No.

Date. / /

20171630 / 남주형 6장 연습문제

#1. $\mathbb{R}$ 위의 두 벡터공간 사이에 정의된 다음의 함수가 선형변환인지를 판정하여라. 만약 선형변환이라면 증명하고 선형 변환이 아니라면 그 이유를 정확히 밝혀라.

(1) 내적공간 V에 대하여 $T: V \to \mathbb{R}$, $T(v) = \|v\|$.

내적공간 V를 $\mathbb{R}^2$의 표준내적이라하자.

두벡터 $u=(1,1)$, $v=(2,1) \in V$ 에대하여

$T(u+v) = T((1,1)+(2,1)) = T((3,2)) = \|(3,2)\| = \sqrt{13}$

$T(u) = T((1,1)) = \|(1,1)\| = \sqrt{2}$

$T(v) = T((2,1)) = \|(2,1)\| = \sqrt{5}$

$\therefore T(u+v) = \sqrt{13} \neq \sqrt{2}+\sqrt{5} = T(u)+T(v)$

$\therefore$ T가 덧셈을 보존하지 못하므로 선형변환이아니다.

(2) 임의의 고정된 벡터 $v_0 \in \mathbb{R}^3$에 대하여 $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(v) = v \times v_0$

두벡터 $u=(x_1, x_2, x_3)$, $v=(y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$와 스칼라 $k \in \mathbb{R}$ 에대하여

($v_0 = (a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ 이라하자.)

$T(u+v) = T((x_1,x_2,x_3)+(y_1,y_2,y_3)) = T((x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3))$

$= (u+v) \times v_0 = (x_1+y_1, x_2+y_2, x_3+y_3) \times (a,b,c)$

$= (c(x_2+y_2) - b(x_3+y_3), -c(x_1+y_1)+a(x_3+y_3), b(x_1+y_1)-a(x_2+y_2))$

$T(u) = T((x_1,x_2,x_3)) = (x_1,x_2,x_3) \times (a,b,c)$

$= (cx_2 - bx_3, -cx_1+ax_3, bx_1-ax_2)$

$T(v) = T((y_1,y_2,y_3)) = (y_1,y_2,y_3) \times (a,b,c)$

$= (cy_2 - by_3, -cy_1+ay_3, by_1-ay_2)$

$T(u)+T(v) = (cx_2-bx_3, -cx_1+ax_3, bx_1-ax_2) + (cy_2-by_3, -cy_1+ay_3, by_1-ay_2)$

$= (c(x_2+y_2)-b(x_3+y_3), -c(x_1+y_1)+a(x_3+y_3), b(x_1+y_1)-a(x_2+y_2))$

$\therefore T(u+v) = T(u)+T(v)$

$\therefore$ T는 덧셈을보존한다.

Date. / /

$T(\lambda u) = T(\lambda(x_1, x_2, x_3)) = T((\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3) \times (a, b, c)$
$= (\lambda c x_2 - \lambda b x_3, -\lambda c x_1 + \lambda a x_3, \lambda b x_1 - \lambda a x_2)$
$= \lambda (c x_2 - b x_3, -c x_1 + a x_3, b x_1 - a x_2)$
$= \lambda T(u)$

$\therefore$ T는 스칼라 곱도 보존한다.

$\therefore$ 선형변환이다.

(3) 임의의 고정된 행렬 $A \in Mat_{m \times n}(\mathbb{R})$에 대하여 $T: Mat_{n \times r}(\mathbb{R}) \to Mat_{m \times r}(\mathbb{R})$, $T(X) = AX$.

두벡터 $X, Y \in Mat_{n \times r}(\mathbb{R})$과 스칼라 $\lambda \in \mathbb{R}$에 대하여

$T(X+Y) = A(X+Y) = AX + AY = T(X) + T(Y)$

$\therefore$ T는 덧셈을 보존한다.

