Analyse de variance - Modèles à effets fixes

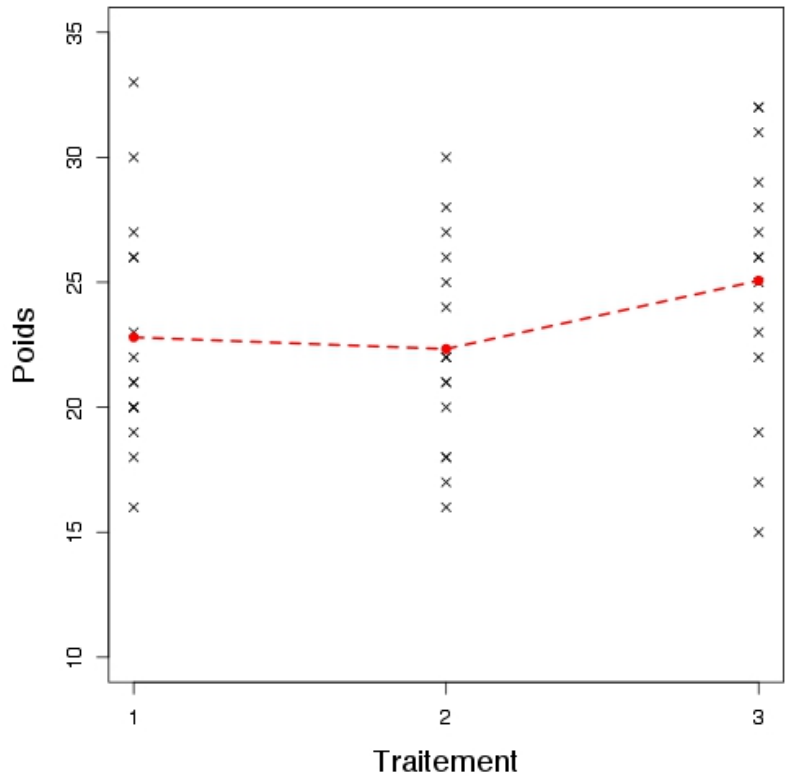
Mathieu Emily

Laboratoire de mathématiques appliquées
Agrocampus Ouest, Rennes

Plan

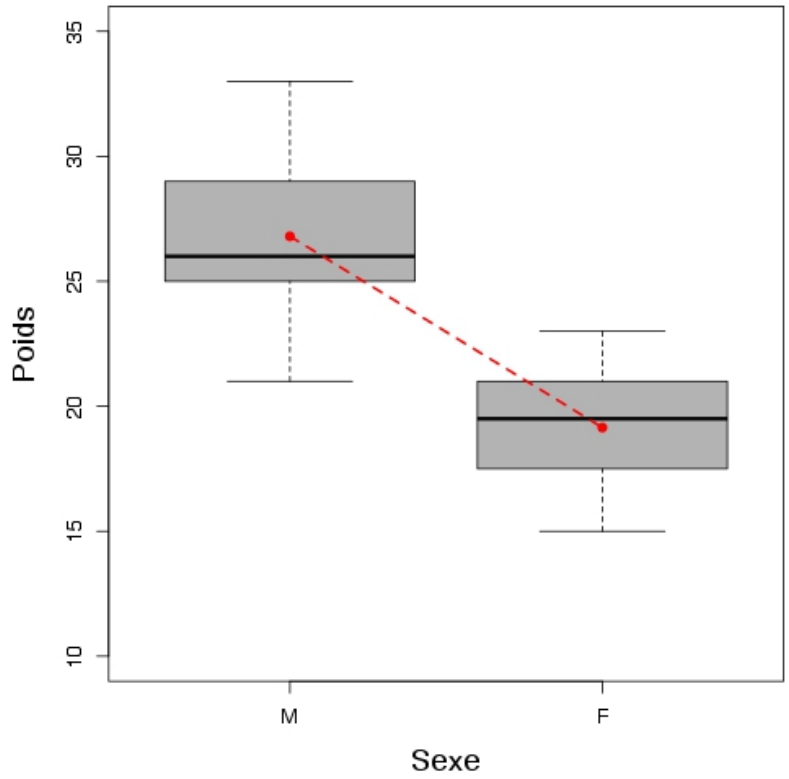
Plan

Quel est l'effet d'un traitement sur le poids de poussins ?



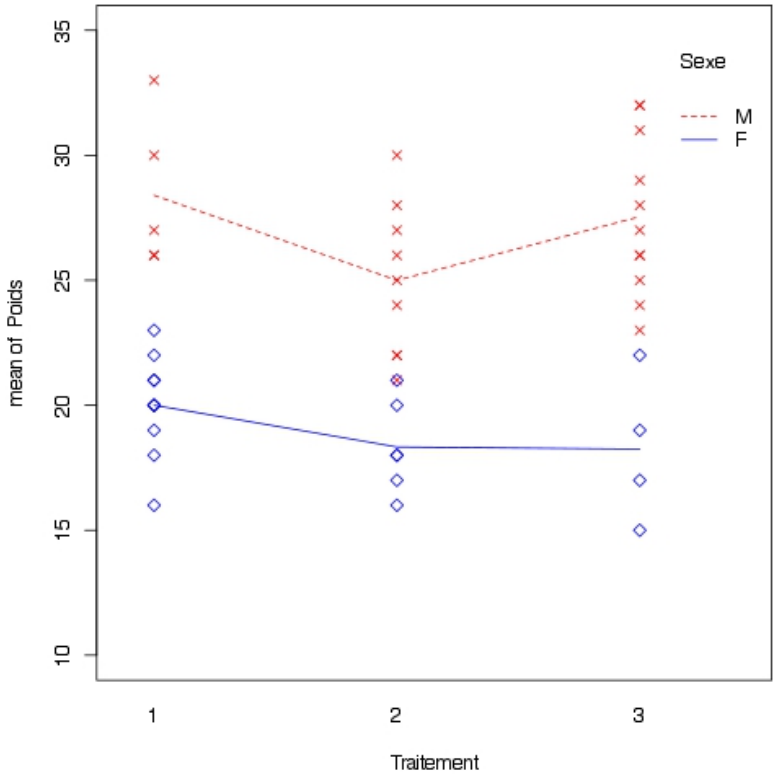
- Poids : variable à expliquer **quantitative**
- Traitement : variable explicative **qualitative** ou **facteur**

Quel est l'effet du sexe sur le poids de poussins ?



- Poids : variable à expliquer **quantitative**
- Sexe : variable explicative **qualitative** ou **facteur**
- Remarque : on utilise une autre représentation de la variabilité par des "boxplot"

Quel est l'effet du traitement et du sexe sur le poids de poussins ?



- Poids : variable à expliquer **quantitative**
- Traitement et Sexe : 2 **facteurs**
- Interprétation des **interactions** : à faire avec précaution !

Objectifs généraux de l'Analyse de variance

- **Expliquer** une variable quantitative par 1 ou plusieurs **facteurs**.
- Expliquer une variable revient à expliquer sa **variabilité** ou variance.
  - La variabilité mesure la dispersion de la variable
  - La variabilité se quantifie par la **somme des carrés des écarts par rapport à la moyenne**.

Objectif de l'analyse de variance (Version 1)

Evaluer le fait de considérer les observations d'une même catégorie d'un facteur **égale à la moyenne empirique**, sur la variabilité de la variable à expliquer.

Caractéristiques fondamentales

- **Planification expérimentale**
  - Orthogonalité des facteurs
  - Plan **équilibré** (mêmes effectifs pour chaque cellule du plan)
  - Plan **complet** : toutes les combinaisons de facteurs ont été expérimentées
- **Hypothèses de modélisation**
  - Modèles **paramétriques**
  - Modèles non-paramétriques

Plan

La variabilité

- La variabilité est la notion **de base** de l'Analyse de variance.
  - Toute la complexité d'un phénomène est quantifiée par sa variabilité.
- Un objectif statistique de l'Analyse de variance est de rendre compte du **maximum de variabilité** d'un phénomène en tenant compte du **minimum d'information**.
  - L'information utilisée est caractérisée par la dimension des facteurs ou **degrés de liberté**.
  - Compromis classique en statistique entre **qualité d'ajustement** et **parcimonie**.

Objectif de l'analyse de variance (Version 2)

Evaluer la variabilité expliquée par un facteur en pondérant par rapport à la dimension (ou degré de liberté) de ce facteur.

Exemple jouet

- Considérons le phénomène de la visualisation d'une photo [1].

- Le phénomène est **caractérisé par la variabilité** des pixels de l'image.
- La variabilité est **mesurée par la Somme des Carrés des Ecarts (SCE)** pour 256 couleurs vaut :

$$SCE_T = 9232 \quad \text{et} \quad \textbf{ddl} = 256 - 1 = 255$$

1. La photo "lena" sert d'image de test pour les algorithmes de traitement d'image et est devenue un standard industriel et scientifique.

