정 리 4.2.2 n 개의 미지수를 가지는 제차 선형방정식의 해집합 $W = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = 0\}$은 벡터공간 $\mathbb{R}^n$ 의 부분공간이다.

【증명】 임의의 원소 $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in W$ 와 $\lambda \in \mathbb{R}$ 에 대하여, $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$ 이다. 여기서

$$a_1(x_1 + y_1) + a_2(x_2 + y_2) + \cdots + a_n(a_n + y_n) = (a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n) + (a_1y + a_2y_2 + \cdots + a_ny_n) = 0$$

이므로 $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \in W$ 이다. 또한 $\lambda\boldsymbol{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \dots, \lambda x_n)$ 이고

$$a_1(\lambda x_1) + a_2(\lambda x_2) + \cdots + a_n(\lambda x_n) = \lambda(a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n) = \lambda \cdot 0 = 0$$

이므로 $\lambda\boldsymbol{x} \in W$ 이다. 정리 4.2.1에 의하여 W 는 벡터공간 $\mathbb{R}^n$ 의 부분공간이다. □

정 리 4.2.3 V 가 체 F 위의 벡터공간이고 W 와 U 를 V 의 부분공간이라고 할 때, 다음의 두 집합도 V 의 부분공간이다.

(1) $W \cap U = \{\boldsymbol{v} \mid \boldsymbol{v} \in W, \boldsymbol{v} \in U\}$

(2) $W + U = \{\boldsymbol{w} + \boldsymbol{u} \mid \boldsymbol{w} \in W, \boldsymbol{u} \in U\}$

【증명】 정리 4.2.1을 이용하여 (2)번을 증명해보자. 벡터 $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2} \in W + U$ 와 스칼라 $\lambda \in F$ 를 선택하자. 먼저 적당한 벡터 $\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2} \in W$ 와 $\boldsymbol{u_1}, \boldsymbol{u_2} \in U$ 가 존재하여 $\boldsymbol{v_1} = \boldsymbol{w_1} + \boldsymbol{u_1}$ 이고 $\boldsymbol{v_2} = \boldsymbol{w_2} + \boldsymbol{u_2}$ 임을 주목하자. 그러면

$$\boldsymbol{v_1} + \boldsymbol{v_2} = (\boldsymbol{w_1} + \boldsymbol{u_1}) + (\boldsymbol{w_2} + \boldsymbol{u_2}) = (\boldsymbol{w_1} + \boldsymbol{w_2}) + (\boldsymbol{u_1} + \boldsymbol{u_2}) \in W + U$$

이고

$$\lambda\boldsymbol{v_1} = \lambda(\boldsymbol{w_1} + \boldsymbol{u_1}) = \lambda\boldsymbol{w_1} + \lambda\boldsymbol{u_1} \in W + U$$

이다. 즉 $W + U$ 는 덧셈과 스칼라 곱에 대하여 닫혀 있다. 따라서 $W + U$ 는 V 의 부분공간이다. □

따름정리 4.2.4 n 개의 미지수를 가지는 제차 연립선형방정식

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + a_{12}x_2 & + \cdots & + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 & + a_{22}x_2 & + \cdots & + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + a_{m2}x_2 & + \cdots & + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

의 모든 해의 집합은 벡터공간 $\mathbb{R}^n$ 의 부분공간이다.

【증명】 정리 4.2.2와 정리 4.2.3의 (1)에 의하여 성립한다. □

따름정리 4.2.4에서의 부분공간을 제차 연립선형방정식의 해공간(solution space)이라고 한다.

Vector Space

Sub space

보 기 4.2.6 제차 연립선형방정식

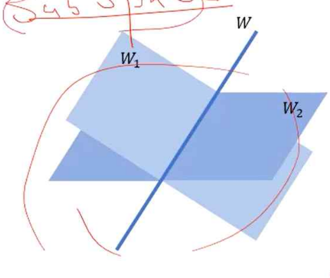
$$\begin{cases} x_1 & + x_2 & - x_3 & = 0 \\ 2x_1 & - x_2 & + 3x_3 & = 0 \end{cases}$$

의 해공간을 W 라고 하면 W 는 벡터공간 $\mathbb{R}^3$의 부분공간이다. 여기서

$$W_1 = \{(x_1, x_2, x_3) | x_1 + x_2 - x_3 = 0\},$$

$$W_2 = \{(x_1, x_2, x_3) | 2x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$$

라고 하면 $W = W_1 \cap W_2$ 이다. 기하학적으로 해석하면 W_1 과 W_2 는 원점을 지나는 평면을 나타낸다. 따라서 W 는 두 평면의 교집합인 원점을 지나는 직선을 나타낸다.



