# Zadatak 6a

**Teorema.** *Neka su* $a, b \in \mathbb{R}$ *takvi da je* $a \geq b$ *i* $b \geq 0$. *Tada je*

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab}.$$

*Dokaz.* Primetimo, prvo, da je

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$$

zato što je kvadrat svakog realnog broja nenegativan. (Naravno, izraz na levoj strani je realan broj zato što je $a \geq 0$ i $b \geq 0$.) Nakon kvadriranja dobijamo

$$a - 2\sqrt{ab} + b \geq 0,$$

odakle, nakon nekoliko elementarnih algebarskih transformacija, sledi

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab},$$

što je i trebalo pokazati. □

Sledeće tvrđenje se dokazuje indukcijom, ali za njegov dokaz još uvek nemamo dovoljno LaTeX-ovskih veština, pa ćemo ga izostaviti.

**Teorema (Nejednakost aritmetičke i geometrijske sredine).** *Neka je* $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, *i neka su* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *takvi da je* $a_i \geq 0$ *za sve* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. *Tada je*

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

*Jednakost važi ako i samo ako je* $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Interesantna je i sledeća:

**Teorema (Nejednakost geometrijske i harmonijske sredine).** *Neka je* $n \in \mathbb{N}, n \geq 2$, *i neka su* $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ *takvi da je* $a_i \geq 0$ *za sve* $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. *Tada je*

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

*Jednakost važi ako i samo ako je* $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

# Zadatak 6b

Neka su $\vec{u} = (x_1, y_1)$ i $\vec{v} = (x_2, y_2)$ dva vektora u $\mathbb{R}^2$ odabrana tako da je $\vec{u} \neq \vec{0}$ i $\vec{v} \neq \vec{0}$. Dužina vektora $\vec{u}$ data je sa

$$|\vec{u}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2},$$

dok je skalarni proizvod vektora $\vec{u}$ i $\vec{v}$ dat sa

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = x_1 x_2 + y_1 y_2.$$

**Teorema.** *Neka su $\vec{u} = (x_1, y_1)$ i $\vec{v} = (x_2, y_2)$ dva vektora u $\mathbb{R}^2$ odabrana tako da je $\vec{u} \neq \vec{0}$ i $\vec{v} \neq \vec{0}$. Tada je*

$$\cos \angle(\vec{u}, \vec{v}) = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}.$$

# 1 Zadatak 6c

**Lema.** *Dokazati da je*

$$a^k - 1 = (a-1)(a^{k-1} + a^{k-2} + \ldots + a + 1)$$

*za svaki realan broj $a$ i svaki prirodan broj $k \geq 2$.*

*Dokaz.* Direktnim računom. □

**Teorema (Mersenovi brojevi).** *Ako je $2^n - 1$ prost broj onda je i $n$ prost broj, za svako $n \in \mathbb{N}$.*

*Dokaz.* Pretpostavimo da $n$ nije prost broj. Ako je $n = 1$ onda je $2^n - 1 = 1$, što nije prost broj. Pretpostavimo, zato, da je $n \geq 2$. Kako $n$ nije prost broj, postoje prirodni brojevi $m \geq 2$ i $k \geq 2$ takvi da je $n = mk$. Sada je

$$2^n - 1 = 2^{mk} - 1 = (2^m)^k - 1 = a^k - 1,$$

gde smo stavili $a = 2^m$ da bismo lakše pratili nastavak dokaza. Prema Lemi je

$$a^k - 1 = (a-1)(a^{k-1} + a^{k-2} + \ldots + a + 1)$$

i zato je

$$2^n - 1 = (a-1)(a^{k-1} + a^{k-2} + \ldots + a + 1).$$

Kako je $a = 2^m$ i $m \geq 2$ zaključujemo da je $a - 1 \geq 3$. S druge strane iz $k \geq 2$ i $a \geq 4$ sledi da je $a^{k-1} + a^{k-2} + \ldots + a + 1 \geq 5$. Dakle, $2^n - 1$ je složen broj.

□