Exemple jouet : modèle 1

- Un spécialiste connaît les **zones de couleur moyenne**.
  - Peut-on **conserver une bonne** visualisation du phénomène ?
- Les pixels "de couleur moyenne" sont ramenés à leur **moyenne empirique** (et de même pour les autres pixels).

Image réelle = Modèle à 2 couleurs + Image résiduelle

- Pensez-vous que l'information donnée par le spécialiste est **pertinente** ?

Exemple jouet : modèle 1

- Pour évaluer un modèle on compare la variabilité du **modèle** à celle de la **résiduelle**
- Evaluation numérique :

$$SCE_{M1} = \mathbf{160}$$

$$SCE_{R1} = \mathbf{9072}$$

$$F_{M1} = \mathbf{4.48} \quad p.val = \mathbf{0.035}$$

Exemple jouet : modèle 2

- Un autre spécialiste connaît les zones **foncées**.
  - Peut-on conserver une bonne visualisation du phénomène ?

Image réelle = Modèle à 2 couleurs + Image résiduelle

$$SCE_{M2} = \mathbf{6330} \quad SCE_{R2} = \mathbf{2901}$$

$$F_{M2} = 554.23 \quad p.val < 2.2e-16$$

Exemple jouet 3

- Un non-spécialiste ne connaît rien et affecte des pixels foncés **au hasard**.
  - Peut-on conserver une bonne visualisation du phénomène ?

Image réelle = Modèle à 2 couleurs + Image résiduelle

$$SCE_{M3} = \mathbf{0.02} \quad SCE_R = \mathbf{9231}$$

$$F_{M3} = \mathbf{0.00076} \quad p.val = 0.97$$

Exemple jouet : bilan

- Dans les exemples précédents, nous avons cherché à **modéliser** (ou simplifier) un phénomène complexe (photo avec 256 couleurs) par un phénomène plus simple (photo à 2 couleurs)
  - La pertinence du modèle est évaluée par la **part de variabilité conservée par le modèle**.
  - Cette mesure s'effectue par le calcul de la **somme des carrés des écarts**.
- En détails on remarque que :
  - Modèle 1 : information pertinent mais non-linéaire.
  - Modèle 2 : information très pertinente.
  - Modèle 3 : information pas du tout pertinente.

Plan

Exemple illustratif

- Espèce étudiée : **Vache**
- Taille d'échantillon : $n = 30$ **observations**
- Une variable à expliquer : le gain moyen de poids sur 30 jours.
- 2 variables explicatives :
  - Milieu à 3 modalités (Bon, médiocre et moyen)
  - Génotype à 2 modalités : Pur et Croise

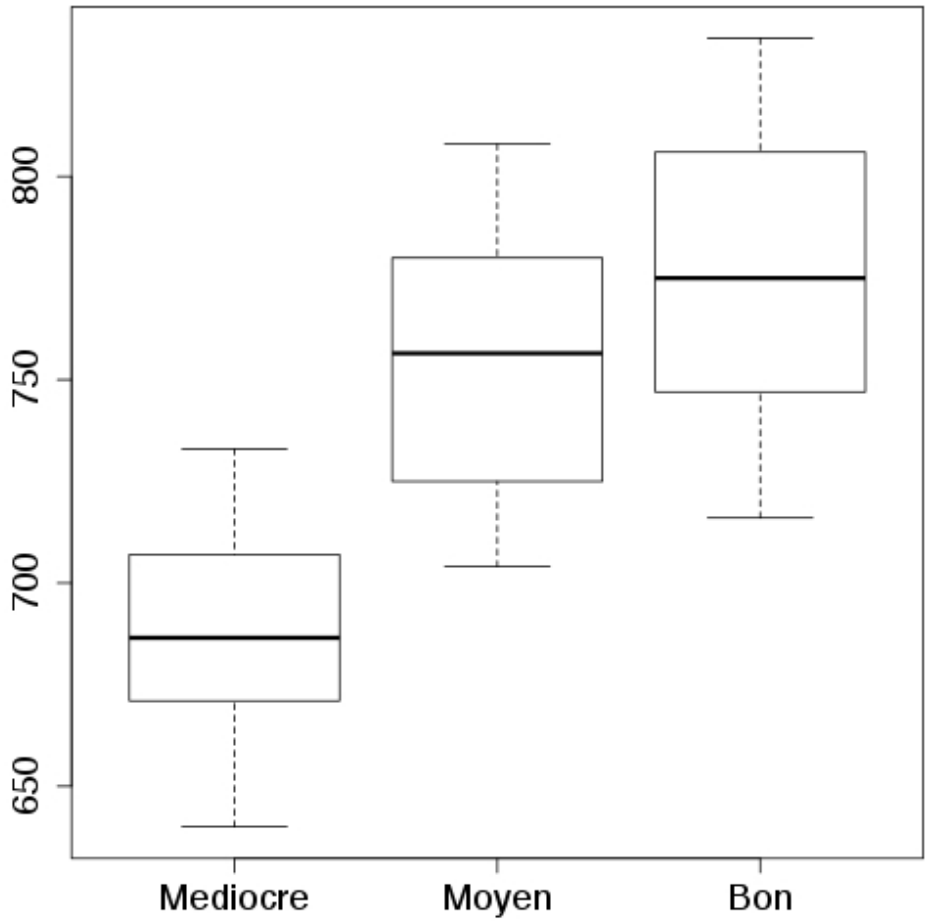
```
> charolais
   Genotype   Milieu GMQ
1    Croise      Bon 834
2    Croise      Bon 780
3    Croise      Bon 813
4    Croise      Bon 806
```

Démarche à suivre

- L'étude de l'impact de facteurs sur une variable quantitative peut se faire à **différents niveaux**.
- Du point de vue statistique, il convient de respecter l'ordre du schéma d'analyse suivant :
  1. Pertinence du modèle **global**
  2. Effet de **chaque facteur**
  3. Comparaison des **modalités** pour un facteur donné

Plan

Illustration : effet du Milieu sur le gain de poids



- Faire l'exemple sous R

Plan

Ecriture du modèle

$$\mathbf{Y_{ij}} = \mu + \alpha_{\mathbf{i}} + \varepsilon_{\mathbf{ij}}$$

- i représente le **niveau** du facteur $(i = 1, \ldots, I)$
- j représente l'indice de répétition $(j = 1, \ldots, n_i)$
  - Si le plan est **équirépété** : $n_i = J$
- **Hypothèses de modélisation :**
  - $\forall i, j, \varepsilon_{ij} \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$
  - $\forall i' \neq i$ ou $j' \neq j$: $Cov(\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{i'j'}) = 0$

Interprétation du modèle

$$Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$$

- La variable Y_{ij} est la somme
  - d'un terme **constant** μ
  - d'un effet **spécifique** à chaque niveau du facteur α_i
  - un **résidu** aléatoire gaussien ε_{ij}
- Le modèle possède $I + 1$ paramètres :
  - La dimension paramétrique du modèle est I !
  - Une **contrainte de liaison** doit être explicitée pour estimer les paramètres.

Contraintes sur les paramètres

- Nullité du terme constant : $\mu = 0$

$$Y_{ij} = \mu_i + \varepsilon_{ij}$$

- **Nullité de la somme des effets individuels**

$$\sum_{i=1}^{I} \alpha_i = 0$$

- Nullité de la somme pondérée des effets individuels

$$\sum_{i=1}^{I} n_i \alpha_i = 0$$

- Une modalité de référence : i^*

$$\alpha_{i^*} = 0$$

Plan

Estimation des paramètres : principe des Moindres Carrés Ordinaires

- On cherche à minimiser l'**écart entre les observations et le modèle** :

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij} - \widehat{Y_{ij}})^2$$

- Pour chaque modalité i, minimiser $\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij} - \widehat{Y_{ij}})^2$ se fait par :

$$\widehat{\mu_i} = Y_{i.} = \frac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i} Y_{ij}$$

L'estimation du modèle permet d'utiliser le modèle pour la prédiction

Y_{ij} est prédite par son **espérance** $\widehat{Y_{ij}}$

- Pour le modèle avec nullité de la constante, l'estimation des paramètres permet donc de prédire chaque modalité du facteur par sa **fréquence observée**.

