V / F

$v_1, v_2, \dots, v_n$

선형대수학 비대면 강의

6주 1차시 수업

조 성희

4.5 기저(basis)와 차원(dimension)

정 의 4.5.1 V 를 체 F 위의 벡터공간이라고 하자. V 의 부분집합 $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$ 가 다음의 두 조건을 만족할 때, $\mathcal{B}$ 를 V 의 **기저**(basis)라고 한다.

(1) $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}$ 이 V 를 생성한다. 즉 $\langle \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n} \rangle = V$.

(2) $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}$ 는 선형독립이다.

정 리 4.5.1 실수를 성분으로 가지는 $n \times n$ 행렬

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

에 대하여 다음의 세 명제는 동치이다.

(1) $\det A \neq 0$.

(2) A 의 모든 열 벡터들의 집합

$$\mathcal{B}_c = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{bmatrix} \right\}$$

은 벡터공간 $\mathbb{R}^n$ 의 기저이다.

(3) A 의 모든 행 벡터들의 집합

$$\mathcal{B}_r = \{(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \dots, (a_{n1}, a_{n2}, \dots, a_{nn})\}$$

은 벡터공간 $\mathbb{R}^n$ 의 기저이다.

【증명】 정리 4.3.2의 (2)와 정리 4.4.2의 (2)에 의하여 성립한다. □

보 기 4.5.1 n 차의 항등행렬 I_n 에 대하여

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

이다. n 개의 행벡터를 각각 다음과 같이 나타내면

$$\boldsymbol{e_1} = (1,0, \dots, 0), \boldsymbol{e_2} = (0,1, \dots, 0), \boldsymbol{e_n} = (0,0, \dots, 1),$$

집합 $\mathcal{B}_s = \{\boldsymbol{e_1}, \boldsymbol{e_2}, \dots, \boldsymbol{e_n}\}$ 은 벡터공간 $\mathbb{R}^n$ 의 기저이다. 이 기저 $\mathcal{B}_s$ 를 $\mathbb{R}^n$ 의 표준기저(standard basis)라고 한다.

보 기 4.5.2 $\mathcal{B}_s = \{\boldsymbol{e_1} = (1,0,0), \boldsymbol{e_2} = (0,1,0), \boldsymbol{e_3} = (0,0,1)\}$ 은 벡터공간 $\mathbb{R}^3$ 의 표준 기저이다. 또한,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \neq 0$$

이므로, 모든 행 벡터들의 집합

$$\mathcal{B}_r = \{(1,2,0), (1,5,-1), (-2,-1,1)\}$$

과 모든 열 벡터들의 집합

$$\mathcal{B}_c = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

도 $\mathbb{R}^3$ 의 기저이다. 이외에도 $\mathbb{R}^3$ 의 기저는 무수히 많이 존재한다.

Written by CHO SUNGHEE

보 기 4.5.3 행렬 $E_{ij} \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ 를 (i,j) 성분만 1이고 나머지 모든 성분은 0인 행렬이라고 할 때, $m \times n$ 개의 행렬들의 집합

$$\mathcal{B} = \{E_{ij} | i = 1,2,\ldots,m, j = 1,2,\ldots,n\}$$

는 벡터공간 $Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$ 의 기저이다.

또한 행렬 $E_{11}, E_{22}, E_{33} \in Mat_{3\times3}(\mathbb{R})$ 에 대하여, 집합

$$\mathcal{B} = \{E_{11}, E_{22}, E_{33}\}$$

는 벡터공간 $DiagMat_{3\times3}(\mathbb{R})$ 의 기저이다.

보 기 4.5.3 집합 $\mathcal{B} = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ 은 벡터공간 $P_n[x]$ 의 기저이다.

위의 몇 가지 보기들을 통하여 앞에서 공부한 벡터공간들에 대한 가장 자명한 기저를 알아보았다.물론, 각 벡터공간에는 보기에서 언급한 기저 이외에도 수없이 많은 기저들이 존재한다. 벡터공간에서 유한 개의 벡터로 이루어진 부분집합이 주어졌을 때, 이러한 집합이 벡터공간의 기저가 되는지를 판단할 수 있어야 할 것이다.

