# 7 장 연습문제

**※ 모든 문제에는 답이 나오기 까지의 논리적인 풀이 과정이 명시되어 있어야 합니다. 풀이 과정이 부족하거나 과정이 없는 답안은 답이 맞더라 하더라도 감점, 또는 점수가 없을 수도 있음을 명심하기 바랍니다. 강의 시간에 언급한 여러 사항에 유의하여 정확한 답안을 각자 작성하여, 정해진 기한내에 제출하기 바랍니다.**

#1. 다음의 물음에 답하고 그 이유를 설명하여라.

(1) $A^2 = A$ 를 만족하는 정사각행렬 $A$ 를 멱등행렬(idempotent matrix)이라고 한다. 멱등행렬에서 나타날 수 있는 고유값(the possible eigenvalues of idempotent matrix)을 모두 적어라.

(2) $n \times n$ 가역행렬 $A$ 가 서로 다른 고유값 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \ (k \le n)$ 을 가지고 각 고유값에 해당하는 고유벡터를 차례대로 $\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}, \dots, \mathbf{x_k}$ 라고 하자. 이 때, $A^{-1}$ 의 모든 고유값과 각 고유값에 해당하는 고유벡터를 구하여라.

#2. 다음 명제에 대하여 참(True)과 거짓(False)을 판단하여라. 만약 명제가 참이면 증명을, 거짓이면 반례를 제시하여라.

(1) 정사각행렬 $A$ 가 가역행렬이 아니면 $\lambda = 0$ 은 $A$ 의 고유값이다.

(2) 위 명제의 역이 성립한다.

(3) $n \times n$ 행렬 $A$ 가 서로 다른 $n$ 개의 고유값을 가지면 $A$ 는 대각화 가능한 행렬이다.

(4) 위 명제의 역이 성립한다.

(5) 대각화 가능한 행렬 $A$ 가 가역행렬이면 $A^{-1}$ 도 대각화 가능한 행렬이다.

(6) $A$ 가 가역행렬이면 $A$ 는 대각화 가능한 행렬이다.

(7) 위 명제의 역이 성립한다.

(8) $A$ 가 대각화 가능한 행렬이면 $A^T$ 도 대각화 가능한 행렬이다.

(9) 수직 대각화 가능한 행렬 $A$ 가 가역행렬이면 $A^{-1}$ 도 수직 대각화 가능한 행렬이다.

(10) $n \times n$ 행렬 $A$ 의 특성방정식에서 상수항은 $|A|$ 이다.

#3. $n \times n$ 행렬 $A$ 가 서로 다른 $n$ 개의 고유값을 가진다고 할 때, 다음을 증명하여라.

(1) $A$ 의 모든 고유값들의 곱(product)은 $\det(A)$ 이다.

(2) $A$ 의 모든 고유값들의 합(sum)은 $A$ 의 모든 대각성분들의 합이다.

#4. 행렬 $\mathrm{A} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ 가 대각화 가능한 행렬인지를 판단하여라. 대각화 가능한 행렬이라면

$$P^{-1}AP = D$$

를 만족하는 가역행렬 $P$ 와 대각행렬 $D$ 를 구하여라. 만약 위의 등식을 만족하는 수직행렬 $P$ 가 존재한다면 수직행렬 $P$ 도 구하여라.