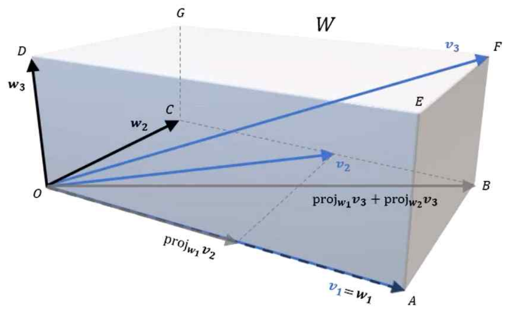
선형대수학 비대면 강의

9주 1차시 수업

조 성희

정 리 5.3.1 V 는 내적공간이고, W 를 V 의 부분공간이라고 하자. $\mathcal{B}_\perp = \{\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \dots, \boldsymbol{w_n}\}$ 이 W 의 수직기저이면, 벡터 $\boldsymbol{v} \in V$ 에 대하여

$$\text{proj}_W \boldsymbol{v} = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\langle \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w_i} \rangle}{\|\boldsymbol{w_i}\|^2} \right) \boldsymbol{w_i} = \sum_{i=1}^{n} \text{proj}_{\boldsymbol{w_i}} \boldsymbol{v}.$$



〈Gram-Schmidt의 직교화 과정〉

V 는 내적공간이고, W 를 V 의 부분공간이라고 하자. 수직기저가 아닌 W 기저

$$\mathcal{B} = \{\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \boldsymbol{v_3}, \dots, \boldsymbol{v_n}\}$$

가 알려져 있을 때, $\mathcal{B}$ 로 부터 W 의 수직기저

$$\mathcal{B}_\perp = \{\boldsymbol{w_1}, \boldsymbol{w_2}, \boldsymbol{w_3}, \dots, \boldsymbol{w_n}\}$$

을 다음과 같은 과정을 통해서 구할 수 있다.

Step 1: $\boldsymbol{w_1} = \boldsymbol{v_1}$ 이라고 한다.

Step 2: $\text{proj}_{\boldsymbol{w_1}}\boldsymbol{v_2}$ 를 구해서,

$\boldsymbol{w_2} = \boldsymbol{v_2} - \text{proj}_{\boldsymbol{w_1}}\boldsymbol{v_2}$ 라고 한다.

Step 3: $\text{proj}_{\boldsymbol{w_1}}\boldsymbol{v_3} + \text{proj}_{\boldsymbol{w_2}}\boldsymbol{v_3}$ 를 구해서,

$\boldsymbol{w_3} = \boldsymbol{v_3} - (\text{proj}_{\boldsymbol{w_1}}\boldsymbol{v_3} + \text{proj}_{\boldsymbol{w_2}}\boldsymbol{v_3})$ 라고 한다.

$\vdots$

Step n: $\text{proj}_{\boldsymbol{w_1}}\boldsymbol{v_n} + \text{proj}_{\boldsymbol{w_2}}\boldsymbol{v_n} + \cdots + \text{proj}_{\boldsymbol{w_{n-1}}}\boldsymbol{v_n}$ 을 구해서,

$\boldsymbol{w_n} = \boldsymbol{v_n} - (\text{proj}_{\boldsymbol{w_1}}\boldsymbol{v_n} + \text{proj}_{\boldsymbol{w_2}}\boldsymbol{v_n} + \cdots + \text{proj}_{\boldsymbol{w_{n-1}}}\boldsymbol{v_n})$ 이라고 한다.

5.4 $\mathbb{R}^3$ 에서 내적의 응용

5.4.1 벡터의 외적(Cross Product)

정 의 5.4.1 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$ 의 두 벡터 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 에 대하여, 다음과 같이 정의된 벡터를 $\boldsymbol{a}$ 와 $\boldsymbol{b}$ 의 **외적**(cross product)이라고 하고 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 로 나타낸다.

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = (a_2b_3 - a_3b_2, -a_1b_3 + a_3b_1, a_1b_2 - a_2b_1)$$

외적은 유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$의 두 벡터에 대하여 정의되며, 그 결과도 $\mathbb{R}^3$의 또 다른 벡터이다. 또한, 두 벡터 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ 와 $\boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 의 내적은 다음과 같은 3×3 행렬의 형식적인 행렬식을 1행에 대하여 전개한 결과로서 기억하면 편리하다.

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{e_1} & \boldsymbol{e_2} & \boldsymbol{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{e_1} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \boldsymbol{e_2} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \boldsymbol{e_3} \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2, -a_1b_3 + a_3b_1, a_1b_2 - a_2b_1)\end{aligned}$$

보 기 5.4.1 두 벡터 $\boldsymbol{a} = (1, -2, 1), \boldsymbol{b} = (3, 1, -2)$ 에 대하여 외적

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}, \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a}, \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a}$$

을 구해보면,

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e_1} & \boldsymbol{e_2} & \boldsymbol{e_3} \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (3,5,7),$$

$$\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e_1} & \boldsymbol{e_2} & \boldsymbol{e_3} \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-3, -5, -7),$$

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e_1} & \boldsymbol{e_2} & \boldsymbol{e_3} \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (0,0,0)$$

이다.

