FMI, Info, Anul I
Logică matematică şi computaţională

Examen ianuarie 2022

Indicaţii:

- În cazul exerciţiilor cu forma normală prenex şi forma normală Skolem, ipoteza este următoarea:

  Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul întâi care conţine:

  - două simboluri de relaţii unare S, T şi un simbol de relaţie binară R;
  - un simbol de operaţie unară f;
  - un simbol de constantă c.

Partea I. Probleme cu rezolvare clasică

(P1) [1,5 puncte] Fie B, E astfel încât $B \subseteq E$, B este cel mult numărabilă, iar E nu este cel mult numărabilă. Arătaţi că $E \setminus B$ nu este cel mult numărabilă.

(P2) [1,5 puncte] Să se definească, folosind Principiul recursiei pe formule, funcţia Var ce asociază fiecărei formule din logica propoziţională mulţimea variabilelor sale.

(P3) [1,5 puncte] Fie LP logica propoziţională. Pentru orice $k \in \mathbb{N}$, definim evaluarea $e_k : V \to \{0,1\}$ astfel: pentru orice $n \in \mathbb{N}$,

$$e_k(v_n) := \begin{cases} 0, & \text{dacă } n = k; \\ 1, & \text{dacă } n \neq k. \end{cases}$$

Notăm $\mathcal{E} := \{e_k \mid k \in \mathbb{N}\}$. Să se arate că nu există $\Gamma \subseteq Form$ astfel încât $Mod(\Gamma) = \mathcal{E}$.

(P4) [1,5 puncte] Fie Θ, Δ mulţimi de formule ale logicii propoziţionale astfel încât Δ este finită şi $Mod(\Theta) = Mod(\Delta)$. Să se arate că există o submulţime finită Γ a lui Θ astfel încât $Mod(\Theta) = Mod(\Gamma)$.

(P5) [1,5 puncte] Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I şi Δ o mulţime de $\mathcal{L}$-enunţuri. Să se arate că pentru orice teorie T cu $\Delta \subseteq T$ avem $Th(\Delta) \subseteq T$.

(P6) [1,5 puncte] Fie $\mathcal{L}$ un limbaj de ordinul I, δ o $\mathcal{L}$-formulă şi $z \in V$. Să se arate că $\forall z \delta \vDash \delta$.

Partea II. Probleme de tip grilă

(P7) [1 răspuns corect] Fie următoarea formulă în $\mathcal{L}$:

$$\varphi := \exists x(\forall y S(y) \land \forall y \neg R(x,y)) \to (\exists x \forall y \neg R(x,y) \lor \exists x T(x))$$

Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată?
☐ A: $\forall x \exists y \exists u \forall v((S(y) \wedge \neg R(x,y)) \to (\neg R(u,v) \vee T(u)))$ este o formă normală prenex pentru φ.
☐ B: $\exists x \forall y \exists u \forall v((S(y) \wedge \neg R(x,y)) \to (\neg R(u,v) \wedge T(v)))$ este o formă normală prenex pentru φ.
☐ C: $\forall x \exists y \forall u \exists v((S(y) \wedge \neg R(x,y)) \to (\neg R(u,v) \wedge T(v)))$ este o formă normală prenex pentru φ.
☐ D: $\forall x \exists y \exists u \forall v((S(y) \wedge \neg R(x,y)) \to (\neg R(u,v) \wedge T(v)))$ este o formă normală prenex pentru φ.
☐ E: $\exists x \forall y \exists u \forall v((S(y) \wedge \neg R(x,y)) \to (\neg R(u,v) \vee T(u)))$ este o formă normală prenex pentru φ.

(P8) [2 răspunsuri corecte] Fie $\mathcal{L}_{ar} = (\dot{<}, \dot{+}, \dot{\times}, \dot{S}, \dot{0})$, $\mathcal{L}_{ar}$-structura $\mathcal{N} = (\mathbb{N}, <, +, \cdot, S, 0)$ şi $e : V \to \mathbb{N}$ o evaluare arbitrară. Considerăm formulele:

$$\varphi := \neg(x \dot{<} \dot{0} \vee x = \dot{0}) \text{ şi } \psi := \neg(x \dot{<} \dot{2}), \text{ unde } \dot{2} := \dot{S}\dot{S}\dot{0}.$$

Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?
☐ A: $\mathcal{N} \not\vDash (\exists x \varphi)[e]$.
☐ B: $\mathcal{N} \vDash (\exists x \varphi \to \exists x \psi)[e]$.
☐ C: $\mathcal{N} \not\vDash (\forall x(\varphi \to \psi))[e]$.
☐ D: $\mathcal{N} \vDash (\neg\varphi \vee \neg\psi))[e_{x \leftarrow 5}]$.
☐ E: $\mathcal{N} \vDash (\forall x \neg\varphi)[e]$.

