#### 선형대수학 비대면 강의

# 13주 2차시 수업

## 2020년 06월 11일

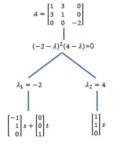
### 조 성희

Written by Cho Sung-hee

보 기 7.2.3 보기 7.1.3에 의하여 행렬

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

의 고유값과 고유공간은 다음과 같다.



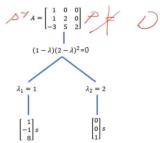
A 는 선형독립인 고유벡터를 3 개 가지므로 대각화 가능한 행렬이고, 다음과 같이 대각화 할수 있다.

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

보 기 7.2.4 보기 7.1.4에 의하여 행렬

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -3 & 5 & 2 \end{bmatrix} \in Mat_{3 \times 3}(\mathbb{R})$$

의 고유값과 고유공간은 다음과 같다.



고유값  $\lambda_2=2$  의 특성방정식에서의 근의 중복도는 2 이지만  $\dim(\mathcal{E}_{\lambda_2=2})=1$  이다. 따라서 A는 많아야 2 개의 선형독립인 고유벡터를 가지므로 대각화 가능한 행렬이 아니다.

Written by Cho Sung-hee

보기 7.2.5 보기 7.1.5에 의하여 행렬

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \in Mat_{3\times 3}(\mathbb{R})$$

의 고유값과 고유공간은 다음과 같다.

정 리 7.2.3 행렬  $A\in Mat_{n\times n}(F)$  가 서로 다른  $k(\leq n)$  개의 고유값  $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k$  를 가진 다고 하자. 벡터  $\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2,...,\mathbf{x}_k\in F^n$  가 각각  $\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_k$  에 해당하는 A 의 고유벡터이면, 이러한 k 개의 고유벡터들은 항상 선형독립이다.

【증명】  $\varepsilon = \{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, ..., \mathbf{x}_k\}$  가 선형종속인 집합이라고 가정하고,

$$\mathcal{S} = \left\{\mathbf{x}_{i_1}, \mathbf{x}_{i_2}, \dots, \mathbf{x}_{i_r}\right\} (r < k)$$

을  $\varepsilon$  의 선형독립인 최대(maximal)의 부분집합이라고 하자. 그러면 적당한  $\mathbf{x}_{l_{r+1}} \in \varepsilon \setminus s$ 가 존재하여  $s' = \{\mathbf{x}_{i_1}, \mathbf{x}_{i_2}, ..., \mathbf{x}_{i_{r+1}}\}$ 은 선형종속인 집합이다. 따라서

$$c_1 \mathbf{x}_{t_1} + c_2 \mathbf{x}_{t_2} + \dots + c_r \mathbf{x}_{t_r} + c_{r+1} \mathbf{x}_{t_{r+1}} = \mathbf{0}$$
 (1)

을 만족하는 동시에 0이 아닌 스칼라  $c_1, c_2, ..., c_r, c_{r+1} \in F$  가 존재한다. 등식 (1)의 양변에 행렬 A 를 곱해주면

$$c_1 A \mathbf{x}_{i_1} + c_2 A \mathbf{x}_{i_2} + \dots + c_r A \mathbf{x}_{i_r} + c_{r+1} A \mathbf{x}_{i_{r+1}} = \mathbf{0}.$$
 (2)

여기서  $\mathbf{x_{i_1}}, \mathbf{x_{i_2}}, ..., \mathbf{x_{i_r}}, \mathbf{x_{i_{r+1}}}$ 은 각각 고유값  $\lambda_{i_t}, \lambda_{i_2}, ..., \lambda_{i_r}, \lambda_{i_{r+1}}$ 에 해당하는 A의 고유백터 이므로 모든 j=1,2,...,r,r+1에 대하여  $A\mathbf{x_{i_1}}=\lambda_{i_1}\mathbf{x_{i_1}}$ 이다. 따라서 등식 (2)는

$$c_1\lambda_{i_1}\mathbf{x}_{i_1} + c_2\lambda_{i_2}\mathbf{x}_{i_2} + \dots + c_r\lambda_{i_r}\mathbf{x}_{i_r} + c_{r+1}\lambda_{i_{r+1}}\mathbf{x}_{i_{r+1}} = \mathbf{0}$$
 (3)

이다.

한편, 등식 (1)의 양변을  $\lambda_{i_{r+1}}$ 배 해주면 다음의 등식을 얻는다.

$$c_1\lambda_{i_{p+1}}\mathbf{x}_{i_1}+c_2\lambda_{i_{p+1}}\mathbf{x}_{i_2}+\cdots+c_r\lambda_{i_{p+2}}\mathbf{x}_{i_r}+c_{r+1}\lambda_{i_{r+1}}\mathbf{x}_{i_{r+1}}=\mathbf{0}. \tag{4}$$
 등식 (3)에서 등식 (4)를 빼주면

$$\begin{split} & c_1(\lambda_{i_r}-\lambda_{i_{r+1}})\mathbf{x}_{i_1}+c_2(\lambda_{i_2}-\lambda_{i_{r+1}})\mathbf{x}_{i_2}+\cdots+c_r(\lambda_{i_r}-\lambda_{i_{r+1}})\mathbf{x}_{i_r}=\mathbf{0} \\ \text{이다. 여기서 } \mathbf{x}_{i_1}, \mathbf{x}_{i_2}, ..., \mathbf{x}_{i_r} & \text{선형독립이므로, 모든 } j=1,2,0...,r \text{ 에 대하여} \end{split}$$

