# 2주 2차시 과제물 모범답안

## 2.3절 기본행렬과 역행렬

#1 다음 행렬이 기본행렬인지 판단하여라. 만약 기본행렬이라면 역행렬을 구하여라.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E_{12}(2)$ 따라서 $E_{12}(2)^{-1} = E_{12}(-2) = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(2) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = C_{13}$ 따라서 $C_{13}^{-1} = C_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(3) 기본행렬이 아니다.

(4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_{13}\left(\frac{1}{2}\right)$ 따라서 $E_{12}\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = E_{12}\left(-\frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(5) 기본행렬이 아니다.

(6) $\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = D_1(-2)$ 따라서 $D_1(-2)^{-1} = D_1\left(-\frac{1}{2}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(7) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 은 기본행렬이 아니다.

(8) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_{24}(-4)$ 따라서 $E_{24}(-4)^{-1} = E_{24}(4) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

#2 다음 $m \times n$ 행렬 $A$ 의 기약 행 사다리꼴 행렬 $R$ 을 구하여라. 그리고 $R = EA$ 를 만족하는 $m \times m$ 행렬 $E$ 를 구하여라.

(1) $[\,A \mid I_3\,] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 6 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 7 & 7 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{7}{2} & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] = [\,R \mid E\,]$

(2) $[\,A \mid I_3\,] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 6 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -\frac{11}{4} & 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{9}{8} & 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{array}\right] = [\,R \mid E\,]$

또는

$$E = \begin{bmatrix} -1/2 & 3/4 & 0 \\ 1/4 & -1/8 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

(3) $[\,A \mid I_3\,] = \left[\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 5 & 6 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 8 & 9 & -6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left[\begin{array}{ccccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 2 & -40 & 16 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 5 & -2 & -1 \end{array}\right] = [\,R \mid E\,]$

(4) $[\,A \mid I_4\,] = \left[\begin{array}{ccc|cccc} 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{14} & -\frac{2}{7} & \frac{1}{14} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{25}{28} & -\frac{15}{14} & -\frac{17}{28} \end{array}\right] = [\,R \mid E\,]$

또는

$$E = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & -7 & 0 \\ -28 & -25 & 30 & 17 \end{bmatrix}$$

#3 다음의 행렬이 가역행렬인지 조사하여라. 만약 가역행렬이라면 기본행렬의 곱으로 나타내어라. 또한 역행렬을 구하여라.

(1) $[A|I_2] = \left[\begin{array}{cc|cc} -3 & 6 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] \xRightarrow{E_{12}(1)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 11 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right] \xRightarrow{E_{21}(-4)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 11 & 1 & 1 \\ 0 & -39 & -4 & -3 \end{array}\right]$

$\xRightarrow{D_2(-1/39)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 11 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4/39 & 1/13 \end{array}\right] \xRightarrow{E_{12}(-11)} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -5/39 & 2/13 \\ 0 & 1 & 4/39 & 1/13 \end{array}\right].$

$\therefore A$ 는 가역행렬이고 $A^{-1} = E_{12}(-11)D_2(-1/39)E_{21}(-4)E_{12}(1) = \begin{bmatrix} -5/39 & 2/13 \\ 4/39 & 1/13 \end{bmatrix}$ 이다. 따라서

$$A = (A^{-1})^{-1} = E_{12}(-1)E_{21}(4)D_2(-39)E_{12}(11).$$

(2) $\begin{bmatrix} 6 & -4 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$ 는 가역행렬이 아니다.

(3) $\begin{bmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 5 & -4 \end{bmatrix}$ 는 가역행렬이 아니다.

(4) $[A|I_3] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xRightarrow{E_{21}(1), E_{32}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$

$\xRightarrow{D_3(-1/2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right] \xRightarrow{E_{13}(-1), E_{23}(-2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{array}\right].$

$\therefore A$ 는 가역행렬이고

$$A^{-1} = E_{23}(-2)E_{13}(-1)D_3(-1/2)E_{32}(-1)E_{21}(1) = \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{bmatrix}.$$

따라서

$$A = (A^{-1})^{-1} = E_{21}(-1)E_{32}(1)D_3(-2)E_{13}(1)E_{23}(2).$$

(5) $[\,A \mid I_4\,]$ 에 기본행 연산,

$$E_{14}(-1), E_{21}(-2), E_{41}(-3), E_{12}(-2), E_{32}(-2), E_{13}(2), E_{43}(-1), E_{14}(-2), E_{24}(2), E_{34}(3)$$

을 차례대로 실행하여 다음과 같은 기약 행 사다리꼴 행렬을 얻는다.

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 27 & -10 & 4 & -29 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -16 & 5 & -2 & 18 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -17 & 4 & -2 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 & 2 & -1 & 8 \end{array}\right]$$

∴ A 의 역행렬은

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 27 & -10 & 4 & -29 \\ -16 & 5 & -2 & 18 \\ -17 & 4 & -2 & 20 \\ -7 & 2 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

이고 $A = E_{14}(1)E_{21}(2)E_{41}(3)E_{12}(2)E_{32}(2)E_{13}(-2)E_{43}(1)E_{14}(2)E_{24}(-2)E_{34}(-3)$ 이다.

(6) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & -3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 5 & 3 \\ 2 & -6 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ 은 가역행렬이 아니다.

## 3.2절 행렬식의 계산

#1 $\det A = ad - bc$ , 과정은 생략.

#2 다음의 행렬에서 서로 다른 2개의 행 또는 열을 선택하여, 선택된 행 또는 열에 대하여 각각 행렬식을 전개하고 그 값을 구하여라.

(1) $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 3 & 2 & 0 \\ -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$의 행렬식을 2행에 대하여 전개하면

$$\det A = 3 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -58$$

이다.

(2) $\det A = -24$, 이하 과정은 생략.

(3) $\det A = 0$

(4) $\det A = 0$

#3 다음을 만족하는 실수 $\lambda$의 값을 구하여라.

(1) $\begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(3-\lambda) - 4 = -1 - 4\lambda + \lambda^2 = 0$ 에서 $\lambda = 2 \pm \sqrt{5}$.

(2) $\lambda = 4, -1$ (과정 생략)

#4 행렬의 가장 아래의 행(또는 가장 위의 행)부터 행렬식을 전개해 오면 자명하게 알 수 있다.