4장 1,2,3절 연습문제 모범답안

2020년 4월 17일

#1 다음에 주어진 집합 V 와 체 F 에 대하여 V 에서의 덧셈과 스칼라 곱을 다음과 같이 정의할 때, V 가 F위의 벡터공간이 되는지 조사하여라. 만약, 벡터공간이 아니라면 이유를 설명하여라.(예를 들면, 덧셈이 정의가 안된다, 반례를 제시하고..따라서 A2를 만족하지 않는다..등등..)

(1) $V = \mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) | x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$, $F = \mathbb{Q}$ 이고 임의의 $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in V$ 와 $\lambda \in F$ 에 대하여,

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),\ \lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2).$$

【풀이】 벡터공간이다.

(2) $V = \mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) | x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$, $F = \mathbb{C}$ 이고 임의의 $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in V$ 와 $\lambda \in F$ 에 대하여,

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),\ \lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2).$$

【풀이】 스칼라 곱에 대하여 닫혀 있지 않다.($\because$ $i(1,1) = (i, i) \notin V$) 따라서 벡터공간이 아니다.

(3) $V = \mathbb{Q}^2 = \{(x_1, x_2) | x_1, x_2 \in \mathbb{Q}\}$, $F = \mathbb{R}$ 이고 임의의 $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in V$ 와 $\lambda \in F$ 에 대하여,

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),\ \lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2).$$

【풀이】 스칼라 곱에 대하여 닫혀 있지 않다.($\because$ $\sqrt{2}(1,1) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}) \notin V$) 따라서 벡터공간이 아니다.

(4) $V = \mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) | x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$, $F = \mathbb{R}$ 이고 임의의 $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in V$ 와 $\lambda \in F$ 에 대하여,

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2),\ \lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, x_2).$$

【풀이】 SM1을 만족하지 않는다. ($\because$ $(1 + 1)(1,1) = (2,1) \neq 1(1,1) + 1(1,1) = (2,2)$) 따라서 벡터공간이 아니다.

(5) $V = \mathbb{R}^2 = \{(x_1, x_2) | x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$, $F = \mathbb{R}$ 이고 임의의 $(x_1, x_2), (y_1, y_2) \in V$ 와 $\lambda \in F$ 에 대하여,

$$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_2, x_2 + y_1),\ \lambda(x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2).$$

【풀이】A1을 만족하지 않는다. ($\because$ $(1,0)+(0,1)=(2,0)\neq(0,1)+(1,0)=(0,2)$) 따라서 벡터 공간이 아니다.

#2 다음에 주어진 벡터공간 V의 부분집합 W가 V의 부분공간인지를 판단하여라. 판단의 근거를 정확히 적어라. (단, 아래의 문제에서 모든 V는 $\mathbb{R}$위의 벡터공간이다..)

(1) $V=\mathbb{R}^3$, $W=\{(a,0,0)|a\in\mathbb{R}\}$

【풀이】임의의 $(a,0,0),(b,0,0)\in W$, $\lambda\in\mathbb{R}$에 대하여,

$$(a,0,0)+(b,0,0)=(a+b,0,0)\in W \text{ 이고 } \lambda(a,0,0)=(\lambda a,0,0)\in W$$

이다. 따라서 W는 V의 부분공간이다.

(2) $V=\mathbb{R}^3$, $W=\{(a,b,c)|b=a+c\}$

【풀이】임의의 $(a_1,b_1,c_1),(a_2,b_2,c_2)\in W$, $\lambda\in\mathbb{R}$에 대하여,

$(a_1,b_1,c_1)+(a_2,b_2,c_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2,c_1+c_2)$인데, 여기서

$$b_1+b_2=(a_1+c_1)+(a_2+c_2)=(a_1+a_2)+(c_1+c_2)$$

이므로 W 는 덧셈에 대하여 닫혀 있다. 그리고 $\lambda(a_1,b_1,c_1)=(\lambda a_1,\lambda b_1,\lambda c_1)$인데, 여기서

$$\lambda b_1=\lambda(a_1+c_1)=\lambda a_1+\lambda c_1$$

이므로 W 는 스칼라 곱에 대하여도 닫혀 있다. 따라서 W는 V의 부분공간이다.

