7장 연습문제

#1. 다음의 물음에 답하고 그 이유를 설명하여라.

(1) $A^2=A$를 만족하는 정사각행렬 A를 멱등행렬이라고 한다. 멱등행렬에서 나타날 수 있는 고유값을 모두 적어라.

$A^2=A$

$\lambda x = Ax = A^2x = A(Ax) = A(\lambda x) = \lambda(Ax) = \lambda(\lambda x) = \lambda^2 x$

$\therefore \lambda x = \lambda^2 x$

$0 = x(\lambda^2-\lambda)$

$0 = x(\lambda(\lambda-1))$

$\therefore \lambda = 0$ or $\lambda = 1$

$\therefore$ 멱등행렬에서 나타낼 수 있는 고유값은 0과 1이다.

(2) $n\times n$ 가역행렬 A가 서로 다른 고유값 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \cdots, \lambda_k (k\le n)$을 가지고 각 고유값에 해당하는 고유벡터를 차례대로 $x_1, x_2, \cdots, x_k$라고 하자. 이때, A^{-1}의 모든 고유값과 각 고유값에 해당하는 고유벡터를 구하여라.

A^{-1}의 고유값을 λ'_i, 고유벡터를 x'_i라 하자 $(k\le n)$

$A^{-1}x'_i = \lambda'_i x'_i$ $\qquad\qquad$ $Ax_i = \lambda_i x_i$

$\Longleftrightarrow (A^{-1} - \lambda'_i I_n)x'_i = 0$ $\qquad$ ㄴ $\Longleftrightarrow (A-\lambda_i I_n)x_i = 0$

$A(A^{-1}-\lambda'_i I_n)x'_i = A\cdot 0$

$(I_n - \lambda'_i A)x'_i = 0$

ㄱ $(A - \frac{1}{\lambda'_i}I_n)x'_i = 0$

ㄱ과 ㄴ의 방정식의 모양이 일치한다.

$\therefore \lambda'_i = \frac{1}{\lambda_i}$

$x'_i = x_i$

$\therefore A^{-1}$의 고유값은 $\frac{1}{\lambda_1}, \frac{1}{\lambda_2}, \cdots, \frac{1}{\lambda_k} (k\le n)$이고 각 고유값에 해당하는 고유벡터는 차례대로 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 이다.

#2 다음 명제에 대하여 참(True)과 거짓(False)을 판단하여라. 만약 명제가 참이면 증명을, 거짓이면 반례를 제시하여라.

(1) 정사각행렬 A가 가역행렬이 아니면 $\lambda=0$은 A의 고유값이다. (참)

$\det(A-\lambda I_n)=0$ 의 해들을 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$이라고 하자.

$\det(A-\lambda I_n)=(\lambda_1-\lambda)\cdot(\lambda_2-\lambda)\cdot\cdots\cdot(\lambda_n-\lambda)$ 이 된다.

$\lambda=0$ 을 대입하면

$\det(A)=(\lambda_1)\cdot(\lambda_2)\cdot\cdots\cdot(\lambda_n)$ 이 된다.

A가 가역행렬이 아니라면 $\det(A)=0$ 이 되어야 한다.

따라서 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 중 적어도 하나는 0이 되어야 한다.

$\therefore$ $\lambda=0$은 A의 고유값이다.

$\therefore$ 위 명제는 참이다.

(2) 위 명제의 역이 성립한다. (참)

A가 가역행렬이면 $\det(A)\neq 0$ 이 되어야 한다.

$\therefore$ $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 은 0이 되면 안 된다.

$\therefore$ $\lambda=0$ 이 A의 고유값이면

$\therefore$ $\det(A)=0$ 이다. $\therefore$ A는 가역행렬이 아니다.

$\therefore$ 위 명제는 참이다.

(3) $n\times n$ 행렬 A가 서로 다른 n개의 고유값을 가지면 A는 대각화 가능한 행렬이다. (참)

정리 7.2.3 에 의해

A가 서로 다른 n개의 고유값을 가지면 A는 n개의 선형독립인 고유벡터를 가진다.

$\therefore$ 정리 7.2.2 에 의해

A가 선형독립인 n개의 고유벡터를 가지면 대각화 가능 행렬이다.

$\therefore$ A가 서로 다른 n개의 고유값을 가지면 A는 대각화 가능한 행렬이다.

$\therefore$ 위 명제는 참이다.

(4) 위 명제의 역이 성립한다. (거짓)

$$A=\begin{bmatrix}1&3&0\\3&1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}\in Mat_{3\times3}(\mathbb{R})$$

$$(-2-\lambda)^2(4-\lambda)=0$$

$\lambda_1=-2$ $\lambda_2=4$

$\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}s+\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}t$ $\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}s$

A는 선형독립인 고유벡터를 3개 가지므로 대각화 가능한 행렬이다.

$$\begin{bmatrix}-1&0&1\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1&3&0\\3&1&0\\0&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1&0&1\\1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&4\end{bmatrix}$$

A가 대각화가능한행렬이고 A가 서로 다른 n개의 고유값을 가지지 않는다.

∴ 위 명제는 거짓이다.