$T(\lambda X) = A(\lambda X) = \lambda(AX) = \lambda T(X)$

$\therefore$ T는 스칼라 곱도 보존한다.

$\therefore$ 선형 변환이다.

(4) $T: P_2[x] \to P_2[x]$, $T(a_0 + a_1 x + a_2 x^2) = [a_0] + [a_1]x + [a_2]x^2$.

(임의의 $x \in \mathbb{R}$에 대하여 $[x]$는 $n \le x < n+1$을 만족하는 정수 n이다.)

두벡터 $u, v \in P_2[x]$와 스칼라 $\lambda \in \mathbb{R}$에 대하여

$u = 1.5 + 1.5x + 1.5x^2$, $v = 1.6 + 1.6x + 1.6x^2$라 하자.

$T(u+v) = T(3.1 + 3.1x + 3.1x^2) = [3.1] + [3.1]x + [3.1]x^2 = 3 + 3x + 3x^2$

$T(u) + T(v) = T(1.5 + 1.5x + 1.5x^2) + T(1.6 + 1.6x + 1.6x^2) = ([1.5] + [1.5]x + [1.5]x^2) + ([1.6] + [1.6]x + [1.6]x^2)$
$= (1 + 1x + 1x^2) + (1 + 1x + 1x^2) = 2 + 2x + 2x^2$

$\therefore T(u+v) \neq T(u) + T(v)$

$\therefore$ T는 덧셈을 보존하지 못하므로 선형 변환이 아니다.

Date. / /

(5) 내적공간 V와 영벡터가 아닌 벡터 $w \in V$에 대하여

$T: V \to \langle w \rangle,\ T(v) = \text{proj}_w v$

두벡터 $u, v \in V$, 스칼라 $\lambda \in \mathbb{R}$에 대하여

$T(u+v) = \text{proj}_w(u+v) = \frac{\langle u+v, w \rangle}{\|w\|^2} w = \frac{\langle u, w \rangle}{\|w\|^2} w + \frac{\langle v, w \rangle}{\|w\|^2} w = T(u) + T(v)$

$T(\lambda u) = \text{proj}_w(\lambda u) = \frac{\langle \lambda u, w \rangle}{\|w\|^2} w = \frac{\lambda \langle u, w \rangle}{\|w\|^2} w = \lambda T(u)$

$\therefore$ T는 덧셈과 스칼라곱을 보존하므로 선형변환이다.

#2. 다음 명제들에 대하여 참(True)과 거짓(False)을 판단하여라. 만약, 명제가 참이라면 그 이유를 간단히 설명하고, 거짓인 명제는 참인 명제로 바꿔 적어라.

문제 (1)~(6)에서 $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m (m<n)$은 선형변환이고 T의 표준행렬을 A라고 하자.

$A \in Mat_{m\times n}(\mathbb{R})$라 하면 벡터 $X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$에 대하여 $T(X) = AX$이다.

(1) $\ker(T)$는 A의 행공간이다. ⟨거짓⟩

$\ker(T) = \{X \in \mathbb{R}^n \mid T(X)=0\} = \{X \in \mathbb{R}^n \mid AX=0\}$ 이므로

$\ker(T)$는 제차 연립일차방정식 $AX=0$의 해공간이다.

(2) range (T)는 A의 열공간이다. ⟨참⟩

$\text{range}(T) = \{T(x) \mid x \in \mathbb{R}^n\} = \{AX \mid X \in \mathbb{R}^n\}$ 이므로

range(T)는 A의 열공간이다.

(3) rank(T)는 A의 기약 행 사다리꼴 행렬에서 나타나는 자유변수의 개수이다. ⟨거짓⟩

rank(T)는 A의 기약 행 사다리꼴에서의 영벡터가 아닌 행벡터의 개수

즉, 선행변수의 개수이다. ($\because$ 정의 6.2.ㄴ) $\dim(\text{range}(T)) = \text{rank}(T)$

(4) nullity(T)는 A의 선형독립인 열벡터의 최대 개수이다. ⟨거짓⟩

nullity(T)는 A의 기약 행 사다리꼴 행렬에서 나타나는 자유변수의 개수이다.

