을 시행하여 대각행렬로 바꾼 후, 대각성분들을 곱해서 행렬식을 계산하는 방법을 **삼각법**이라고 한다.

보조정리 3.2.2 행렬식에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $\det I_n = 1$

(2) $\det C_{ij} = -1$, $\det D_i(k) = k$, $\det E_{ij}(k) = 1$

(3) 임의의 정사각행렬 A와 기본행렬 E에 대하여, $\det(EA) = (\det E)(\det A)$

【증명】 (1) 항등행렬 I_n은 대각행렬이므로 I_n의 행렬식은 대각성분의 곱인 1이다.

(2) 기본행렬 C_{ij}는 항등행렬 I_n에 기본 행 연산 C_{ij}를 한 번 시행하여 얻은 행렬이므로 $\det C_{ij} = -(\det I_n) = -1$이다.

(3) 임의의 정사각행렬 A에 대하여 기본행렬과의 곱 $C_{ij}A$ 는 A에 기본 행 연산 C_{ij}를 한 번 시행하여 얻은 행렬이다. 따라서

$$\det(C_{ij}A) = -(\det A)$$

이다. (2)번에 의하여 $\det C_{ij} = -1$이므로,

$$\det(C_{ij}A) = -(\det A) = (\det C_{ij})(\det A)$$

이다. □

정 리 3.2.3 $n \times n$ 크기의 정사각행렬 A와 B에 대하여 다음이 성립한다.

(1) A는 가역행렬이다. $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$

(2) $\det(AB) = (\det A)(\det B)$

(3) A가 가역행렬이면 $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$ 이다.

(4) $AB = I_n$ 이면 $BA = I_n$ 이다. 즉 A는 가역행렬이고 $A^{-1} = B$ 이다.

【증명】 (1) ($\Rightarrow$) A를 가역행렬이라고 하면 A는 기본행렬들의 곱으로 나타내어진다. 즉, 적당한 기본행렬 $E_1, E_2, \ldots, E_{k-1}, E_k$가 존재해서

$$A = E_1 E_2 \cdots E_{k-1} E_k$$

이다. 보조정리 3.2.2 의 (3)번에 의하여

$$\begin{aligned}\det A &= \det(E_1 E_2 \cdots E_{k-1} E_k) \\ &= (\det E_1)(\det(E_2 \cdots E_{k-1} E_k)) \\ &\vdots \\ &= (\det E_1)(\det E_2) \cdots (\det(E_{k-1} E_k)) \\ &= (\det E_1)(\det E_2) \cdots (\det E_{k-1})(\det E_k)\end{aligned}$$

이다. 보조정리 3.2.2 의 (2)번에 의하여, 모든 $i = 1, 2, \ldots, k$에 대하여 $\det E_i \neq 0$ 이므로 $\det A \neq 0$ 이다.

($\Leftarrow$) 대우명제를 증명하자. A가 가역행렬이 아니라고 가정하고 A'을 A의 기약 행사다리꼴 행렬이라고 하면, $A' \neq I_n$ 이다. 즉, 적당한 기본 행 연산 $E_1, E_2, \ldots, E_k$에 대하여

$$A \overset{E_1}{\Rightarrow} A_1 \overset{E_2}{\Rightarrow} A_2 \Rightarrow \cdots \overset{E_k}{\Rightarrow} A'(\neq I_n)$$

이다. 따라서 $A' = E_k \cdots E_2 E_1 A$ 이고, 보조정리 3.2.2 의 (3)번에 의하여

$$\det A' = (\det E_k) \cdots (\det E_2)(\det E_1)(\det A)$$

이다. 여기서 A'은 정사각행렬이고 기약 행 사다리꼴 행렬이면서 I_n 이 아니므로 적어도 하나의 영행을 포함한다. 따라서 $\det A' = 0$ 이다. 한편, 모든 $i = 1, 2, \ldots, k$에 대하여 $\det E_i \neq 0$ 이므로 위의 등식이 성립하려면

Written by Cho, sunghee.

$$\det A = 0$$

이어야 함을 알 수 있다.

(2) 먼저 A가 가역행렬인 경우에는 $A = E_1 E_2 \cdots E_k$ 이므로

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det(E_1 E_2 \cdots E_k B) \\ &= (\det E_1)(\det(E_2 \cdots E_k B)) \\ &\vdots \\ &= (\det E_1)(\det E_2) \cdots (\det E_k)(\det B) \\ &= (\det(E_1 E_2 \cdots E_k))(\det B) \\ &= (\det A)(\det B)\end{aligned}$$

이다.

