

제1장 행렬 연습문제

1.1절 행렬의 정의와 연산

#1 아래와 같이 주어진 행렬

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}, D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

에 대하여 다음의 행렬을 계산하여라. 만약 계산이 가능하지 않다면 그 이유를 설명하여라.

- (1) $5A$
- (2) $2B - C$
- (3) $-3(D + 2E)$
- (4) $2(A^T) + C$
- (5) $(D - E)^T, D^T - E^T$
- (6) $B^T + (5C)^T$
- (7) AB
- (8) BA
- (9) $(3E)D, 3(ED)$
- (10) $(AB)C, A(BC)$

#2 #1에서 주어진 행렬 D, E 에 대하여 다음을 만족하는 행렬 X 를 구하여라.

- (1) $3X + 2D = E$
- (2) $3(X - 2D) = E$

#3 아래와 같이 주어진 행렬(열벡터)

$$X = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, Z = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}, W = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

에 대하여 다음의 물음에 답하여라.

- (1) 임의의 실수 a, b, c, d 에 대하여 $aX + bY + cZ + dW = A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix}$ 를 만족하는 3×4 행렬 A 를

구하여라.

(2) 다음을 만족하는 실수 a, b 가 존재한다면 구하여라.

(a) $aX + bY = Z$

(b) $aX + bY = W$

#4 다음의 등식을 만족시키는 정사각행렬 E 를 구하여라.

$$(1) \quad E \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{bmatrix}$$

$$(2) \quad E \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ ka_{31} & ka_{32} & ka_{33} & ka_{34} \end{bmatrix} \quad (k \in \mathbb{R})$$

$$(3) \quad E \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ ka_{11} + a_{31} & ka_{12} + a_{32} & ka_{13} + a_{33} & ka_{14} + a_{34} \end{bmatrix} \quad (k \in \mathbb{R})$$

#5 다음을 만족하는 서로 다른 2×2 행렬 A, B 또는 A, B, C 의 예를 들어라. 단 각 예에서 항등행렬 I_2 와 영행렬 O 는 제외한다.

(1) $AB = BA$

(2) $AB \neq BA$

(3) $AB = O$ (O 는 영행렬)

(4) $AB = AC$

#6 정리 1.1.3의 (1)을 증명하여라. (Hint: 행렬 B 와 C 를 가역행렬 A 의 역행렬이라고 하고 $B = C$ 임을 보인다.)

#7 정리 1.1.3의 (5)를 증명하여라. (Hint: 역행렬의 정의를 만족함을 보인다.)