1.2절 대각행렬(Diagonal Matrix), 삼각행렬(Triangular Matrix), 대칭행렬(Symmetric Matrix)

정 의 1.2.1 정사각행렬 $D=[d_{ij}]_{n\times n}$ 에서 대각성분 $d_{ii}\,(i=1,2,\ldots,n)$를 제외한 모든 성분 $d_{ij}\,(i\neq j)$가 0 일 때 (대각성분은 0일 수도 있다.) 행렬 D를 **대각행렬**(diagonal matrix)이라고 하고 이 행렬을

$$D=\begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix} \text{ 또는 } D=diag\{d_{11},d_{22},\ldots,d_{nn}\}$$

으로 나타낸다. 특히, 대각행렬

$$D=\begin{bmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{bmatrix}=aI_n$$

을 **스칼라행렬**(scalar matrix)이라고 한다.

정 리 1.2.1 대각행렬 $D=\begin{bmatrix} d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{nn} \end{bmatrix}$에 대하여 다음이 성립한다.

(1) 임의의 자연수 k에 대하여

$$D^k=\begin{bmatrix} (d_{11})^k & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & (d_{22})^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (d_{nn})^k \end{bmatrix}$$

이다.

(2) D의 역행렬 D^{-1}가 존재한다 $\Leftrightarrow$ 모든 $i=1,2,\ldots,n$에 대해서 $d_{ii}\neq 0$이다.

그리고 그 때의 역행렬은

$$D^{-1}=\begin{bmatrix} 1/d_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/d_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/d_{nn} \end{bmatrix}$$

이다.

Written by Cho, sunghee

보 기 1.2.1 대각행렬 $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ 에 대하여 $D^{2020} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{2020} & 0 \\ 0 & 0 & 3^{2020} \end{bmatrix}$ 이다. 또한 D는 가역행렬이고 $D^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 \end{bmatrix}$ 이다. 한편 대각행렬 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ 은 가역행렬이 아니다.

정 의 1.2.2 정사각행렬 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ 에서 대각성분 아래의 성분이 모두 0 일 때, 즉 $i > j$ 이면 $a_{ij} = 0$ 일 때, A 를 **상삼각행렬**(upper triangular matrix)라고 한다. 또한, 대각성분 위의 성분이 모두 0 일 때, 즉, $i < j$ 이면 $a_{ij} = 0$ 일 때, A 를 **하삼각행렬**(lower triangular matrix)라고 한다. 상삼각행렬과 하삼각행렬을 모두 일컬어 **삼각행렬**이라고 한다.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

상삼각행렬 하삼각행렬

보 기 1.2.2 정사각행렬

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & 7 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$$

등은 상삼각행렬이고, 정사각행렬

$$\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 11 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 5 & 5 & -9 & 1 \end{bmatrix}$$

등은 하삼각행렬이다. 정의 1.2.1에서의 대각행렬은 상삼각행렬인 동시에 하삼각행렬이다.

정 리 1.2.2 삼각행렬 $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ 에 대하여 다음이 성립한다.

역행렬 A^{-1} 가 존재한다. $\Leftrightarrow$ 모든 대각성분이 0 이 아니다. 즉, $a_{ii} \neq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n.$

그리고, 그 때의 상(하)삼각행렬의 역행렬은 또 다른 상(하)삼각행렬이다.

정 의 1.2.3 $m \times n$ 크기의 행렬 $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ 에 대하여 A 의 행과 열을 차례대로 교환한 $n \times m$ 크기의 행렬을 A 의 **전치행렬**(transpose matrix)이라고 하며 A^T 로 나타낸다. 즉,

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \quad \Rightarrow \quad A^T=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ a_{13} & a_{23} & \cdots & a_{m3} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{n\times m}.$$

정 리 1.2.3 $m\times n$ 크기의 행렬 A,B 와 $k\in\mathbb{R}$ 에 대하여 다음이 성립한다.

(1) $(A^T)^T=A$

(2) $(kA)^T=k(A^T)$

(3) $(A+B)^T=A^T+B^T$

또한 $m\times r$ 행렬 A 와 $r\times n$ 행렬 B에 대하여 다음이 성립한다.

(4) $(AB)^T=(B^T)(A^T)$

(5) $n\times n$ 행렬 A가 가역행렬이면 A^T도 가역행렬이고 $(A^T)^{-1}=(A^{-1})^T$이다.

보 기 1.2.3 행렬 $A=\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}$에 대하여

$$A^T=\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix},\ B^T=\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

이고

$$\left(\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}\right)^T=\begin{bmatrix} -6 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \\ -2 & 2 & 4 \\ 9 & 0 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

이다.

