Lista 3 - Processamento de Sinais Digitais. 14568198
2025 - Enzo F. Spinella

Exercício 3.12. Mostre que a DCT é uma transformada ortogonal, ou seja, que

$$\|\mathrm{DCT}(\mathbf{x})\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2$$

utilizando a norma Euclidiana usual para vetores em $\mathbb{C}^N$. Es ta é a versão da identidade de Parseval para a DCT. *Dica: para qualquer vetor $\boldsymbol{v} \in \mathbb{C}^N$, temos que $\|\boldsymbol{v}\|^2 = \boldsymbol{v}^*\boldsymbol{v}$ onde $\boldsymbol{v}^*$ é o vetor-linha dado por $\boldsymbol{v}^* = \overline{\boldsymbol{v}}^T$. Use a forma matricial da DCT.*

Substituímos DCT(x) pela sua forma matricial Cx:

$$\|DCT(x)\|^2 = \|Cx\|^2$$

* Pela dica: $\|Cx\|^2 = (Cx)^*(Cx)$

Agora, usando a propriedade do conjugado transposto, temos

$$(Cx)^*(Cx) = x^*C^*(Cx)$$

Como C é real e ortonormal, por def., temos que $C^* = C^T$ e $C^TC = I$, logo:

$$x^*C^*(Cx) = x^*(C^TC)x = x^*(I)x$$

* Pela identidade: $x^*(I)x = x^*x$

* Pela dica: $x^*x = \|x\|^2$

$\therefore \|DCT(x)\|^2 = \|x\|^2$ ■

Exercício 3.14. Prove a Equação (3.20)

$$\mathbf{A} = \mathcal{C}_m^T \hat{\mathbf{A}} \mathcal{C}_n.$$

Use este resultado para encontrar a respectiva fórmula explícita para a inversão da DCT bidimensional (análoga à fórmula explícita (3.18) para a DCT bidimensional).

Temos $\hat{A} = C_m A C_n^T$, via equação 3.17. Com as matrizes C da DCT são ortogonais: $C^{-1} = C^T$ e $C^T C = I$

Primeiramente, $(C_m^T \cdot)\ \hat{A} = C_m A C_n^T\ (\cdot C_n^T)$

$$C_m^T \hat{A} = \underbrace{C_m^T C_m}_{I} A C_n^T$$

$$C_m^T \hat{A} = A C_n^T$$

depois:

$$(\cdot C_n)\quad C_m^T \hat{A} = A C_n^T \quad (\cdot C_n)$$

$$C_n C_m^T \hat{A} = A C_n^T C_n$$

$$A = C_m^T \hat{A} C_n \quad \blacksquare$$

Exercício 3.20. Imagine uma imagem A em níveis de cinza onde cada pixel é um valor inteiro entre 0–255. Ela é submetida ao processo de compressão e descompressão em blocos descrito no texto para produzir uma imagem $\tilde{A}$ também em níveis de cinza onde cada pixel é também um valor inteiro entre 0–255. Ignore quaisquer erros de arredondamento associados ao uso de números em ponto flutuante, ou seja, considere que todas as computações fossem feitas "exatamente" (em precisão infinita). Responda sucintamente em quais pontos do processo há perda de informação, indicando em uma linha a operação envolvida e por que ela acarreta perda de informação.

Perde-se informações em duas etapas:

- Na Quantização, onde divide-se os coeficientes da DCT por valores constantes e descarta-se a precisão (mapeando valores reais para um único discreto), tornando-se impossível reverter exatamente aos valores originais.
- No arredondamento final, onde a transformação* inversa feita anteriormente gera números reais e pode gerar valores fora do limite, mas a Imagem final $\tilde{A}$ requer valores discretos entre 0 e 255, necessitando arredondamento dos valores da T. I* para inteiros de 8 bits. Nesse arredondamento, perde-se informações.

Exercício 4.9.

(a) Defina a *reversão temporal* (também chamada de adjunto) de um filtro com coeficientes reais $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^N$ como o vetor $\mathbf{h}' \in \mathbb{R}^N$ com componentes

$$h'_k = h_{-k \mod N},$$

para $0 \leq k \leq N-1$ (considere que também $\mathbf{h}'$ pode ser estendido periodicamente no índice k). Mostre que as matrizes circulantes de $\mathbf{h}$ e $\mathbf{h}'$ satisfazem $\mathbf{M}_{\mathbf{h}'} = \mathbf{M}_{\mathbf{h}}^T$.

(b) Dizemos que um filtro é *simétrico* se $\mathbf{h} = \mathbf{h}'$. Mostre que $\mathbf{h}$ é simétrico se, e somente se, a matriz circulante $\mathbf{M}_{\mathbf{h}}$ é simétrica.

