컴퓨터공학과/ 201716301/ 남주형

2.2절 Gauss-Jordan 소거법

#1 기약 행 사다리꼴 행렬(reduced row-echelon form matrix)을 정의하여라.(즉, 정의를 정확히 적어라.)

$m \times n$ 크기의 행렬이 존재할때

(1) 만약 모든 성분이 0으로만 이루어진 행(영행, zero row)가 존재한다면 행렬의 제일 아래에 위치한다.

(2) 영행을 제외한 각 행에서 처음으로 나타나는 0이 아닌성분은 반드시 1이다. (이 때의 1을 "leading 1" 이라고 부른다.)

(3) 아래 행의 "leading 1"은 위의 행의 "leading 1"보다 같거나 왼쪽의 열에 위치하지 않는다.

(4) "leading 1"을 포함한 각 열에서 "leading 1"을 제외한 다른 성분은 모두 0이다.

조건 (1)~(3)을 만족하는 행렬은 행 사다리꼴 행렬(row-echelon form matrix)라고 하고

(1)~(4)의 네 가지 조건을 모두 만족하는 행렬은 기약 행 사다리꼴 행렬(reduced row-echelon form matrix) 라고 한다.

#2 다음의 행렬이 기약 행 사다리꼴 행렬인지를 판단하여라. 만약 기약 행 사다리꼴 행렬이 아니라면 그 이유를 말하고 적절한 기본 행 연산을 실시하여 기약 행 사다리꼴 행렬로 만들어라.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{D_2(\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

↳ 2행에서 0이 아닌 처음으로 나타나는 성분이 2이기 때문에 기약 행 사다리꼴이 아니다.

(∵ 정의 2.2.1-(2))

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ 기약 행 사다리꼴 이다

∵ 정의 2.2.1-(1)~(4) 만족

(3) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_{23}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

↳ 정의 2.2.1-(1) 에 의해 기약 행 사다리꼴 행렬이 아니다.

(4) $\begin{bmatrix} 1 & -7 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{12}(7)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 26 & 19 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

↳ 정의 2.2.1-(4)에 의해 기약 행 사다리꼴 행렬이 아니다.

컴퓨터공학과/20171630/남주형

(5) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_{23}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{13}(2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

↳ 정의 2.2.1-(3),(4)를
만족하지 못하므로 기약 행
사다리꼴 행렬이 아니다.

(6) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_{21}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{32}(-1)]{E_{12}(1)} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{D_3(-\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix}$

↳ 정의 2.2.1-(3),(4)를
만족하지 못하므로 기약 행 사다리꼴 행렬이 아니다.

(7) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{13}(7)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

↳ 정의 2.2.1-(4)를 만족하지 못하므로
기약 행 사다리꼴 행렬이 아니다.

(8) $\begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

↳ 정의 2.2.1-(1)~(4)를 만족하므로
기약 행 사다리꼴 행렬이다.

컴퓨터공학과/20171630/남주형

#3 다음의 기약행 사다리꼴 행렬이 나타내는 연립선형방정식의 해를 벡터를 이용하여 나타내어라.
(보기 2.2.3에서의 해의 표현법을 참고하여라.)

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -2x_2 + 1 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 2 \end{cases}$ 자유변수 x_2에대해 $\rightarrow$ $x_2 = s$ 라고하면 $\rightarrow \begin{cases} x_1 = -2s + 1 \\ x_2 = s \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 2 \end{cases}$ $(s \in R)$

$$\therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \quad (s \in R)$$

(2) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_2 + 1 \\ x_3 = -\frac{1}{2}x_4 \end{cases} \rightarrow$ $x_2 = s, x_4 = t$ 라고하면 $\rightarrow \begin{cases} x_1 = 3s + 1 \\ x_2 = s \\ x_3 = -\frac{1}{2}t \\ x_4 = t \end{cases}$ $(s, t \in R)$

$$\therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (s, t \in R)$$

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix} \rightarrow x_1 = -2x_2 - 3x_3 + 4 \rightarrow$ $x_2 = s, x_3 = t$ 라고하면 $\rightarrow \begin{cases} x_1 = -2s - 3t + 4 \\ x_2 = s \\ x_3 = t \end{cases}$ $(s, t \in R)$

$$\therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (s, t \in R)$$

(4) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -5x_2 + 3 \\ x_3 = -4 \end{cases} \rightarrow$ $x_2 = s$ 라고하면 $\begin{cases} x_1 = -5s + 3 \\ x_2 = s \\ x_3 = -4 \end{cases}$ $(s \in R)$

$$\therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix} \quad (s \in R)$$

컴퓨터공학과/20171630/남주형

#4 Gauss-Jordan 소거법을 이용하여 연립선형 방정식의 해를 구하여라. 단, 벡터를 이용하여 해를 나타내어라.