벡터공간 $\mathbb{R}[x]$ 와 $\mathrm{Seq}(\mathbb{R})$ 에는 정의 4.5.1에서 정의한 유한 개의 벡터를 원소로 가지는 기저가 존재하지 않는다. 이 경우에 대해서는 다음에 다시 논하기로 하겠다.

정 리 4.5.3 V 가 체 F 위의 벡터공간 일 때, V 의 부분집합 $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ 에 대하여 다음은 동치이다.

(1) $\mathcal{B}$ 는 V 의 기저이다.

(2) 각 벡터 $\boldsymbol{v} \in V$ 는 $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ 의 단 한가지 방법의 선형결합으로 나타내어진다.

【증명】 (1)⟹(2) $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ 를 V 의 기저라고 하면, $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ 이 V 를 생성하므로 각 벡터 $\boldsymbol{v} \in V$는 $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$의 선형결합으로 나타내어진다. 벡터 $\boldsymbol{v} \in V$ 가 다음과 같이 두 가지 선형결합 표현으로 나타내어진다고 가정하자.

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v_1} + c_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + c_n\boldsymbol{v_n} = d_1\boldsymbol{v_1} + d_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + d_n\boldsymbol{v_n}$$

그러면 다음의 등식이 성립한다.

$$(c_1\boldsymbol{v_1} + c_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + c_n\boldsymbol{v_n}) - (d_1\boldsymbol{v_1} + d_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + d_n\boldsymbol{v_n})$$
$$= (c_1 - d_1)\boldsymbol{v_1} + (c_2 - d_2)\boldsymbol{v_2} + \cdots + (c_n - d_n)\boldsymbol{v_n} = \boldsymbol{0} - \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0}$$

여기서, $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$이 선형독립이므로 모든 $i = 1,2,\ldots,n$ 에 대하여 $c_i = d_i$ 이다. 따라서 선형결합 표현은 한 가지이다.

(2)⟹(1) 각 벡터 $\boldsymbol{v} \in V$가 $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ 의 단 한가지 방법의 선형결합으로 나타내어진다고 가정하면, $V = \langle \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n} \rangle$ 인 것은 자명하다.

다음으로

$$0\boldsymbol{v_1} + 0\boldsymbol{v_2} + \cdots + 0\boldsymbol{v_n} = \boldsymbol{0}$$

이고 영벡터의 선형결합 표현은 단 한가지이므로 $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ 은 선형독립이다. 그러므로

$$\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$$

는 V 의 기저이다. □

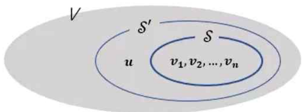
체 F위의 벡터공간 V의 벡터 $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$이 선형독립(또는 선형종속)일 때, 이들을 모두 모아 놓은 집합 $\{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$을 선형독립(또는 선형종속)인 집합이라고 한다.

정 리 4.5.3 체 F위의 벡터공간 V의 부분집합 $\mathcal{S} = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ 이 선형독립인 집합이라고 할 때, 다음의 두 조건은 동치이다.

(1) $\mathcal{S}$는 V의 기저이다.

(2) V의 부분집합 $\mathcal{S}'$이 $\mathcal{S} \subsetneq \mathcal{S}'$이면 $\mathcal{S}'$은 선형종속인 집합이다.

【증명】 (1)⟹(2) $\mathcal{S}$를 V의 기저라고 하자. V의 부분집합 $\mathcal{S}'$이 $\mathcal{S} \subsetneq \mathcal{S}'$ 이면, $\boldsymbol{u} \in \mathcal{S}'$이고 $\boldsymbol{u} \notin \mathcal{S}$인 벡터 $\boldsymbol{u} \in V$가 적어도 하나 존재한다. $\mathcal{S}$는 V의 기저이므로 $\boldsymbol{u}$ 는 $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ 의 선형결합이다. 정리 4.4.1에 의하여 $\mathcal{S}'$은 선형종속인 집합이다.