(5) $\text{nullity}(T) \le n-m$ ⟨거짓⟩

$\text{nullity}(T) = \text{nullity}(A)$

$n = \text{rank}(A) + \text{nullity}(A)$, $m = \text{rank}(A^T) + \text{nullity}(A^T)$

$n-m = \text{rank}(A) - \text{rank}(A^T) + \text{nullity}(A) - \text{nullity}(A^T)$

$= \text{nullity}(A) - \text{nullity}(A^T)$ ($\because \text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$)

$\therefore \text{nullity}(A) \ge \text{nullity}(A) - \text{nullity}(A^T)$

$\therefore \text{nullity}(T) \ge n-m$

(6) $\text{nullity}(T) = n-m$이면 연립방정식 $AX=B$가 임의의 $B \in \mathbb{R}^m$에 대하여 해를 가진다 ⟨참⟩

$n-m = \text{nullity}(A) - \text{nullity}(A^T) = \text{nullity}(T)$ $\therefore \text{nullity}(A^T) = 0$ $\therefore \text{rank}(A) = m$

$\therefore$ A의 기약행사다리꼴에서의 선행변수의 개수가 m개이므로 A의 역행렬이 존재한다.

$\therefore$ $AX=B$가 임의의 $B \in \mathbb{R}^m$에 대하여 해를 가진다. $(X = A^{-1}B)$

Date. / /

#3. $k \in \mathbb{R}$일 때 함수

$$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ T(x_1, x_2) = (x_1 + kx_2, -x_2)$$

에 대하여 다음의 물음에 답하여라.

(1) 모든 실수 k에 대하여 T는 $\mathbb{R}^2$ 위의 자기 동형변환임을 보여라.

두 벡터 $u = (x_1, x_2)$, $v = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ 와 스칼라 $\lambda \in \mathbb{R}$ 에 대하여

$T(u+v) = T(x_1+y_1, x_2+y_2) = ((x_1+y_1) + k(x_2+y_2), -(x_2+y_2))$

$T(u)+T(v) = T(x_1, x_2) + T(y_1, y_2) = (x_1+kx_2, -x_2) + (y_1+ky_2, -y_2) = (x_1+y_1+k(x_2+y_2), -(x_2+y_2))$

$\therefore T(u+v) = T(u) + T(v)$

$\therefore$ T는 덧셈을 보존한다.

$T(\lambda u) = T(\lambda x_1, \lambda x_2) = (\lambda x_1 + k\lambda x_2, -\lambda x_2) = \lambda(x_1 + kx_2, -x_2) = \lambda T(u)$

$\therefore$ T는 스칼라곱도 보존한다.

$\therefore$ T는 선형변환이다.

$u = (x_1, x_2) \in ker(T)$ 라고 하면

$T(u) = T(x_1, x_2) = (x_1 + kx_2, -x_2) = (0, 0)$

$\therefore x_1 + kx_2 = 0,\ -x_2 = 0$

$\therefore x_1 = 0,\ x_2 = 0$ 이다.

$\therefore u = (0, 0)$, 즉 $ker(T) = \{0\}$ 이므로

정리 6.3.1 에 의해 T는 일대일 변환이다.

$u = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ 이고

$T(u) = T(x_1, x_2) = (x_1 + kx_2, -x_2)$ 이므로

$range(T) = \mathbb{R}^2$ 이다.

위의 사실들에 의하여 T는 동형변환이고

$\mathbb{R}^2$에서 $\mathbb{R}^2$으로의 자기동형 변환이다.

(2) 역변환 $T^{-1}(y_1, y_2)$를 구하여라.