Autres contraintes

- Somme des effets individuels nulle

$$\widehat{\mu} = \frac{1}{\mathbf{I}} \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{I}} \mathbf{Y_{i.}} \quad \text{et} \quad \forall \mathbf{i},\ \widehat{\alpha}_\mathbf{i} = \mathbf{Y_{i.}} - \widehat{\mu}$$

- Somme pondérée des effets individuels nulle

$$\widehat{\mu} = Y_{..} = \frac{1}{I} \sum_{i=1}^{I} n_i Y_{i.} \quad \text{et} \quad \forall i,\ \widehat{\alpha}_i = Y_{i.} - Y_{..}$$

- Une modalité de référence : i^*

$$\widehat{\mu} = Y_{i^*.} \quad \text{et} \quad \forall i,\ \widehat{\alpha}_i = Y_{i.} - Y_{i^*.}$$

Estimation des résidus

- Degrés de liberté : **n-I**
  - n données
  - I paramètres estimés dans le modèle
- Un estimateur **non biaisé** de σ est donné par

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n-I} \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{n_i} (Y_{ij} - \widehat{Y_{ij}})^2$$

Sortie R

```
> modele.simple <- lm(GMQ ~ Milieu,data=charolais)
> summary(modele.simple)

Call:
lm(formula = GMQ ~ Milieu, data = charolais)

Residuals:
   Min     1Q Median     3Q    Max
-60.00 -25.25   2.50  24.75  58.00

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)   688.00      10.45  65.831  < 2e-16 ***
MilieuMoyen    66.00      14.78   4.466 0.000128 ***
MilieuBon      88.00      14.78   5.954 2.39e-06 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 33.05 on 27 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.5872,    Adjusted R-squared:  0.5566
F-statistic:  19.2 on 2 and 27 DF,  p-value: 6.496e-06
```

```
> options(contrasts=c("contr.sum","contr.sum"))
> modele.simple.contrainte <- lm(GMQ ~ Milieu,data=charolais)
> summary(modele.simple.contrainte)

Call:
lm(formula = GMQ ~ Milieu, data = charolais)

Residuals:
   Min     1Q Median     3Q    Max
-60.00 -25.25   2.50  24.75  58.00

Coefficients:
            Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)  739.333      6.034 122.531  < 2e-16 ***
Milieu1      -51.333      8.533  -6.016 2.03e-06 ***
Milieu2       14.667      8.533   1.719   0.0971 .
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

Residual standard error: 33.05 on 27 degrees of freedom
Multiple R-squared:  0.5872,    Adjusted R-squared:  0.5566
F-statistic:  19.2 on 2 and 27 DF,  p-value: 6.496e-06
```

Sortie SAS avec la proc glm

```
proc glm data=charolais
        class Milieu;
        model GMQ=Milieu / solution ss1 ss3;
run;
```

Results Viewer - sashtml

Dependent Variable: GMQ

Source	DDL	Somme des carrés	Moyenne quadratique	Valeur F	Pr > F
Model	2	41946.66667	20973.33333	19.20	<.0001
Error	27	29490.00000	1092.22222		
Corrected Total	29	71436.66667			

r-carré	Coef de Var	Racine MSE	GMQ Moyenne
0.587187	4.470079	33.04879	739.3333

Source	DDL	Type I SS	Moyenne quadratique	Valeur F	Pr > F
Milieu	2	41946.66667	20973.33333	19.20	<.0001

Source	DDL	Type III SS	Moyenne quadratique	Valeur F	Pr > F
Milieu	2	41946.66667	20973.33333	19.20	<.0001

Paramètre	Valeur estimée		Erreur type	Valeur du test t	Pr > |t|
Intercept	754.0000000	B	10.45094360	72.15	<.0001
Milieu Bon	22.0000000	B	14.77986618	1.49	0.1482
Milieu Mediocre	-66.0000000	B	14.77986618	-4.47	0.0001
Milieu Moyen	0.0000000	B	.	.	.

Utilisation d'un modèle d'ANOVA

- Un modèle d'ANOVA est rarement utilisé pour **prédire un phénomène**.
- Un modèle d'ANOVA est surtout utilisé pour savoir si le facteur considéré a un **effet** ou non sur la variable réponse.

Question statistique

La prise en compte des différents niveaux du facteurs contribue-t-elle **significativement** à expliquer la variabilité de Y ?

- Retour sous R

Plan

Décomposition de la variabilité

$$
\begin{aligned}
SCE_T &= \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij} - Y_{..})^2 \\
&\vdots \\
&= \sum_{i=1}^{I} n_i(Y_{i.} - Y_{..})^2 + \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{n_i}(Y_{ij} - Y_{i.})^2 \\
&= \mathbf{SCE_M + SCE_R}
\end{aligned}
$$

- SCE_T (resp. SCE_M, SCE_R) : somme des carrés des écarts Totale (resp. Modèle, Résiduelle)
- SCE_M : variabilité inter-classe = variabilité expliquée par le modèle
- SCE_R : variabilité intra-classe = variabilité résiduelle

Hypothèses de test

- Pour tester l'effet d'un facteur on peut :
  - faire une **comparaison de modèles** :

$$\mathcal{H}_0 : Y_{ij} = \mu + \varepsilon_{ij} \quad \text{contre} \quad \mathcal{H}_1 : Y_{ij} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ij}$$

  - ce qui revient à :

$$\mathcal{H}_0 : \forall i \;\; \alpha_i = 0 \quad \text{contre} \quad \mathcal{H}_1 : \exists i \;\; \alpha_i \neq 0$$

- Pour ce test, on va comparer la variabilité expliquée par le modèle, SCE_M, à la variabilité résiduelle, SCE_R.
  - Si les 2 variabilités sont du **même ordre** de grandeur il n'y a pas d'effet du facteur.
  - Pour comparer SCE_M et SCE_R, il faut diviser par leurs **degrés de liberté** et comparer CM_M et CM_R :

$$CM_M = \frac{SCE_M}{I-1} \quad \text{et} \quad CM_R = \frac{SCE_R}{n-I}$$

Test global

- On peut montrer :

$$\mathbb{E}[CM_M] = \sigma^2 + \frac{1}{I-1}\sum_{i=1}^{I} n_i \alpha_i^2 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}[CM_R] = \sigma^2$$

- Sous $\mathcal{H}_0$ on a :

$$\mathbb{E}[CM_M] = \mathbb{E}[CM_R]$$

$$\frac{SCE_M}{\sigma^2} \sim_{\mathcal{H}_0} \chi^2_{I-1} \quad \text{et} \quad \frac{SCE_R}{\sigma^2} \sim_{\mathcal{H}_0} \chi^2_{n-I}$$

Ainsi :

$$\mathbf{F_{Obs}} = \frac{\mathbf{CM_M}}{\mathbf{CM_R}} \sim_{\mathcal{H}_0} \mathcal{F}^{\mathbf{I-1}}_{\mathbf{n-I}}$$

Tableau d'analyse de variance

Variabilité	SCE	ddl	CM	Statistique
Facteur	$\sum_i n_i(Y_{i.} - Y_{..})^2$	$I-1$	$SCE_M/(\text{I-1})$	$F_{Obs} = CM_M/CM_R$
Résiduelle	$\sum_{ij}(Y_{ij} - Y_{i.})^2$	$n-I$	$SCE_R/(\text{n-I})$	
Totale	$\sum_{i,j}(Y_{ij} - Y_{..})^2$	$n-1$		

- Règle de décision :
  - Si $F_{Obs} < \mathcal{F}_{n-I}^{I-1}(1-\alpha)$, on **accepte** $\mathcal{H}_0$ au seuil α.
  - Si $F_{Obs} > \mathcal{F}_{n-I}^{I-1}(1-\alpha)$, on **rejette** $\mathcal{H}_0$ au seuil α.
- Remarque : le test est **unilatéral**. Pour rejeter $\mathcal{H}_0$, on cherche à avoir $CM_M > CM_R$.

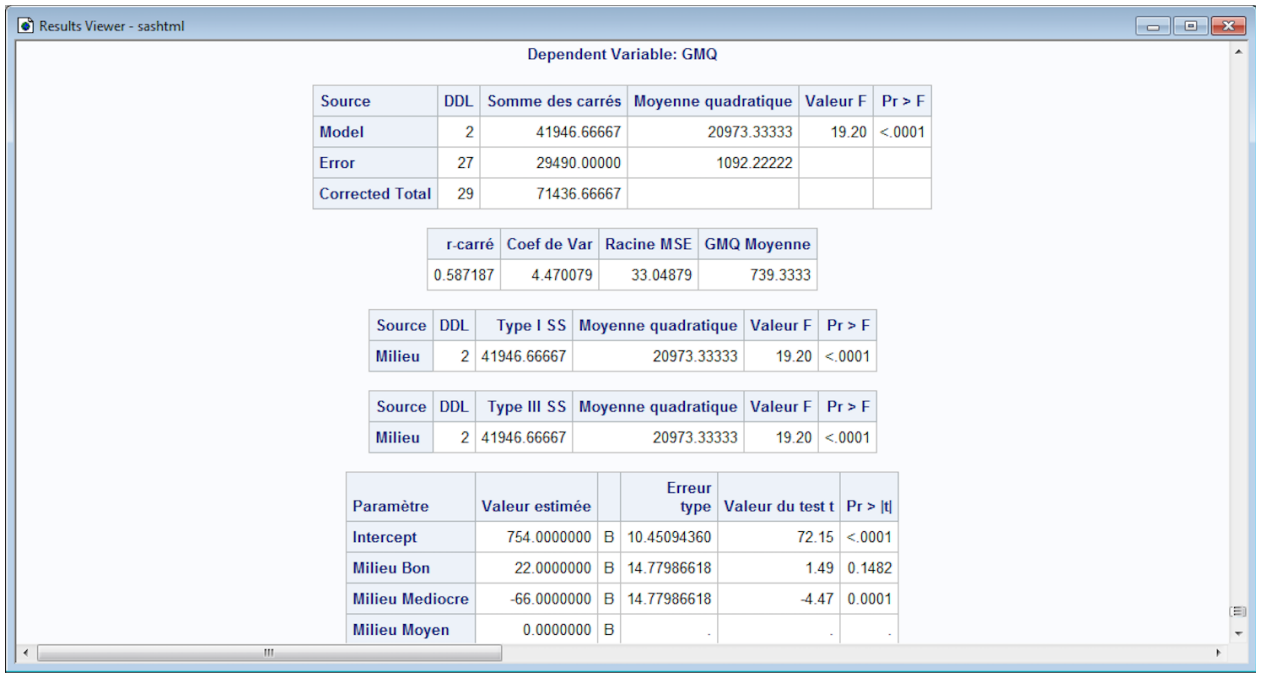
Tableau d'analyse de variance avec R

```
> anova(modele.simple)
Analysis of Variance Table

Response: GMQ
          Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
Milieu     2  41947 20973.3  19.202 6.496e-06 ***
Residuals 27  29490  1092.2
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
```