4.3 선형결합(Linear Combination)

정 의 4.3.1 V 는 체 F 위의 벡터공간이고 $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n} \in V$ 이라고 하자. n 개의 스칼라 $c_1, c_2, \dots, c_n \in F$ 에 대하여 다음과 같이 표현되는 벡터

$$c_1\boldsymbol{v_1} + c_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + c_n\boldsymbol{v_n}$$

을 $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}$ 의 **선형결합**(linear combination) 또는 **일차결합**이라고 한다. 또한 $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}$ 의 모든 선형결합의 집합을 $\langle \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n} \rangle$ 으로 나타낸다. 즉,

$$\langle \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n} \rangle = \{c_1\boldsymbol{v_1} + c_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + c_n\boldsymbol{v_n} | c_1, c_2, \dots, c_n \in F\}$$

이다.

정 리 4.3.1 V 는 체 F 위의 벡터공간이고 $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n} \in V$ 이라고 하면, $\langle \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n} \rangle$ 는 V 의 부분공간이다.

【증명】 $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}$ 의 선형결합은 V 의 벡터이므로 $\langle \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n} \rangle$은 V의 부분집합이다. 두 선형결합

V

$\langle v_1, \dots, v_n \rangle$

$$c_1\boldsymbol{v_1} + c_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + c_n\boldsymbol{v_n}\ ,\ d_1\boldsymbol{v_1} + d_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + d_n\boldsymbol{v_n} \in \langle \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n} \rangle$$

과 스칼라 $\lambda \in F$에 대하여

$$(c_1\boldsymbol{v_1} + c_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + c_n\boldsymbol{v_n}) + (d_1\boldsymbol{v_1} + d_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + d_n\boldsymbol{v_n}) = (c_1 + d_1)\boldsymbol{v_1} + (c_2 + d_2)\boldsymbol{v_2} + \cdots + (c_n + d_n)\boldsymbol{v_n} \in \langle \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n} \rangle$$

이고

$$\lambda(c_1\boldsymbol{v_1} + c_2\boldsymbol{v_2} + \cdots + c_n\boldsymbol{v_n}) = \lambda(c_1\boldsymbol{v_1}) + \lambda(c_2\boldsymbol{v_2}) + \cdots \lambda(c_n\boldsymbol{v_n}) = (\lambda c_1)\boldsymbol{v_1} + (\lambda c_2)\boldsymbol{v_2} + \cdots + (\lambda c_n)\boldsymbol{v_n} \in \langle \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n} \rangle$$

이다. 즉, $\langle \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n} \rangle$는 덧셈과 스칼라 곱에 대하여 닫혀 있으므로 정리 4.2.1에 의하여 V 의 부분공간이다. □

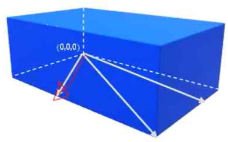
V 의 부분공간 $W = \langle \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n} \rangle$ 을 벡터 $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}$ 에 의하여 **생성**(span or generate)된 공간이라고 말한다. 또는 "벡터 $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}$이 W 를 생성한다"라고 말한다.

보 기 4.3.1 벡터공간 $\mathbb{R}^3$의 세 벡터 $(1,5,1), (2,1,-1), (-1,1,1)$ 에 의하여 생성되는 공간을 구해보자.

벡터 $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$에 대한 다음의 명제들은 모두 동치임을 주목하자.

- (x_1, x_2, x_3)는 세 벡터 $(1,5,1), (2,1,-1), (-1,1,1)$의 선형결합이다.
- $(x_1, x_2, x_3) \in \langle (1,5,1), (2,1,-1), (-1,1,1) \rangle$
- 등식 $c_1(1,5,1) + c_2(2,1,-1) + c_3(-1,1,1) = (x_1, x_2, x_3)$ 를 만족하는 $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ 가 존재한다.
- 연립선형방정식

$$\begin{cases} c_1 & +2c_2 & -c_3 & = x_1 \\ 5c_1 & +c_2 & +c_3 & = x_2 \\ c_1 & -c_2 & +c_3 & = x_3 \end{cases}$$



의 해가 존재한다.

연립선형방정식의 해를 구하기 위해서 Gauss-Jordan소거법을 이용하면 다음과 같다.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & x_1 \\ 5 & 1 & 1 & x_2 \\ 1 & -1 & 1 & x_3 \end{array}\right] \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & x_1 \\ 0 & -3 & 2 & -x_1 + x_3 \\ 0 & 0 & 0 & -2x_1 + x_2 - 3x_3 \end{array}\right]$$

따라서 연립선형방정식의 해가 존재할 동치조건이 $-2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0$ 이기 때문에 다음의 명제도 위의 네 명제들과 동치이다.