다음으로 A가 가역행렬이 아니라고 가정하면, (1)번의 경우에서와 마찬가지로 $A' = E_k \cdots E_2 E_1 A$ 이고 $A = E_1^{-1} E_2^{-2} \cdots E_k^{-1} A'$ 이다. 따라서

$$\begin{aligned}\det(AB) &= \det\left(E_1^{-1} E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} A'B\right) \\ &= \left(\det E_1^{-1}\right)\left(\det\left(E_2^{-1} \cdots E_k^{-1} A'B\right)\right) \\ &\vdots \\ &= \left(\det E_1^{-1}\right)\left(\det E_2^{-1}\right) \cdots \left(\det E_k^{-1}\right)(\det(A'B))\end{aligned}$$

이다. 여기서 A'은 적어도 하나의 영행을 가지므로 곱 $A'B$에도 적어도 하나의 영행이 존재한다. 그러므로 $\det(A'B) = 0 = \det A'$ 이다. A가 가역행렬이 아닌 경우에도

$$\det(AB) = 0 = 0 \cdot (\det B) = (\det A)(\det B)$$

이 성립함을 알 수 있다.

(3) A를 가역행렬이라 하면 $AA^{-1} = I_n$ 을 만족하는 역행렬 A^{-1}가 존재한다. (2)번의 결과에 의하여

$$(\det A)(\det A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det I_n = 1$$

이므로 $(\det A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$ 이다.

(4) $AB = I_n$ 이라 하면,

 Written by Cho, sunghee.

$$\det(BA) = (\det B)(\det A) = (\det A)(\det B) = \det(AB) = \det I_n = 1\,(\neq 0)$$

이므로 $\det(BA) \neq 0$ 이다. (1)에 의하여 BA는 가역행렬이다. 즉, 역행렬 $(BA)^{-1}$이 존재한다. 이제, $AB = I_n$ 이라는 가정에 의하여

$$BA = BI_nA = B(AB)A = (BA)(BA)$$

이고 양변에 $(BA)^{-1}$를 곱해주면

$$I_n = (BA)^{-1}(BA) = (BA)^{-1}(BA)(BA) = I_n(BA) = BA$$

이다. □

정 리 3.2.4 정사각행렬 $A = [a_{ij}]_{n\times n}$, $B = [b_{ij}]_{m\times m}$ 와 행렬 $C = [c_{ij}]_{n\times m}$, $D = [d_{ij}]_{m\times n}$ 그리고 영행렬 O에 대하여 다음이 성립한다.

$$\left|\begin{array}{c:c} A & C \\ \hdashline O & B \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c:c} A & O \\ \hdashline D & B \end{array}\right| = |A||B|$$

【증명】 주어진 행렬 A, B, C, D그리고 영행렬 O에 대하여

$$\begin{bmatrix} I_n & O \\ O & B \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & C \\ O & I_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & C \\ O & B \end{bmatrix}$$

이므로, 정리 3.2.3 의(2) 와 정리 3.1.3을 이용하면

$$\begin{vmatrix} A & C \\ O & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} I_n & O \\ O & B \end{vmatrix}\begin{vmatrix} A & C \\ O & I_m \end{vmatrix} = |B||A|$$

이다. 마찬가지로,

$$\begin{bmatrix} A & O \\ D & I_m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_n & O \\ O & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & O \\ D & B \end{bmatrix}$$

이므로

$$\begin{vmatrix} A & O \\ D & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & O \\ D & I_m \end{vmatrix}\begin{vmatrix} I_n & O \\ O & B \end{vmatrix} = |A||B|$$

이 성립한다. $\square$

보 기 3.2.4 정리 3.2.2 에 의하여 다음이 성립한다.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 9 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -5 & 3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 6 \cdot 7 = 42.$$

3.3 행렬식과 역행렬, 연립선형방정식

정 의 3.3.1 $n \times n$ 크기의 정사각행렬 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ 에서 (i,j) 번째 여인수 C_{ij} 를 (i,j) 번째 성분으로 가지는 $n \times n$ 크기의 정사각행렬 $[C_{ij}]_{n \times n}$ 을 A 의 **여인수행렬**(cofactor matrix)라고 하며 $Cofac(A)$ 로 나타낸다. 또한 $Cofac(A)$ 의 전치행렬을 A 의 **수반행렬**(adjoint matrix)이라 하고 $adj(A)$ 로 나타낸다. 즉,

$$Cofac(A) = [C_{ij}]_{n \times n} \text{ 이고 } adj(A) = Cofac(A)^T$$

이다.

정 리 3.3.1 $n \times n$ 크기의 정사각행렬 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ 가 가역행렬이면,

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} adj(A)$$

이다.

【증명】 행렬의 곱 $A \cdot adj(A)$ 의 (i,j) 번째 성분을 살펴보자.

$$A \cdot adj(A) \text{ 의 } (i,j) \text{ 번째 성분} = (a_{i1}\ a_{i2}\ \ldots\ a_{in}) \cdot \begin{pmatrix} C_{j1} \\ C_{j2} \\ \vdots \\ C_{jn} \end{pmatrix}$$

$adj(A)$의 j번째 열
= $Cofac(A)$의 j번째 행

$$= a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \cdots + a_{in}C_{jn}$$

$$= \begin{cases} \det A, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

이므로

$$A \cdot adj(A) = (\det A) I_n$$

이다. 따라서,

$$A \cdot \frac{1}{\det A} adj(A) = I_n,$$

즉

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} adj(A)$$

이다. □

보 기 3.3.1 행렬식을 이용하여 다음의 행렬 A 가 가역행렬인지를 판단하고 가역행렬이라면 역행렬 A^{-1} 를 구해보자.