(2)⟹ (1) $\langle \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n} \rangle = V$ 를 보이도록 하자. 모든 $i = 1,2,\ldots,n$ 에 대하여 $\boldsymbol{v_i} \in \langle \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n} \rangle$ 임은 자명하다. 임의의 벡터 $\boldsymbol{u} \in V, \boldsymbol{u} \notin \mathcal{S}$ 에 대하여 $\mathcal{S}' = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}, \boldsymbol{u}\}$ 라고 하다면 $\mathcal{S} \subsetneq \mathcal{S}'$이므로 (2)의 가정에 의하여 $\mathcal{S}'$ 은 선형종속인 집합이다. 따라서 아래의 등식을 만족하는

$$c_1\boldsymbol{v_1} + c_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + c_n\boldsymbol{v_n} + d\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0} - (*)$$

동시에 0 이 아닌 스칼라 $c_1, c_2, \ldots, c_n, d \in F$ 가 존재한다.

먼저, $d \neq 0$ 을 보이도록 하자. 만약 $d = 0$ 이라고 가정하면 $d\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ 이므로 등식 (*)는

$$c_1\boldsymbol{v_1} + c_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + c_n\boldsymbol{v_n} = \boldsymbol{0}$$

이고, 조건에서 $\mathcal{S}$ 가 선형독립인 집합이라고 했으므로 $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ 이다. 이는 동시에 0 이 아닌 스칼라 $c_1, c_2, \ldots, c_n, d \in F$ 가 존재한다는 사실에 모순이다. 따라서 $d \neq 0$ 임을 알 수 있다.

$d \neq 0$ 이므로 $d^{-1} \in F$ 가 존재하고 등식 (*)로 부터,

$$\boldsymbol{u} = (-c_1d^{-1})\boldsymbol{v_1} + (-c_2d^{-1})\boldsymbol{v_2} + \cdots + (-c_nd^{-1})\boldsymbol{v_n} .$$

즉 $\boldsymbol{u} \in \langle \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n} \rangle$ 이다. □

정 리 4.5.4 $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}\}$ 이 체 F 위의 벡터공간 V 의 기저라고 하자. $\mathcal{S} = \{\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \ldots, \boldsymbol{w_m}\}$ 이 V 의 부분집합이고 $m > n$ 이면, $\mathcal{S}$ 는 선형종속인 집합이다.

【증명】 등식

$$c_1\boldsymbol{w_1} + c_2\boldsymbol{w_2} + \cdots + c_m\boldsymbol{w_m} = \boldsymbol{0} - (*)$$

을 만족하는 $c_1, c_2, \ldots, c_m \in F$ 에 대하여 알아보자.

$\mathcal{B}$ 가 V 의 기저이므로 각 벡터 $\boldsymbol{w_i} \in \mathcal{S}$ 는 $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ 의 선형결합으로 나타내어진다. 즉 적당한 $a_{ij} \in F$ 가 존재하여

$$\boldsymbol{w_1} = a_{11}\boldsymbol{v_1} + a_{21}\boldsymbol{v_2} + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{v_n}$$
$$\boldsymbol{w_2} = a_{12}\boldsymbol{v_1} + a_{22}\boldsymbol{v_2} + \cdots + a_{n2}\boldsymbol{v_n}$$
$$\vdots$$
$$\boldsymbol{w_m} = a_{1m}\boldsymbol{v_1} + a_{2m}\boldsymbol{v_2} + \cdots + a_{nm}\boldsymbol{v_n}$$

이다. 이러한 선형결합들을 등식 (*)에 대입하면

$$c_1(a_{11}\boldsymbol{v_1} + a_{21}\boldsymbol{v_2} + \cdots + a_{n1}\boldsymbol{v_n}) + c_2(a_{12}\boldsymbol{v_1} + a_{22}\boldsymbol{v_2} + \cdots + a_{n2}\boldsymbol{v_n}) +$$
$$\cdots + c_m(a_{1m}\boldsymbol{v_1} + a_{2m}\boldsymbol{v_2} + \cdots + a_{nm}\boldsymbol{v_n}) = \boldsymbol{0}$$