- On note donc un effet **significatif** du milieu sur le gain moyen de poids.
- Remarque : le tableau d'ANOVA ne dépend pas de la **contrainte**.

Tableau d'analyse de variance avec SAS

```
proc glm data=charolais
       class Milieu;
       model GMQ=Milieu / solution ss1 ss3;
run;
```



Results Viewer - sashtml

Dependent Variable: GMQ

Source	DDL	Somme des carrés	Moyenne quadratique	Valeur F	Pr > F
Model	2	41946.66667	20973.33333	19.20	<.0001
Error	27	29490.00000	1092.22222		
Corrected Total	29	71436.66667			

r-carré	Coef de Var	Racine MSE	GMQ Moyenne
0.587187	4.470079	33.04879	739.3333

Source	DDL	Type I SS	Moyenne quadratique	Valeur F	Pr > F
Milieu	2	41946.66667	20973.33333	19.20	<.0001

Source	DDL	Type III SS	Moyenne quadratique	Valeur F	Pr > F
Milieu	2	41946.66667	20973.33333	19.20	<.0001

Paramètre	Valeur estimée		Erreur type	Valeur du test t	Pr > |t|
Intercept	754.0000000	B	10.45094360	72.15	<.0001
Milieu Bon	22.0000000	B	14.77986618	1.49	0.1482
Milieu Mediocre	-66.0000000	B	14.77986618	-4.47	0.0001
Milieu Moyen	0.0000000	B	.	.	.

Test de conformité

- $\mathcal{H}_0 : \alpha_i = c$ vs $\mathcal{H}_0 : \alpha_i \neq c$
- Sous la contrainte de nullité de somme des effets on :

$$\widehat{\alpha}_i \sim \mathcal{N}\left(\alpha_i, \sigma_{\widehat{\alpha}_i}\right)$$

- On estime $\sigma_{\widehat{\alpha}_i}$ par :

$$\widehat{\sigma^2_{\widehat{\alpha}_i}} = \frac{I-1}{I}\frac{\widehat{\sigma^2}}{J} = \frac{I-1}{I}\frac{CM_R}{J}$$

- Ainsi :

$$t_{Obs} = \frac{\widehat{\alpha}_i - c}{\widehat{\sigma^2_{\widehat{\alpha}_i}}} \sim_{\mathcal{H}_0} \mathcal{T}_{n-I}$$

- On peut donc construire un test de Student à partir de $|t_{Obs}|$:
  - Si $|t_{Obs}| < t_{n-I}(1-\alpha/2)$ on accepte $\mathcal{H}_0$ au seuil α
  - Si $|t_{Obs}| > t_{n-I}(1-\alpha/2)$ on rejette $\mathcal{H}_0$ au seuil α

Plan

Analyse Post-Hoc : comparaison de 2 moyennes

- Si $\mathcal{H}_0 : \forall i \ \alpha_i = 0$ est rejetée, on peut rechercher plus précisément les **modalités du facteur qui diffèrent**.
- Soit i et i', 2 modalités du facteur, on s'intéresse à tester l'hypothèse : $\mathcal{H}_0 : \forall i \ \mu_i = \mu_{i'}$.
- On utilise alors un principe de comparaison de **moyennes** :

$$\widehat{\mu_i} - \widehat{\mu_{i'}} \sim \mathcal{N}\left(\mu_i - \mu_{i'}, \sqrt{\left(\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i'}}\right)\sigma^2}\right)$$

- Il faut estimer σ^2 : on utilise l'hypothèse d'homoscédasticité et l'information de la **résiduelle** (et donc son degré de liberté : $ddl_R = n - I$) :

$$t_{i,i'} = \frac{\widehat{\mu_i} - \widehat{\mu_{i'}} - (\mu_i - \mu_{i'})}{\widehat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i'}}}} \sim \mathcal{T}_{ddl_R}$$

- On pose alors : $LSD = t_{ddl_R}(1 - \alpha/2)\widehat{\sigma}\sqrt{\frac{1}{n_i} + \frac{1}{n_{i'}}}$
  - Si $|\mu_i - \mu_{i'}| > LSD$, on **rejette** $\mathcal{H}_0$

Analyse Post-Hoc : comparaison de > 2 moyennes

- Attention : si l'on effectue plusieurs fois cette comparaison, **le niveau α du test n'est plus respecté**.
- Une stratégie consiste à **corriger** ce niveau α par une procédure de correction de tests multiples (**Bonferroni** par exemple)
- D'autres procédures s'appuient sur la statistique d'**écart studentisé** :

$$q_{r,ddl} = \frac{M_{r_1} - M_{r_2}}{\sqrt{\frac{1}{2}\left(\frac{\widehat{\sigma^2}}{n_r} + \frac{\widehat{\sigma^2}}{n_1}\right)}} = t_{r_1,r_2}\sqrt{2}$$

  - r_1 et r_2 sont les moyennes à comparer
  - ddl est le nombre de degré de liberté de la résiduelle
  - pour l'ANOVA à 1 facteur : $r = I - 1$ et $ddl = n - I$.
  - **Tukey**(-Kramer) HSD, Duncan (**MRT**), Newman-Keuls (**SNK**)
- La méthode de **Scheffé** s'appuie sur les contrastes.

Exemple avec sorties R

- Retour sous R

```
> pairwise.t.test(charolais$GMQ,charolais$Milieu,p.adjust="none")

   Pairwise comparisons using t tests with pooled SD

data:  charolais$GMQ and charolais$Milieu

      Mediocre Moyen
Moyen 0.00013  -
Bon   2.4e-06  0.14820

P value adjustment method: none
> pairwise.t.test(charolais$GMQ,charolais$Milieu,p.adjust="bonferroni")

   Pairwise comparisons using t tests with pooled SD

data:  charolais$GMQ and charolais$Milieu

      Mediocre Moyen
Moyen 0.00038  -
Bon   7.2e-06  0.44461

P value adjustment method: bonferroni
```

```
> require(multcomp)
> modele.1way <- lm(GMQ ~ Milieu,data=charolais)
> tuk <- glht(modele.1way,linfct=mcp(Milieu="Tukey"))
> summary(tuk)

     Simultaneous Tests for General Linear Hypotheses

Multiple Comparisons of Means: Tukey Contrasts


Fit: lm(formula = GMQ ~ Milieu, data = charolais)

Linear Hypotheses:
                       Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
Moyen - Mediocre == 0    66.00      14.78   4.466   <0.001 ***
Bon - Mediocre == 0      88.00      14.78   5.954   <0.001 ***
Bon - Moyen == 0         22.00      14.78   1.489    0.312
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
(Adjusted p values reported -- single-step method)
```

Exemple avec sorties R

- Retour sous R
- `pairwise.t.test` (pk `stats`) et `glht` (pk `multicomp`)

```
> pairwise.t.test(charolais$GMQ,charolais$Milieu,p.adjust="none")

   Pairwise comparisons using t tests with pooled SD

data:  charolais$GMQ and charolais$Milieu

      Mediocre Moyen
Moyen 0.00013  -
Bon   2.4e-06  0.14820

P value adjustment method: none
> pairwise.t.test(charolais$GMQ,charolais$Milieu,p.adjust="bonferroni")

   Pairwise comparisons using t tests with pooled SD

data:  charolais$GMQ and charolais$Milieu

      Mediocre Moyen
Moyen 0.00038  -
Bon   7.2e-06  0.44461

P value adjustment method: bonferroni
```

```
> require(multcomp)
> modele.1way <- lm(GMQ ~ Milieu,data=charolais)
> tuk <- glht(modele.1way,linfct=mcp(Milieu="Tukey"))
> summary(tuk)

     Simultaneous Tests for General Linear Hypotheses

Multiple Comparisons of Means: Tukey Contrasts


Fit: lm(formula = GMQ ~ Milieu, data = charolais)

Linear Hypotheses:
                       Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
Moyen - Mediocre == 0    66.00      14.78   4.466   <0.001 ***
Bon - Mediocre == 0      88.00      14.78   5.954   <0.001 ***
Bon - Moyen == 0         22.00      14.78   1.489    0.312
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
(Adjusted p values reported -- single-step method)
```

- Le package `agricole` permettent de créer des groupes entre les modalités.