내적에 대해서 성립하는 기본적인 대수적 성질을 증명없이 알아보도록 하자.

정 리 5.4.1 벡터 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ 와 스칼라 $k \in \mathbb{R}$ 에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -(\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a})$

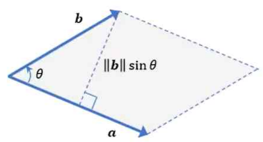
(2) $\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) + (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{c})$

(3) $k(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = (k\boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} \times (k\boldsymbol{b})$

(4) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{0} = \boldsymbol{0} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$

(5) $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{a} = \boldsymbol{0}$

$\mathbb{R}^3$ 의 영벡터가 아닌 두 벡터 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3)$ 가 이루는 각의 크기를 θ $(0 \le \theta \le \pi)$ 라고 하자. $\boldsymbol{a}$ 와 $\boldsymbol{b}$ 를 이웃한 양변으로 하는 평행사변형의 넓이를 A 라고 할 때, A 를 구해보자.



$A = \|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\| \sin\theta$ 이므로,

$$\begin{aligned}A^2 &= \|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 \sin^2\theta \\ &= \|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2(1 - \cos^2\theta) \\ &= \|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 - (\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|\cos\theta)^2 \\ &= \|\boldsymbol{a}\|^2\|\boldsymbol{b}\|^2 - (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})^2 \\ &= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)^2 + (a_1b_3 - a_3b_1)^2 + (a_1b_2 - a_2b_1)^2 \\ &= \|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|^2,\end{aligned}$$

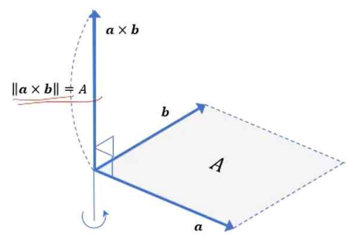
여기서 $A \ge 0, \|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\| \ge 0$ 이므로

$$\|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\| = A$$

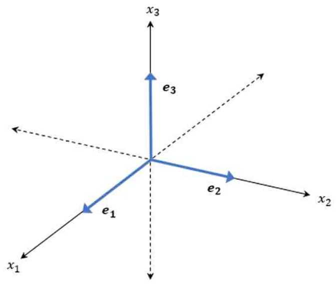
이다.

다음으로 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 의 방향(direction)에 대하여 알아보자.

먼저, $\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = 0$ 이고 $\boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) = 0$ 이므로 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$ 는 $\boldsymbol{a}$ 와 $\boldsymbol{b}$ 에 동시에 수직인 벡터이다. 또한 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 의 방향은 $\boldsymbol{a}$ 에서 $\boldsymbol{b}$ 쪽으로 나사를 돌렸을 때 나사가 진행하는 방향과 일치한다. 따라서, $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 는 아래의 그림에서와 같은 벡터이다.



보 기 5.4.2 $\mathbb{R}^3$ 의 세 표준기저벡터 $\boldsymbol{e_1} = (1,0,0), \boldsymbol{e_2} = (0,1,0), \boldsymbol{e_3} = (0,0,1)$ 에 대하여 다음이 성립한다.



$$\boldsymbol{e_1} \times \boldsymbol{e_2} = \boldsymbol{e_3}\,, \boldsymbol{e_2} \times \boldsymbol{e_1} = -\boldsymbol{e_3},$$
$$\boldsymbol{e_2} \times \boldsymbol{e_3} = \boldsymbol{e_1}\,, \boldsymbol{e_3} \times \boldsymbol{e_2} = -\boldsymbol{e_1},$$
$$\boldsymbol{e_3} \times \boldsymbol{e_1} = \boldsymbol{e_2}\,, \boldsymbol{e_1} \times \boldsymbol{e_3} = -\boldsymbol{e_2}.$$

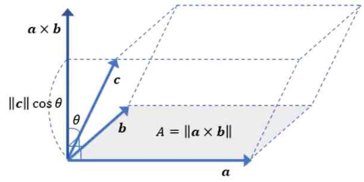
5.4.2 스칼라 삼중적(Scalar Triple Producr)

유클리드 공간 $\mathbb{R}^3$ 의 세 벡터 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3), \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, b_3), \boldsymbol{c} = (c_1, c_2, c_3)$ 에서 임의의 두벡터의 외적과 나머지 벡터의 내적, 즉

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}$$

을 스칼라 삼중적이라고 한다.

이 때, $|(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c}\,|$ 은 세 벡터를 이웃한 변으로 가지는 육면체의 부피(volume)을 나타낸다.



두 벡터 $\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}$ 와 $\boldsymbol{c}$ 가 이루는 각의 크기를 $\theta\ (0 \le \theta \le \pi)$ 라고 하면,

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}\|\|\boldsymbol{c}\| \cos\theta := \text{부피(volume)}$$

이다.