(5) 대각화 가능한 행렬 A가 가역행렬이면 A^{-1}도 대각화 가능한 행렬이다. (참)

$$P^{-1}AP=D$$

$$(P^{-1}AP)^{-1}=P^{-1}A^{-1}P=D^{-1}$$

$$P^{-1}A^{-1}P=D^{-1}$$

정리 1.2.1 에 의해 대각행렬의 역행렬도 대각행렬이다.

∴ A^{-1}도 대각화 가능한 행렬이다.

∴ 위 명제는 참이다.

(6) A가 가역 행렬이면 A는 대각화 가능한 행렬이다. (거짓)

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0\\1&2&0\\-3&5&2\end{bmatrix}$$

($\det(A)=1\cdot2\cdot2=4$ ∴ A는 가역행렬)

$$(1-\lambda)(2-\lambda)^2=0$$

$\lambda_1=1$ $\lambda_2=2$

$\begin{bmatrix}1\\-1\\8\end{bmatrix}s$ $\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}s$

고유값 $\lambda_2=2$의 특성방정식에서의 근의 중복도는 2이지만 $\dim(E_{\lambda=2})=1$ 이다. 따라서 A는 많아야 2개의 선형 독립인 고유벡터를 가지므로 대각화 가능한 행렬이 아니다. ∴ 위 명제는 거짓이다.

(7) 위 명제의 역이 성립한다. (거짓)

$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

$(1-\lambda)(0-\lambda) = 0$

$\lambda_1 = 1$ $\qquad$ $\lambda_2 = 0$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\qquad$ $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\det A = 1 \cdot 0 = 0$

$\therefore$ A는 가역행렬이 아니다.

A가 선형독립인 2개의 고유벡터 $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$을 가지므로 A는 대각화 가능한 행렬이다.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ A가 대각화 가능한 행렬이지만 A가 가역행렬이 아니다.

$\therefore$ 위 명제는 거짓이다.

(8) A가 대각화 가능한 행렬이면 A^T도 대각화 가능한 행렬이다. (참)

$$P^{-1}AP = D$$

$$(P^{-1}AP)^T = D^T$$

$$P^T A^T (P^{-1})^T = P^T A^T (P^T)^{-1} = D^T$$ (D가 대각행렬이므로 $D = D^T$)

$$P^T A^T (P^T)^{-1} = D$$

$\therefore$ A^T는 대각화 가능한 행렬이다.

$\therefore$ 위 명제는 참이다.

(9) 수직 대각화 가능한 행렬 A가 가역행렬이면 A^{-1}도 수직 대각화 가능한 행렬이다. (참)

$P^{-1}AP = D$ (P는 수직행렬)

$P^{T}AP = D$ ($\because P^{-1} = P^{T}$)

$(P^{T}AP)^{-1} = D^{-1}$

$P^{-1}A^{-1}(P^{T})^{-1} = D^{-1}$

$P^{T}A^{-1}P = D$ ($\because D = D^{-1}$)

$P^{-1}A^{-1}P = D$

$\therefore$ A^{-1}도 수직 대각화 가능한 행렬이다.

$\therefore$ 위 명제는 참이다.

(10) $n \times n$ 행렬 A의 특성방정식에서 상수항은 $|A|$이다. (참)

$\det(A - \lambda I_n) = 0$ 의 해들을 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$이라고 하자

$\det(A - \lambda I_n) = (\lambda_1 - \lambda)\cdot(\lambda_2 - \lambda)\cdot \cdots \cdot(\lambda_n - \lambda)$ 이 된다.

$\lambda = 0$ 을 대입하면 특성방정식의 상수항을 얻을 수 있다.

$\det(A - 0\cdot I_n) = \det(A) = |A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n$ 이다.

$\therefore$ A의 특성방정식에서의 상수항은 $|A|$이다.

$\therefore$ 위 명제는 참이다.

#3. $n \times n$ 행렬 A가 서로 다른 n개의 고유값을 가진다고 할 때, 다음을 증명하여라.

(1) A의 모든 고유값들의 곱은 $\det(A)$이다.

$\det(A - \lambda I_n) = 0$ 의 해들을 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_n$이라하자.

$\det(A - \lambda I_n) = (\lambda_1 - \lambda)\cdot(\lambda_2 - \lambda)\cdots(\lambda_n - \lambda)$ 이 된다.

$\lambda = 0$ 을 대입해보자.

$\det(A) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n$ 이 된다.

$\therefore$ A의 모든 고유값들의 곱은 $\det(A)$이다.

(2) A의 모든 고유값들의 합은 A의 모든 대각성분들의 합이다.

A의 대각성분의 합을 $tr(A)$ 와같이 나타내자. ($tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$)

$P^{-1}AP = D$

$tr(P^{-1}(AP)) = tr(D)$

$tr(P^{-1}(PA)) = tr(D)$

$tr(A) = tr(D)$

$$\left(\because tr(AB) = \sum_{i=1}^{n} x_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} b_{ji}a_{ij} = \sum_{j=1}^{n} y_{jj} = tr(BA)\right)$$

$\therefore$ A의 모든 고유값들의 합은 A의 모든 대각성분들의 합이다.

barunson

Date. / /

#4 행렬 $A=\begin{bmatrix}4&2&2\\2&4&2\\2&2&4\end{bmatrix}$가 대각화 가능한 행렬인지를 판단하여라.
대각화 가능한 행렬이라면 $P^{-1}AP=D$를 만족하는 가역행렬 P와 대각행렬 D를 구하여라, 만약 위의 등식을 만족하는 수직행렬 P가 존재한다면 수직행렬 P도 구하라.

