

Exerciții și probleme

A.A. - Algoritmi geometrici

Informații referitoare la structura subiectelor de algoritmi geometrici

- **30p:** Probleme (2-3) cu grad diferit de dificultate (v. exemple mai jos).
- **30p:** Subiecte/cerințe cu referire la aspecte teoretice - înțelegerea configurațiilor care apar în algoritmi geometrici / înțelegerea algoritmilor / analiza complexității, etc. Exemple: (i) *Indicați trei algoritmi parcurși la curs în care sortarea punctelor este esențială și explicați, pe scurt, dacă există aspecte specifice legate de folosirea sortării,* (ii) *Date n puncte în plan, scrieți un algoritm cât mai eficient (analizați complexitatea!) care să determine un poligon care are toate aceste puncte ca vârfuri. Exemplificați!* (iii) *Analizați complexitatea algebrică pentru o problemă dată (de exemplu intersecții de segmente - v. curs).*

1. Preliminarii. Raport. Testul de orientare

1.1. (Seminar 5, Problema 1) Fie punctele $A = (1, 2, 3), B = (4, 5, 6) \in \mathbb{R}^3$.

- a) Fie $C = (a, 7, 8)$. Arătați că există a astfel ca punctele A, B, C să fie coliniare și pentru a astfel determinat calculați raportul $r(A, B, C)$.
- b) Determinați punctul P astfel ca raportul $r(A, P, B) = 1$.
- c) Dați exemplu de punct Q astfel ca $r(A, B, Q) < 0$ și $r(A, Q, B) < 0$.

1.2. (Seminar 5, Problema 2) Fie punctele $P = (1, -1), Q = (3, 3)$.

- a) Calculați valoarea determinantului care apare în testul de orientare pentru muchia orientată \overrightarrow{PQ} și punctul de testare $O = (0, 0)$.
- b) Fie $R_\alpha = (\alpha, -\alpha)$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$. Determinați valorile lui α pentru care punctul R_α este situat în dreapta muchiei orientate \overrightarrow{PQ} .

1.3 Calculați rapoartele $r(A, P, B), r(B, P, A), r(P, A, B)$ (stabiliți mai întâi dacă punctele sunt coliniare), pentru: (i) $A = (3, 3), B = (2, 4), C = (5, 1)$; (ii) $A = (1, 4, -2), P = (2, 3, -1), B = (4, 1, 1)$.

1.4 Determinați α, β astfel ca punctele A, P, B din planul \mathbb{R}^2 , cu $A = (6, 2), P = (\alpha, \beta), B = (2, -2)$, să fie coliniare și $r(A, P, B) = 2$.

1.5 Fie $P = (2, 2), Q = (4, 4)$. Stabiliți, folosind testul de orientare, poziția relativă a punctelor $R_1 = (8, 8), R_2 = (6, 0), R_3 = (-2, -1)$ față de muchia orientată \overrightarrow{PQ} . Care este poziția aceluiași puncte față de muchia orientată \overrightarrow{QP} ?

1.6 Dați exemplu de puncte coplanare P, Q, R_1, R_2 din \mathbb{R}^3 , nesituate într-un plan de coordonate, astfel ca R_1 și R_2 să fie de o parte și de alta a segmentului $[PQ]$.

2. Acoperiri convexe

2.1. (Seminar 5, Problema 3) Fie $\mathcal{M} = \{P_1, P_2, \dots, P_9\}$, unde $P_1 = (-5, 0), P_2 = (-4, -3), P_3 = (-3, -3), P_4 = (-1, -3), P_5 = (1, -1), P_6 = (2, 1), P_7 = (3, 5), P_8 = (5, 0)$. Detaliați cum evoluează lista \mathcal{L}_i a vârfurilor care determină marginea inferioară a frontierei acoperirii convexe a lui \mathcal{M} , obținută pe parcursul Graham's scan, varianta Andrew.

2.2. (Seminar 5, Problema 4) Dați un exemplu de mulțime \mathcal{M} din planul \mathbb{R}^2 pentru care, la final, \mathcal{L}_i are 3 elemente, dar, pe parcursul algoritmului, numărul maxim de elemente al lui \mathcal{L}_i este egal cu 6 (\mathcal{L}_i este lista vârfurilor care determină marginea inferioară a frontierei acoperirii convexe a lui \mathcal{M} , obținută pe parcursul Graham's scan, varianta Andrew). Justificați!

