2주 1차시 과제물 모범답안

2.2절 Gauss-Jordan 소거법

#1 생략.

#2 다음의 행렬이 기약 행 사다리꼴 행렬인지를 판단하여라. 만약 기약 행 사다리꼴 행렬이 아니라면 그 이유를 말하고 적절한 기본 행 연을 실시하여 기약 행 사다리꼴 행렬로 만들어라.

(1) 기약 행 사다리꼴 행렬이 아니다.

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{bmatrix}\xrightarrow{D_2(1/2)}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1/2\\0&0&2\end{bmatrix}\xrightarrow{D_3(1/2)}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1/2\\0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{E_{23}(-1/2)}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

(2) 기약 행 사다리꼴 행렬이다.

(3) 기약 행 사다리꼴 행렬이 아니다

$$\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\overset{C_{13}}{\Rightarrow}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\overset{C_{23}}{\Rightarrow}\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

(4) 기약 행 사다리꼴 행렬이 아니다

$$\begin{bmatrix}1&-7&5&5\\0&1&3&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{E_{12}(7)}\begin{bmatrix}1&0&26&19\\0&1&3&2\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

(5) 기약 행 사다리꼴 행렬이 아니다

$$\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&0&1\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\overset{C_{23}}{\Rightarrow}\begin{bmatrix}1&0&-2\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}\xrightarrow{E_{13}(2)}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{bmatrix}$$

(6) 기약 행 사다리꼴 행렬이 아니다

$$\begin{bmatrix}0&0&1&0&0\\0&1&-1&0&3\\0&0&1&-2&5\end{bmatrix}\overset{C_{12}}{\Rightarrow}\begin{bmatrix}0&1&-1&0&3\\0&0&1&0&0\\0&0&1&-2&5\end{bmatrix}\xrightarrow{E_{12}(1)}\begin{bmatrix}0&1&0&0&3\\0&0&1&0&0\\0&0&1&-2&5\end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{32}(-1)}\begin{bmatrix}0&1&0&0&3\\0&0&1&0&0\\0&0&0&-2&5\end{bmatrix}\xrightarrow{D_3(-1/2)}\begin{bmatrix}0&1&0&0&3\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&-5/2\end{bmatrix}$$

(7) 기약 행 사다리꼴 행렬이 아니다.

$$\begin{bmatrix}1&0&0&-7\\0&1&-3&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\xrightarrow{E_{13}(7)}\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&-3&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}$$

(8) 기약 행 사다리꼴 행렬이다.

#3 다음의 기약 행 사다리꼴 행렬이 나타내는 연립선형방정식의 해를 벡터를 이용하여 나타내어라. (*행렬의 마지막 열앞에 "|" 생략.)

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$; 자유변수인 $x_2 = s$ 로 치환하면, $x_1 = -2s + 1, x_2 = s, x_3 = 0, x_4 = 2$ 이다. 따라서 해의 벡터표현은

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, (s \in \mathbb{R})$$

이다.

(2) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $(s, t \in \mathbb{R})$.

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $(s, t \in \mathbb{R})$.

(4) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$; $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$ $(s \in \mathbb{R})$.

#4 Gauss-Jordan 소거법을 이용하여 연립선형방정식의 해를 구하여라. 단, 벡터를 이용하여 해를 나타내어라. (*행렬의 마지막 열앞에 "|" 생략.)

(1) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. 따라서 해는

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -\dfrac{1}{7} \\ \dfrac{1}{7} \\ 0 \end{bmatrix}, (s \in \mathbb{R}).$$

(2) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. 따라서 해는

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, (s, t \in \mathbb{R}).$$

(3) $\begin{bmatrix}0 & -2 & 3 & 1\\ 3 & 6 & -3 & -2\\ 6 & 6 & 3 & 5\end{bmatrix} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$. 3행에 의해 주어진 연립선형방정식은 해를 가지지 않는다.

(4) $\begin{bmatrix}2 & -3 & -2\\ 2 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 1\end{bmatrix} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$. 3행에 의해 주어진 연립선형방정식은 해를 가지지 않는다.

(5) $\begin{bmatrix}1 & -2 & 1 & -4 & 1\\ 1 & 3 & 7 & 2 & 2\\ 1 & -12 & -11 & -16 & 5\end{bmatrix} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & \frac{17}{5} & -\frac{8}{5} & 0\\ 0 & 1 & \frac{6}{5} & \frac{6}{5} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$. 3행에 의해 주어진 연립선형방정식은 해를 가지지 않는다.

(6) $\begin{bmatrix}0 & 1 & 3 & -2 & 0\\ 2 & 1 & -4 & 3 & 0\\ 2 & 3 & 2 & -1 & 0\\ -4 & -3 & 5 & -4 & 0\end{bmatrix} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \begin{bmatrix}1 & 0 & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} & 0\\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$. 따라서 해는

$$\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}7\\ -6\\ 2\\ 0\end{bmatrix}s + \begin{bmatrix}-5\\ 4\\ 0\\ 2\end{bmatrix}t, (s, t \in \mathbb{R})$$

이다.