$x_1 + kx_2 = y_1,\ -x_2 = y_2$

$\hookrightarrow x_1 = y_1 + ky_2,\ x_2 = -y_2$

$\therefore T^{-1}(y_1, y_2) = (y_1 + ky_2, -y_2)$ $\quad (T(y_1+ky_2, -y_2) = (y_1, y_2))$

4 선형 연산자 $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$가

$T(1,0,0,0) = (1,-2,4,12)$, $T(1,1,0,0) = (0,6,0,6)$, $T(1,1,1,0) = (2,5,5,24)$, $T(1,1,1,1) = (1,8,2,16)$

일 때, 다음의 물음에 답하여라. $v_1, v_2, v_3, v_4 \in \mathbb{R}^4$

(1) $T(x_1, x_2, x_3, x_4)$를 구하여라. $T(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1 \cdot v_1 + x_2 \cdot v_2 + x_3 \cdot v_3 + x_4 \cdot v_4$ 라 하자.

$1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4 = v_1 = (1,-2,4,12)$

$1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4 = v_1 + v_2 = (0,6,0,6)$ $\therefore v_2 = (-1,8,-4,-6)$

$1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 + 0 \cdot v_4 = v_1 + v_2 + v_3 = (2,5,5,24)$ $\therefore v_3 = (2,-1,5,18)$

$1 \cdot v_1 + 1 \cdot v_2 + 1 \cdot v_3 + 1 \cdot v_4 = v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = (1,8,2,16)$ $\therefore v_4 = (-1,3,-3,-8)$

$\therefore T(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1(1,-2,4,12) + x_2(-1,8,-4,-6) + x_3(2,-1,5,18) + x_4(-1,3,-3,-8))$

$= (x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4,\ -2x_1 + 8x_2 - x_3 + 3x_4,\ 4x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 3x_4,\ 12x_1 - 6x_2 + 18x_3 - 8x_4)$

(2) Ker(T)의 기저와 nullity(T)를 구하여라.

$\mathrm{Ker}(T) = \{v \in \mathbb{R}^4 \mid T(v) = (0,0,0,0)\}$

$x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0$

$-2x_1 + 8x_2 - x_3 + 3x_4 = 0$

$4x_1 - 4x_2 + 5x_3 - 3x_4 = 0$

$12x_1 - 6x_2 + 18x_3 - 8x_4 = 0$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ -2 & 8 & -1 & 3 \\ 4 & -4 & 5 & -3 \\ 12 & -6 & 18 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{41}(-12)]{E_{21}(2),\ E_{31}(-4)} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & 6 & -6 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{42}(-6),\ D_3(-\frac{1}{3})]{D_2(\frac{1}{6}),\ E_{12}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{5}{2} & -\frac{5}{6} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & -9 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[E_{43}(9)]{E_{13}(-\frac{5}{2}),\ E_{23}(-\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$x_4 = t$ 라하면 $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{1}{3}t$, $x_3 = \frac{1}{3}t$ 이다

$\therefore$ Ker(T)의 기저는 $B_K = \{(0, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 1)\}$ 이다. $\therefore B_K\{(0,1,-1,-3)\}$

$\therefore \dim(\mathrm{Ker}(T)) = \mathrm{nullity}(T)$ 이므로 $\mathrm{nullity}(T) = 1$ 이다.

(3) range(T)의 기저와 rank(T)를 구하여라.

$\mathrm{range}(T) = \{T(v) \mid v \in \mathbb{R}^4\}$

$\mathrm{range}(T) = \langle (1,-2,4,12), (-1,8,-4,-6), (2,-1,5,18), (-1,3,-3,-8) \rangle$

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 12 \\ -1 & 8 & -4 & -6 \\ 2 & -1 & 5 & 18 \\ -1 & 3 & -3 & -8 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{31}(-2),\ E_{41}(1)]{E_{21}(1)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 & 12 \\ 0 & 6 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{32}(-3),\ E_{42}(-1)]{D_2(\frac{1}{6}),\ E_{12}(2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 14 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & -9 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow[C_{34}]{E_{34}(3),\ E_{14}(-4)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\therefore$ range(T)의 기저는 $B_r = \{(1,0,0,2), (0,1,0,1), (0,0,1,3)\}$ 이다.