 Written by Cho, sunghee.

$$A=\begin{bmatrix}5&8&1\\0&2&1\\4&3&-1\end{bmatrix}$$

먼저, A의 행렬식을 1열에 대해서 전개해보면,

$$\det A=5(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}2&1\\3&-1\end{vmatrix}+4(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}8&1\\2&1\end{vmatrix}=-1(\neq 0)$$

이므로 A는 가역행렬이다. A의 여인수행렬은

$$Cofac(A)=\begin{bmatrix}+\begin{vmatrix}2&1\\3&-1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}0&1\\4&-1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}0&2\\4&3\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}8&1\\3&-1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}5&1\\4&-1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}5&8\\4&3\end{vmatrix}\\+\begin{vmatrix}8&1\\2&1\end{vmatrix}&-\begin{vmatrix}5&1\\0&1\end{vmatrix}&+\begin{vmatrix}5&8\\0&2\end{vmatrix}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5&4&-8\\11&-9&17\\6&-5&10\end{bmatrix}$$

이고 A의 수반행렬은

$$adj(A)=Cofac(A)^T=\begin{bmatrix}-5&11&6\\4&-9&-5\\-8&17&10\end{bmatrix}$$

이다. 따라서 A의 역행렬은

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}adj(A)=\begin{bmatrix}5&-11&-6\\-4&9&5\\8&-17&-10\end{bmatrix}$$

이다.

정 리 3.3.2 정사각행렬 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$을 계수행렬로 가지는 연립선형방정식

$$AX=B$$

에서 A가 가역행렬이면, 즉 $\det A\neq 0$이면, 이 연립선형방정식은 임의의 $n\times 1$ 행렬 B에 대해서 유일한 해

$$X=A^{-1}B$$

를 가진다.

【증명】 계수행렬 A의 역행렬 A^{-1}가 유일하게 존재하므로, A^{-1}를 방정식 양변의 왼편에 곱해주면,

$$X=I_nX=(A^{-1}A)X=A^{-1}(AX)=A^{-1}B$$

는 유일한 해이다. □

정리 3.3.2 에 의하면 계수행렬 A가 가역행렬이면 연립선형방정식 $AX=B$의 해가 유일하게 존재함을 알 수 있다. 반면에 행렬 A가 가역행렬이 아니라면 이 연립선형방정식은 $n\times 1$ 행렬 B에 따라서 해를 가지지 않거나 무수히 많은 해를 가지는 경

우로 나누어진다.

정 리 3.3.3 [Cramer의 공식] 정사각행렬 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$을 계수행렬로 하고 $X=[x_j]_{n\times 1}\,(j=1,2,\ldots,n)$를 미지수행렬이라고 할 때, 행렬 $B=[b_j]_{n\times 1}$ $(j=1,2,\ldots,n)$에 대한 연립선형방정식

$$AX=B$$

에서 A가 가역행렬이면, 즉 $\det A\neq 0$이면 이 연립선형방정식은 유일한 해

$$x_j=\frac{\det A_j}{\det A}\ (j=1,2,\ \ldots,n)$$

를 가진다. 여기서 A_j는 A의 j번째 열을 제거하고 그 자리를 B로 채운 행렬을 나타낸다. 즉,

$$A_j=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & b_j & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad A\text{의 } j\text{번째 열}$$

이다.

【증명】 정리 3.3.1 와 정리 3.3.2를 이용하면

$$X=A^{-1}B=\frac{1}{\det A}\,adj(A)\cdot B$$

이다. 즉,

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}=\frac{1}{\det A}\begin{bmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{j1} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{j2} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{1j} & C_{2j} & \cdots & C_{jj} & \cdots & C_{nj} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{jn} & \cdots & C_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_j \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

이다. 따라서 모든 $j=1,2,\ldots,n$에 대하여

$$x_j=\frac{1}{\det A}\left(b_iC_{1j}+b_2C_{2j}+\cdots+b_nC_{nj}\right)=\frac{\det A_j}{\det A}$$

이다. □

보 기 3.3.2 다음 연립선형방정식의 해를 구해보자.

$$\begin{cases} 7x_1-x_2+x_3=0 \\ 10x_1-2x_2-x_3=8 \\ 6x_1+3x_2+2x_3=7 \end{cases}$$

먼저 계수행렬의 행렬식을 구해보면

$$\det A = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 1 \\ 10 & -2 & -1 \\ 6 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 61 \neq 0$$

이므로 이 연립선형방정식은 유일한 해를 가진다. 이제,

$$\det A_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 8 & -2 & -1 \\ 7 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 61,\ \det A_2 = \begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 10 & 8 & -1 \\ 6 & 7 & 2 \end{vmatrix} = 183,\ \det A_3 = \begin{vmatrix} 7 & -1 & 0 \\ 10 & -2 & 8 \\ 6 & 3 & 7 \end{vmatrix} = -244$$

이므로 유일한 해는

$$x_1 = \frac{61}{61} = 1,\ x_2 = \frac{183}{61} = 3,\ x_3 = \frac{-244}{61} = -4$$

이다.