2.3. (Seminar 6, Problema 1) Fie mulțimea $\mathcal{P} = \{P_1, P_2, \dots, P_8\}$, unde $P_1 = (0, 0), P_2 = (1, 2), P_3 = (2, 1), P_4 = (3, 0), P_5 = (5, 0), P_6 = (2, -3), P_7 = (5, -2), P_8 = (3.5, -2)$. Indicați testele care trebuie făcute pentru a găsi succesorul lui P_1 atunci când aplicăm Jarvis' march pentru a determina marginea inferioară a acoperirii convexe a lui \mathcal{P} , parcursă în sens trigonometric (drept pivot inițial va fi considerat P_2).

2.4 Fie $\mathcal{M} = \{P_1, P_2, \dots, P_7\}$, unde $P_1 = (1, 1), P_2 = (2, 7), P_3 = (3, 6), P_4 = (4, 5), P_5 = (7, 7), P_6 = (9, 7), P_7 = (11, 1)$. Scrieți cum evoluează, pe parcursul aplicării Graham's scan, lista \mathcal{L}_i a vârfurilor care determină marginea inferioară a frontierei acoperirii convexe a lui \mathcal{M} , parcursă în sens trigonometric. Aceeași cerință pentru marginea superioară \mathcal{L}_s .

2.5 Fie $\mathcal{M} = \{P_1, P_2, \dots, P_9\}$, unde $P_1 = (-3, 2), P_2 = (-2, -1), P_3 = (-1, -1), P_4 = (1, -1), P_5 = (3, 1), P_6 = (4, 3), P_7 = (5, 7), P_8 = (7, 2), P_9 = (9, 4)$. Determinați numărul maxim de elemente ale lui \mathcal{L}_i , indicând explicit punctele conținute la pasul când este atins acest maxim (\mathcal{L}_i este lista vârfurilor care determină marginea inferioară a frontierei acoperirii convexe a lui \mathcal{M} , obținută pe parcursul Graham's scan, varianta Andrew). Justificați!

2.6 Fie punctele $P_1 = (2, 0), P_2 = (0, 3), P_3 = (-4, 0), P_4 = (4, 2), P_5 = (5, 1)$. Precizați testele care trebuie efectuate, atunci când este aplicat Jarvis' march, pentru determinarea succesorului M al "celui mai din stânga" punct și a succesorului lui M . Cum decurg testele dacă se începe cu "cel mai de jos" punct?

2.7 Dați un exemplu de mulțime cu 8 elemente \mathcal{M} din planul \mathbb{R}^2 pentru care frontiera acoperirii convexe are 3 elemente și pentru care, la găsirea succesorului "celui mai din stânga" punct (se aplică Jarvis' march), toate celelalte puncte sunt testate. Justificați!

2.8 Fie punctele $A = (3, -3), B = (3, 3), C = (-3, -3), D = (-3, 3), M = (2 - \lambda, 3 + \lambda), \lambda \in \mathbb{R}$. Discutați, în funcție de λ , numărul de puncte de pe frontiera acoperirii convexe a mulțimii $\{A, B, C, D, M\}$.

3. Teorema galeriei de artă. Triangularea poligoanelor. Clasificarea vârfurilor unui poligon

3.1. (Seminar 6, Problema 2) Aplicați metoda din demonstrația teoremei galeriei de artă, indicând o posibilă amplasare a camerelor de supraveghere în cazul poligonului $P_0P_1P_2 \dots P_{12}$, unde $P_0 = (0, -4)$, $P_1 = (5, -6)$, $P_2 = (7, -4)$, $P_3 = (5, -2)$, $P_4 = (5, 2)$, $P_5 = (7, 4)$, $P_6 = (7, 6)$ iar punctele P_7, \dots, P_{12} sunt respectiv simetricele punctelor P_6, \dots, P_1 față de axa Oy .

3.2. (Seminar 6, Problema 3) Fie poligonul $\mathcal{P} = (P_1P_2P_3P_4P_5P_6)$, unde $P_1 = (5, 0)$, $P_2 = (3, 2)$, $P_3 = (-1, 2)$, $P_4 = (-3, 0)$, $P_5 = (-1, -2)$, $P_6 = (3, -2)$. Arătați că Teorema Galeriei de Artă poate fi aplicată în două moduri diferite, așa încât, aplicând metoda din teoremă și mecanismul de 3-colorare, în prima variantă să fie suficientă o singură cameră, iar în cea de-a doua variantă să fie necesare și suficiente două camere pentru supravegherea unei galerii având forma poligonului \mathcal{P} .

3.3. (Seminar 6, Problema 4) Dați exemplu de poligon cu 6 vârfuri care să aibă atât vârfuri convexe, cât și concave și toate să fie principale.