$\therefore \dim(\mathrm{range}(T)) = \mathrm{rank}(T)$ 이므로 $\mathrm{rank}(T) = 3$ 이다.

(4) 역변환 T^{-1}가 존재하는가? 존재한다면 $T^{-1}(y_1, y_2, y_3, y_4)$를 구하고, 존재하지 않는다면 그 이유를 설명하여라.

정리 6.3.1 에 의해

$\ker(T) = \{0\}$ 이 아니므로

일대일 변환이 아니다. $\therefore$ 역변환 T^{-1}가 존재하지 않는다.

#5. $T: V \to W$는 동형변환이고 $B = \{V_1, V_2, \cdots, V_n\}$이 V의 기저일 때,

$$T(B) = \{T(V_1), T(V_2), \cdots, T(V_n)\}$$

이 W의 기저가 됨을 증명하여라.

i) $0 = C_1 T(V_1) + C_2 T(V_2) + \cdots + C_n T(V_n)$

$= T(C_1V_1 + C_2V_2 + \cdots + C_nV_n)$

$T(0) = 0$ 이고 T가 일대일 변환이므로 $(C_1V_1 + C_2V_2 + \cdots + C_nV_n)$은 0 이 된다.

$\{V_1, V_2, \cdots, V_n\}$은 V의 기저이므로 선형독립이다.

$\therefore C_1 = C_2 = \cdots = C_n = 0$ 이 위 식을 만족하는 유일한 해이다.

$\therefore \{T(V_1), T(V_2), \cdots T(V_n)\}$은 선형독립이다.

ii) 벡터 y에 대해 $T(x) = y$를 만족하는 V의 벡터 x가 존재한다. $(x = C_1V_1 + C_2V_2 + \cdots + C_nV_n)$

$\therefore y = T(C_1V_1 + C_2V_2 + \cdots + C_nV_n) = C_1T(V_1) + C_2T(V_2) + \cdots + C_nT(V_n)$ (W의 임의의 벡터 y가 $T(B)$의 선형결합으로 표현

$\therefore \{T(V_1), T(V_2), \cdots, T(V_n)\}$이 W를 생성한다.

i), ii) 에 의해 $T(B)$가 W의 기저가 된다.

#6. $W = \{A \in Mat_{2\times2}(\mathbb{R}) \mid A^T = A\}$ 라고 할 때, $W \cong \mathbb{R}^3$을 증명하여라.

W의 순서기저 $B = \left\{\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix}\right\}$를 선택하면 각 벡터 $v \in V$는 단 한가지 방법의 선형결합 $v = C_1\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix} + C_2\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix} + C_3\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix}$ $(C_1, C_2, C_3 \in \mathbb{R})$

으로 나타내어진다. $T_B: W \to \mathbb{R}^3$, $T_B\left(\begin{bmatrix}a&b\\b&c\end{bmatrix}\right) = (a, b, c)$

따라서 위 함수가 잘 정의된다는 사실을 알 수 있다.

두 벡터 $u = C_1\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix} + C_2\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix} + C_3\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix}$, $v = d_1\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix} + d_2\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix} + d_3\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix} \in W$와 스칼라 $\lambda \in \mathbb{R}$에 대하여

$u + v = C_1\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix} + C_2\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix} + C_3\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix} + d_1\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix} + d_2\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix} + d_3\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix}$

$= (C_1+d_1)\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix} + (C_2+d_2)\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix} + (C_3+d_3)\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix}$ 이고

$\lambda u = \lambda\left(C_1\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix} + C_2\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix} + C_3\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix}\right) = (\lambda C_1)\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix} + (\lambda C_2)\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix} + (\lambda C_3)\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix}$ 이다.

