정 리 4.6.5 F 를 체라고 하자. 행렬 $A \in Mat_{m\times n}(F)$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\dim(A\text{의 행공간}) = \dim(A\text{의 열공간})$$

【증명】 행렬 A 를 아래와 같이 나타내고

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A 의 행벡터를 차례대로 $\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{r_2}, \dots, \boldsymbol{r_m}$ 으로 나타내자. A 의 행공간의 차원을 s 라고 가정하고, A 의 행공간의 하나의 기저 $\mathcal{B}_r = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_s}\}$ 을 선택하자. 여기서

$$\boldsymbol{v_1} = (v_{11}, v_{12}, \dots, v_{1j}, \dots, v_{1n}),$$
$$\boldsymbol{v_2} = (v_{21}, v_{22}, \dots, v_{2j}, \dots, v_{2n}),$$
$$\vdots$$
$$\boldsymbol{v_s} = (v_{s1}, v_{s2}, \dots, v_{sj}, \dots, v_{sn})$$

이다.

$\mathcal{B}_r$ 을 A 의 행공간의 기저라고 했으므로 A의 m개의 행벡터 $\boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{r_2}, \dots, \boldsymbol{r_m}$ 은 $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_s}$의 선형결합으로 나타내어진다. 즉, 적당한 $c_{ij} \in F(i = 1,2,\dots,m, j = 1,2,\dots,s)$가 존재하여 다음과 같이 나타내어진다.

$$\boldsymbol{r_1} = c_{11}\boldsymbol{v_1} + c_{12}\boldsymbol{v_2} + \cdots + c_{1s}\boldsymbol{v_s},$$
$$\boldsymbol{r_2} = c_{21}\boldsymbol{v_1} + c_{22}\boldsymbol{v_2} + \cdots + c_{2s}\boldsymbol{v_s},$$
$$\vdots$$
$$\boldsymbol{r_m} = c_{m1}\boldsymbol{v_1} + c_{m2}\boldsymbol{v_2} + \cdots + c_{ms}\boldsymbol{v_s}$$

따라서, A의 j번 째 열벡터는 다음과 같이 나타내어진다.

$$\begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{11} \\ c_{21} \\ \vdots \\ c_{m1} \end{bmatrix} v_{ij} + \begin{bmatrix} c_{12} \\ c_{22} \\ \vdots \\ c_{m2} \end{bmatrix} v_{2j} + \cdots + \begin{bmatrix} c_{1s} \\ c_{2s} \\ \vdots \\ c_{ms} \end{bmatrix} v_{sj}$$

다시 말하면, A 의 모든 열벡터들이 s 개의 벡터들의 선형결합으로 나타내어진다. 따라서

$$\dim(A\text{의 열공간}) \le s = \dim(A\text{의 행공간})$$

이 성립한다.

이 사실을 이용하면,

$$\dim(A\text{의 행공간}) = \dim(A^T\text{의 열공간}) \le \dim(A^T\text{의 행공간}) = \dim(A\text{의 열공간})$$

이 성립함을 알 수 있다. 위의 두 부등식에 의하여 등식

$$\boxed{\dim(A\text{의 행공간}) = \dim(A\text{의 열공간})}$$

이 성립한다. □

정 의 4.6.2 F를 체라고 하자. 행렬 $A \in Mat_{m\times n}(F)$의 행공간 또는 열공간의 차원을 행렬 A의 **랭크**(rank)라고 부르고 $\operatorname{rank}(A)$ 로 나타낸다.

보 기 4.6.4 행렬

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

의 행공간과 열공간의 기저를 구하고 $\operatorname{rank}(A)$를 알아보자.

【풀이】 A의 행공간은 $\langle(1,2,3), (2,5,4), (1,1,5)\rangle$이다.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

이므로, 따름정리 4.6.4에 의하여

$$\mathcal{B}_r = \{(1,0,7), (0,1,-2)\}$$

는 A의 행공간의 기저이다. 또한,

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 1 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \Rightarrow \cdots \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

이므로

$$\mathcal{B}_c = \{(1,0,3), (0,1,-1)\}$$

은 A의 열공간의 기저이다. 위의 두 사실로부터

$$\dim(A\text{의 행공간}) = 2 = \dim(A\text{의 열공간})$$

이고, 따라서 $\operatorname{rank}(A) = 2$ 이다.

4장 벡터공간

5장 내적공간

(Inner Product Space)

Written by Cho Sung-hee

5.1 유클리드공간 $\mathbb{R}^n$ 에서의 내적 => 각, 거리

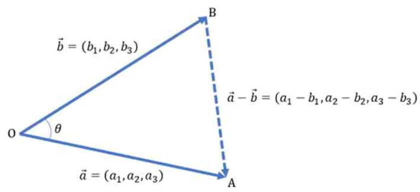
벡터공간 $\mathbb{R}^3$ 의 영벡터가 아닌 두 벡터 $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 와 $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 가 이루는 각의 크기 θ $(0 \le \theta \le \pi)$ 에 대해서 다음이 성립한다.