(3) $V=\mathbb{R}^3$, $W=\{(a,b,c)|\ abc>0\}$

【풀이】$(0,0,0)\notin W$ 이므로 A3를 만족하지 않는다. 더 나아가 덧셈과 스칼라 곱에도 닫혀 있지 않다. 따라서 부분공간이 아니다.

(4) $V=Mat_{2\times2}(\mathbb{R})$, $W=\left\{\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}\middle|a+b+c+d=0\right\}$

【풀이】임의의 $\begin{bmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}a_2 & b_2\\ c_2 & d_2\end{bmatrix}\in W$, $\lambda\in\mathbb{R}$에 대하여

$$\begin{bmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a_2 & b_2\\ c_2 & d_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_1+a_2 & b_1+b_2\\ c_1+c_2 & d_1+d_2\end{bmatrix}$$

인데, 여기서

$$\begin{aligned}&(a_1+a_2)+(b_1+b_2)+(c_1+c_2)+(d_1+d_2)\\&=(a_1+b_1+c_1+d_1)+(a_2+b_2+c_2+d_2)=0+0=0\end{aligned}$$

이므로 W는 덧셈에 대하여 닫혀 있다. 또한 $\lambda\begin{bmatrix}a_1 & b_1\\ c_1 & d_1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda a_1 & \lambda b_1\\ \lambda c_1 & \lambda d_1\end{bmatrix}$인데, 여기서

$$\lambda a_1+\lambda b_1+\lambda c_1+\lambda d_1=\lambda(a_1+b_1+c_1+d_1)=\lambda\cdot0=0$$

이므로 W 는 스칼라 곱에 대해서도 닫혀 있다. 따라서 W는 V의 부분공간이다.

(5) $V = P_3[x]$, $W = \{a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \mid a_0 = 0, a_3 = a_1 + a_2\}$

【풀이】 임의의 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, b_0 + b_1x + b_{2x^2} + b_3x^3 \in W$, $\lambda \in \mathbb{R}$에 대하여

$$\begin{aligned}(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) + (b_0 + b_1x + b_{2x^2} + b_3x^3)\\ = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + (a_3 + b_3)x^3\end{aligned}$$

인데, $a_0 + b_0 = 0 + 0 = 0$, $a_3 + b_3 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2) = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2)$이므로 W는 덧셈에 대하여 닫혀 있다. 또한

$$\lambda(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = (\lambda a_0) + (\lambda a_1)x + (\lambda a_2)x^2 + (\lambda a_3)x^3$$

인데, $\lambda a_0 = \lambda \cdot 0 = 0$ 이고 $\lambda a_3 = \lambda(a_1 + a_2) = (\lambda a_1) + (\lambda a_2)$ 이므로 W 는 스칼라 곱에 대해서도 닫혀 있다. 따라서 W는 V의 부분공간이다.

#3 다음과 같이 주어진 벡터 $\boldsymbol{v}: \boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}$에 대하여 $\boldsymbol{v}$가 $\boldsymbol{v_1}, \boldsymbol{v_2}, \dots, \boldsymbol{v_n}$의 선형결합인지를 판단하여라. 만약, 선형결합이라면 가능한 모든 방법의 선형결합으로 나타내어라.

(1) $(7,18,18)$: $(-1,2,0), (1,1,1), (3,4,7)$

【풀이】 등식 $c_1(-1,2,0) + c_2(1,1,1) + c_3(3,4,7) = (3,4,7)$ 을 만족하는 c_1, c_2, c_3는 제차 연립선형방정식

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 3 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & 18 \\ 0 & 1 & 7 & 18 \end{array}\right] \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

의 해이다. 따라서

$$3(-1,2,0) + 4(1,1,1) + 2(3,4,7) = (7,18,18)$$

이다.