(1) $\begin{cases} 2x_1+2x_2+2x_3=0 \\ -2x_1+5x_2+2x_3=1 \\ 8x_1+x_2+4x_3=-1 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{D_1(\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 5 & 2 & 1 \\ 8 & 1 & 4 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{21}(2),\ E_{31}(-8)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 7 & 4 & 3 \\ 0 & -7 & -4 & -9 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{D_2(\frac{1}{7})} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & -7 & -4 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{12}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} & -\frac{3}{7} \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & -7 & -4 & -9 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{32}(7)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} & -\frac{3}{7} \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow{D_3(-\frac{1}{6})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} & -\frac{3}{7} \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & \frac{3}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{E_{13}(\frac{3}{7}),\ E_{23}(-\frac{3}{7})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{7} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{4}{7} & 0 \\ \boxed{0 \quad 0 \quad 0 \quad 1} \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} x_1 = -\frac{3}{7}x_3 \\ x_2 = -\frac{4}{7}x_3 \\ \boxed{0x_1+0x_2+0x_3=1} \end{cases}$

→ 이 방정식은 해를 가지지 않는다.

따라서 연립방정식의 해가 존재하지않는다.

(2) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 \qquad\qquad - 3x_4 = -3 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_{14}} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & -3 & -3 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{D_1(\frac{1}{3})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & 2 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-2),\ E_{31}(1),\ E_{41}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{32}(-2),\ E_{42}(1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\rightarrow \begin{cases} x_1 = x_4 - 1 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases} \rightarrow x_3 = s,\ x_4 = t \ (s, t \in R) \rightarrow \begin{cases} x_1 = t - 1 \\ x_2 = 2s \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

컴퓨터공학과/20171630/남주형

(3) $\begin{cases} -2x_2+3x_3=1 \\ 3x_1+6x_2-3x_3=-2 \\ 6x_1+6x_2+3x_3=5 \end{cases} \to \begin{bmatrix} 0 & -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & -3 & -2 \\ 6 & 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{C_{12}} \begin{bmatrix} 3 & 6 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 6 & 6 & 3 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{D_1(\frac{1}{3})} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 6 & 6 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{E_{31}(-6)} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -6 & 9 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{D_2(-\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -6 & 9 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{32}(6)]{E_{12}(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{D_3(\frac{1}{6})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{23}(\frac{1}{2})]{E_{13}(-\frac{1}{3})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} \end{bmatrix}$

$0x_1+0x_2+0x_3=1$ → 해가 존재하지 않는다.

(4) $\begin{cases} 2x_1-3x_2=-2 \\ 2x_1+x_2=2 \\ 3x_1+2x_2=1 \end{cases} \to \begin{bmatrix} 2 & -3 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{D_1(\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{31}(-3)]{E_{21}(-2)} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & \frac{13}{2} & 4 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{D_2(\frac{1}{4})} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{13}{2} & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{32}(-\frac{13}{2})]{E_{12}(\frac{3}{2})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\frac{5}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{D_3(-\frac{2}{5})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{23}(-1)]{E_{13}(-\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{1} \end{bmatrix}$

$0x_1+0x_2=1$ → 해가 존재하지 않는다.

(5) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-4x_4=1 \\ x_1+3x_2+7x_3+2x_4=2 \\ x_1-12x_2-11x_3-16x_4=5 \end{cases} \to \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 7 & 2 & 2 \\ 1 & -12 & -11 & -16 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{31}(-1)]{E_{21}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 6 & 1 \\ 0 & -14 & -12 & -12 & 4 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{D_2(\frac{1}{5})} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} & \frac{6}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & -14 & -12 & -12 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{32}(14)]{E_{12}(2)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{17}{5} & -\frac{8}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} & \frac{6}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & \frac{24}{5} & \frac{24}{5} & \frac{34}{5} \end{bmatrix} \xrightarrow{D_3(\frac{5}{24})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{17}{5} & -\frac{8}{5} & \frac{7}{5} \\ 0 & 1 & \frac{6}{5} & \frac{6}{5} & \frac{1}{5} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{17}{12} \end{bmatrix}$