Exemple avec sorties SAS : utilisation de l'option `lsmeans`

```
proc glm data=charolais
       class Milieu;
       model GMQ=Milieu / solution ss1 ss3;
       lsmeans Milieu / adjust = T;
       lsmeans Milieu / adjust = BON;
       lsmeans Milieu / adjust = TUKEY;
run;
```

Le Système SAS

The GLM Procedure
Least Squares Means

Milieu	GMQ LSMEAN	Nombre LSMEAN
Bon	776.000000	1
Mediocre	688.000000	2
Moyen	754.000000	3

Least Squares Means for effect Milieu
Pr > |t| for H0: LSMean(i)=LSMean(j)
Dependent Variable: GMQ

i/j	1	2	3
1		<.0001	0.1482
2	<.0001		0.0001
3	0.1482	0.0001	

Le Système SAS

The GLM Procedure
Least Squares Means
Adjustment for Multiple Comparisons: Bonferroni

Milieu	GMQ LSMEAN	Nombre LSMEAN
Bon	776.000000	1
Mediocre	688.000000	2
Moyen	754.000000	3

Least Squares Means for effect Milieu
Pr > |t| for H0: LSMean(i)=LSMean(j)
Dependent Variable: GMQ

i/j	1	2	3
1		<.0001	0.4446
2	<.0001		0.0004
3	0.4446	0.0004	

Le Système SAS

The GLM Procedure
Least Squares Means
Adjustment for Multiple Comparisons: Tukey

Milieu	GMQ LSMEAN	Nombre LSMEAN
Bon	776.000000	1
Mediocre	688.000000	2
Moyen	754.000000	3

Least Squares Means for effect Milieu
Pr > |t| for H0: LSMean(i)=LSMean(j)
Dependent Variable: GMQ

i/j	1	2	3
1		<.0001	0.3121
2	<.0001		0.0004
3	0.3121	0.0004	

Méthode des contrastes

- Un contraste est une combinaison linéaire des moyennes (par modalité) telle que la somme des coefficients $(C_1, \ldots, C_I)$ valent 0 : $\sum_i C_i = 0$.

$$contraste = \sum_{i=1}^{I} C_i Y_{i.}$$

- La SCE expliquée par le contraste est donnée par :

$$SCE_{constraste} = \frac{\left(\sum_{i=1}^{I} C_i Y_{i.}\right)^2}{\sum_{i=1}^{I} C_i^2 / n_i} = CM_{contraste} \text{ car 1 ddl}$$

- En comparant à la résiduelle on a :

$$F_{Obs} = \frac{CM_{contraste}}{CM_R} \sim_{\mathcal{H}_0} \mathcal{F}^1_{ddl_R}$$

- Par exemple $C_1 = 1$, $C_2 = 1$ et $C_3 = -2$ permet de savoir les 2 modalités "1" et "2" sont meilleurs que la modalité "3" :

$$\mathcal{H}_0 : Y_{1.} + Y_{2.} - 2Y_{3.} = 0$$

Exemple de contrastes (1)

- Hypothèse nulle : La modalité "Bon" de Milieu a la même GMQ que les modalités combinées "Médiocre" et "Moyen".
- Cela revient à $\mathcal{H}_0 : Y_{1.} + Y_{2.} - 2Y_{3.} = 0$ d'où le contraste : $C_1 = 1$, $C_2 = 1$ et $C_3 = -2$.
- Pour les logiciels, il faut faire attention à l'ordre des modalités interprété pour chaque variable :
  - Pour SAS, on peut utiliser l'option `contrast 'a' Milieu 2 -1 1;`

```
> levels(charolais$Milieu)
[1] "Bon"      "Mediocre" "Moyen"
> summary(glht(modele.1way,linfct=mcp(Milieu=c(-2,1,1))))

     Simultaneous Tests for General Linear Hypotheses

Multiple Comparisons of Means: User-defined Contrasts


Fit: lm(formula = GMQ ~ Milieu, data = charolais)

Linear Hypotheses:
       Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
1 == 0   -110.0       25.6  -4.297 0.000201 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
(Adjusted p values reported -- single-step method)
```

Contraste	DDL	SC contrastée	Moyenne quadratique	Valeur F	Pr > F
a	1	20166.66667	20166.66667	18.46	0.0002

- Remarque : R propose un test t (Student) tandis que SAS propose un test F (Fisher)
  - $t^2_{Obs} = F_{Obs}$ ici car $ddl = 1$

Exemple de contrastes (2)

- Hypothèse nulle : La modalité "Médiocre" de Milieu a la même GMQ que la modalité et "Moyen".
- Cela revient à $\mathcal{H}_0 : Y_{1.} - Y_{2.} = 0$ d'où le contraste : $C_1 = 1$, $C_2 = -1$ et $C_3 = 0$.
- Pour les logiciels, il faut faire attention à l'ordre des modalités interprété pour chaque variable :
  - Pour SAS, on peut utiliser l'option `contrast 'a' Milieu 0 1 1;`

```
> levels(charolais$Milieu)
[1] "Bon"      "Mediocre" "Moyen"
> summary(glht(modele.1way,linfct=mcp(Milieu=c(0,1,-1))))

     Simultaneous Tests for General Linear Hypotheses

Multiple Comparisons of Means: User-defined Contrasts


Fit: lm(formula = GMQ ~ Milieu, data = charolais)

Linear Hypotheses:
       Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
1 == 0   -66.00      14.78  -4.466 0.000128 ***
---
Signif. codes:  0 '***' 0.001 '**' 0.01 '*' 0.05 '.' 0.1 ' ' 1
(Adjusted p values reported -- single-step method)
```

Contraste	DDL	SC contrastée	Moyenne quadratique	Valeur F	Pr > F
a	1	21780.00000	21780.00000	19.94	0.0001

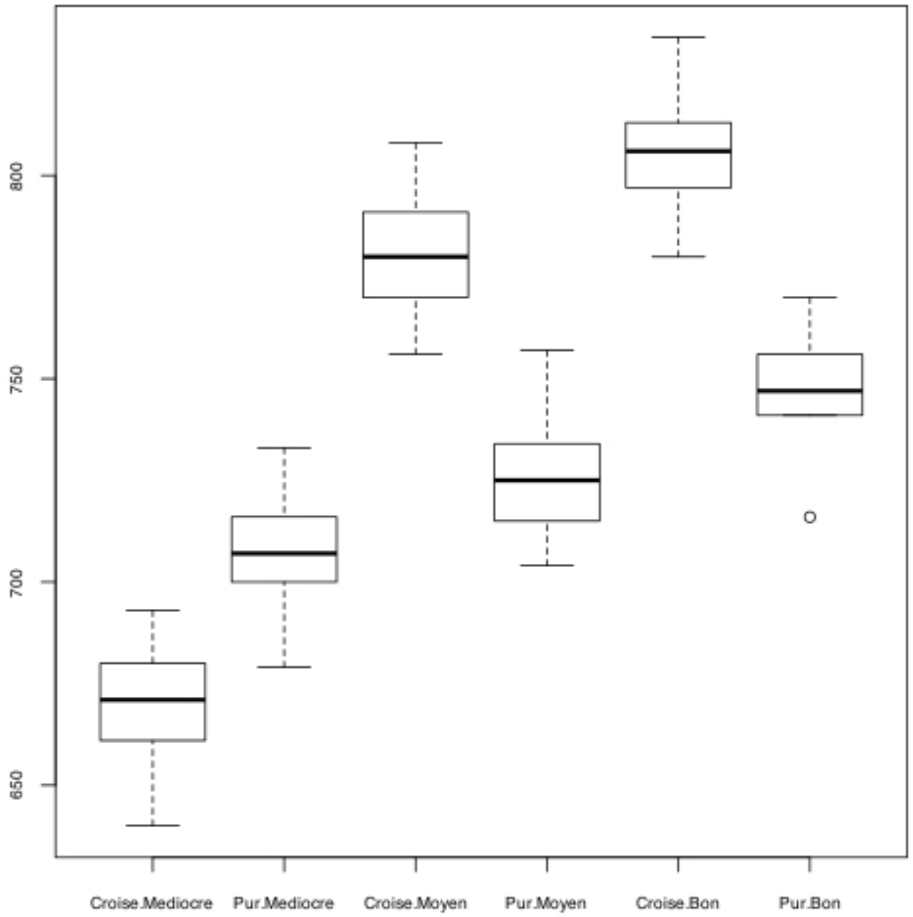
Plan

Principales hypothèses

- **Normalité** des résidus :
  - Test de Shapiro par exemple : `shapiro.test`
- **Homoscédasticité** :
  - Test de Bartlett par exemple : `bartlett.test`
- **Indépendence** des observations :
  - Quasiment impossible à tester en pratique
- Variante non-paramétrique :
  - Test de Mann-Whitney si $I = 2$
  - Test de Kruskal-Wallis si $I > 2$

