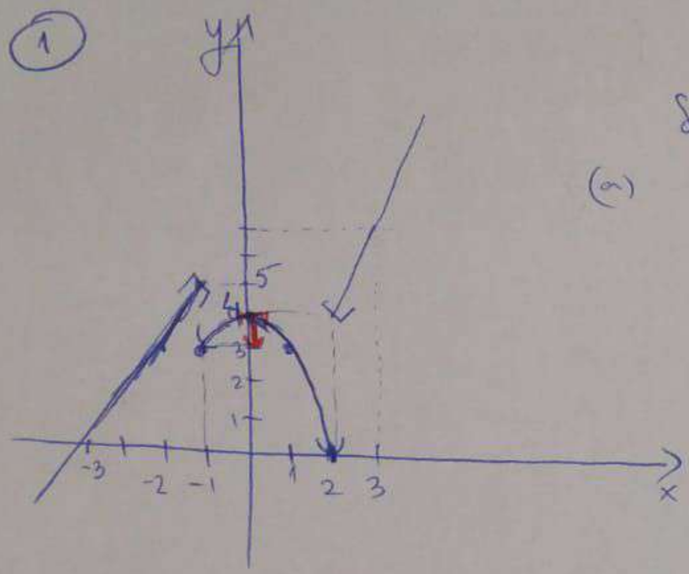
(1)



Studiem graficul funcției f

(a) $f([-3,2]) = f([-3,-1]) \cup f((-1,2)) \cup f(\{2\}) =$

$= [1,5] \cup (0,4] \cup \{4\} = (0,5]$

$f^{-1}([0,2]) = \left[-\frac{7}{2}, \frac{5}{2}\right] \cup [\sqrt{2}, 2)$

$\begin{cases} 2x+7=0 \Rightarrow x = -\frac{7}{2} \\ 2x+7=2 \Rightarrow x = -\frac{5}{2} \end{cases}$

$\left.\begin{array}{l} -x^2+4=2 \Rightarrow x^2=2 \\ x \in (-1,2) \end{array}\right\} \Rightarrow x = \sqrt{2}$

(b) $f(0) = f(2) = 4 \Rightarrow f$ nu e injectivă

$\operatorname{Im} f = f((-\infty,-1]) \cup f((-1,2)) \cup f([2,\infty)) =$

$= (-\infty, 5] \cup (0,4) \cup [4,\infty) = (-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$, deci

f este surjectivă

(c) O dreaptă paralelă cu Ox taie graficul funcției f în cel mult 3 puncte, și taie în exact 3 puncte dacă și numai dacă este de forma

$y = c$ cu $c \in (3,4]$.

Deci pentru $y \in (3,4]$ mulțimea $f^{-1}(\{y\})$ are exact 3 elemente.

Exerciţiul 2: Fie $D = \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ şi G grupul funcţiilor bijective de la D în D (operaţia considerată este compunerea uzuală a funcţiilor).
(a) Arătaţi că $f_1(x) = \frac{1}{x}$ şi $f_2(x) = \frac{1}{1-x}$ sunt elemente ale grupului G şi calculaţi-le ordinele. (1,25 puncte)

(b) Arătaţi că subgrupul lui G generat de f_1 şi f_2 are 6 elemente. (1,25 puncte)

Rezolvare:

a) Observăm că $\frac{1}{x} = 1 \iff x = 1$ și că $\frac{1}{x} \neq 0$ pentru orice $x \in D$, deci $f_1 : D \to D$ este bine definită. De asemenea, $\frac{1}{1-x} \neq 0$ pentru orice $x \in D$ și $\frac{1}{1-x} = 1 \iff x = 0$, deci și $f_2 : D \to D$ este bine definită. (0,25)

Injectivitatea lui f_1: Fie $x, y \in D$ astfel încât $f_1(x) = f_1(y)$, deci $\frac{1}{x} = \frac{1}{y}$, de unde rezultă că $x = y$.

Surjectivitatea lui f_1: Fie $y \in D$. Atunci $\frac{1}{y} \in D$ de asemenea și $f_1(\frac{1}{y}) = y$. (0,25)

Alternativ, putem observa că f_1 este propria sa inversă.

Injectivitatea lui f_2: Fie $x, y \in D$ astfel încât $\frac{1}{1-x} = \frac{1}{1-y}$, de unde rezultă că $x = y$.