$\xrightarrow[E_{23}(-\frac{6}{5})]{E_{13}(-\frac{17}{5})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -5 & -\frac{41}{12} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 & \frac{17}{12} \end{bmatrix} \to \begin{cases} x_1=5x_4-\frac{41}{12} \\ x_2=-\frac{3}{2} \\ x_3=-x_4+\frac{17}{12} \end{cases} \to x_4=s \ (s\in R) \to \begin{cases} x_1=5s-\frac{41}{12} \\ x_2=-\frac{3}{2} \\ x_3=-s+\frac{17}{12} \\ x_4=s \end{cases} \to \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -\frac{41}{12} \\ -\frac{3}{2} \\ \frac{17}{12} \\ 0 \end{bmatrix}$

$(s\in R)$

컴퓨터공학과/20171630/남주형

(6) $\begin{cases} x_2+3x_3-2x_4=0 \\ 2x_1+x_2-4x_3+3x_4=0 \\ 2x_1+3x_2+2x_3-x_4=0 \\ -4x_1-3x_2+5x_3-4x_4=0 \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ -4 & -3 & 5 & -4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_{12}} \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ -4 & -3 & 5 & -4 & 0 \end{bmatrix}$

$\xrightarrow{D_1(\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -2 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & -1 & 0 \\ -4 & -3 & 5 & -4 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{41}(4)]{E_{31}(-2)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & -2 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & -4 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{32}(-2),\ E_{42}(1)]{E_{12}(-\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{7}{2} & \frac{5}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{7}{2}x_3 - \frac{5}{2}x_4 \\ x_2 = -3x_3 + 2x_4 \end{cases} \rightarrow x_3 = s,\ x_4 = t \ (s,t \in R) \rightarrow \begin{cases} x_1 = \frac{7}{2}s - \frac{5}{2}t \\ x_2 = -3s + 2t \\ x_3 = s \\ x_4 = t \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ -3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} -\frac{5}{2} \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} t$

$(s,t \in R)$

#5 다음 등식을 만족하는 행렬 X가 존재한다면 모두 구하여라. 만약 존재하지 않는다면 그 이유를 설명하여라

(1) $AX = B$

$X = A^{-1}B$

$\underset{A}{\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}} X = \underset{B}{\begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 & 8 \\ 4 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}}$

A의 역행렬을 구하면 $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{21}(-2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{E_{23}(-2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[E_{32}(-2)]{E_{12}(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -2 & 5 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{13}(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 4 & -2 & 5 \end{array}\right]$

$\xrightarrow{D_3(-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 2 & -5 \end{array}\right] \rightarrow \therefore A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \\ -4 & 2 & -5 \end{bmatrix}$

$X = A^{-1}B$

$\therefore X = \begin{pmatrix} 11 & 12 & -3 & 27 & 26 \\ -6 & -8 & 1 & -18 & -17 \\ -15 & -21 & 9 & -38 & -35 \end{pmatrix}$

컴퓨터공학과 / 20171630 / 남주형

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}_A X = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}_B$

$X = A^{-1}B$

∴ A^{-1}을 구하면

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[E_{31}(-2)]{E_{21}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{D_2(-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[E_{32}(1)]{E_{12}(-1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] \rightarrow A^{-1} \text{가 존재하지 않는다.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + 2x_{31} &= 2 \\ x_{11} + 2x_{31} &= 0 \\ 2x_{11} + x_{21} + 3x_{31} &= 2 \end{aligned}\right) \rightarrow \begin{aligned} x_{11} &= 0 \\ x_{21} &= 2 \\ x_{31} &= 0 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} x_{12} + x_{22} + 2x_{32} &= -1 \\ x_{12} + 2x_{32} &= 3 \\ 2x_{12} + x_{22} + 3x_{32} &= -2 \end{aligned}\right) \rightarrow \begin{aligned} x_{12} &= 5 \\ x_{22} &= -4 \\ x_{32} &= 4 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} x_{13} + x_{23} + 2x_{33} &= -3 \\ x_{13} + 2x_{33} &= 2 \\ 2x_{13} + x_{23} + 3x_{33} &= -1 \end{aligned}\right) \rightarrow \begin{aligned} x_{13} &= 2 \\ x_{23} &= -5 \\ x_{33} &= 0 \end{aligned}$$

$$\therefore X = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 \\ 2 & -4 & -5 \\ 0 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

(3) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}_A X = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}_B$

