2.3 기본행렬(Elementary Matrix)와 역행렬(Inverse Matrix)

정 의 2.3.1 n 차의 항등행렬 I_n 에 기본 행 연산 $E \in \{C_{ij}, D_i(k), E_{ij}(k)\}$를 한 번만 시행하여 얻은 행렬을 n 차의 **기본행렬**(elemmentary matrix)이라고 하며 기본 행 연산과 동일한 기호를 이용하여 나타낸다.

보 기 2.3.1 3 차의 기본행렬 C_{23} 는

$$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = C_{23}$$

이고 4 차의 기본행렬 $E_{31}(-2)$ 는

$$I_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_{31}(-2)$$

이다.

기본행렬을 나타내는 기호는 기본 행 연산을 나타내는 기호 $C_{ij}, D_i(k), E_{ij}(k)$ 와 동일한 기호를 이용하여 나타낸다. 문맥의 전후 사정을 통하여 이러한 기호가 연산을 나타내는지 또는 행렬을 나타내는지 주의 깊게 파악하여야 할 것이다.

정 리 2.3.1 $m \times n$ 행렬 A 에 기본 행 연산 $E \in \{C_{ij}, D_i(k), E_{ij}(k)\}$를 한 번 시행하여 얻은 행렬을 A' 이라고 하면 m 차의 기본행렬 E 에 대하여

$$A' = EA$$

이다.

보 기 2.3.2 아래와 같이 3×4 행렬 A 에 기본 행 연산 $E_{31}(-2)$ 을 시행하면 A' 을 얻는다.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 6 & 5 & 4 \end{bmatrix} = A'$$

이 때 3 차의 기본행렬 $E_{31}(-2)$ 에 대하여 $A' = E_{31}(-2)A$ 이다.

Written by Cho, sunghee

$$E_{31}(-2)A=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\9&10&11&12\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\5&6&7&8\\7&6&5&4\end{bmatrix}=A'$$

정 리 2.3.2 기본행렬은 모두 가역행렬이다. 또한 기본행렬의 역행렬 또한 같은 유형의 기본행렬이다. 실제로 기본행렬의 역행렬은 다음과 같다.

$$C_{ij}^{-1}=C_{ij}\ ,\ D_i(k)^{-1}=D_i\left(\frac{1}{k}\right)\ ,\ E_{ij}(k)^{-1}=E_{ij}(-k).$$

【증명】 항등행렬 I_n에 기본 행 연산 C_{ij}를 시행하여 얻은 행렬이 기본행렬 C_{ij}이므로 기본행렬 C_{ij}에 기본 행 연산 C_{ij}를 시행하면 다시 I_n을 얻는다. 정리 2.3.1에 의하여 $I_n=C_{ij}C_{ij}$ 이고 따라서 $C_{ij}^{-1}=C_{ij}$이다. 나머지 두 가지 기본행렬의 경우에도 같은 방법으로 보일 수 있다. □

정 리 2.3.3 A를 $n\times n$ 크기의 정사각 행렬이라고 할 때, 다음의 네 가지의 명제는 모두 동치(equivalent)이다.

(1) A는 가역행렬이다.

(2) 제차 연립선형방정식 $AX=O$은 자명한 해 $X=O$를 유일하게 가진다.

(3) A의 기약 행 사다리꼴 행렬은 n차의 항등행렬 I_n이다.

(4) A를 기본행렬들의 곱으로 나타낼 수 있다.

【증명】 (1)⇒(2) A를 가역행렬이라고 하면 역행렬 A^{-1}가 존재한다. A^{-1}를 연립선형방정식 $AX=O$ 양변의 왼쪽에 곱해주면

$$X=I_nX=(A^{-1}A)X=A^{-1}(AX)=A^{-1}O=O$$

이다.

(2)⇒(3) $A=[a_{ij}]_{n\times n}$이라고 하자. 연립방정식 $AX=O$가 자명한 해 $X=O$만을 유일하게 가진다는 사실을 행렬을 이용한 Gauss-Jordan 소거법으로 표현하면

$$\left[\begin{array}{cccc|c}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}&0\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}&0\\\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}&0\end{array}\right]\Rightarrow\cdots\cdots\Rightarrow\left[\begin{array}{cccc|c}1&0&\cdots&0&0\\0&1&\cdots&0&0\\\vdots&\vdots&\ddots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&1&0\end{array}\right]$$

이다. 따라서 계수행렬 A의 기약 행 사다리꼴 행렬은 I_n이다.

