# 1 Determinante

**Definicija 1.** *Neka je $n$ prirodan broj i neka su $a_ij$ proizvoljni realni brojevi, $1 \leq i, j \leq n$. Determinanta reda $n$ je algebarski izraz oblika*

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{f \in S_n} (-1)^{\mathrm{inv}(f)} a_{1f_1} a_{2f_2} \dots a_{nf_n},$$

*gde je $S_n$ skup svih permutacija skupa $\{1, 2, \dots, n\}$. Kraće pišemo i $D = |a_{ij}|_{n \times n}$.*

# 2 Matrice

**Definicija 2.** Proizvod *kompatibilnih matrica $A = [a_{ij}]_{k \times n}$ i $B = [b_{ij}]_{n \times m}$, pišemo $C = AB$, je matrica $C = [c_{ij}]_{k \times m}$ čiji se elementi računaju na sledeći način:*

$$C_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj}.$$

*Ova formula praktično znači da se element na mestu $(i, j)$ matrice $C$ dobija tako što se $i$-ta vrsta matrice $A$* skalarno pomnoži *$j$-tom kolonom matrice $B$:*

$$\left[\begin{array}{ccccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \hline a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{in} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn} \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{cc|c|cc} b_{11} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & \dots & b_{2j} & \dots & b_{2m} \\ b_{31} & \dots & b_{3j} & \dots & b_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{k1} & \dots & b_{nj} & \dots & b_{nm} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccc} c_{11} & \dots & c_{1j} & \dots & c_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{i1} & \dots & \boxed{c_{ij}} & \dots & c_{3m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{k1} & \dots & c_{kj} & \dots & c_{nm} \end{array}\right].$$

# 3 Inverzna matrica

**Primer 1.** *Izračunati inverznu matricu matrice* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 7 & 6 \end{bmatrix}$.

*Rešenje.* Da bismo izračunali inverznu matricu matrice $A$ dovoljno je rešiti po $X$ matričnu jednačinu $AX = E$, jer će tada biti $X = A^{-1}$. Dakle, treba rešiti sledeću matričnu jednačinu:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 7 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & x_{14} \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & x_{24} \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & x_{34} \\ x_{41} & x_{42} & x_{43} & x_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

□

Ako strpljivo raspišemo proizvod matrica na levoj strani, dobijamo da treba simultano rešiti četiri sistema jednačina koji svi imaju istu matricu sistema:

$$\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + 2x_{31} + 2x_{41} &= 1 \\ 2x_{11} + 3x_{21} + 3x_{31} + 5x_{41} &= 0 \\ 2x_{11} + x_{21} + 4x_{31} + 3x_{41} &= 0 \\ 4x_{11} + 3x_{21} + 7x_{31} + 6x_{41} &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_{12} + x_{22} + 2x_{32} + 2x_{42} &= 0 \\ 2x_{12} + 3x_{22} + 3x_{32} + 5x_{42} &= 1 \\ 2x_{12} + x_{22} + 4x_{32} + 3x_{42} &= 0 \\ 4x_{12} + 3x_{22} + 7x_{32} + 6x_{42} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_{13} + x_{23} + 2x_{33} + 2x_{43} &= 0 \\ 2x_{13} + 3x_{23} + 3x_{33} + 5x_{43} &= 0 \\ 2x_{13} + x_{23} + 4x_{33} + 3x_{43} &= 1 \\ 4x_{13} + 3x_{23} + 7x_{33} + 6x_{43} &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x_{14} + x_{24} + 2x_{34} + 2x_{44} &= 0 \\ 2x_{14} + 3x_{24} + 3x_{34} + 5x_{44} &= 0 \\ 2x_{14} + x_{24} + 4x_{34} + 3x_{44} &= 0 \\ 4x_{14} + 3x_{24} + 7x_{34} + 6x_{44} &= 1 \end{aligned}$$

Primenićemo Gaus-Žordanovu eliminaciju:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 7 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \dots \sim \left[\begin{array}{cccc|rrrr} 1 & 0 & 0 & 0 & -7 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 4 & -1 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right]$$

Prema tome, $A^{-1} = \begin{bmatrix} -7 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$