3.4 Fie \mathcal{P} poligonul dat de punctele $P_1 = (6, 0)$, $P_2 = (2, 2)$, $P_3 = (0, 7)$, $P_4 = (-2, 2)$, $P_5 = (-8, 0)$, $P_6 = (-2, -2)$, $P_7 = (0, -6)$, $P_8 = (2, -2)$. Indicați o triangulare $\mathcal{T}_{\mathcal{P}}$ a lui \mathcal{P} și construiți graful asociat perechii $(\mathcal{P}, \mathcal{T}_{\mathcal{P}})$.

3.5 Aplicați metoda din demonstrația teoremei galeriei de artă, indicând o posibilă amplasare a camerelor de supraveghere în cazul poligonului $P_1P_2 \dots P_{10}$, unde $P_1 = (5, 4)$, $P_2 = (6, 6)$, $P_3 = (7, 4)$, $P_4 = (8, 4)$, $P_5 = (10, 6)$, iar punctele P_6, \dots, P_{10} sunt respectiv simetricele punctelor P_5, \dots, P_1 față de axa Ox .

3.6 Fie poligonul $\mathcal{P} = (P_1P_2 \dots P_{10})$, unde $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (6, 0)$, $P_3 = (6, 6)$, $P_4 = (3, 6)$, $P_5 = (3, 3)$, $P_6 = (4, 4)$, $P_7 = (4, 2)$, $P_8 = (2, 2)$, $P_9 = (2, 6)$, $P_{10} = (0, 6)$. Stabiliți natura vârfurilor lui \mathcal{P} (vârf principal sau nu / vârf convex sau concav).

3.7 Se consideră poligonul $\mathcal{P} = P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7P_8$ dat de punctele $P_1 = (0, 10)$, $P_2 = (1, 8)$, $P_3 = (3, 6)$, $P_4 = (7, 3)$, $P_5 = (4, 0)$, $P_6 = (6, -2)$, $P_7 = (4, -4)$, $P_8 = (-4, -1)$. Stabiliți dacă \mathcal{P} este y -monoton și, în caz afirmativ, explicați cum se aplică algoritmul liniar de triangulare.

3.8 În \mathbb{R}^2 fie punctele $P_1 = (0, 8)$, $P_2 = (3, 6)$, $P_3 = (0, 3)$, $P_4 = (4, -1)$, $P_5 = (5, \alpha)$, $P_6 = (6, -3)$, $P_7 = (0, -9)$, $P_8 = (-2, 2)$, $P_9 = (\beta + 1, 4)$, cu $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Discutați, în funcție de α și β , dacă linia poligonală $P_1P_2 \dots P_8P_9$ este un poligon y -monoton.

3.9 În algoritmul de triangulare a poligoanelor y -monotone au fost descrise trei cazuri. Justificați dacă, aplicând algoritmul pentru un poligon y -monoton cu cel puțin 4 laturi, este necesar să apără toate aceste cazuri.

4. Triangularea mulțimilor de puncte

4.1. (Seminar 6, Problema 5) Fie $\mathcal{M} = \{A_i \mid i = 0, \dots, 50\} \cup \{B_i \mid i = 0, \dots, 40\} \cup \{C_i \mid i = 0, \dots, 30\}$, dată de punctele $A_i = (i + 10, 0)$, $i = 0, 1, \dots, 50$, $B_i = (0, i + 30)$, $i = 0, 1, \dots, 40$, $C_i = (-i, -i)$, $i = 0, 1, \dots, 30$. Determinați numărul de triunghiuri și numărul de muchii ale unei triangulări a lui \mathcal{M} .

4.2. (Seminar 6, Problema 6) Dați un exemplu de mulțime din \mathbb{R}^2 care să admită o triangulare având 6 triunghiuri și 11 muchii.

4.3. (Seminar 6, Problema 7) În \mathbb{R}^2 fie punctele $P_1 = (1, 7)$, $P_2 = (5, 7)$, $P_3 = (7, 5)$, $P_4 = (1, 3)$, $P_5 = (5, 3)$, $P_6 = (\alpha - 1, 5)$, cu $\alpha \in \mathbb{R}$. Discutați, în funcție de α , numărul de muchii ale unei triangulări asociate mulțimii $\{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6\}$.

4.4 Fie $n \geq 2$ un număr natural par fixat. Considerăm mulțimea

$$\mathcal{M} = \{A_0, \dots, A_n, B_0, \dots, B_n, C_0, \dots, C_n, D_0, \dots, D_n\},$$

unde $A_i = (i, 0)$, $B_i = (0, i)$, $C_i = (i, i)$, $D_i = (n-i, i)$, pentru orice $i = 0, \dots, n$. Determinați numărul de triunghiuri și numărul de muchii ale unei triangulări a lui \mathcal{M} .