(3)⇒(4) A에 기본 행 연산을 유한 번 실시해서 I_n을 얻었다고 가정하자. 즉

$$A\overset{E_1}{\Rightarrow}A_1\overset{E_2}{\Rightarrow}A_2\overset{E_3}{\Rightarrow}\cdots\cdots\overset{E_k}{\Rightarrow}I_n$$

이라고 하면, 정리 2.3.1 에 의하여 다음이 성립한다.

$$\begin{aligned} A_1 &= E_1 A, \\ A_2 &= E_2 A_1 = E_2 E_1 A, \\ A_3 &= E_3 A_2 = E_3 E_2 E_1 A, \\ &\ \ \vdots \\ I_n &= E_k \cdots E_3 E_2 E_1 A. \end{aligned}$$

즉 $[E_k \cdots E_3 E_2 E_1] A = I_n$ 이다. 양변의 좌측에 $E_k^{-1}, \ldots, E_3^{-1}, E_2^{-1}, E_1^{-1}$를 차례대로 곱하면

$$A = E_1^{-1} E_2^{-1} E_3^{-1} \cdots E_k^{-1}$$

이다. 기본행렬의 역행렬도 기본행렬이므로 A는 기본행렬의 곱으로 나타내어진다.
(4)⇒(1) A가 기본행렬들의 곱이라고 하자. 정리 2.3.2에 의하여 기본행렬은 가역행렬이다. 또한 정리 1.1.3의 (5)에 의하여 유한 개 의 가역행렬들의 곱 역시 가역행렬이므로 A는 가역행렬임을 자명하게 알 수 있다. □

정리 2.3.3을 이용하면 $n \times n$ 크기의 정사각 행렬 A가 가역행렬인지 아닌지를 알 수 있고, 만약 가역행렬이라면 역행렬 A^{-1}도 구할 수 있다. 먼저 A의 기약 행 사다리꼴 행렬을 구한다. 기약 행 사다리꼴 행렬이 I_n이라면 A는 가역행렬이고, I_n을 구하는 과정에서 실시한 기본 행 연산 $E_1, E_2, \ldots, E_k$에 대한 기본행렬을 반대의 순서로 곱한 행렬

$$E_k \cdots E_2 E_1$$

이 A의 역행렬 A^{-1}이다. 역으로 A의 기약 행 사다리꼴 행렬이 I_n이 아니라면 A는 가역행렬이 아니다.

이러한 과정을 다음과 같은 방법으로 실시하면 A가 가역행렬인지의 여부를 좀 더 쉽게 판단할 수 있고 또한 가역행렬인 경우에는 그의 역행렬도 구할 수 있다.
주어진 $n \times n$ 크기의 정사각행렬 A의 오른쪽에 n차의 항등행렬 I_n을 덧붙인 $n \times 2n$ 크기의 행렬 $[A\ I_n]$ 을 생각하고, 이 행렬에 기본 행 연산 $E_1, E_2, \ldots, E_k$를 실시하여 얻은 행렬을 $[R\ A']$이라고 하자. 즉,

$$[A\ I_n] \Rightarrow [E_1 A\ E_1] \Rightarrow [E_2 E_1 A\ E_2 E_1] \Rightarrow \cdots \Rightarrow [R\ A']$$

라고 하자. 만약 $R = I_n$이면, A는 가역행렬이고 $A' = A^{-1}$이다. 또한 $R \neq I_n$이면 A는 가역행렬이 아니다.

 Written by Cho, sunghee

보 기 2.3.3 다음의 행렬 A와 B가 가역행렬인지를 알아보고 가역행렬이라면 역행렬을 구해보자.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&5&3\\1&0&8\end{bmatrix}\ ,\quad B=\begin{bmatrix}1&4&6\\2&-1&4\\-1&5&2\end{bmatrix}$$

덧붙인 행렬 $[\ A\ \ I_3\ ]$의 기약 행 사다리꼴 행렬을 구해보면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix}1&2&3&1&0&0\\2&5&3&0&1&0\\1&0&8&0&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&2&3&1&0&0\\0&1&-3&-2&1&0\\0&-2&5&-1&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&9&5&-2&0\\0&1&-3&-2&1&0\\0&0&-1&-5&2&1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1&0&9&5&-2&0\\0&1&-3&-2&1&0\\0&0&1&5&-2&-1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&0&0&-40&16&9\\0&1&0&13&-5&-3\\0&0&1&5&-2&-1\end{bmatrix}$$

마지막에 나타나는 기약 행 사다리꼴 행렬에서 A의 부분에 해당하는 왼쪽의 3×3 행렬이 I_3 이므로 행렬 A는 가역행렬이고 역행렬은 오른쪽 3×3 행렬인

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-40&16&9\\13&-5&-3\\5&-2&-1\end{bmatrix}$$

이다.

같은 방법으로 덧붙인 행렬 $[\ B\ \ I_3\ ]$의 기약 행 사다리꼴 행렬을 구하기 위해서 기본 행 연산을 몇 번 시행하면 다음의 행렬을 얻게 된다.

$$\begin{bmatrix}1&4&6&1&0&0\\2&-1&4&0&1&0\\-1&5&2&0&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&4&6&1&0&0\\0&-9&-8&-2&1&0\\0&9&8&1&0&1\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&4&6&1&0&0\\0&-9&-8&-2&1&0\\0&0&0&-1&1&1\end{bmatrix}$$

마지막 행렬은 $[\ B\ \ I_3\ ]$의 기약 행 사다리꼴 행렬은 아니다. 하지만 기약 행 사다리꼴 행렬이 다음과 같음을 짐작할 수 있다.

$$\begin{bmatrix}1&0&*&0&*&*\\0&1&*&0&*&*\\0&0&0&1&*&*\end{bmatrix}$$

즉, 행렬 B 의 기약 행 사다리꼴 행렬이 I_3가 아닌 것이 예상된다. 따라서 B는 가역행렬이 아니다.