A의 특성 방정식은 다음과 같다.

$$\begin{vmatrix}\boxed{4-\lambda}&2&2\\2&4-\lambda&2\\2&2&4-\lambda\end{vmatrix}=(4-\lambda)\cdot(-1)^{1+1}\cdot\{(4-\lambda)^2-4\}+2\cdot(-1)^{1+2}\cdot\{2(4-\lambda)-4\}$$
$$+2\cdot(-1)^{1+3}\cdot\{4-2(4-\lambda)\}$$
$$=(4-\lambda)^3-12(4-\lambda)+16$$
$$=\{(4-\lambda)-2\}^2\cdot\{(4-\lambda)+4\}$$

$\therefore (4-\lambda)=2$ or -4

$\therefore$ A는 서로 다른 두개의 고유값 $\lambda_1=2, \lambda_2=8$을 가진다.

고유값 $\lambda_1=2$의 근 중복도는 2이다.

고유값 $\lambda_1=2$에 해당하는 A의 고유공간은 제차 연립선형방정식 $(A-2I_n)x=0$의 해공간이다.

$$\left[\begin{array}{ccc|c}2&2&2&0\\2&2&2&0\\2&2&2&0\end{array}\right]\xRightarrow[\substack{E_{21}(-1)\\D_1(\frac{1}{2})}]{E_{31}(-1)}\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

$\therefore$ 고유공간은

$$E_{\lambda_1=2}=\left\{\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix}s+\begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}t \,\middle|\, s,t\in\mathbb{R}\right\}$$

다음으로 고유값 $\lambda_2=8$에 해당하는 A의 고유공간은 제차연립선형방정식 $(A-8I_n)x=0$의 해공간이다.

$$\left[\begin{array}{ccc|c}-4&2&2&0\\2&-4&2&0\\2&2&-4&0\end{array}\right]\xRightarrow[\substack{E_{31}(-1)\\E_{21}(-1)\\D_1(\frac{1}{2})}]{D_1(-\frac{1}{4})}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&0\\0&-3&3&0\\0&3&-3&0\end{array}\right]\xRightarrow[\substack{D_2(-\frac{1}{3})\\E_{12}(\frac{1}{2})}]{E_{32}(1)}\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&1&-1&0\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

$\therefore$ 고유공간은

$$E_{\lambda_2=8}=\left\{\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}s \,\middle|\, s\in\mathbb{R}\right\}$$

A는 선형독립인 고유벡터를 3개 가지므로 대각화가능한 행렬이다.

$$\underset{P^{-1}}{\begin{bmatrix}-1&-1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}^{-1}}\underset{A}{\begin{bmatrix}4&2&2\\2&4&2\\2&2&4\end{bmatrix}}\underset{P}{\begin{bmatrix}-1&-1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix}}=\underset{D}{\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&8\end{bmatrix}}$$

$$\therefore P=\begin{bmatrix}-1&-1&1\\1&0&1\\0&1&1\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&8\end{bmatrix}$$

Date. / /

$V_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $V_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $V_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$V_1 \cdot V_2 = 1 \neq 0$, $V_2 \perp V_3$, $V_1 \perp V_3$

$\therefore$ $\beta = \{V_1, V_2\}$는 고유공간 $E_{\lambda_1=2}$의 수직기저가 아니다.

Gram-Schmidt의 수직화 과정을 이용하여 $E_{\lambda_1=2}$의 수직기저 $\beta_\perp = \{W_1, W_2\}$를 구하면

$$W_1 = V_1 = (-1, 1, 0)$$

$$W_2 = V_2 - \left(\frac{V_2 \cdot W_1}{\|W_1\|^2}\right) W_1 = (-1, 0, 1) - \left(\frac{1}{2}\right)(-1, 1, 0)$$

$$= \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, 1\right)$$

이다.

A의 서로 수직인 세 개의 고유벡터 W_1, W_2, V_3에서

$P_1 = \frac{W_1}{\|W_1\|} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{bmatrix}$, $P_2 = \frac{W_2}{\|W_2\|} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{bmatrix}$, $P_3 = \frac{V_3}{\|V_3\|} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$

로 놓으면 세 벡터 P_1, P_2, P_3는 A의 고유벡터로 서로 수직이고

$\|P_1\| = \|P_2\| = \|P_3\| = 1$ 인 단위벡터이다.

$\therefore$ P_1, P_2, P_3를 열로 가지는 행렬을 P라고 하면,

$$P = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

행렬 P는 $P^T P = I_3$, 즉 $P^{-1} = P^T$인 수직행렬이다.

$$\therefore P^{-1} A P = P^T A P = D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$