Dokazi kontrapozicijom

Nekada se dešava da nije lako naći direktan dokaz. Jedan način da dokažemo tvrđenje oblika $p \Rightarrow q$ je da koristimo tautologiju

$$\models (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$$

koja kaže da je logički svejedno da li ćemo dokazivati da

$$p \Rightarrow q$$

ili da

$$\neg q \Rightarrow \neg p.$$

Dokazi zasnovani na ovoj strategiji se zovu *dokazi kontrapozicijom.*

Primer. Neka je n prirodan broj. Ako je n^2 paran broj onda je i n paran broj.

Dokaz. Treba da pokažemo sledeće:

$$\underbrace{n^2 \text{ je paran broj}}_{p} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{n \text{ je paran broj}}_{q}.$$

Kontrapozicija ovog tvrđenja glasi:

$$\underbrace{n \text{ je neparan broj}}_{\neg q} \quad \Rightarrow \quad \underbrace{n^2 \text{ je neparan broj}}_{\neg p},$$

i to se lako dokazuje. Neka je n neparan broj. Tada je

$$n = 2k + 1$$

za neko $k \geq 0$. No, tada je

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(\underbrace{2k^2 + 2k}_{m}) + 1 = 2m + 1$$

što znači da je n^2 neparan broj.