(P9) [1 răspuns corect] Fie următoarea formulă în $\mathcal{L}$:

$$\varphi := \exists x R(x,y) \to (\neg \exists z (f(z) = c) \wedge \forall v S(v))$$

Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată?
☐ A: $\exists x \exists z \forall v (R(x,y) \to (\neg(f(z) = c) \wedge R(v)))$ este o formă normală prenex pentru φ.
☐ B: $\forall x \exists z \exists v (R(x,y) \to (\neg(f(z) = c) \wedge S(v)))$ este o formă normală prenex pentru φ.
☐ C: $\exists x \exists z \forall v (R(x,y) \to (\neg(f(z) = c) \wedge S(v)))$ este o formă normală prenex pentru φ.
☐ D: $\exists x \forall z \forall v (R(x,y) \to (\neg(f(z) = c) \wedge S(v)))$ este o formă normală prenex pentru φ.
☐ E: $\forall x \forall z \forall v (R(x,y) \to (\neg(f(z) = c) \wedge S(v)))$ este o formă normală prenex pentru φ.

(P10) [2 răspunsuri corecte] Fie următoarea formulă în limbajul logicii propoziţionale:

$$\theta := (v_1 \to v_3) \wedge (v_2 \to v_3)$$

Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?
☐ A: $e^+(\theta) = e^+((v_1 \wedge v_2) \to v_1)$ pentru orice evaluare e.
☐ B: $e^+(\theta) = e^+(v_1 \to (\neg v_1 \to (v_2 \wedge v_3)))$ pentru orice evaluare e.
☐ C: $e^+(\theta) = e^+((\neg v_1 \wedge \neg v_2) \vee v_3)$ pentru orice evaluare e.
☐ D: $e^+(\theta) = e^+((v_1 \vee v_2) \to v_3)$ pentru orice evaluare e.
☐ E: $e^+(\theta) = e^+((v_1 \wedge v_2 \wedge v_3) \vee (\neg v_1 \vee \neg v_2 \vee \neg v_3))$ pentru orice evaluare e.

(P11) [2 răspunsuri corecte] Fie următoarea mulţime de clauze:

$$\mathcal{S} = \{\{v_0\}, \{\neg v_0, v_1\}, \{\neg v_2\}, \{v_1, v_2\}, \{v_2, \neg v_0\}\}$$

Aplicând algoritmul Davis-Putnam pentru intrarea $\mathcal{S}$ şi alegând succesiv $x_1 := v_0$, $x_2 := v_1$, $x_3 := v_2$ obţinem:
☐ A: $\{v_0, v_0 \to v_1, \neg v_2, v_1 \vee v_2\} \vDash \neg v_2 \wedge v_0$.
☐ B: $U_3 = \{\{v_2\}\}$.
☐ C: $\mathcal{S}_4 = \emptyset$.
☐ D: $\{v_0, v_0 \to v_1, \neg v_2, v_1 \vee v_2\} \vDash v_2 \wedge v_0$.

☐ E: $U_2 = \emptyset$.

(P12) [1 răspuns corect] Fie următoarea formulă:

$$\psi := (v_1 \vee v_2) \to \neg(\neg v_3 \wedge \neg v_1)$$

Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată?
☐ A: $\neg v_1 \vee v_2 \vee v_3$ este FNC a lui ψ.
☐ B: $(\neg v_1 \vee \neg v_2 \vee \neg v_3) \wedge (\neg v_1 \vee v_2 \vee \neg v_3)$ este FNC a lui ψ.
☐ C: $v_1 \vee v_2 \vee \neg v_3$ este FNC a lui ψ.
☐ D: $v_1 \vee \neg v_2 \vee v_3$ este FNC a lui ψ.
☐ E: $\neg v_1 \vee \neg v_2 \vee \neg v_3$ este FNC a lui ψ.