(2) $(7,7,-17)$: $(4,1,-2), (7,0,1), (-8,5,-14)$

【풀이】 (1)번과 마찬가지로

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 4 & 7 & -8 & 7 \\ 1 & 0 & 5 & 7 \\ -2 & 1 & -14 & -17 \end{array}\right] \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

이므로 $c_1 = -5t + 7, c_2 = 4t - 3, c_3 = t\ (t \in \mathbb{R})$ 이다. 따라서

$$(-5t + 7)(4,1,-2) + (4t - 3)(7,0,1) + t(-8,5,-14) = (7,7,-17)$$

이다.

(3) $(1,6,10)$: $(1,-1,2),(-3,9,4),(2,4,14)$

【풀이】 (1)번과 마찬가지로

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 \\ -1 & 9 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 14 & 10 \end{array}\right] \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

이므로 해를 가지지 않는다. 따라서 선형결합이 아니다.

#4 다음에 주어진 벡터들이 벡터공간 $\mathbb{R}^3$를 생성하는지 알아보아라. 만약, $\mathbb{R}^3$를 생성하지 않는다면 생성하는 공간을 방정식의 형태로 나타내어라.

(1) $(2,-1,3),(4,1,2),(8,-1,8)$

【풀이】 벡터 $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ 에 대하여

$$c_1(2,-1,3) + c_2(4,1,2) + c_3(8,-1,8) = (x,y,z)$$

라고 하면, c_1, c_2, c_3는 연립선형방정식

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 8 & x \\ -1 & 1 & -1 & y \\ 3 & 2 & 8 & z \end{array}\right] \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & -y \\ 0 & 6 & 6 & x+2y \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-5}{6}x+\frac{4}{3}y+z \end{array}\right]$$

의 해이다. 따라서 $5x - 8z - 6z = 0$이면 해가 존재한다. 그러므로

$$\langle(2,-1,3),(4,1,2),(8,-1,8)\rangle = \{(x,y,z) | 5x - 8y - 6z = 0\}$$

이다.

(2) $(3,1,4),(2,-3,5),(5,-2,9),(1,4,-1)$

【풀이】 (1)번과 마찬가지로

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 3 & 2 & 5 & 1 & x \\ 1 & -3 & -2 & 4 & y \\ 4 & 5 & 9 & 1 & z \end{array}\right] \Rightarrow \cdots \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -2 & 4 & y \\ 0 & 11 & 11 & 11 & x-3y \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{17}{11}x+\frac{7}{11}y+z \end{array}\right]$$

이므로

$$\langle(3,1,4),(2,-3,5),(5,-2,9),(1,4,-1)\rangle = \{(x,y,z) | 17x - 7y - 11z = 0\}$$

이다.

(3) $(1,2,-6),(3,4,1),(4,3,1),(1,4,-1)$

【풀이】 (1)번과 마찬가지로

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 & x \\ 2 & 4 & 3 & 4 & y \\ -6 & 1 & 1 & -1 & z \end{array}\right] \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{4}{15} & \frac{1}{45}(x+y-7z) \\ 0 & 1 & 0 & \frac{5}{3} & \frac{1}{9}(-4x+5y+z) \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{16}{15} & \frac{1}{45}(26x-19y-2z) \end{array}\right]$$

아므로, 임의의 벡터$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$에 대해서 무수히 많은 해를 가진다. 따라서

$$\langle(1,2,-6),(3,4,1),(4,3,1),(1,4,-1)\rangle = \mathbb{R}^3.$$

(4) $(1,1,1), (0,1,2)$

【풀이】(1)번과 마찬가지로

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 1 & 1 & y \\ 1 & 2 & z \end{array}\right] \Rightarrow \cdots \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & x \\ 0 & 1 & -x+y \\ 0 & 0 & x-2y+z \end{array}\right]$$

이므로

$$\langle (1,1,1), (0,1,2) \rangle = \{(x, y, z) | x - 2y + z = 0\}$$

이다.