삼각형 OAB 에 제2코사인 법칙을 적용하면 아래의 등식이 성립한다.

$$|\overline{AB}|^2 = |\overline{OA}|^2 + |\overline{OB}|^2 - 2|\overline{OA}||\overline{OB}|\cos\theta$$

여기서

$$|\overline{AB}| = |\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2},$$
$$|\overline{OA}| = |\vec{a}| = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2},$$
$$|\overline{OB}| = |\vec{b}| = \sqrt{{b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2}$$



이므로

$$(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 + (a_3 - b_3)^2 = ({a_1}^2 + {a_2}^2 + {a_3}^2) + ({b_1}^2 + {b_2}^2 + {b_3}^2) - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

이고, 따라서

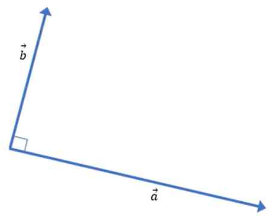
$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

이다. 이 식을 다시 쓰면 다음과 같다.

$$\cos\theta = \frac{a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

마지막 등식으로부터 다음의 동치조건이 성립함을 알 수 있다.

$$\vec{a} \perp \vec{b} \left(\theta = \frac{\pi}{2}\right) \iff a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0$$



정 의 5.1.1 (1) 벡터공간 $\mathbb{R}^n$ 의 두 벡터

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \dots, b_n)$$

에 대하여 다음과 같이 정의된 실수

$$a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

을 $\boldsymbol{a}$ 와 $\boldsymbol{b}$ 의 내적(inner product or dot product)라고 하고 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}$ 로 나타낸다.

(2) 임의의 벡터 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ 에 대하여 다음과 같이 정의된 실수

$$\sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}} = \sqrt{{a_1}^2 + {a_2}^2 + \cdots + {a_n}^2}$$

를 $\boldsymbol{a}$ 의 **길이**(length) 또는 **크기**(magnitude)라고 하고 $\|\boldsymbol{a}\|$ 로 나타낸다. 특히, $\|\boldsymbol{a}\| = 1$ 인 벡터 $\boldsymbol{a}$ 를 **단위벡터**(unit vector)라고 한다.

보 기 5.1.1 벡터 $\boldsymbol{a} = (0, -2, 1, 4, -2), \boldsymbol{b} = (1, 2, 0, 0, 5) \in \mathbb{R}^5$ 에 대하여

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = 0 \cdot 1 + (-2) \cdot 2 + 1 \cdot 0 + 4 \cdot 0 + (-2) \cdot 5 = -14$$

이다. 또한 $\|\boldsymbol{a}\| = \sqrt{0^2 + (-2)^2 + 1^2 + 4^2 + (-2)^2} = \sqrt{25} = 5$ 이고,

$$\frac{1}{\|\boldsymbol{a}\|}\boldsymbol{a} = \frac{1}{5}(0, -2, 1, 4, -2) = \left(0, -\frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{4}{5}, -\frac{2}{5}\right)$$

는 $\boldsymbol{a}$ 와 같은 방향을 가지는 단위벡터이다.

정 리 5.1.1 임의의 벡터 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^n$ 와 스칼라 $k \in \mathbb{R}$ 에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}$

(2) $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$, $(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c} + \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{c}$

(3) $k(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = (k\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \cdot (k\boldsymbol{b})$

(4) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = \|\boldsymbol{a}\|^2 \geq 0$ 그리고 $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = 0 \Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$

정리 5.1.1의 증명은 자명하므로 생략하기로 하고, 이를 이용하여 다음의 보기를 알아보도록 하자.

보 기 5.1.2 벡터 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} \in \mathbb{R}^n$ 에 대하여 $\|\boldsymbol{a}\| = 2,\ \ \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = -3,\ \ \|\boldsymbol{b}\| = 3$ 일 때,

$$(\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}) \cdot (3\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b})$$

를 구하여라.

【풀이】 정리 5.1.1의 (1),(2),(3)을 반복적으로 이용하면,

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{a} + 2\boldsymbol{b}) \cdot (3\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) &= \boldsymbol{a} \cdot (3\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) + (2\boldsymbol{b}) \cdot (3\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \\
&= \boldsymbol{a} \cdot (3\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + (2\boldsymbol{b}) \cdot (3\boldsymbol{a}) + (2\boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{b} \\
&= 3(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + 6(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}) + 2(\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{b}) \\
&= 3\|\boldsymbol{a}\|^2 + 7(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) + 2\|\boldsymbol{b}\|^2 \\
&= 3 \cdot 2^2 + 7 \cdot (-3) + 2 \cdot 3^2 \\
&= 9
\end{aligned}$$

이다.