Plan

Illustration : effet du Milieu et du génotype sur le gain de poids



Plan

Ecriture du modèle

$$\mathbf{Y_{ijk}} = \mu + \alpha_{\mathbf{i}} + \beta_{\mathbf{j}} + \varepsilon_{\mathbf{ijk}}$$

- i représente le niveau du premier facteur $(i = 1, \ldots, I)$
- j représente le niveau du deuxième facteur $(j = 1, \ldots, J)$
- k représente l'indice de répétition $(k = 1, \ldots, n_{ij})$
  - Si le plan est équirépété : $n_{ij} = K$
- Hypothèses de modélisation :
  - $\forall i, j, k, \varepsilon_{ijk} \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$
  - $\forall i' \neq i$ ou $j' \neq j$ ou $k' \neq k$: $Cov(\varepsilon_{ikj}, \varepsilon_{i'j'k'}) = 0$

Interprétation du modèle

$$Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk}$$

- La variable Y_{ijk} est la somme
  - d'un terme constant μ
  - d'un effet spécifique à chaque niveau du premier facteur α_i
  - d'un effet spécifique à chaque niveau du **second** facteur β_j
  - un résidu aléatoire gaussien ε_{ijk}
- Le modèle possède $I + J + 1$ paramètres :
  - La dimension paramétrique du modèle est $I + J - 1$!
  - Une **contrainte de liaison** doit être explicitée pour estimer les paramètres.

Plan

Estimation des paramètres : principe des Moindres Carrés Ordinaires

- On se place dans le cas **équilibré** $n_{ij} = K$.
- On cherche à minimiser l'écart entre les observations et le modèle :

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n_{ij}}(Y_{ijk} - \widehat{Y_{ijk}})^2$$

- Nullité de la **somme des effets individuels** ($\sum_{i=1}^{I} \alpha_i = 0$ et $\sum_{j=1}^{J} \beta_i = 0$)

$$\widehat{\mu} = Y_{...} \quad \text{et} \quad \forall i,\ \widehat{\alpha}_i = Y_{i..} - Y_{...} \quad \text{et} \quad \forall j,\ \widehat{\beta}_j = Y_{.j.} - Y_{...}$$

- Pour les résidus :
  - Degrés de liberté : $n - I - J + 1$
  - Estimateur **sans biais** de σ :

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n - I - J + 1}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{K}(Y_{ijk} - \widehat{Y_{ijk}})^2$$

Plan

La variabilité du modèle

- Dans le cas **complet** (toutes les combinaisons des facteurs sont testés) et **équilibré** (chaque combinaison est testée un même nombre de fois), on a :

$$\sum_{i,j,k}(Y_{ijk} - Y_{...})^2 = \sum_{i,j,k}(Y_{i..} - Y_{...})^2 + \sum_{i,j,k}(Y_{.j.} - Y_{...})^2 + \sum_{i,j,k}(Y_{ijk} - (Y_{i..} + Y_{.j.} - Y_{...}))^2$$

$$\mathbf{SCE_T} = \mathbf{SCE_{F_1}} + \mathbf{SCE_{F_2}} + \mathbf{SCE_R}$$

Variabilité	Somme des carrés	ddl
Facteur 1	$SCE_{F_1} = KJ\sum_i^I(Y_{i..} - Y_{...})^2$	$I-1$
Facteur 2	$SCE_{F_2} = KI\sum_j^J(Y_{.j.} - Y_{...})^2$	$J-1$
Résiduelle	$SCE_R = \sum_{i,j,k}(Y_{ijk} - (Y_{i..} + Y_{.j.} - Y_{...}))^2$	$IJK - I - J - 1$
Totale	$SCE_T = \sum_{i,j,k}(Y_{ijk} - Y_{...})^2$	$IJK - 1$

Test global

- On peut montrer que :

$$\mathbb{E}[CM_{F_1}] = \sigma^2 + \frac{JK}{I-1}\sum_{i=1}^{I}\alpha_i^2,\ \mathbb{E}[CM_{F_2}] = \sigma^2 + \frac{IK}{J-1}\sum_{j=1}^{J}\beta_j^2,\ \mathbb{E}[CM_R] = \sigma^2$$

- Pour tester l'**effet d'un facteur** (Facteur 1 par exemple), on utilise le même principe qu'une ANOVA à 1 facteur :

$$F_{Obs}^{F_1} = \frac{CM_{F_1}}{CM_R} \sim_{\mathcal{H}_0} \mathcal{F}_{n-I-J+1}^{I-1}$$

  - Règle de décision :
    - Si $F_{Obs}^{F_1} < \mathcal{F}_{n-I-J+1}^{I-1}(1-\alpha)$, on accepte $\mathcal{H}_0$ au seuil α.
    - Si $F_{Obs}^{F_1} > \mathcal{F}_{n-I-J+1}^{I-1}(1-\alpha)$, on rejette $\mathcal{H}_0$ au seuil α.

Plan

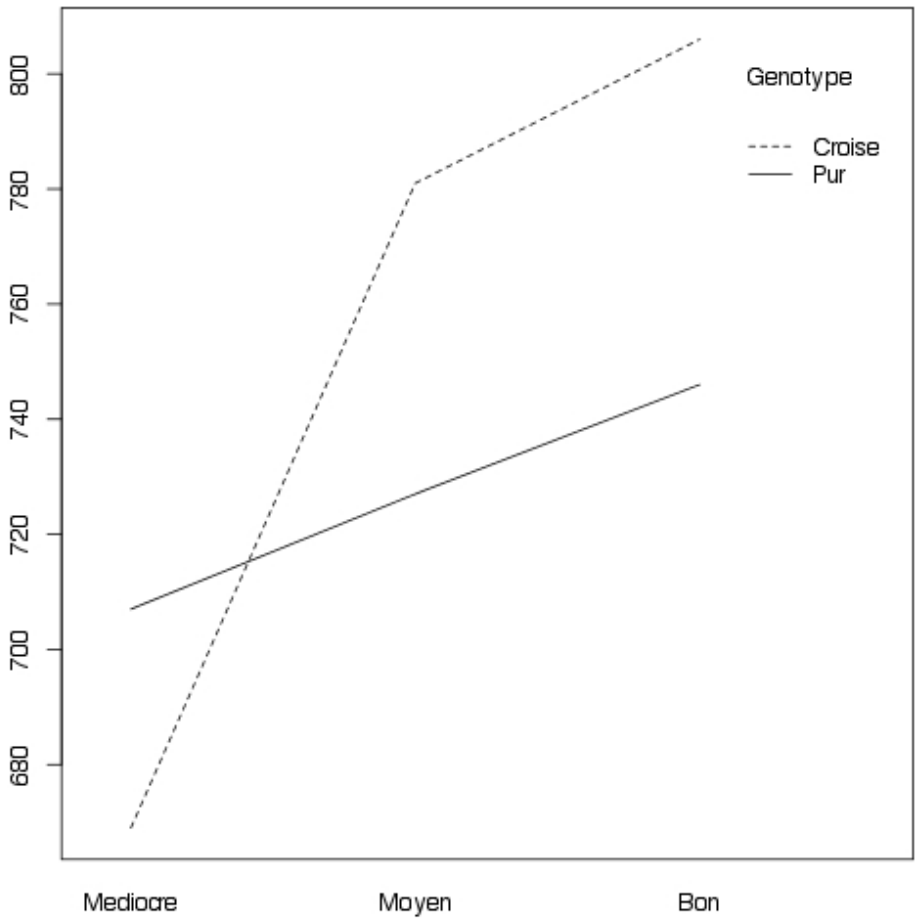
Notion d'interaction

- Dans le modèle simple on suppose que les effets des deux facteurs s'**ajoutent** simplement :
  - L'effet d'une modalité d'un facteur (α_i par exemple) est la **même** quelle que soit la modalité du second facteur.
- Cette hypothèse est vraie lorsque les effets des 2 facteurs sur la variable réponse sont indépendants.

Interaction

En analyse de variance, il y a **interaction** lorsque les effets de 2 facteurs appliqués simultanément ne peuvent pas être déduits des **moyennes** des réponses des 2 facteurs pris **séparément**.