(c) Para um filtro com coeficientes complexos $\mathbf{h} \in \mathbb{C}^N$ definimos seu adjunto $\mathbf{h}' \in \mathbb{C}^N$ como

$$h'_k = \overline{h_{-k \mod N}}.$$

Mostre que as matrizes circulantes de $\mathbf{h}$ e $\mathbf{h}'$ satisfazem $\mathbf{M}_{\mathbf{h}'} = \mathbf{M}_{\mathbf{h}}^*$ (onde o asterisco denota a matriz transposta e conjugada, também chamada de *hermitiana*).

Assumiremos que o elemento na linha i coluna j da matriz circulante associada a um vetor h, M_h é $(M_h)_{i,j} = h_{(i-j) \pmod N}$

a) Matriz circulante associada ao vetor h': $(M_{h'})_{i,j} = h'_{(i-j) \pmod N}$

=> Pela def. de reversão temporal, sabemos que $h'_k = h_{-k \pmod N}$, utilizando isso com $(i-j) = k$:

$$(M_{h'})_{i,j} = h_{-(i-j) \pmod N} = h_{(j-i) \pmod N} \quad (1.1)$$

Pela def de matriz transposta, o elemento (i,j) da transposta é o (j,i) da original, logo:

$$(M_h^T)_{i,j} = (M_h)_{j,i} = h_{(j-i) \pmod N} \quad (1.2)$$

Juntando (1.1) e (1.2): $(M_h^T)_{i,j} = (M_{h'})_{i,j}$ $\underline{\forall i, j}$

$\therefore M_{h'} = M_h^T$ ∎

---

b) (=>) Se $h = h'$, então M_h é simétrica

$h = h' \Rightarrow M_h = M_{h'}$

(Pelo item a): $M_{h'} = M_h^T \Rightarrow M_h = M_h^T$

Se uma matriz é igual à sua transposta, então ela é simétrica ∎

($\Leftarrow$) Se M_h é simétrica, então $h = h'$

Se M_h é simétrica, então $M_h = M_h^T$
(Pelo item a): $M_h^T = M_{h'} \Rightarrow M_h = M_{h'}$

↳ Como a primeira coluna de uma matriz circulante define unicamente o vetor do filtro (o mapeamento $h \to M_h$ é injetor), conclui-se que $h = h'$ ∎

---

c) Pela def., o elemento de $M_{h'}$ é $(M_{h'})_{i,j} = h'_{(i-j) \pmod N}$
Substitui-se pela def. dada no enunciado: $h'_n = h_{-n \pmod N}$
↳ $(M_{h'})_{i,j} = h_{-(i-j) \pmod N} = h_{(j-i) \pmod N}$ (2.1)

Agora, na matriz Hermitiana: ($M^* = \overline{M^T}$)
$(M_h^*)_{i,j} = \overline{(M_h)_{j,i}}$
Pela def. do enunciado: $= \overline{h_{(j-i) \pmod N}}$ (2.2)

Juntando (2.1) e (2.2): $(M_{h'})_{i,j} = (M_h^*)_{i,j} \quad \forall i,j$

$$\boxed{\therefore \quad M_{h'} = M_h^* \quad ∎}$$

Exercício 4.10. Sejam $g, h \in \mathbb{R}^N$ e g', h' seus adjuntos (usando a reversão temporal definida no exercício 4.9). Mostre que $(g' * h')' = g * h$. *Dica: use matrizes circulantes, relembre a parte (iii) do teorema 4.1, e use a propriedade* $x = y \iff M_x = M_y$ *(esse é o exercício 4.7 do livro, que você pode usar sem provar).*

Primeiro, definimos o vetor resultante da convolução interna como $w = g' * h'$, assim, queremos mostrar que $w' = g * h$

Pelo ex 4.7 : $x = y \iff M_x = M_y$, basta mostrarmos que $M_{w'} = M_{g*h}$

Encontrando $M_{w'}$:

=> Primeiro devemos descobrir M_w, para isso, usamos a propriedade da convolução

$$M_w = M_{g' * h'} = M_{g'} M_{h'}$$

* Com a def. de adjunto $(M_{x'} = M_x^T)$: $M_w = (M_g)^T (M_h)^T$

=> Pela matriz do adjunto ser a transposta da original:

$$M_{w'} = \left((M_g)^T (M_h)^T\right)^T$$

* Aplicamos $(AB)^T = B^T A^T$: $M_{w'} = M_h M_g$

=> Como g e h geram matrizes circulantes, $M_h M_g = M_g M_h$

$$M_{w'} = M_g M_h = M_{g*h}$$

Pelo teorema (iii) 4.1 : $M_{w'} = M_{g*h} \iff w' = g * h$ ■

$\therefore$ $w = g' * h'$, $w' = g * h$ => $\boxed{(g' * h')' = g * h}$ ■