Written by Cho, sunghee

제3장 행렬식(Determinant)

3.1 행렬식의 계산

행렬의 행렬식은 정사각 행렬에 대해서만 정의되는 값(value)으로서 $n \times n$ 크기의 정사각 행렬

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

에 대하여 행렬 A 의 **행렬식**(determinant)를 다음과 같은 기호를 이용하여 나타낸다.

$$|A| \ , \ \det A \ \text{ 또는 } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

먼저, 1×1 크기의 행렬 $A = [a]$ 에 대하여 $\det A = a$ 이다. 그리고 2×2 크기의 행렬

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

에 대하여

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

이다.

일반적인 $n \times n$ 크기의 정사각 행렬에 대한 행렬식을 구하기 위해서 다음의 정의를

알아보자.

정 의 3.1.1 $n\times n$ 크기의 정사각 행렬

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

에서 임의의 한 행(i번째 행)과 한 열(j번째 열)을 제거한 $(n-1)\times(n-1)$크기의 행렬의 행렬식을 A의 (i,j)번째 **소행렬식**(minor)이라 하고 M_{ij}로 나타낸다. 또한, 다음의 값

$$(-1)^{i+j}M_{ij}$$

을 행렬 A의 (i,j)번째 **여인수**(cofactor)라고 하며 C_{ij}로 나타낸다.

보 기 3.1.1 3×3크기의 행렬

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

에서 $(2,3)$번째 소행렬식은

$$M_{23}=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}=2\cdot 4-1\cdot(-1)=9$$

이고 $(2,3)$번째 여인수는

$$C_{23}=(-1)^{2+3}M_{23}=(-1)\cdot 9=-9$$

이다.

정 리 3.1.1 $n\times n$ 크기의 정사각 행렬

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

에 대하여, 임의의 i번째 행에 대해서 계산한 다음의 값

$$a_{i1}C_{i1}+a_{i2}C_{i2}+\cdots+a_{ij}C_{ij}+\cdots+a_{in}C_{in}$$

와 임의의 j번째 열에 대해서 계산한 다음의 값

$$a_{1j}C_{1j}+a_{2j}C_{2j}+\cdots+a_{ij}C_{ij}+\cdots\ a_{nj}C_{nj}$$

는 모두 같은 값이며 그 값이 A의 행렬식, $\det A$, 이다. 이러한 표현을 A의 행렬식

의 i번째 행(j번째 열)에 대한 **전개식**(expansion)이라고 한다.

정리 3.1.1에서 말한 바와 같이 행렬식을 임의의 i번째 행 또는 j번째 열에 대하여 전개하여도 같은 값이 계산된다. 이 사실에 대한 증명은 생략하지만 실제의 계산을 통하여 각자 충분히 연습해보길 바란다.

보 기 3.1.2 행렬

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

의 행렬식을 구해보자. 행렬 A를 살펴보면 2행과 1열이 성분 "0"을 하나씩 포함하므로 2행 또는 1열에 대하여 행렬식을 전개하는 것이 효율적이다. 2행에 대해서 행렬식을 전개해보면

$$\det A = 3\cdot(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 3\cdot(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$= 3\cdot 9 + 3\cdot(-1)\cdot 9 = 0$$

이다. 또한 1열에 대하여 행렬식을 전개해 보아도

$$\det A = 2\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + (-1)\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 2\cdot 3 + (-1)\cdot 6 = 0$$

로서 같은 값이다. 2행 또는 1열 뿐 아니라 다른 모든 행 또는 열에 대하여 행렬식을 전개해 보아도 그 값은 모두 "0"이다.

정 리 3.1.2 대각행렬(diagonal matrix) 또는 삼각행렬(triangular matrix)의 행렬식은 대각성분들의 곱이다.

【증명】 행렬

$$D=\begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}$$

을 대각행렬이라고 하고 D의 행렬식을 구해보면(계속해서 1행에 대해서 전개하자.)

$$\det D = d_{11}\begin{vmatrix} d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_{nn} \end{vmatrix} = d_{11}d_{22}\begin{vmatrix} d_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_{nn} \end{vmatrix} = \cdots = d_{11}d_{22}d_{33}\cdots d_{nn}$$

이다. 또한 상삼각행렬

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

의 행렬식도 구해보면(계속해서 1열에 대해서 전개하자.)

$$\det A = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\begin{vmatrix} a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}\cdots a_{nn}$$

이다. □

정 리 3.1.3 행렬 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$, $B=[b_{ij}]_{n\times m}$, $C=[c_{ij}]_{n\times m}$과 영행렬 O에 대하여 다음이 성립한다.

$$\left|\begin{array}{c:c} A & B \\ \hdashline O & I_m \end{array}\right| = \left|\begin{array}{c:c} I_m & O \\ \hdashline C & A \end{array}\right| = |A|$$