→ A가 정사각 행렬이 아니기때문에
역행렬이 존재하지않는다.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_{11} - x_{21} &= 1 \\ -x_{11} + 3x_{21} &= 7 \\ x_{11} - x_{21} &= -1 \end{aligned}\right) \begin{aligned} x_{11} &= 2 \\ x_{21} &= 3 \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_{12} - x_{22} &= 5 \\ -x_{12} + 3x_{22} &= 0 \\ x_{12} - x_{22} &= 2 \end{aligned}\right) \begin{aligned} x_{12} &= 3 \\ x_{22} &= 1 \end{aligned}$$

$$\therefore X = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

컴퓨터공학과 / 20171630 / 남주형

(4) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & 3 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

X는 4x3 행렬이다.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x_{11} - x_{21} + x_{31} + 3x_{41} = 1 \\ -2x_{11} - x_{31} = 1 \\ 6x_{11} - x_{21} + 3x_{31} + 3x_{41} = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x_{12} - x_{22} + x_{32} + 3x_{42} = 2 \\ -2x_{12} - x_{32} = -1 \\ 6x_{12} - x_{22} + 3x_{32} + 3x_{42} = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x_{13} - x_{23} + x_{33} + 3x_{43} = 0 \\ -2x_{13} - x_{33} = 0 \\ 6x_{13} - x_{23} + 3x_{33} + 3x_{43} = -1 \end{cases} \rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ -2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 6 & -1 & 3 & 3 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow[E_{31}(-3)]{E_{21}(1)} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -6 & -1 \end{array}\right] \xrightarrow{E_{32}(2)} \left[\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 3 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{-1} \end{array}\right]$$

$0x_{13} + 0x_{23} + 0x_{33} + 0x_{43} = -1$ ∴ X는 존재하지 않는다.

6 상수 a,b,c에 대하여 다음의 연립선형방정식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a \\ 2x_1 + 2x_3 = b \\ 3x_2 + 3x_3 = c \end{cases} \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & 0 & 2 & b \\ 0 & 3 & 3 & c \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{21}(-2)} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & -2 & 0 & (b-2a) \\ 0 & 3 & 3 & c \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{D_2(-\frac{1}{2})} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2a-b}{2} \\ 0 & 3 & 3 & c \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{32}(-3)]{E_{12}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & (\frac{b}{2}) \\ 0 & 1 & 0 & (a-\frac{b}{2}) \\ 0 & 0 & 3 & (c-3a+\frac{3b}{2}) \end{bmatrix} \xrightarrow{D_3(\frac{1}{3})} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & \frac{b}{2} \\ 0 & 1 & 0 & (a-\frac{b}{2}) \\ 0 & 0 & 1 & (\frac{c}{3}-a+\frac{b}{2}) \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{E_{13}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & (a-\frac{c}{3}) \\ 0 & 1 & 0 & a-\frac{b}{2} \\ 0 & 0 & 1 & (-a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3}) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{aligned} x_1 &= a-\frac{c}{3} \\ x_2 &= a-\frac{b}{2} \\ x_3 &= -a+\frac{b}{2}+\frac{c}{3} \end{aligned}$$

컴퓨터 공학과 / 20171630 / 남주형

#7 다음 연립선형 방정식이 해를 가지도록 실수 k의 값을 구하여라. 그리고 그 때의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -9 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 4 \\ 5x_1 - 10x_2 + 7x_3 - 7x_4 = k \end{cases} \to \begin{bmatrix} 3 & -6 & 2 & -2 & -9 \\ 2 & -4 & 3 & -3 & 4 \\ 5 & -10 & 7 & -7 & k \end{bmatrix} \xrightarrow{E_{12}(-1)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & -13 \\ 2 & -4 & 3 & -3 & 4 \\ 5 & -10 & 7 & -7 & k \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[E_{31}(-5)]{E_{21}(-2)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & -13 \\ 0 & 0 & 5 & -5 & 30 \\ 0 & 0 & 12 & -12 & (k+65) \end{bmatrix} \xrightarrow{D_2(\frac{1}{5})} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 & 1 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 12 & -12 & (k+65) \end{bmatrix} \xrightarrow[E_{32}(-12)]{E_{12}(1)} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 \\ \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{0} & \boxed{(k-7)} \end{bmatrix}$$

해를 가질려면 $k=7$이여야한다.

$\therefore k=7$

$$\to \begin{cases} x_1 = 2x_2 - 7 \\ x_3 = x_4 + 6 \end{cases} \to \begin{matrix} x_2 = s,\ x_4 = t \\ \text{라할 때} \\ (s, t \in R) \end{matrix} \to \begin{cases} x_1 = 2s - 7 \\ x_2 = s \\ x_3 = t + 6 \\ x_4 = t \end{cases}$$

$$\therefore \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} s + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} t + \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$