Kratak uvod u matrice i determinante

Dragan Mašulović

7. maj 2020.

Sažetak

Analiziranje rešenja sistema jednačina nas vodi do pojma determinante, čemo je posvećen početak poglavlja. Nakon toga uvodimo pojam matrice i pokazujemo da je najsločenija i najneintuitivnija operacija nad matricama, množenje matrica, zapravo posledica analize ponašanja linearnih transformacija. Rešavanje sistema linearnih jednačina pokazujemo koristeći nekoliko strategija, od kojih neke imaju samo teorijski značaj, i glavu zaključujemo demonstracijom tehnike za nalaženje inverzne matrice date matrice.

1 Rešavanje sistema jednačina

Rešavanje sistema linearnih jednačina predstavlja važnu temu u savremenoj matematici jer se mnogi fenomeni u nauci mogu modelovati sistemima linearnih jednačina. Tipičan primer predstavlja analiza električnih kola primenom Kirhofovih zakona [2]. Drugi važan izvor motivacije za razmatranja u ovom poglavlju su linearne transformacije [1]. Recimo, *Lorencova transformacija* opisuje promenu parametara (položaja i vremena) materijalne tačke u jednom referentnom sistemu kada se ona posmatra iz drugog referentnog sistema. Ako pretpostavimo da se referentni sistem u kome se nalazi materijalna tačka kreće konstantnom brzinom v, pravolinijski duž x-ose referentnog sistema posmatrača, onda se veza između koordinata (x, y, z, t) materijalne tačke u njenom referentnom sistemu i koordinata (x', y', z', t') u referentnom sistemu posmatrača može opisati na sledeći način:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{\gamma}{c^2}(c^2 t - vx), \end{aligned}$$

gde je c brzina svetlosti i $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$. Primetimo da su c, v i γ konstante. Ovo je primer *transformacije koordinata* $(x, y, z, t) \mapsto (x', y', z', t')$. Lorencove transformacije predstavljaju samo specijalan slučaj opšte linearne tranformacije $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto (y_1, y_2, \ldots, y_m)$:

$$
\begin{aligned}
y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \\
y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \\
&\vdots \\
y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n,
\end{aligned}
$$

gde su a_{ij} neki realni brojevi.

2 Definicija determinante

Definicija 2.1 *Neka je n prirodan broj i neka su a_{ij} proizvoljni realni brojevi, $1 \leq i, j \leq n$.* Determinanta reda n *je algebarski izraz oblika*

$$
D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{f \in S_n} (-1)^{\mathrm{inv}(f)} a_{1f_1} a_{2f_2} \ldots a_{nf_n},
$$

gde je S_n skup svih permutacija skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$. Kraće pišemo i $D = |a_{ij}|_{n \times n}$.

Tri kratka komentara:

1. kao što smo i nagovestili, sumiranje se vrši po svim permutacijama skupa $\{1, 2, \ldots, n\}$;

2. zato je determinanta reda n algebarski izraz koji ima $n!$ sabiraka;

3. ako je f parna permutacija onda je broj $\mathrm{inv}(f)$ paran, pa je $(-1)^{\mathrm{inv}(f)} = 1$; ako je f neparna permutacija onda je broj $\mathrm{inv}(f)$ neparan, pa je $(-1)^{\mathrm{inv}(f)} = -1$; tako smo zapisali činjenicu da se sabirci koji odgovaraju parnim permutacijama uzimaju sa znakom $+$, dok se sabirci koji odgovaraju neparnim permutacijama uzimaju sa znakom $-$.

3 Osobine determinanti

Teorema 3.1 (Vrsta/kolona koja se sastoji od nula) *Ako se u determinanti D neka vrsta ili kolona sastoji isključivo od nula, onda je $D = 0$.*

Dokaz. Primetimo, prvo, da svaki sabirak u definiciji determinante sadrži tačno jedan element svake vrste determinante, i tačno jedan element svake kolone determinante. To je ključni sastojak u dokazu koji sledi. Neka se u determinanti D vrsta i sastoji isključivo od nula: $a_{i1} = a_{i2} = \ldots = a_{in} = 0$. Tada je $a_{if_i} = 0$ za svako $f \in S_n$ što znači da je svaki sabirak u izrazu

$$\sum_{f \in S_n} (-1)^{\text{inv}(f)} a_{1f_1} \ldots a_{if_i} \ldots a_{nf_n}$$

jednak nuli. Dakle, $D = 0$.

Osim ove osobine, determinante imaju još niz važnih osobina koje koristimo da bismo efektivno odrediti vrednost determinante. Sada samo navodimo osobine i tek po koji dokaz, dok ostale, često veoma komplikovane dokaze dajemo u sledećem odeljku za posebno motivisane čitaoce.

Teorema 3.2 (Zamena mesta dvema vrstama/kolonama determinante) *Neka je D' determinanta koja se dobija od determinante D tako što dve vrste (ili dve kolone) zamene mesta. Tada je $D' = -D$.*

Teorema 3.3 (Dve jednake vrste/kolone) *Ako su u determinanti D neke dve vrste jednake, ili neke dve kolone jednake, onda je $D = 0$.*

4 Kramerova teorema

Kramerova teorema predstavlja važan teorijski rezultat koji nam opisuje strukturu rešenja *kvadratnih* sistema linearnih jednačina. Ova teorema nije pogodna za efikasno rešavanje sistema linearnih jednačina i zato je njen značaj isključivo teorijski. Posmatrajmo sledeći sistem n linearnih jednačina sa n nepoznatih:

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n &= b_n.
\end{aligned}$$

Neka je $D = |a_{ij}|_{n\times n}$ *determinanta sistema* i neka je, za svako $i \in \{1,\dots,n\}$, sa D_{x_i} označena determinanta koja se dobija tako što se i-ta kolona determinante D zameni kolonom koju čine slobodni članovi:

$$D_{x_i} = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & \dots & a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Teorema 4.1 (Kramerova teorema) *Ako za kvadratni sistem reda n znamo da je $D \neq 0$, tada je sistem određen i njegovo jedinstveno rešenje je dato sa:*

$$x_1 = \frac{D_{x_1}}{D}, \quad x_2 = \frac{D_{x_2}}{D}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{D_{x_n}}{D}.$$

Dokaz. Neka je $D_{(pq)}$ determinanta reda $n-1$ koja se dobija izbacivanjem p-te vrste i q-te kolone determinante D. Kada prvu jednačinu sistema pomnožimo sa $D_{(11)}$, drugu pomnožimo sa $-D_{(21)}$, treću sa $D_{(31)}$, ..., i-tu sa $(-1)^{i+1}D_{(i1)}$, i sve to saberemo, dobijamo:

$$\begin{aligned}
&\underbrace{(a_{11}D_{(11)} - a_{21}D_{(21)} + \dots + (-1)^{n+1}a_{n1}D_{(n1)})}_{D}x_1 + \\
&\underbrace{(a_{12}D_{(11)} - a_{22}D_{(21)} + \dots + (-1)^{n+1}a_{n2}D_{(n1)})}_{0}x_2 + \dots + \\
&\underbrace{(a_{1n}D_{(11)} - a_{2n}D_{(21)} + \dots + (-1)^{n+1}a_{nn}D_{(n1)})}_{0}x_n = \\
&= \underbrace{b_1D_{(11)} - b_2D_{(21)} + \dots + (-1)^{n+1}b_nD_{(n1)}}_{D_{x_1}}.
\end{aligned}$$

Izraz koji moži promenljivu x_1 predstavlja razvoj determinante D po elementima njene prve kolone, dok izrazi koji množe promenljive x_2, ..., x_n predstavljaju razvoj determinante D po elementima "pogrešne" kolone. S druge strane, slobodni član predstavlja razvoj determinante D_{x_1} po elementima njene prve kolone. Koristeći teoremu o razvoju determinante po elementima prve kolone, i koristeći činjenicu da je razvoj determinante po elementima "pogrešne kolone" jednak 0, prethodna jednačina se može zapisati ovako:

$$D \cdot x_1 = D_{x_1}.$$

Kako je $D \neq 0$ dobijamo $x = \frac{D_{x_1}}{D}$. Na isti način se dobija da je $x_i = \frac{D_{x_i}}{D}$ za sve $i \in \{2,\dots,n\}$.

5 Pojam matrice, operacije sa matricama

Matrica je pravougaona šema brojeva čije dimenzije zovemo *format matrice* [3]. Na primer:

Matrica:	$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 9 & 9 \\ 2 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \\ 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 34 & 9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3 & 9 & 9 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$
Format:	3×4	4×1	1×4	3×3

Skup svih matrica formata $m \times n$ sa elementima iz $\mathbb{R}$ označavamo sa $\mathbb{R}^{m \times n}$. Matrice istog formata se sabiraju tako što se saberu elementi na odgovarajućim mestima. Kraće pišemo ovako:

$$[a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}.$$

Matrica se množi brojem tako što se svaki element matrice pomnoži tim brojem. Kraće pišemo ovako:

$$\alpha \cdot [a_{ij}]_{m \times n} = [\alpha \cdot a_{ij}]_{m \times n}.$$

Proizvod kompatibilnih matrica $A = [a_{ij}]_{k \times n}$ i $B = [b_{ij}]_{n \times m}$, pišemo $C = AB$, je matrica $C = [c_{ij}]_{k \times m}$ čiji elementi se računaju na sledeći način:

$$c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is} b_{sj}.$$

Teorema 5.1 *Moženje matrica je asocijativno. Preciznije, ako je A matrica formata $m \times n$, B matrica formata $n \times p$ i C matrica formata $p \times q$, onda je $(AB)C = A(BC)$.*

Postoji matrica koja prilikom množenja matrica ima istu ulogu koju broj 1 ima prilikom množenja brojeva. Sa E_n označavamo sledeću kvadratnu matricu reda n:

$$E_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix},$$

i zovemo je *jedinična matrica reda n*. Ukoliko je red matrice E_n jasan iz konteksta, umesto E_n pišemo samo E.

Teorema 5.2 *Za proizvoljnu matricu A formata $m \times n$ je $AE_n = E_mA = A$.*

Svakoj kvadratnoj matrici $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ se prirodno dodeljuje determinanta $D = |a_{ij}|_{n \times n}$ reda n. Kažemo da je D *determinanta matrice A*.

Naredna teorema pokazuje da se determinanta "slaže" sa množenjem kvadratnih matrica istog reda u sledećem smislu: $|AB| = |A| \cdot |B|$.

Teorema 5.3 *Neka su A i B kvadratne matrice istog reda. Tada je $|AB| = |A| \cdot |B|$.*

Literatura

[1] Sheldon Axler: "Linear Algebra Done Right" (2nd Ed.), Springer-Verlag New York Berlin Heidelberg 1997.

[2] Stephen Boyd, Lieven Vandenberghe: "Introduction to Applied Linear Algebra: Vectors, Matrices, and Least Square", Cambridge University Press 2018.

[3] Philip N. Klein: "Coding the Matrix – Linear Algebra through Applications to Computer Science". Newtonian Press 2015.