#5 다음 등식을 만족하는 행렬 X가 존재한다면 모두 구하여라. 만약 존재하지 않는다면 그 이유를 설명하여라.

(1) $\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & 3 & 0\\ 0 & 2 & -1\end{bmatrix}X = \begin{bmatrix}2 & -1 & 5 & 7 & 8\\ 4 & 0 & -3 & 0 & 1\\ 3 & 5 & -7 & 2 & 1\end{bmatrix}$

【 풀이 】 $\left[\begin{array}{ccc|ccccc}1 & -1 & 1 & 2 & -1 & 5 & 7 & 8\\ 2 & 3 & 0 & 4 & 0 & -3 & 0 & 1\\ 0 & 2 & -1 & 3 & 5 & -7 & 2 & 1\end{array}\right] \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccccc}1 & 0 & 0 & 11 & 12 & -3 & 27 & 26\\ 0 & 1 & 0 & -6 & -8 & 1 & -18 & 17\\ 0 & 0 & 1 & -15 & -21 & 9 & -38 & -35\end{array}\right]$ 이므로 위의 등식을 만족하는 3×5 행렬 X는

$$X = \begin{bmatrix}11 & 12 & -3 & 27 & 26\\ -6 & -8 & 1 & -18 & 17\\ -15 & -21 & 9 & -38 & -35\end{bmatrix}$$

로 유일하게 존재한다.

(2) $\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}X = \begin{bmatrix}2 & -1 & -3\\ 0 & 3 & 2\\ 2 & -2 & -1\end{bmatrix}$

【풀이】 $\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 1 & 2 & 2 & -1 & -3\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 3 & 2\\ 2 & 1 & 3 & 2 & -2 & -1\end{array}\right] \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\end{array}\right]$ 임을 주목하자.

만약 위의 등식을 만족하는 행렬 $X=[x_{ij}]_{3\times3}$가 존재한다면, X의 2열 벡터 $\begin{bmatrix}x_{12}\\x_{22}\\x_{32}\end{bmatrix}$는 연립선형방정식 $\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&-1\\1&0&1&3\\2&1&3&-2\end{array}\right]$의 해이다. 그러나 위에서 계산한 3×6 행렬에 대한 기약 행 사다리꼴 행렬로부터

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&2&-1\\1&0&1&3\\2&1&3&-2\end{array}\right]\Rightarrow\cdots\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&1&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]$$

이고, 따라서 해를 가지지 않는다. 즉, 등식 (2)를 만족하는 행렬 X의 2열이 정의되지 않는다. 그러므로 행렬 X는 존재하지 않는다.

(3) $\begin{bmatrix}2&-1\\-1&3\\1&-1\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}1&5\\7&0\\-1&2\end{bmatrix}$

【풀이】 $\left[\begin{array}{cc|cc}2&-1&1&5\\-1&3&7&0\\1&-1&-1&2\end{array}\right]\Rightarrow\cdots\Rightarrow\left[\begin{array}{cc|cc}1&0&2&3\\0&1&3&1\\0&0&0&0\end{array}\right]$이므로 등식 (3)을 만족하는 2×2 행렬 X는

$$X=\begin{bmatrix}2&3\\3&1\end{bmatrix}$$

으로 유일하게 존재한다.

(4) $\begin{bmatrix}2&-1&1&3\\-2&0&-1&0\\6&-1&3&3\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}1&2&0\\1&-1&0\\-1&4&1\end{bmatrix}$

【 풀이 】 $\left[\begin{array}{cccc|ccc}2&-1&1&3&1&2&0\\-2&0&-1&0&1&-1&0\\6&-1&3&3&-1&4&1\end{array}\right]\Rightarrow\cdots\Rightarrow\left[\begin{array}{cccc|ccc}1&0&\frac{1}{2}&0&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&0\\0&1&0&-3&-2&-1&0\\0&0&0&0&0&0&1\end{array}\right]$이므로 (2)의 풀이에서와 같은 이유로 등식 (4)를 만족하는 행렬의 3열 벡터가 정의되지 않는다. 따라서 행렬 X는 존재하지 않는다.

#6 상수 a,b,c에 대하여 다음 연립선형방정식의 해를 구하여라.

【풀이】 $\left[\begin{array}{ccc|c}1&1&1&a\\2&0&2&b\\0&3&3&c\end{array}\right]\Rightarrow\cdots\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&a-c/3\\0&1&0&a-b/2\\0&0&1&-a+b/2+c/3\end{array}\right]$이다. 따라서 해는

$$\begin{vmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{vmatrix}=\begin{bmatrix}a-c/3\\a-b/2\\-a+b/2+c/3\end{bmatrix}$$

이다.

#7 다음 연립선형방정식이 해를 가지도록 실수 k의 값을 구하여라. 그리고 그 때의 해를 구하여

라.

【풀이】 $$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & -6 & 2 & -2 & -9 \\ 2 & -4 & 3 & -3 & 4 \\ 5 & -10 & 7 & -7 & k \end{array}\right] \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & k-7 \end{array}\right]$$

여기서 $k = 7$ 이면

$$\Rightarrow \cdots \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

이고, 이 때의 해는

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} (s, t \in \mathbb{R})$$

이다.