Kratak uvod u matrice i determinante

Dragan Mašulović

7. maj 2020.

Sažetak

Analiziranje rešenja sistema jednačina nas vodi do pojma determinante, čemo je posvećen početak poglavlja. Nakon toga uvodimo pojam matrice i pokazujemo da je najsločenija i najneintuitivnija operacija nad matricama, množenje matrica, zapravo posledica analize ponašanja linearnih transformacija. Rešavanje sistema linearnih jednačina pokazujemo koristeći nekoliko strategija, od kojih neke imaju samo teorijski značaj, i glavu zaključujemo demonstracijom tehnike za nalaženje inverzne matrice date matrice.

1 Rešavanje sistema jednačina

Rešavanje sistema linearnih jednačina predstavlja važnu temu u savremenoj matematici jer se mnogi fenomeni u nauci mogu modelovati sistemima linearnih jednačina. Tipičan primer predstavlja analiza električnih kola primenom Kirhofovih zakona [2]. Drugi važan izvor motivacije za razmatranja u ovom poglavlju su linearne transformacije [1]. Recimo, Lorencova transformacija opisuje promenu parametara (položaja i vremena) materijalne tačke u jednom referentnom sistemu kada se ona posmatra iz drugog referentnog sistema. Ako pretpostavimo da se referentni sistem u kome se nalazi materijalna tačka kreće konstantnom brzinom v, pravolinijski duž x-ose referentnog sistema posmatrača, onda se veza između koordinata (x, y, z, t) materijalne tačke u njenom referentnom sistemu i koordinata (x', y', z', t') u referentnom sistemu posmatrača može opisati na sledeći način:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{\gamma}{c^2}(c^2 t - vx) \end{aligned}$$

gde je c brzina svetlosti i $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Primetimo da su c, v i γ konstante. Ovo je primer transformacije koordinata $(x, y, z, t) \mapsto (x', y', z', t')$

Lorencove transformacije samo specijalan slučaj opšte linearne tranformacije $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (y_1, y_2, \ldots, y_m)$:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n, \end{aligned}$$

gde su a_{ij} neki realni brojevi.

2 Definicija determinante

Definicija 1. *Neka je n prirodan broj i neka su a_{ij} proizvoljni realni brojevi, $1 \le i, j \le n$. Determinanta reda n je algebarski izraz oblika*

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{f \in S_n} (-1)^{\mathrm{inv}(f)} a_{1f_1} a_{2f_2} \ldots a_{nf_n},$$

gde je S_n skup svih permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$. Kraće pišemo i $D = |a_{ij}|_{n \times n}$.

Tri kratka komentara:

1. kao što smo i nagovestili, sumiranje se vrši po svim permutacijama skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$;

2. zato je determinanta reda n algebarski izraz koji ima $n!$ sabiraka;

3. ako je f parna permutacija onda je broj $\mathrm{inv}(f)$ paran, pa je $(-1)^{\mathrm{inv}(f)} = 1$; ako je f neparna permutacija onda je broj $\mathrm{inv}(f)$ neparan, pa je $(-1)^{\mathrm{inv}(f)} = -1$; tako smo zapisali činjenicu da se sabirci koji odgovaraju parnim permutacijama uzimaju sa znakom $+$, dok se sabirci koji odgovaraju neparnim permutacijama uzimaju sa znakom $-$.

3 Osobine determinanti

Teorema 1 (**Vrsta/kolona koja se sastoji od nula**). *Ako se u determinanti d neka vrsta ili kolona sastoji isključivo od nula, onda je $D = 0$.*

Dokaz. Primetimo, prvo, da svaki sabirak u definiciji determinante sadrži tačno jedan element svake vrste determinante, i tačno jedan element svake kolone determinante. To je ključni sastojak u dokazu koji sledi. Neka se u determinanti D vrsta i sastoji isključivo od nula: $a_{i1} = a_{i2} = \ldots = a_{in} = 0$. Tada je $a_{if_i} = 0$ za svako $f \in S_n$ što znači da je svaki sabirak u izrazu

$$\sum_{f \in S_n} (-1)^{\mathrm{inv}(f)} a_{1f1} \ldots a_{ifi} \ldots a_{nfn}$$

jednak nuli. Dakle, $D = 0$. □

Osim ove osobine, determinante imaju još niz važnih osobina koje koristimo da bismo efektivno odrediti vrednost determinante. Sada samo navodimo osobine i tek po koji dokaz, dok ostale, često veoma komplikovane dokaze dajemo u sledećem odeljku za posebno motivisane čitaoce.

Teorema 2 (**Zamena mesta dvema vrstama/kolonama determinante**). *Neka je D' determinanta koja se dobija od determinante D tako što dve vrste (ili dve kolone) zamene mesta. Tada je $D' = -D$.*

Teorema 3 (**Dve jednake vrste/kolone**). *Ako su u determinanti D neke dve vrste jednake, ili neke dve kolone jednake, onda je $D = 0$.*

4 Kramerova teorema

Kramerova teorema predstavlja važan teorijski rezultat koji nam opisuje strukturu rešenja kvadratnih sistema linearnih jednačina. Ova teorema nije pogodna za efikasno rešavanje sistema linearnih jednačina i zato je njen značaj isključivo teorijski. Posmatrajmo sledeći sistem n linearnih jednačina sa n nepoznatih:

Literatura

[1] Sheldon Axler: “Linear Algebra Done Right” (2nd Ed.), Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg 1997.

[2] Stephen Boyd, Lieven Vandenberghe: “Introduction to Applied Linear Algebra: Vectors, Matrices, and Least Square”, Cambridge University Press 2018.

[3] Philip N. Klein: “Coding the Matrix – Linear Algebra through Applications to Computer Science”. Newtonian Press 2015.