

2.2절 Gauss-Jordan 소거법

#1 기약 행 사다리꼴 행렬(reduced row-echelon form matrix)을 정의하여라.(즉, 정의를 정확히 적어라.)

#2 다음의 행렬이 기약 행 사다리꼴 행렬인지를 판단하여라. 만약 기약 행 사다리꼴 행렬이 아니라면 그 이유를 말하고 적절한 기본 행 연산을 실시하여 기약 행 사다리꼴 행렬로 만들어라.

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{bmatrix} 1 & -7 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(5) \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(6) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$(7) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(8) \begin{bmatrix} 1 & -6 & 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

#3 다음의 기약 행 사다리꼴 행렬이 나타내는 연립선형방정식의 해를 벡터를 이용하여 나타내어라.(보기 2.2.3에서의 해의 표현법을 참고하여라.)

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

$$(3) [1 \ 2 \ 3 \ 4]$$

$$(4) \begin{bmatrix} 1 & 5 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

#4 Gauss-Jordan 소거법을 이용하여 연립선형방정식의 해를 구하여라. 단, 벡터를 이용하여 해를 나타내어라.

$$(1) \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 0 \\ -2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 1 \\ 8x_1 + x_2 + 4x_3 = -1 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 2x_4 = -2 \\ -x_1 + 2x_2 - 4x_3 + x_4 = 1 \\ 3x_1 \qquad \qquad - 3x_4 = -3 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} -2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 3x_3 = -2 \\ 6x_1 + 6x_2 + 3x_3 = 5 \end{cases}$$

$$(4) \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 = -2 \\ 2x_1 + x_2 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 = 1 \end{cases}$$

$$(5) \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 - 4x_4 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 7x_3 + 2x_4 = 2 \\ x_1 - 12x_2 - 11x_3 - 16x_4 = 5 \end{cases}$$

$$(6) \begin{cases} x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ -4x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 4x_4 = 0 \end{cases}$$

#5 다음 등식을 만족하는 행렬 X 가 존재한다면 모두 구하여라. 만약 존재하지 않는다면 그 이유를 설명하여라.

$$(1) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 5 & 7 & 8 \\ 4 & 0 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & -7 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(2) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$(3) \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 7 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$(4) \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 3 \\ -2 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & -1 & 3 & 3 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

#6 상수 a, b, c 에 대하여 다음의 연립선형방정식의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = a \\ 2x_1 + 2x_3 = b \\ 3x_2 + 3x_3 = c \end{cases}$$

#7 다음 연립선형방정식이 해를 가지도록 실수 k 의 값을 구하여라. 그리고 그 때의 해를 구하여라.

$$\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 + 2x_3 - 2x_4 = -9 \\ 2x_1 - 4x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 4 \\ 5x_1 - 10x_2 + 7x_3 - 7x_4 = k \end{cases}$$