4.6 랭크(Rank)

체 F의 원소를 성분으로 가지는 $m \times n$ 행렬 A, 즉 $A \in Mat_{m\times n}(F)$, 에 대하여

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

A 의 각 i번 째 행을 벡터공간 F^n의 벡터로 생각할 때, 이를 A의 i번 째 **행벡터**(row vector)라고 하고 $\boldsymbol{r_i}$ 로 나타내자. 이렇게 생각하면 행렬 A는 m개의 행벡터

$$\boldsymbol{r_1} = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}),$$
$$\boldsymbol{r_2} = (a_{21}, a_{22}, \dots, a_{2n}).$$
$$\vdots$$
$$\boldsymbol{r_m} = (a_{m1}, a_{m2}, \dots, a_{mn})$$

을 가진다.

마찬가지로 A 의 각 j번 째 열을 벡터공간 F^m 의 벡터로 생각할 때, 이를 A 의 j번 째 **열벡터**(column vector)라고 하고 $\boldsymbol{c_j}$ 로 나타내자. 이렇게 생각하면 행렬 A 는 n개의 열벡터

$$\boldsymbol{c_1} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \boldsymbol{c_2} = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, \boldsymbol{c_n} = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

을 가진다.

정 의 4.6.1 체 F 의 원소를 성분으로 가지는 $m \times n$ 행렬 $A = [a_{ij}]$ 에서 A 의 m 개의 행벡터들에 의하여 생성되는 F^n 의 부분공간

$$\langle \boldsymbol{r_1}, \boldsymbol{r_2}, \dots, \boldsymbol{r_m} \rangle$$

을 A 의 **행공간**(row space)라고 한다.

또한, A 의 n 개의 열벡터들에 의하여 생성되는 F^m 의 부분공간

$$\langle \boldsymbol{c_1}, \boldsymbol{c_2}, \dots, \boldsymbol{c_n} \rangle$$

을 A 의 **열공간**(column space)라고 한다.

체 F 의 원소를 성분으로 가지는 $m \times n$ 행렬 A 에 대하여, A 의 행공간은 벡터공간 F^n 의 부분공간이므로

$$\dim(A\text{의 행공간}) \le n$$

이다. 또한 A 의 열공간은 벡터공간 F^m 의 부분공간이므로

$$\dim(A\text{의 행공간}) \le m$$

이다.

그리고,

$$A \text{ 의 행공간} = A^T \text{ 의 열공간}, \ A \text{ 의 열공간} = A^T \text{ 의 행공간}$$

이 성립한다.

보 기 4.6.1 행렬 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -2 & 4 & 3 \end{bmatrix} \in Mat_{2\times 3}(\mathbb{R})$ 의 행공간과 열공간을 구해보자.

【풀이】 A 의 행공간은 두 개의 행벡터에 의하여 생성되는 공간

$$\langle (1,3,1), (-2,4,3) \rangle$$

이다. 벡터 $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ 에 대하여, $(x,y,z) \in \langle (1,3,1), (-2,4,3) \rangle$ 일 동치조건은,

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & x \\ 3 & 4 & y \\ 1 & 3 & z \end{array}\right] \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & x \\ 0 & 10 & -3x+y \\ 0 & 0 & (1/2)x-(1/2)y+z \end{array}\right]$$

으로부터 $x - y + 2z = 0$ 이다.

따라서 A 의 행공간은

$$\langle (1,3,1), (-2,4,3) \rangle = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 | x - y + 2z = 0\}$$

으로써 $\mathbb{R}^3$ 의 부분공간이다.

또한, A 의 열공간은 세 개의 열벡터에 의하여 생성되는 공간

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle$$

이다.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & x \\ -2 & 4 & 3 & y \end{array}\right] \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 1 & x \\ 0 & 10 & 5 & 2x+y \end{array}\right] \cdots \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & * & * \\ 0 & 1 & * & * \end{array}\right]$$

으로부터 모든 벡터 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ 에 대해서 $(x,y) \in \left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle$ 이다.

따라서 A 의 열공간은

$$\left\langle \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^2$$

이다.

정 리 4.6.1 F 를 체라고 하자. 행렬 $A \in Mat_{m\times n}(F)$ 에 기본 행 연산을 한 번 시행하여 얻은 행렬을 A' 이라고 하면, A 의 행공간과 A'의 행공간은 같다.