Surjectivitatea lui f_2: Fie $y \in D$. Observăm în acest caz că $\frac{y-1}{y} \in D$ și $f_2(\frac{y-1}{y}) = y$. (0,25)

Prin calcul vedem că $f_1 \circ f_1(x) = x$, $f_2 \circ f_2(x) = \frac{x-1}{x}$, $f_2 \circ f_2 \circ f_2(x) = x$, deci f_1 are ordinul 2, iar f_2 ordinul 3. (0,5)

b) Notăm cu H subgrupul din cerință. Folosind calculele precedente putem vedea că $f_0(x) = x$, $f_3(x) = \frac{x-1}{x}$ aparțin de asemenea lui H. Mai avem:

$$f_4(x) = f_1 \circ f_2(x) = 1 - x$$
$$f_5(x) = f_1 \circ f_3(x) = \frac{x}{x-1}$$

(0,5)

Am găsit până acum exact 6 membri ai lui H. Vom face tabla operației pentru ei:

	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_0	f_0	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5
f_1	f_1	f_0	f_4	f_5	f_2	f_3
f_2	f_2	f_5	f_3	f_0	f_1	f_4
f_3	f_3	f_4	f_0	f_2	f_5	f_1
f_4	f_4	f_3	f_5	f_1	f_0	f_2
f_5	f_5	f_2	f_1	f_4	f_3	f_0

de unde putem observa că aceste 6 elemente sunt într-adevăr toți membrii subgrupului H. (0,75)

Exercițiul 3: Se consideră permutarea:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 7 & 9 & 15 & 10 & 13 & 8 & 3 & 14 & 2 & 6 & 12 & 11 & 5 & 4 & 1 \end{pmatrix} \in S_{15}.$$

(a) Descompuneți permutarea σ în cicli disjuncți. (0,75 puncte)

(b) Calculați σ^{2023} și ordinul permutării σ. (0,75 puncte)

(c) Rezolvați ecuația $\tau^3 = \sigma$ în S_{15}. (1 punct)

Rezolvare:

(a) $\sigma = (1\ 7\ 3\ 15)(2\ 9)(4\ 10\ 6\ 8\ 14)(5\ 13)(11\ 12)$ (0,75 puncte)

(b) $\operatorname{ord}(\sigma) = \operatorname{cmmdc}(4, 2, 5, 2, 2) = 20$ (0,25 puncte)

$\sigma^{2023} = (\sigma^{20})^{101}\sigma^3 = \sigma^3$ (0,25 puncte)

$\sigma^3 = (1\ 15\ 3\ 7)(4\ 8\ 10\ 14\ 6)(5\ 13)(11\ 12)(2\ 9)$ (0,25 puncte)

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 \\ 15 & 9 & 7 & 8 & 13 & 4 & 1 & 10 & 2 & 14 & 12 & 11 & 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

(c) Se face discuție în funcție de ciclii din descompunerea lui σ și τ. Dacă în descompunerea lui τ în cicli disjuncți apare un ciclu cu lungimea $l = 3k$, unde $k \in \mathbb{N}^*$, atunci în $\tau^3 = \sigma$ apar 3 cicli de lungime k. Dacă în descompunerea lui τ în cicli disjuncți apare un ciclu cu lungimea nedivizibilă cu 3, atunci în $\tau^3 = \sigma$ apare un ciclu de aceeași lungime. (0,25 puncte)

Cum în descompunerea lui σ apar 3 cicli de lungime 2, un ciclu de lungime 4 și unul de lungime 5, avem următoarele două cazuri:

(i) În descompunerea lui τ apar: 3 cicli de lungime 2, un ciclu de lungime 4 și unul de lungime 5. În acest caz, avem o soluție unică, $\tau = (1\ 15\ 3\ 7)(4\ 6\ 14\ 10\ 8)(2\ 9)(5\ 13)(11\ 12)$. (0,25 puncte pentru rezolvarea completă)

(ii) În descompunerea lui τ apar: un ciclu de lungime 6, un ciclu de lungime 4 și unul de lungime 5. În acest caz, avem 8 soluții distincte $\tau = (1\ 15\ 3\ 7)(4\ 6\ 14\ 10\ 8)c_i$, unde c_i sunt soluțiile ecuației $c^3 = (2\ 9)(5\ 13)(11\ 12)$. (0,5 puncte pentru rezolvarea completă)

Calculului ciclilor din descompunerea lui τ:

$c^3 = (1\ 7\ 3\ 15) \iff c = (1\ 15\ 3\ 7)$;

$c^3 = (4\ 10\ 6\ 8\ 14) \iff c = (4\ 6\ 14\ 10\ 8)$;

$c^3 = (i\ j),\ i \neq j \iff c = (i\ j)$;

$c^3 = (2\ 9)(5\ 13)(11\ 12)$. Avem 8 soluții:

(1) $c_1 = (2\ 5\ 11\ 9\ 13\ 12)$
(2) $c_2 = (2\ 13\ 11\ 9\ 5\ 12)$
(3) $c_3 = (2\ 5\ 12\ 9\ 13\ 11)$
(4) $c_4 = (2\ 13\ 12\ 9\ 5\ 11)$
(5) $c_5 = (2\ 11\ 5\ 9\ 12\ 13)$

(6) $c_6 = (2\ 12\ 5\ 9\ 11\ 13)$
(7) $c_7 = (2\ 11\ 13\ 9\ 12\ 5)$
(8) $c_8 = (2\ 12\ 13\ 9\ 11\ 5)$