(P13) [2 răspunsuri corecte] Fie următoarea mulţime de clauze:

$$\mathcal{S} = \{C_1 = \{v_1, \neg v_2, v_3\}, C_2 = \{v_2, v_4\}, C_3 = \{\neg v_1, v_4\}, C_4 = \{\neg v_1, v_3\}\}$$

Care dintre următoarele sunt derivări corecte prin rezoluţie?
☐ A: $C_5 = \{v_1, \neg v_2, v_3, v_4\}$ (rezolvent al C_1, C_3) şi $C_6 = \{\neg v_2, v_3, v_4\}$ (rezolvent al C_1, C_5).
☐ B: $C_5 = \{\neg v_2, v_3\}$ (rezolvent al C_1, C_4).
☐ C: $C_5 = \{v_1, v_3, v_4\}$ (rezolvent al C_1, C_2) şi $C_6 = \{v_3, v_4\}$ (rezolvent al C_4, C_5).
☐ D: $C_5 = \{\neg v_1, v_2\}$ (rezolvent al C_2, C_3) şi $C_6 = \{v_2, v_3\}$ (rezolvent al C_4, C_5).
☐ E: $C_5 = \{\neg v_2, v_3\}$ (rezolvent al C_1, C_4) şi $C_6 = \{\neg v_1, \neg v_2, v_3, \neg v_4\}$ (rezolvent al C_3, C_5).

(P14) [2 răspunsuri corecte] Fie următorul enunţ în $\mathcal{L}$:

$$\varphi := \exists x \forall y \exists z \forall v (S(x) \to (R(y, z) \vee (\neg S(v) \to T(z))))$$

Care dintre următoarele formule sunt forme normale Skolem pentru φ?
☐ A: $\forall y \forall v (S(l) \to (R(y, l) \vee (\neg S(l) \to T(n))))$, unde l şi n sunt simboluri noi de constante.
☐ B: $\forall y \forall v (S(n(y)) \to (R(y, z)) \vee (\neg S(v) \to T(l))))$, unde l este simbol nou de constantă, iar n este simbol nou de operaţie unară.
☐ C: $\forall y \forall v (S(d) \to (R(y, m(y)) \vee (\neg S(v) \to T(m(y)))))$, unde d este simbol nou de constantă, iar m este simbol nou de operaţie unară.
☐ D: $\forall y \forall v (S(l) \to (R(y, n(y)) \vee (\neg S(v) \to T(n(y)))))$, unde l este simbol nou de constantă, iar n este simbol nou de operaţie unară.
☐ E: $\forall y \forall v (S(n(y)) \to (R(y, l)) \vee (\neg S(v) \to T(l))))$, unde l este simbol nou de constantă, iar n este simbol nou de operaţie unară.

(P15) [2 răspunsuri corecte] Fie următoarea formulă în limbajul logicii propoziţionale:

$$\varphi := (v_1 \wedge v_2 \wedge v_3) \to (v_1 \wedge v_3)$$

Care dintre următoarele afirmaţii sunt adevărate?
☐ A: φ nu este satisfiabilă.
☐ B: Dacă e este o evaluare astfel încât $e(v_1) = e(v_3) = e(v_2) = 1$, atunci $e^+(\varphi) = 1$.
☐ C: φ este satisfiabilă.
☐ D: φ nu este tautologie.
☐ E: Dacă e este o evaluare astfel încât $e^+(\varphi) = 1$, atunci $e(v_1) = 0$, $e(v_2) = 1$ şi $e(v_3) = 0$.

(P16) [1 răspuns corect] Fie următoarea formulă:

$$\varphi := (v_1 \vee v_2) \rightarrow (v_3 \rightarrow \neg v_2)$$

Care dintre următoarele afirmaţii este adevărată?

☐ A: $(\neg v_1 \wedge \neg v_2) \vee \neg v_3 \vee \neg v_2$ este FND a lui φ.

☐ B: $(v_1 \wedge v_2) \vee (v_1 \wedge v_3) \vee (v_2 \wedge v_3)$ este FND a lui φ.

☐ C: $(\neg v_1 \wedge \neg v_3) \vee (\neg v_3 \wedge \neg v_2)$ este FND a lui φ.

☐ D: $(\neg v_1 \wedge \neg v_2 \wedge \neg v_3) \vee \neg v_2 \vee v_3$ este FND a lui φ.

☐ E: $(v_1 \vee v_2 \vee v_3) \wedge (v_2 \vee \neg v_3)$ este FND a lui φ.