【증명】 기본 행 연산 $E_{ij}(k)$ 에 대하여 A 의 행공간과 $A' = E_{ij}(k)A$ 의 행공간이 같음을 보이도록 하자. A 의 각 행벡터를 차례대로

$$\boldsymbol{r_1}, \dots, \boldsymbol{r_i}, \dots, \boldsymbol{r_j}, \dots, \boldsymbol{r_m}$$

으로 나타내면, $A' = E_{ij}(k)A$ 의 행벡터는 차례대로

$$\boldsymbol{r_1}, \dots, \boldsymbol{r_i} + k\boldsymbol{r_j}, \dots, \boldsymbol{r_j}, \dots, \boldsymbol{r_m}$$

$A \xrightarrow{E} A'$

이다.

따라서, A 의 행공간의 벡터

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v_1} + \cdots + c_i\boldsymbol{v_i} + \cdots + c_j\boldsymbol{v_j} + \cdots + c_m\boldsymbol{v_m}$$

에 대하여

$$\boldsymbol{v} = c_1\boldsymbol{v_1} + \cdots + c_i(\boldsymbol{v_i} + k\boldsymbol{v_j}) + \cdots + (c_j - c_ik)\boldsymbol{v_j} + \cdots + c_m\boldsymbol{v_m}$$

이므로 $\boldsymbol{v}$ 는 A' 의 행공간의 벡터이기도 하다. 따라서 "A 의 행공간 $\subset$ A' 의 행공간" 이다.

역으로, A'의 행공간의 벡터

$$\boldsymbol{u} = d_1\boldsymbol{r_1} + \cdots + d_i(\boldsymbol{r_i} + k\boldsymbol{r_j}) + \cdots + d_j\boldsymbol{r_j} + \cdots + d_m\boldsymbol{r_m}$$

에 대하여

$$\boldsymbol{u} = d_1\boldsymbol{r_1} + \cdots + d_i\boldsymbol{r_i} + \cdots + (d_ik + d_j)\boldsymbol{r_j} + \cdots + d_m\boldsymbol{r_m}$$

이므로 $\boldsymbol{u}$ 는 A 의 행공간의 벡터이기도 하다. 따라서 "A' 의 행공간 $\subset$ A 의 행공간"이 성립한다. 위의 두 사실에 의하여 "A 의 행공간 = A' 의 행공간"이 성립한다.

나머지 두 기본 행 연산에 대해서도 행공간이 같다는 사실은 위에서와 같은 방법으로 쉽게 생각할 수 있다. □

따름정리 4.6.2 F 를 체라고 하자. 행렬 $A \in Mat_{m\times n}(F)$ 의 기약 행 사다리꼴 행렬을 R 이라고 하면, A 의 행공간과 의 R 의 행공간은 같다.

정 리 4.6.3 F 를 체, 행렬 $R \in Mat_{m\times n}(F)$ 를 기약 행 사다리꼴 행렬이라고 하자. 이 때, R 의 영행을 제외한 모든 행벡터들의 집합은 선형독립인 집합이다. 따라서, 영행을 제외한 모든 행벡터들의 집합은 R 의 행공간의 기저이다.

보 기 4.6.2 기약 행 사다리꼴행렬

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in Mat_{4\times 4}(\mathbb{R})$$

에 대하여, R 의 영행을 제외한 모든 행벡터들의 집합

$$\mathcal{B}_r = \{(1,0,2,0), (0,1,3,0), (0,0,0,1)\}$$

은 R 의 행공간의 기저이다.

따름정리 4.6.4 F 를 체, 행렬 $A \in Mat_{m\times n}(F)$ 의 기약 행 사다리꼴 행렬을 R 이라고 하자. R 의 영행을 제외한 모든 행벡터들의 집합은 A 의 행공간의 기저이다.

보 기 4.6.3 벡터공간 $\mathbb{R}^4$ 의 부분공간

$$W = \langle (1,2,1,5), (-1,2,3,7), (2,2,1,6), (1,1,0,2) \rangle$$

의 기저를 구해보자. W 는 행렬

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 5 \\ -1 & 2 & 3 & 7 \\ 2 & 2 & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

의 행공간이다.

Gauss-Jordan소거법에 의하여 A 의 기약 행 사다리꼴 행렬을 구하면

$$A \Rightarrow \cdots \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

이므로

$$\mathcal{B}_r = \{(1,0,0,1), (0,1,0,1), (0,0,1,2)\}$$

이 W 의 기저이고, 따라서 W 는 $\mathbb{R}^4$ 의 3차원 부분공간이다.