

5 장 연습문제

※ 모든 문제에는 답이 나오기 까지의 논리적인 풀이 과정이 명시되어 있어야 합니다. 풀이 과정이 부족하거나 과정이 없는 답안은 답이 맞더라도 감점, 또는 점수가 없을 수도 있음을 명심하기 바랍니다. 강의 시간에 언급한 여러 사항에 유의하여 정확한 답안을 각자 작성하여, 정해진 기한내에 제출하기 바랍니다.

#1. 다음 벡터공간 W 의 기저와 차원을 구하여라. 또한 주어진 벡터 $\mathbf{w} \in W$ 를 앞에서 구한 기저 벡터들의 선형결합으로 나타내어라.(주의, 각자가 구한 기저에 따라서 점수가 달라질 수 있습니다.)

(1) $W = \{(3a - b + 2c, -2a - c, a - 3b + 2c, -8a + 2b - 5c) | a, b, c \in \mathbb{R}\}$, $\mathbf{w} = (1, 1, 7, -1)$

(2) $W = \{A \in Mat_{3 \times 3}(\mathbb{R}) | A^T = A\}$, $\mathbf{w} = A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

#2. 내적공간 V 의 두 벡터 $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in V$ 에 대하여, $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ 또는 $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ 이면 $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ 임을 증명하여라.

#3. 벡터공간 \mathbb{R}^2 의 두 벡터 $\mathbf{a} = (a_1, a_2), \mathbf{b} = (b_1, b_2)$ 에 대하여 아래와 같이 정의된 $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ 가 \mathbb{R}^2 에서의 내적이 되는지 조사하여라. 만약 내적이라면 정의 5.2.1 의 네 조건을 만족함을 보이고, 내적이 아니라면 네 조건 1.1~1.4 중, 만족하지 않은 모든 조건을 반례를 이용하여 설명하여라.

(1) $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 5a_1b_1 - a_1b_2 - a_2b_1 + 10a_2b_2$

(2) $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1^2b_1^2 + a_2^2b_2^2$

(3) $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = 3a_1b_1 + 5a_2b_2$

(4) $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = a_1a_2 + b_1b_2$

#4. 내적공간 V 의 부분공간 W 에 대하여 다음과 같이 정의된 집합

$$W^\perp = \{ \mathbf{v} \in V \mid \text{모든 } \mathbf{w} \in W \text{ 에 대하여 } \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = 0 \}$$

을 W 의 수직 보공간(orthogonal complement)이라고 한다. 이 때, 다음의 물음에 답하여라.

- (1) W^\perp 이 V 의 부분공간임을 증명하여라.
- (2) \mathbb{R}^3 의 부분공간 $W = \langle (1,2,3) \rangle$ 에 대하여, W^\perp 의 기저와 차원을 구하여라.
- (3) \mathbb{R}^3 의 부분공간 $W = \{ (x_1, x_2, x_3) \mid x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \}$ 에 대하여 W^\perp 의 기저와 차원을 구하여라.
- (4) \mathbb{R}^4 의 부분공간 $W = \langle (1,2,-1,0), (3,-1,1,2) \rangle$ 에 대하여, W^\perp 의 기저와 차원을 구하여라.
- (5) 위의 결과를 참고삼아 $\dim(W)$ 와 $\dim(W^\perp)$ 사이에 어떤 관계가 있다고 생각하는가? 자신의 생각을 적어라.

#5. 보기 5.2.5 에서 정의된 내적공간 $V = C[-1,1]$ 의 세 벡터 $f(x) = x$, $g(x) = x^2$, $h(x) = e^x$ 에 대하여 다음의 물음에 답하여라.

- (1) $\text{proj}_f h$ 를 구하여라.
- (2) $W = \langle f, g \rangle$ 라고 할 때, $\text{proj}_W h$ 를 구하여라.

#6. 내적공간 W 의 순서기저 $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$,

$$\mathbf{v}_1 = (0,2,1,0), \mathbf{v}_2 = (1,-1,0,0), \mathbf{v}_3 = (1,2,0,-1)$$

로부터 Gram-schmidt 의 수직화 과정을 이용하여, 수직기저 $\mathcal{B}_\perp = \{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$ 를 구하여라.

(주의, Gram-Schmidt 의 과정을 적용하여 얻은 기저 벡터들은 상수배를 하지 않은 원래상태 그대로 나타내고, 모든 벡터들의 모든 성분은 기약분수로 표현하여 정확히 나타내어라. 또한, 벡터의 순서를 임의대로 바꿔서 풀지 말 것!)