정 의 1.2.4 $A=[a_{ij}]_{n\times n}$를 정사각행렬이라고 하자. $A^T=A$ 일 때, 즉 모든 $1\le i,j\le n$ $(i\ne j)$ 에 대하여 $a_{ij}=a_{ji}$ 일 때, 행렬 A 를 **대칭행렬**(symmetric matrix)이라고 한다.

보 기 1.2.4 아래의 정사각행렬들은 모두 대칭행렬이다.

$$\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 7 \\ -2 & 7 & 0 \end{bmatrix},\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 9 \\ -2 & 1 & -4 & 3 \\ 0 & 9 & 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

정 리 1.2.4 같은 크기의 대칭행렬 A, B 와 $k\in\mathbb{R}$ 에 대하여 다음이 성립한다.

(1) A^T 도 대칭행렬이다.

(2) kA 도 대칭행렬이다.

(3) $A+B$ 도 대칭행렬이다.

(4) A 가 가역행렬이면 A^{-1} 도 대칭행렬이다.

제2장 연립선형방정식과 역행렬

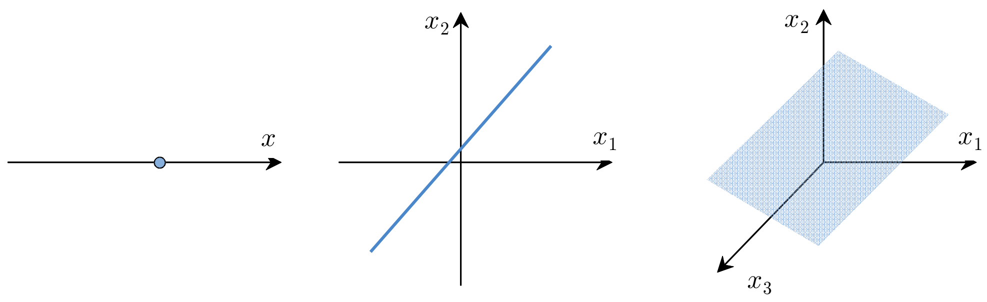
2.1절 연립선형방정식

n 개의 미지수 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 을 가지는 다음과 같은 형태의 방정식

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

을 **선형방정식**(linear equation) 또는 **일차방정식**이라고 한다. 즉, 방정식의 각 항이 상수와 미지수 하나의 곱으로 이루어진 방정식을 선형방정식이라고 한다.

선형방정식의 해집합을 기하학적으로 나타내면, 하나의 미지수를 가지는 선형방정식 $ax = b$ 의 해집합은 (좌표)직선위의 한 점을, 두 개의 미지수를 가지는 선형방정식 $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ 의 해집합은 (좌표)평면위의 직선을, 세 개의 미지수를 가지는 선형방정식 $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = b$ 의 해집합은 (좌표)공간위의 평면을 나타낸다.



m개의 선형방정식을 동시에 만족하는 해를 구하는 연립방정식

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \quad - \ (\mathrm{LS})$$

을 **연립선형방정식**(system of linear equations 간단히 linear system) 또는 **연립일차방정식**이라고 한다. 특히,

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$$

인 연립선형방정식을 **제차 연립선형방정식**(homogeneous linear system)이라고 한다. 제차 연립선형방정식은 항상 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$을 해로 갖는다. 이러한 해를 **자명한 해**(trivial solution)이라고 부른다.

연립선형방정식 (LS)에서 계수(coefficient)들로 이루어진 계수행렬(coefficients matrix)을 A, 미지수들을 하나의 열로 생각한 행렬을 X로 그리고 $b_1, b_2, \ldots, b_m$을 하나의 열로 생각한 행렬을 B로 놓으면,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}_{m \times 1}$$

연립선형방정식 (LS)는 행렬의 곱셈을 이용하여

$$AX = B$$

와 같이 나타낼 수 있다. 또한, 연립선형방정식 (LS)를 좀 더 간단하게 표현하기 위해서 미지수 $x_1, x_2, \ldots, x_n$을 생략한다면, 계수행렬 A의 오른쪽에 B를 덧붙인 $m \times (n+1)$ 크기의 행렬

$$[\ A \mid B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right]$$

로서 (LS)를 나타낼 수 있다. 이러한 행렬 $[\ A \mid B]$를 연립선형방정식 (LS)를 나타내는 덧붙인 행렬(augmented matrix)이라고 한다.

보 기 1.1.1 연립선형방정식

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 8 \\ x_1 + 3x_2 = 9 \end{cases}$$

를 행렬의 곱을 이용하여 표현하면

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 9 \end{bmatrix}$$

이다. 여기서 $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ 은 계수행렬이다. 또한, 주어진 연립선형방정식을 나타내는 덧붙인 행렬은

$$\left[\begin{array}{cc|c} 2 & 1 & 8 \\ 1 & 3 & 9 \end{array}\right]$$

이다.