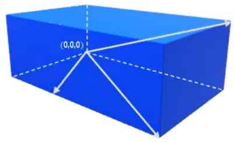
- $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$

위에서 알아본 동치명제에 의하여 세 벡터 $(1,5,1), (2,1,-1), (-1,1,1)$에 의하여 생성되는 $\mathbb{R}^3$의 부분공간은

$$\langle (1,5,1), (2,1,-1), (-1,1,1) \rangle = \{(x_1, x_2, x_3) | 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0\}$$

이다. 기하학적으로는 원점을 지나는 평면을 나타낸다.

보 기 4.3.2 벡터공간 $\mathbb{R}^3$ 의 세 벡터 $(1,2,3), (0,1,4), (-1,0,1)$에 의하여 생성되는 공간을 구하여라.



보기 4.3.1에서와 마찬가지로 벡터 $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$에 대하여 다음의 세 명제는 동치이다.

- $(x_1, x_2, x_3) \in \langle (1,2,3), (0,1,4), (-1,0,1) \rangle$
- 등식 $c_1(1,2,3) + c_2(0,1,4) + c_3(-1,0,1) = (x_1, x_2, x_3)$ 를 만족하는 스칼라 $c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}$ 가 존재한다.
- 선형연립방정식

$$\begin{cases} c_1 & & -c_3 & = x_1 \\ 2c_1 & +c_2 & & = x_2 \\ 3c_1 & +4c_2 & +c_3 & = x_3 \end{cases}$$

  의 해가 존재한다.

선형연립방정식의 해를 구하기 위해서 Gauss-Jordan 소거법을 이용하면 다음과 같다.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & x_1 \\ 2 & 1 & 0 & x_2 \\ 3 & 4 & 1 & x_3 \end{array}\right] \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & (1/4)(-x_1 + 4x_2 - x_3) \\ 0 & 1 & 0 & (1/4)(x_1 - 2x_2 + x_3) \\ 0 & 0 & 1 & (1/4)(-5x_1 + 4x_2 - x_3) \end{array}\right]$$

따라서, 선형연립방정식은 임의의 벡터 $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ 에 대해서 유일한 해를 가진다는 사실을 알 수 있다. 이를 다시 말하면 임의의 벡터 $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$는 세 벡터에 의하여 생성되는 공간 $\langle (1,2,3), (0,1,4), (-1,0,1) \rangle$에 속한다는 말이므로 $\mathbb{R}^3 \subseteq \langle (1,2,3), (0,1,4), (-1,0,1) \rangle$이 성립한다. 한편, $\mathbb{R}^3 \supseteq \langle (1,2,3), (0,1,4), (-1,0,1) \rangle$은 자명하므로, $\mathbb{R}^3 = \langle (1,2,3), (0,1,4), (-1,0,1) \rangle$가 성립함을 알 수 있다. 즉, 세 벡터 $(1,2,3), (0,1,4), (-1,0,1)$은 벡터공간 $\mathbb{R}^3$를 생성한다.

정 리 4.3.2 벡터공간 $\mathbb{R}^n$의 m 개의 벡터

$$\boldsymbol{v_1} = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}), \boldsymbol{v_2} = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}), \dots, \boldsymbol{v_m} = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$$

에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $m < n$ 이면 $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_m}$ 은 $\mathbb{R}^n$ 을 생성하지 못한다.

(2) $m = n$ 일 때에는 다음이 성립한다.

$$\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n} \text{ 이 } \mathbb{R}^n \text{ 을 생성한다.} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \neq 0$$

(3) $m > n$ 일 때에는 다음의 성립한다.

$$\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_m} \text{ 이 } \mathbb{R}^n \text{ 을 생성한다.} \Leftrightarrow \text{ 행렬 } \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \text{ 의 기약 행}$$

사다리꼴 행렬에 영행이 존재하지 않는다.

【증명】 벡터 $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ 에 대하여 다음의 등식

$$c_1(a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}) + c_2(a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}) + \cdots + c_m(a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn}) = (x_1, x_2, \dots x_n)$$

을 만족하는 스칼라 $c_1, c_2, \dots, c_n$ 이 존재할 필요충분조건은 선형연립방정식

$$(*)\begin{cases} a_{11}c_1 & +a_{21}c_2 & +\cdots & +a_{m1}c_m & = x_1 \\ a_{12}c_1 & +a_{22}c_2 & +\cdots & +a_{m2}c_m & = x_2 \\ & & \vdots & & \\ a_{1n}c_1 & +a_{2n}c_2 & +\cdots & +a_{mn}c_m & = x_n \end{cases}$$

의 해가 존재하는 것이다.