이고, 이 식을 다시 정리하면

$$(a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + \cdots + a_{1m}c_m)\boldsymbol{v_1} + (a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + \cdots + a_{2m}c_m)\boldsymbol{v_2} +$$
$$\cdots + (a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + \cdots + a_{nm}c_m)\boldsymbol{v_n} = \boldsymbol{0}$$

이다. 여기서 $\mathcal{B}$ 가 기저이므로 $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \ldots, \boldsymbol{v_n}$ 은 선형독립이다. 따라서 다음의 제차 연립선형방정식을 얻는다.

$$\begin{cases} a_{11}c_1 & +a_{12}c_2 & +\cdots & +a_{1m}c_m & = 0 \\ a_{21}c_1 & +a_{22}c_2 & +\cdots & +a_{2m}c_m & = 0 \\ & & \vdots & & \\ a_{n1}c_1 & +a_{n2}c_2 & +\cdots & +a_{nm}c_m & = 0 \end{cases}$$

n(방정식의 개수)< m(미지수의 개수)이므로 위의 제차 연립선형방정식의 해는 무수히 많이 존재한다. 즉 등식 (*)를 만족하는 $c_1, c_2, \ldots, c_m$ 가 무수히 많이 존재하므로 $\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \ldots, \boldsymbol{w_m}$ 은 선형종속이다. □

정 리 4.5.5 두 집합 $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$ 와 $\mathcal{R} = \{\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2}, \dots, \boldsymbol{u_m}\}$ 을 벡터공간 V 의 기저라고 하면, $n = m$ 이다. 즉, 벡터공간의 모든 기저들은 같은 수의 벡터들로 이루어져 있다.

【증명】 우선 $\mathcal{B}$ 는 기저이므로 만약 $n < m$ 이라고 하면 정리 4.5.4에 의하여 $\mathcal{R}$ 은 선형종속인 집합이다. 이는 $\mathcal{R}$ 이 V 의 기저라는 사실에 모순이다. 따라서 $n \geq m$ 이 성립한다.

반대로 생각하면, $\mathcal{R}$ 도 기저이므로 만약 $n > m$ 이라고 하면 정리 4.5.4에 의하여 $\mathcal{B}$ 는 선형종속인 집합이다. 이는 $\mathcal{B}$ 가 기저라는 사실에 모순이다. 따라서 $n \leq m$ 이 성립한다.

위의 두 사실에 의하여 $n = m$ 이다. □

정 의 4.5.2 체 F 위의 벡터공간 V가 유한 개의 벡터로 이루어진 기저 $\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$ 을 가질 때, V 를 체 F 위의 **n 차원 벡터공간**(n −dimensional vector space over F)라고 하고, 이 때의 n 을 V 의 **차원**(dimension)이라고 하며 $\dim_F(V)$ 또는 간단히 $\dim(V)$ 로 나타낸다. 이와 같이 유한 기저를 가지는 벡터공간을 **유한차원 벡터공간**(finite dimensional vector space)라고 한다.

또한, 자명한 벡터공간 $V = \{\mathbf{0}\}$ 에 대해서는 $\dim(V) = 0$ 으로 정의하고 V 를 유한차원 벡터공간으로 생각하기로 한다.

한편, 유한차원 벡터공간이 아닌 벡터공간을 **무한차원 벡터공간**(infinite dimensional vector space)이라고 한다.

보 기 4.5.4 $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = n$, $\dim_{\mathbb{R}}\big(Mat_{m\times n}(\mathbb{R})\big) = m \times n$, $\dim_{\mathbb{R}}(P_n[x]) = n + 1$ 이다.

실수체 위의 벡터공간 $\mathbb{R}^n$, $Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$, $P_n[x]$은 모두 유한차원 벡터공간이다.

반면에 실수체 위의 벡터공간 $\mathbb{R}[x]$ 와 $\mathrm{Seq}[x]$ 는 무한차원 벡터공간이다.