Exercițiul 4: Considerăm mulțimea $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}] = \{a + bi\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$.
(a) Arătați că $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ este un subinel în $(\mathbb{C}, +, \cdot)$. (0,5 puncte)
(b) Determinați mulțimea elementelor inversabile din inelul $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$. (1 punct)
(c) Fie $I = (1+i\sqrt{2})$ idealul generat de elementul $1+i\sqrt{2}$ în inelul $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$. Dacă $a, b \in \mathbb{Z}$, arătați că $a + bi\sqrt{2} \in I \iff 3 \mid a - b$ și demonstrați că are loc următorul izomorfism de inele:

$$\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]/I \simeq \mathbb{Z}_3 \qquad \text{(1 punct)}$$

Rezolvare:
(a) Observăm pentru început că $1 = 1 + 0 \cdot i\sqrt{2}$, deci $1 \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$. Fie $x, y \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$. Atunci $x = a + bi\sqrt{2}$ și $y = c + di\sqrt{2}$, cu $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$.

$$x - y = (a - c) + (b - d)i\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$$
$$xy = (ac - 2bd) + (ad + bc)i\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$$

Prin urmare, $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ este un subinel în $(\mathbb{C}, +, \cdot)$.
(b) Fie $x = a + bi\sqrt{2} \in U(\mathbb{Z}[i\sqrt{2}])$. Atunci există $y = c + di\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ astfel încât:

$$(a + bi\sqrt{2})(c + di\sqrt{2}) = 1$$

Trecând la modul obținem:

$$(a^2 + 2b^2)(c^2 + 2d^2) = 1$$

Cum $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, găsim $b = 0$ și $a = \pm 1$. Remarcăm astfel că $U(\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]) = \{1, -1\}$.
(c) Demonstrăm implicația $\Longrightarrow$: Fie $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât $a + bi\sqrt{2} \in I$. Atunci există $c, d \in \mathbb{Z}$ astfel încât $a + bi\sqrt{2} = (1 + i\sqrt{2})(c + di\sqrt{2})$. Obținem

$$a = c - 2d$$
$$b = c + d$$

Prin urmare, $a - b = -3d$, deci $3 \mid a - b$.
Demonstrăm acum implicația $\Longleftarrow$: Observăm pentru început că $3 = (1+i\sqrt{2})(1-i\sqrt{2})$, deci $3 \in I$. Așadar, $3s \in I$ pentru orice $s \in \mathbb{Z}$. Fie $a, b \in \mathbb{Z}$ astfel încât $3 \mid a - b$. Atunci $a = b + 3r$, cu $r \in \mathbb{Z}$ și deci

$$a + bi\sqrt{2} = 3r + b(1 + i\sqrt{2}) \in I$$

Considerăm $\varphi : \mathbb{Z}[i\sqrt{2}] \longrightarrow \mathbb{Z}_3$, definit prin $\varphi(a + bi\sqrt{2}) = \overline{a - b}$, $(\forall)\ a, b \in \mathbb{Z}$. Remarcăm că $\varphi(1) = \overline{1}$. Fie acum $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Atunci

$$\varphi(a + bi\sqrt{2} + c + di\sqrt{2}) = \varphi(a + c + (b + d)i\sqrt{2}) =$$
$$= \overline{a + c - b - d} = \overline{a - b} + \overline{c - d} =$$
$$= \varphi(a + bi\sqrt{2}) + \varphi(c + di\sqrt{2})$$

și

$$\begin{aligned}\varphi((a+bi\sqrt{2})(c+di\sqrt{2})) &= \varphi(ac-2bd+(ad+bc)i\sqrt{2}) = \\ &= \overline{ac-2bd-ad-bc} = \overline{ac+bd-ad-bc} = \overline{(a-b)(c-d)} = \\ &= \varphi(a+bi\sqrt{2})\cdot\varphi(c+di\sqrt{2})\end{aligned}$$

Așadar, φ este un morfism de inele. Este evident surjectiv. De asemenea, $\ker(\varphi) = I$ din cele de mai sus. Izomorfismul cerut se obține aplicând Teorema fundamentală de izomorfism pentru φ.

Barem Exercițiul 4:

(a) Verificarea faptului că $\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ e subinel în $\mathbb{C}$:

$1 \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ .... 0,1 pt

$x-y \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$, $(\forall)\ x,y \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ .... 0,2 pt

$xy \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$, $(\forall)\ x,y \in \mathbb{Z}[i\sqrt{2}]$ .... 0,2 pt

(b) $U(\mathbb{Z}[i\sqrt{2}]) = \{1,-1\}$ .... 1 pt

(c) $a+bi\sqrt{2} \in I \implies 3 \mid a-b$ .... 0,25 pt

$a+bi\sqrt{2} \in I \impliedby 3 \mid a-b$ .... 0,25 pt

Se consideră $\varphi : \mathbb{Z}[i\sqrt{2}] \longrightarrow \mathbb{Z}_3$, $a+bi\sqrt{2} \longmapsto \overline{a-b}$

φ morfism surjectiv de inele, $\ker(\varphi) = I$, aplicarea T.F.I. .... 0,5 pt