1 Zadatak 7a

Primer: Problem sa terijerima i kometama. Iz sledeće tri premise izvesti odgovarajući zaključak:

1. Nijedan terijer ne luta među zvezdama.
2. Ništa što ne luta među zvezdama nije kometa.
3. Samo terijeri imaju kovrdžav rep.

Rešenje. Uvedimo sledeće oznake:

$$\begin{aligned} T &= \text{terijer}, & L &= \text{luta među zvezdama} \\ K &= \text{kometa}, & R &= \text{ima kovrdžav rep} \end{aligned}$$

Prethodne tri izjave možemo formalno da zapišemo ovako:

1. $T \Rightarrow \neg L$ (ako je terijer onda ne luta zvezdama);
2. $\neg L \Rightarrow \neg K$ (ako ne luta među zvezdama onda nije kometa); i
3. $R \Rightarrow T$ (ako ima kovrdžav rep onda je to terijer).

Sada se lako uočava niz implikacija:

$$R \underset{(3)}{\Rightarrow} T \underset{(1)}{\Rightarrow} \neg L \underset{(2)}{\Rightarrow} \neg K$$

Dakle, $R \Rightarrow \neg K$. Imajući u vidu da je $R \Rightarrow \neg K \equiv K \Rightarrow \neg R$ zaključujemo, takođe, da je $K \Rightarrow \neg R$, odnosno, da *komete nemaju kovrdžav rep.*

2 Zadatak 7b

Primer. Gde je greška u sledećem "dokazu" da je $1 = 2$:

$$\begin{aligned} -2 &= -2 \\ 1 - 3 &= 4 - 6 \\ 1 + 3 + \frac{9}{4} &= 4 - 6 + \frac{9}{4} \\ \left(1 - \frac{3}{2}\right)^2 &= \left(2 - \frac{3}{2}\right)^2 \\ \sqrt{\left(1 - \frac{3}{2}\right)^2} &= \sqrt{\left(2 - \frac{3}{2}\right)^2} \\ 1 - \frac{3}{2} &= 2 - \frac{3}{2} \\ 1 &= 2 \end{aligned}$$

3 Zadatak 7c

Dokazi kontrapozicijom

Nekada se dešava da nije lako naći direktan dokaz. Jedan način da dokažemo tvrđenje oblika $p \Rightarrow q$ je da koristimo tautologiju

$$\models (p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\neg q \Rightarrow \neg p)$$

koja kaže da je logički svejedno da li ćemo dokazivati da

$$p \Rightarrow q$$

ili da

$$\neg q \Rightarrow \neg p.$$

Dokazi zasnovani na ovoj strategiji se zovu *dokazi kontrapozicijom.*

Primer. Neka je n prirodan broj. Ako je n^2 paran onda je i n paran broj.

Dokaz. Treba da pokažemo sledeće:

$$\underbrace{n^2 \text{ je paran broj}}_{p} \Rightarrow \underbrace{n \text{ je paran broj}}_{q}$$

Kontrapozicija ovog tvrđenja glasi:

$$\underbrace{n \text{ je neparan broj}}_{\neg q} \Rightarrow \underbrace{n^2 \text{ je neparan broj}}_{\neg p}$$

i to se lako dokazuje. Neka je n neparan broj. Tada je

$$n = 2k + 1$$

za neko $k \geq 0$. No, tada je

$$n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2\underbrace{(2k^2 + 2k)}_{m} + 1 = 2m + 1$$

što znači da je n^2 neparan broj. $\square$

4 Zadatak 7d

Teorema (Gvido Fubini)**.** Neka su X i Y prostori sa σ-konačnom merom i neka je $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ merljiva funkcija takva da je

$$\int\limits_{X \times Y} |f(x,y)| d(x,y) < \infty$$

Tada je

$$\int\limits_{X} \left(\int\limits_{Y} f(x,y)\, dy \right) dx = \int\limits_{Y} \left(\int\limits_{X} f(x,y)\, dx \right) dy = \int\limits_{X \times Y} f(x,y)\, d(x,y).$$

Teorema (Srinivasa Ramanudžan)**.** Ako kompleksna funkcija f ima razvoj u obliku

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\varphi(k)}{k!}(-x)^k$$

za neko φ onda je

$$\int_0^{\infty} x^{s-1} f(x)\, dx = \Gamma(s)\varphi(-s),$$

gde je $\Gamma(s)$ označena gama-funkcija.