 $(c_j(\lambda_{i_j}-\lambda_{i_{j+1}})=0$  이고, 또한  $\lambda_{i_j}\neq\lambda_{i_{j+1}}$  이므로  $(c_j=0)$ 다. 이 사실을 등식 (1)에 대입하면  $(c_{r+1}x_{i_{j+1}})=0$  이고 따라서  $(c_{r+1}=0)$ 이다. 즉, 스칼라  $(c_1,c_2,...,c_r,c_{r+1})$ 이 동시에  $(c_r)$ 이 아니라는 사실에 모순이다. 그러므로,  $(c_r)$ 는 선형독립인 집합이다.

Written by Cho Sung-hee

#### 7.3 대칭행렬(Symmetric Matrix)과 수직 대각화(Orthogonal Diagonalization)

일반적으로 정사각 행렬 A 가 대각화 가능한 행렬인지의 여부를 판단하려면 A 의 고유값과 고유공간을 모두 구해야 한다. 그러나 고유값과 고유공간을 구하지 않고도, 대각화 가능한 행렬인지를 바로 알 수 있는 행렬도 존재한다.

대표적인 예로서 서로 다른 n 개의 대각 성분을 가지는 삼각행렬을 U 라고 하면, U의 경우에는 대각성분이 고유값이므로 서로 다른 n 개의 고유값을 가지며 각 고유값에 해당하는 고유 공간은 1차원 공간이다. 정리 7.2.3에 의하여 삼각행렬 U는 선형독립인 n 개의 고유백터를 가지다. 그러므로 정리 7.2.2에 의하여 U는 대각화 가능한 행렬이다.

를 만족하는 대칭행렬(symmetric matrix) A 도 대각화 가능성 여부를 바로 판단할 수 있는 대표적인 행렬이다. 대칭행렬의 대각화 가능성에 대한 다음의 중요한 정리를 알아보자. 증명은 생략한다.

정리 7.3.1 대칭행렬  $A \in Mat_{n \times n}(\mathbb{R})$  에 대하여 다음이 성립한다.

(1) A 의 고유값은 모두 실수이다.

(2) A의 각 고유값  $\lambda_t$ 에 대하여  $\lambda_t$ 의 특성방정식에서의 중복도와  $\lambda_t$ 의 고유공간의 차원은 같다.

(3) 위의 두 사실에 의하여 대칭행렬 A 는 대각화 가능한 행렬이다.

정리 7.3.1을 Real Spectral Theorem 이라고 하고, 대학행렬 A의 모든 고유값들을 원소로 가지는 집합을 A의 스펙트램(Spectrum)이라고 부른다.

보기7.3.1 행

$$\begin{array}{c}
A = \begin{bmatrix}
1 & -2 & 0 & 0 \\
-2 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 2 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 2
\end{bmatrix}$$

는 대칭행렬이다. 따라서 대각화 가능한 행렬이다

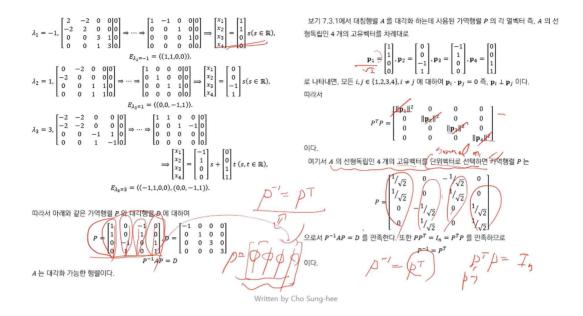
먼저 A 의 특성방정식이

$$|A - \lambda I_4| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 - \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 - \lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 - \lambda & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 & 1 \\ -2 & 1 - \lambda & 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \{(1 - \lambda)^2 - 4\}\{(2 - \lambda)^2 - 1\} = \{(1 - \lambda)(1 - \lambda)(3 - \lambda)^2\} = 0$$

이므로 A 는 서로 다른 3 개의 고유값  $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 3$  을 가진다.

dim (Ex)=/ dim(Ex=)=/ cline(Ex=)=/ 2

Written by Cho Sung-hee



정리 7.3.1에 의하여 대칭행렬 A는 대각화 가능한 행렬이고, 보기 7.3.1에서 A를 대각화하는데 사용되는 가역행렬 P를  $P^{-1}=P^{7}$ 를 만족하는 행렬로 선택할 수 있었다.

정 역 7.3.1 행렬  $A \in Mat_{n\times n}(\mathbb{R})$ 가 가역행렬이고  $A^{-1} = A^T$  일 때,  $A = A^T$  이 대,  $A = A^T$  이 대