Illustration : effet du Milieu et du Génotype sur le gain de poids



Ecriture du modèle

$$\mathbf{Y_{ijk}} = \mu + \alpha_{\mathbf{i}} + \beta_{\mathbf{j}} + \alpha\beta_{\mathbf{ij}} + \varepsilon_{\mathbf{ijk}}$$

- i représente le niveau du premier facteur $(i = 1, \ldots, I)$
- j représente le niveau du premier facteur $(j = 1, \ldots, J)$
- k représente l'indice de répétition $(k = 1, \ldots, n_{ij})$
  - Si le plan est équirépété : $n_{ij} = K$
- Hypothèses de modélisation :
  - $\forall i, j, k, \varepsilon_{ijk} \sim \mathcal{N}(0, \sigma)$
  - $\forall i' \neq i$ ou $j' \neq j$ ou $k' \neq k$: $Cov(\varepsilon_{ikj}, \varepsilon_{i'j'k'}) = 0$
- $\alpha\beta_{ij}$ correspond à l'**effet spécifique de l'interaction** des facteurs.
- Dans ce modèle le nombre de degré de liberté des résidus est donné par :

$$n - 1 - (I - 1) - (J - 1) - (I - 1)(J - 1) = \mathbf{n - IJ}$$

Estimation

- On utilise le principe des **Moindres Carrés Ordinaires**.
- Avec comme contrainte la **nullité de la somme des effets** :

$$\sum_{i=1}^{I} \alpha_i = 0, \quad \sum_{i=j}^{J} \beta_j = 0, \quad \forall i : \sum_{j=1}^{J} \alpha\beta_{ij} = 0 \quad \forall j : \sum_{i=1}^{I} \alpha\beta_{ij} = 0$$

et dans le cas **complet et équirépété**, on a

$$\widehat{\mu} = Y_{...}\ , \quad \widehat{\alpha}_i = Y_{i..} - Y_{...}\ , \quad \widehat{\beta}_j = Y_{.j.} - Y_{...}$$

$$\widehat{\alpha\beta_{ij}} = Y_{ij.} - Y_{i..} - Y_{.j.} + Y_{...}$$

- Pour les **résidus**, on a :

$$\widehat{\sigma^2} = \frac{1}{n-IJ} \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} (Y_{ijk} - \widehat{Y_{ijk}})^2 = \frac{1}{n-IJ} \sum_{i=1}^{I} \sum_{j=1}^{J} \sum_{k=1}^{K} \varepsilon_{ijk}^2$$

La variabilité du modèle

- Dans le cas complet (toutes les combinaisons des facteurs sont testés) et équilibré (chaque combinaison est testée un même nombre de fois), on a :

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k}(Y_{ijk}-Y_{...})^2 &= \sum_{i,j,k}(Y_{i..}-Y_{...})^2+\sum_{i,j,k}(Y_{.j.}-Y_{...})^2 \\ &\quad +\sum_{i,j,k}(Y_{ij.}-(Y_{i..}+Y_{.j.}-Y_{...}))^2+\sum_{i,j,k}(Y_{ijk}-Y_{ij.})^2 \\ \mathbf{SCE_T} &= \mathbf{SCE_{F_1}+SCE_{F_2}+SCE_{F_{12}}+SCE_R}\end{aligned}$$

Variabilité	Somme des carrés	ddl
Facteur 1	$SCE_{F_1}=KJ\sum_i^I(Y_{i..}-Y_{...})^2$	$I-1$
Facteur 2	$SCE_{F_2}=KI\sum_j^J(Y_{.j.}-Y_{...})^2$	$J-1$
Interaction	$SCE_{F_{12}}=K\sum_i^I\sum_j^J(Y_{.j.}-Y_{...})^2$	$(I-1)(J-1)$
Résiduelle	$SCE_R=\sum_{i,j,k}(Y_{ijk}-Y_{ij.})^2$	$IJ(K-1)$
Totale	$SCE_T=\sum_{i,j,k}(Y_{ijk}-Y_{...})^2$	$IJK-1$

Test global

- On peut montrer que :

$$\mathbb{E}[CM_{F_1}] = \sigma^2 + \frac{JK}{I-1}\sum_{i=1}^{I}\alpha_i^2, \qquad \mathbb{E}[CM_{F_2}] = \sigma^2 + \frac{IK}{J-1}\sum_{j=1}^{J}\beta_j^2,$$

$$\mathbb{E}[CM_{F_{12}}] = \sigma^2 + \frac{K}{(I-1)(J-1)}\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\alpha_i\beta_j^2, \qquad \mathbb{E}[CM_R] = \sigma^2$$

- Les tests sur l'effet d'un facteur sont :

$$F_{Obs}^{F_1} = \frac{CM_{F_1}}{CM_R} \sim_{\mathcal{H}_0} \mathcal{F}_{IJ(K-1)}^{(I-1)}, \qquad F_{Obs}^{F_2} = \frac{CM_{F_2}}{CM_R} \sim_{\mathcal{H}_0} \mathcal{F}_{IJ(K-1)}^{(J-1)}$$

- Pour tester l'effet d'**interaction** :

$$F_{Obs}^{F_{12}} = \frac{CM_{F_{12}}}{CM_R} \sim_{\mathcal{H}_0} \mathcal{F}_{IJ(K-1)}^{(I-1)(J-1)}$$

- Les règles de décision des tests s'appuient sur l'unilatéralité du test.

Plan

ANOVA à n (> 2) facteurs

- Les modèles d'analyse de variance se généralise facilement à un nombre **plus important** de facteurs (ANOVA à n facteurs).
  - Les principes de test des effets sont identiques
  - Le nombre de paramètres **augmente fortement** avec des interactions d'ordre élevé
  - Interprétation **très complexe** d'interaction d'ordre > 2
- On peut alors utiliser une **écriture matricielle** qui donne des résultats généraux qui permette de :
  - lier l'ANOVA à la **régression linéaire multiple** (Voir TD)
  - avoir des formules générales des estimateurs
  - traiter le cas des données **déséquilibrées**

Voir Exemple Code R

Décomposition de la variabilité (cas déséquilibré)

$$
\begin{aligned}
y_{ijk} - y_{...} &= (y_{ijk} - y_{ij.}) + (y_{i..} - y_{...}) + (y_{.j.} - y_{...}) + (y_{ij.} - y_{i..} - y_{.j.} + y_{...}) \\
(y_{ijk} - y_{...})^2 &= (y_{ijk} - y_{ij.})^2 + (y_{i..} - y_{...})^2 + (y_{.j.} - y_{...})^2 + (y_{ij.} - y_{i..} - y_{.j.} + y_{...})^2 \\
&\quad + \sum_{\ell}^{6} DP_{\ell}(ijk) \\
SST &= \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n_{ij}}(y_{ijk} - y_{ij.})^2 + \sum_{i=1}^{I} n_i(y_{i..} - y_{...})^2 + \sum_{j=1}^{J} n_j(y_{.j.} - y_{...})^2 \\
&\quad + \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} n_{ij}(y_{ij.} - y_{i..} - y_{.j.} + y_{...})^2 \\
&\quad + \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n_{ij}}\sum_{\ell=1}^{6} DP_{\ell}(ijk)
\end{aligned}
$$

Décomposition de la variabilité (cas déséquilibré) - Les doubles produits

- Etant donné que $\forall x_{ij}$ indépendant de k :

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n_{ij}} x_{ij}(y_{ijk} - y_{ij.}) = \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} x_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n_{ij}}(y_{ijk} - y_{ij.})\right) = 0,$$

  nous avons : $DP_1 = DP_2 = DP_3 = 0$.

- Après quelques lignes de calculs simples mais (très) fastidieux :

$$\sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n_{ij}} DP_4(ijk)+DP_5(ijk)+DP_6(ijk) = 2\left(ny_{...}^2 - \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} n_{ij}y_{i..}y_{.j.}\right)$$

Décomposition de la variabilité (cas déséquilibré) - Réécriture

$$
\begin{aligned}
SST &= \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n_{ij}}(y_{ijk}-y_{ij.})^2 + \sum_{i=1}^{I} n_i(y_{i..}-y_{...})^2 + \sum_{j=1}^{J} n_j(y_{.j.}-y_{...})^2 \\
&\quad + \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J} n_{ij}(y_{ij.}-y_{i..}-y_{.j.}+y_{...})^2 \\
&\quad + \sum_{i=1}^{I}\sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{n_{ij}}\sum_{\ell=1}^{6} DP_\ell(ijk) \\
&= SSE + SSF_1 + SSF_2 + SSF_{12} + SDP
\end{aligned}
$$

- Pour un plan équilibré ($n_{ij} = n_0 \ \forall(ij)$) : SDP=0.
- Si $SDP \neq 0$, il n'est pas possible d'affecter SDP à une unique source de variation parmi :
  - F_1
  - F_2
  - F_{12}

Décomposition de la variabilité (cas déséquilibré)

