Mały Projekt nr 3.

Temat: ***Zastosowanie macierzy i wyznaczników***

Niech $\boldsymbol{u} = [u_1, u_2, u_3]$, $\boldsymbol{v} = [v_1, v_2, v_3]$ i $\boldsymbol{w} = [w_1, w_2, w_3]$ będą wektorami w przestrzeni $R^3(\mathbb{R})$.

Polem równoległoboku, którego nierównoległymi bokami są wektory $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{v}$ jest długość wektora

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \left[\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \right]$$

($\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v}$ tzw. *iloczyn wektorowy* wektorów $\boldsymbol{u}$ i $\boldsymbol{v}$).

Niech wychodzące z jednego wierzchołka krawędzie równoległościanu w $R^3(\mathbb{R})$ będą wektorami $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ i $\boldsymbol{w}$. Wówczas

$$\left| Det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix} \right|$$

jest objętością tego równoległościanu.

Niech $V(\mathbb{K})$ i $V'(\mathbb{K})$ będą przestrzeniami skończenie wymiarowymi i niech $V = \mathcal{L}(\mathcal{B})$ i $V' = \mathcal{L}(\mathcal{B}')$, gdzie $\mathcal{B}$ jest bazą przestrzeni $V(\mathbb{K})$ oraz $\mathcal{B}'$ jest bazą przestrzeni $V'(\mathbb{K})$. Dla dowolnego przekształcenia liniowego $F \in Hom(V(\mathbb{K}), V'(\mathbb{K}))$:

$$M_{\mathcal{B}'}(F(\boldsymbol{v})) = M_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}(F) \cdot M_{\mathcal{B}}(\boldsymbol{v})$$

Przykładami typowych macierzy przekształceń na płaszczyźnie (w przestrzeni $R^2(\mathbb{R})$) są:

- Macierz obrotu (przeciwnie do ruchu wskazówek zegara) o kąt α wokół początku układu współrzędnych:
$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$
- Macierz odbicia symetrycznego względem prostej $y = x$:
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
- Macierz skalowania w kierunku osi OX przez s oraz w kierunku OY przez t:
$$\begin{pmatrix} s & 0 \\ 0 & t \end{pmatrix}$$
- Macierz "skręcenia" z parametrem a w kierunku osi OX oraz z parametrem b w kierunku osi OY:
$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ b & 1 \end{pmatrix}$$

Zadania do wykonania:

(a) Obliczyć pole równoległoboku zadanego współrzędnymi jego wierzchołków.

(b) Obliczyć objętość równoległościanu zadanego współrzędnymi jego wierzchołków.

(c) Obrócić trójkąt o podanych wierzchołkach o zadany kąt α przeciwnie do ruchu wskazówek zegara.

(d) Powiększyć kwadrat jednostkowy (kwadrat, którego boki mają długość jeden) trzykrotnie względem osi OX i dwukrotnie względem osi OY.

(e) Zadany odcinek obrócić o podany kąt α oraz powiększyć o $p\%$.