따라서 $T_B(u+v) = (c_1+d_1, c_2+d_2, c_3+d_3)$

$= (c_1, c_2, c_3) + (d_1, d_2, d_3) = T_B(u) + T_B(v)$

이므로 T_B는 덧셈을 보존한다.

$T_B(\lambda u) = (\lambda c_1, \lambda c_2, \lambda c_3) = \lambda(c_1, c_2, c_3) = \lambda T_B(u)$

이므로 T_B는 스칼라곱도 보존한다. 그러므로 T_B는 선형변환이다.

다음으로 $v = c_1\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix} + c_2\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix} \in \ker(T_B)$ 라고하면

$T_B(v) = (c_1, c_2, c_3) = (0,0,0)$ 이므로 $c_1=0, c_2=0, c_3=0$ 이다.

따라서 $v = 0\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix} = 0$.

즉 $\ker(T_B) = \{0\}$ 이므로 정리 6.3.1 에의하여 T_B는 일대일변환이다.

마지막으로, $B = \left\{\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix}\right\}$는 W의 기저 이므로 $\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix}, \begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix}$ 의 모든 선형결합은 W의 원소이다.

따라서 임의의 벡터 $(c_1, c_2, c_3) \in \mathbb{R}^3$ 에 대하여

$v = c_1\begin{vmatrix}1&0\\0&0\end{vmatrix} + c_2\begin{vmatrix}0&1\\1&0\end{vmatrix} + c_3\begin{vmatrix}0&0\\0&1\end{vmatrix} \in W$

이고 $T_B(v) = (c_1, c_2, c_3)$ 이므로 $\mathrm{range}(T_B) = \mathbb{R}^3$ 이다.

위 사실들에 의하여 T_B는 동형변환이고 따라서 $W \cong \mathbb{R}^3$ 이다.

#7. 벡터공간 $P_2[x]$의 두 순서기저

$B = \{1+x, x+x^2, 1+x^2\}$, $R = \{1, 1+x, 1+x+x^2\}$

에 대하여 다음의 물음에 답하여라.

(1) 기저 B에서 기저 R으로의 전이행렬을 구하여라.

$(1+x) = 0(1) + 1(1+x) + 0(1+x+x^2) \Rightarrow [(1+x)]_R = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$

$(x+x^2) = (-1)(1) + 0(1+x) + 1(1+x+x^2) \Rightarrow [(x+x^2)]_R = \begin{bmatrix}-1\\0\\1\end{bmatrix}$

$(1+x^2) = 1(1) + (-1)(1+x) + 1(1+x+x^2) \Rightarrow [(1+x^2)]_R = \begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$

전이행렬 $P = \begin{bmatrix}0&-1&1\\1&0&-1\\0&1&1\end{bmatrix}$

(2) 다항식 $p(x) \in P_2[x]$에 대하여 $[p(x)]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 일 때, $p(x)$와 $[p(x)]_R$을 구하여라.

$[p(x)]_B = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow (-1)(1+x) + (-1)(x+x^2) + 2(1+x^2) = (1-2x+x^2) = p(x)$

$p(x) = (1-2x+x^2) = 3(1) + (-3)(1+x) + 1(1+x+x^2) \Rightarrow [p(x)]_R = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

(3) 다항식 $q(x) \in P_2[x]$에 대하여 $[q(x)]_R = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$ 일 때, $q(x)$와 $[q(x)]_B$를 구하여라.

$[q(x)]_R = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} \Rightarrow (-1)(1) + 3(1+x) + (-2)(1+x+x^2) = (x-2x^2) = q(x)$

$q(x) = (x-2x^2) = \frac{3}{2}(1+x) + (-\frac{1}{2})(x+x^2) + (-\frac{3}{2})(1+x^2) \Rightarrow [q(x)]_B = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$