- Dans un plan qui n'est pas complet-équilibré la **somme des** SCE n'est pas nécessairement égale à la SCE_T.
- On distingue alors plusieurs types de sortie dont :
  - Somme des carrés de **Type I** qui correspondent à la variabilité expliquée par un effet sachant que les effets **précédemment** écrits sont déjà dans le modèle.
  - Somme des carrés de **Type III** qui correspondent à la variabilité expliquée par **l'apport d'un effet sachant que tous les autres effets sont déjà présents dans le modèle**.
- L'**ordre d'inclusion** des facteurs est donc importante dans l'analyse de Type I
- Remarque : Type I et Type III sont **équivalentes** dans un plan complet-équilibré

Calcul des SC pour l'interaction

- Type I : différence des SC résiduels entre
  - $Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk}$
  - $Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \varepsilon_{ijk}$
- Type III : différence des SC résiduels entre
  - $Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk}$
  - $Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \varepsilon_{ijk}$

Calcul des SC pour l'interaction

- Type I : différence des SC résiduels entre
  - $Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk}$
  - $Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \varepsilon_{ijk}$
- Type III : différence des SC résiduels entre
  - $Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk}$
  - $Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \varepsilon_{ijk}$
- Type I et Type III donnent les mêmes résultats

Calcul des SC pour le facteur 2

- Type I : différence des SC résiduels entre
  - $Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ijk}$
  - $Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk}$
- Type III : différence des SC résiduels entre
  - $Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \alpha\beta_{ij} + \varepsilon_{ijk}$
  - $Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \varepsilon_{ijk}$

Calcul des SC pour le facteur 1

- Type I : différence des SC résiduels entre
  - $Y_{ijk} = \mu + \varepsilon_{ijk}$
  - $Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ijk}$
- Type III : différence des SC résiduels entre
  - $Y_{ijk} = \mu + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \varepsilon_{ijk}$
  - $Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \varepsilon_{ijk}$

Exemple 2 : modèle sans facteur d'interaction

- On reprend les données de Vache sans les 2 premières observations.

```
> mod1 <- lm(GMQ ~ Milieu,data=charol)
> anova(mod1)
Analysis of Variance Table

Response: GMQ
          Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
Milieu     2  34537 17268.7  16.845 2.33e-05 ***
Residuals 25  25629  1025.2
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
> sum((mean(charol$GMQ)-predict(mod1))^2)
[1] 34537.5
```

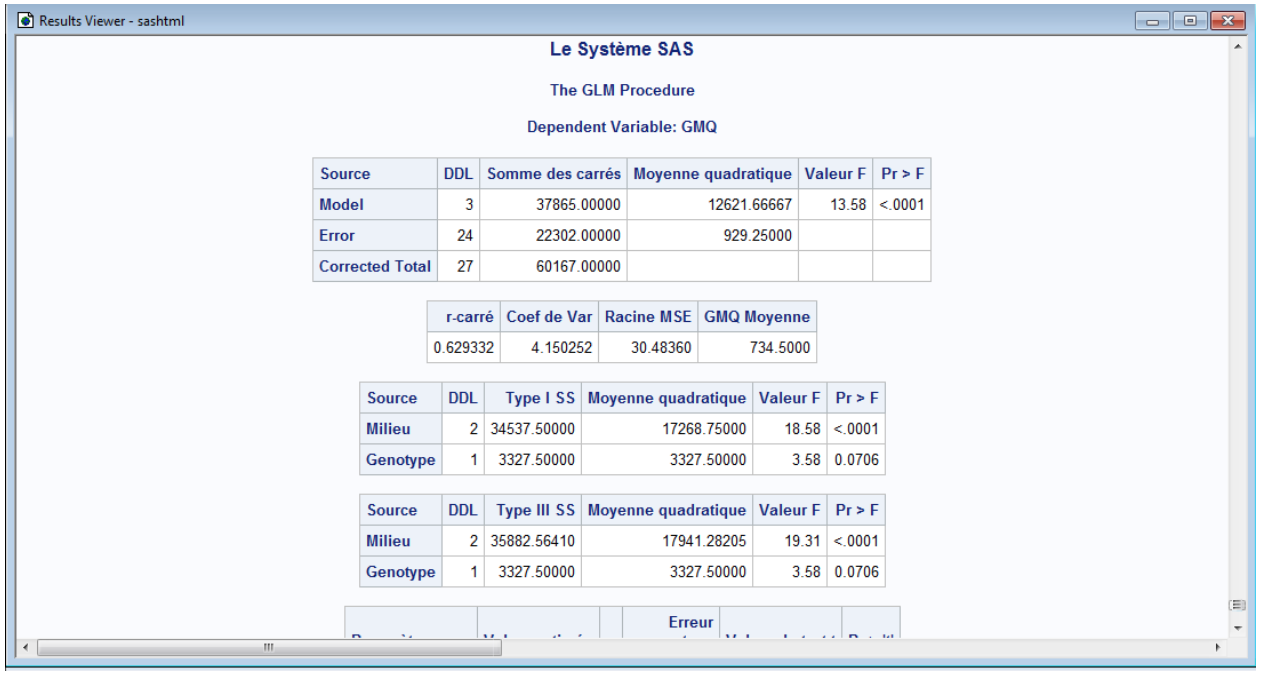
```
> mod2 <- lm(GMQ ~ Milieu+Genotype,data=charol)
> anova(mod2)
Analysis of Variance Table

Response: GMQ
          Df Sum Sq Mean Sq F value    Pr(>F)
Milieu     2  34537 17268.7 18.5835 1.331e-05 ***
Genotype   1   3327  3327.5  3.5808   0.07057 .
Residuals 24  22302   929.2
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
> sum((mean(charol$GMQ)-predict(mod2))^2)-sum((mean(charol$GMQ)-predict(mod1))^2)
[1] 3327.5
```

```
> mod1_bis <- lm(GMQ ~ Genotype,data=charol)
> anova(mod1_bis)
Analysis of Variance Table

Response: GMQ
          Df Sum Sq Mean Sq F value Pr(>F)
Genotype   1   1982  1982.4  0.8859 0.3553
Residuals 26  58185  2237.9
```

```
> require(car)
> Anova(mod2,type="III")
Anova Table (Type III tests)

Response: GMQ
             Sum Sq Df    F value    Pr(>F)
(Intercept) 14964183  1 16103.5061 < 2.2e-16 ***
Milieu         35883  2    19.3073 1.006e-05 ***
Genotype        3327  1     3.5808   0.07057 .
Residuals      22302 24
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1
```

Anova Type I et Type III - SAS

```
proc glm data=charolais2
        class Milieu Genotype;
        model GMQ=Milieu Genotype/ solution ss1 ss3;
run;
```



Results Viewer - sashtml

Le Système SAS

The GLM Procedure

Dependent Variable: GMQ

Source	DDL	Somme des carrés	Moyenne quadratique	Valeur F	Pr > F
Model	3	37865.00000	12621.66667	13.58	<.0001
Error	24	22302.00000	929.25000		
Corrected Total	27	60167.00000			

r-carré	Coef de Var	Racine MSE	GMQ Moyenne
0.629332	4.150252	30.48360	734.5000

Source	DDL	Type I SS	Moyenne quadratique	Valeur F	Pr > F
Milieu	2	34537.50000	17268.75000	18.58	<.0001
Genotype	1	3327.50000	3327.50000	3.58	0.0706

Source	DDL	Type III SS	Moyenne quadratique	Valeur F	Pr > F
Milieu	2	35882.56410	17941.28205	19.31	<.0001
Genotype	1	3327.50000	3327.50000	3.58	0.0706

			Erreur		

Calcul des SC pour le facteur 2

- Type I : différence des SC résiduels entre
  - $Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ijk}$
  - $Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk}$
- Type III : différence des SC résiduels entre
  - $Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \alpha\beta_{ij} + \varepsilon_{ijk}$
  - $Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \varepsilon_{ijk}$

Calcul des SC pour le facteur 2

- Type I : différence des SC résiduels entre
  - $Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ijk}$
  - $Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk}$
- Type III : différence des SC résiduels entre
  - $Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \alpha\beta_{ij} + \varepsilon_{ijk}$
  - $Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \varepsilon_{ijk}$
- Type I et III donnent les mêmes résultats

Calcul des SC pour le facteur 1

- Type I : différence des SC résiduels entre
  - $Y_{ijk} = \mu + \varepsilon_{ijk}$
  - $Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ijk}$
- Type III : différence des SC résiduels entre
  - $Y_{ijk} = \mu + \beta_j + \varepsilon_{ijk}$
  - $Y_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk}$
  - $SS_{F1} = 58185 - 22302 = 35883$

Démarche à suivre

- Du point de vue statistique, il convient de respecter l'ordre du schéma d'analyse suivant :
  1. Pertinence du modèle global
     - Modèle global vs. modèle constant
  2. Effet de chaque facteur
     - On commence par les effets d'interaction
  3. Comparaison des modalités pour un facteur donné
     - Comparaisons multiples
     - Test sur les contrastes