(1) $m < n$ 일 때, 방정식(*)을 덧붙인 행렬의 형태로 나타내면

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} & x_1 \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} & x_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots & a_{mm} & x_m \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} & x_n \end{array}\right]$$

이다. Gauss-Jordan소거법을 이용하여 기약 행 사다리꼴 행렬을 구해보면

$$\left[\begin{array}{cccc|c} ※ & ※ & \cdots & ※ & \star \\ ※ & ※ & \cdots & ※ & \star \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ ※ & ※ & \cdots & ※ & \star \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \star \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \star \end{array}\right]$$

으로서 계수행렬의 기약 행 사다리꼴 행렬이 적어도 $n - m > 0$ 개의 영행을 가지게 된다. 또한 마지막 열의 모든 성분($\star$)은 모두

$$d_1x_1 + d_2x_2 + \cdots + d_mx_m + \cdots + d_nx_n$$

과 같은 모양이고, 아래부터 $n - m$ 개의 영행에 해당하는 마지막 열의 성분($\star$)모두가 0을 만족하는 벡터 $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ 만이 $\langle \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_m} \rangle$ 의 원소이다. 따라서 $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_m}$ 은 $\mathbb{R}^n$을 생성하지 못한다.

(2) $m = n$ 이면 계수행렬이 정사각 행렬이고 행렬식이 0이 아닐 때, 연립방정식 (*)가 모든 벡터 $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ 에 대하여 유일한 해를 가진다. 즉, $\mathbb{R}^n$ 의 모든 벡터가 $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_m}$ 의 선형결합으로 유일하게 표현 가능하므로, $\langle \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_m} \rangle = \mathbb{R}^n$ 이다.

(3) 생략 □

보 기 4.3.3 벡터공간 $Mat_{2\times2}(\mathbb{R})$ 의 세 벡터 $A = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$ 에 의하여 생성되는 공간을 구하여라.

벡터 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in Mat_{2\times2}(\mathbb{R})$가 세 벡터 A, B, C의 선형결합일 조건을 구해보자. 다음의 등식

$$c_1 \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

을 만족하는 스칼라 c_1, c_2, c_3가 존재 할 필요충분조건은 선형연립방정식

$$(*) \begin{cases} -2c_1 & +c_2 & +3c_3 & = a_{11} \\ c_1 & -2c_2 & -3c_3 & = a_{12} \\ & c_2 & +c_3 & = a_{21} \\ 4c_1 & +2c_2 & -2c_3 & = a_{22} \end{cases}$$

의 해가 존재하는 것이다. 적절한 기본 행 연산을 사용하여 선형연립방정식(*)을 다음과 같이 바꿀 수 있다.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 3 & a_{11} \\ 1 & -2 & -3 & a_{12} \\ 0 & 1 & 1 & a_{21} \\ 4 & 2 & -2 & a_{22} \end{array}\right] \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & a_{12} \\ 0 & 1 & 1 & a_{21} \\ 0 & 0 & 0 & a_{11} + 2a_{12} + 3a_{21} \\ 0 & 0 & 0 & -4a_{12} - 10a_{21} + a_{22} \end{array}\right]$$

마지막 덧붙인 행렬로부터 선형연립방정식(*)의 해가 존재 할 필료충분조건은 $a_{11} + 2a_{12} + 3a_{21} = 0$ 이고 $-4a_{12} - 10a_{21} + a_{22} = 0$ 인

것임을 알 수 있다. 그러므로

$$\langle A, B, C \rangle = \left\{ \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \middle| (\star) \begin{cases} a_{11} & +2a_{12} & +3a_{21} & & = 0 \\ & -4a_{12} & -10a_{21} & +a_{22} & = 0 \end{cases} \right\}$$

이다.

또한 Gauss-Jordan소거법을 이용하여 선형연립방정식($\bigstar$)의 해를 구하면

$$a_{11} = 4s - 2t, a_{12} = -5s + t, a_{21} = 2s, a_{22} = 4t \ (s, t \in \mathbb{R})$$

이므로 A, B, C에 의하여 생성되는 공간을 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\langle A, B, C \rangle = \left\{ \begin{bmatrix} 4s - 2t & -5s + t \\ 2s & 4t \end{bmatrix} \middle| s, t \in \mathbb{R} \right\}$$

V

$\langle v_1, \cdots, v_k \rangle$