4.5 Dați exemplu de mulțime de puncte din \mathbb{R}^2 care să admită o triangulare având 3 triunghiuri și 7 muchii.

4.6 Dați exemplu de mulțime \mathcal{M} cu 6 elemente din \mathbb{R}^2 care să admită o triangulare ce conține 12 muchii, iar una dintre submulțimile sale cu 4 elemente să admită o triangulare ce conține 5 muchii. Justificați alegerea făcută.

4.7 Fie punctele $A = (1, 1)$, $B = (1, -1)$, $C = (-1, -1)$, $D = (-1, 1)$, $E = (0, -2)$, $M = (0, \lambda)$, unde $\lambda \in \mathbb{R}$ este un parametru real. Discutați în funcție de λ numărul de triunghiuri și numărul de muchii ale unei triangulări asociate mulțimii $\{A, B, C, D, E, M\}$.

4.8 a) Dați exemplu de mulțime de puncte \mathcal{M} din \mathbb{R}^2 care admite o triangulare ce conține exact șase muchii. Precizați numărul de fețe din triangularea respectivă.

b) Formulați și justificați un rezultat care să caracterizeze mulțimile cu proprietatea că admit o triangulare ce conține exact șase muchii.

5. Diagrame Voronoi. Triangulări Delaunay

5.1. (Seminar 7, Problema 1) Dați exemplu de mulțime $\mathcal{M} = \{A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6\}$ din \mathbb{R}^2 astfel ca diagrama Voronoi asociată lui \mathcal{M} să conțină exact patru semidrepte, iar diagrama Voronoi asociată lui $\mathcal{M} \setminus \{A_1\}$ să conțină exact cinci semidrepte. Justificați alegerea făcută.

5.2. (Seminar 7, Problema 2) a) Fie o mulțime cu n situri necoliniare. Atunci, pentru diagrama Voronoi asociată au loc inegalitățile

$$n_v \leq 2n - 5, \quad n_m \leq 3n - 6,$$

unde n_v este numărul de vârfuri ale diagramei și n_m este numărul de muchii al acesteia.

b) Câte vârfuri poate avea diagrama Voronoi \mathcal{D} asociată unei mulțimi cu cinci puncte din \mathbb{R}^2 știind că \mathcal{D} are exact cinci semidrepte? Analizați toate cazurile. Este atins numărul maxim de vârfuri posibile ($n_v = 2n - 5$)? Justificați!

5.3. (Seminar 7, Problema 3) Fie punctele $O = (0, 0)$, $A = (\alpha, 0)$, $B = (1, 1)$, $C = (2, 0)$, $D = (1, -1)$, unde $\alpha \in \mathbb{R}$ este un parametru. Discutați, în funcție de α , numărul de muchii de tip semidreaptă ale diagramei Voronoi asociate mulțimii $\{O, A, B, C, D\}$.

5.4 Determinați, folosind metoda diagramelor Voronoi, triangularea Delaunay pentru mulțimea formată din punctele $A = (3, 5)$, $B = (6, 6)$, $C = (6, 4)$, $D = (9, 5)$ și $E = (9, 7)$.

5.5 Determinați numărul de semidrepte conținute în diagrama Voronoi asociată mulțimii de puncte $\mathcal{M} = \{A_0, \dots, A_5, B_0, \dots, B_5, C_0, \dots, C_5\}$, unde $A_i = (i+1, i+1)$, $B_i = (-i, i)$ și $C_i = (0, i)$, pentru $i = 0, \dots, 5$.

5.6 Fie punctele $A_1 = (5, 1)$, $A_2 = (7, -1)$, $A_3 = (9, -1)$, $A_4 = (7, 3)$, $A_5 = (11, 1)$, $A_6 = (9, 3)$. Dați exemplu de mulțime de două puncte $\{A_7, A_8\}$ cu proprietatea că diagrama Voronoi asociată mulțimii $\{A_1, \dots, A_8\}$ are exact 4 muchii de tipul semidreaptă (explicați construcția făcută).

5.7 a) Dați exemplu de mulțime cu 5 puncte \mathcal{M} din planul \mathbb{R}^2 așa încât diagrama Voronoi asociată să aibă 4 vârfuri. Indicați numărul muchiilor de tip semidreaptă.

b) Dați exemplu de mulțimi \mathcal{N} , \mathcal{P} din planul \mathbb{R}^2 , fiecare dintre ele cu 5 puncte, așa încât diagramele Voronoi asociate să aibă același număr de muchii de tip semidreaptă, dar numărul total de muchii să fie diferit.

5.8 a) Dați exemplu de mulțimi \mathcal{A}_1 și \mathcal{A}_2 din \mathbb{R}^2 , fiecare având câte 4 puncte, astfel ca, pentru fiecare dintre ele, diagrama Voronoi asociată să conțină exact 3 semidrepte, iar diagrama Voronoi asociată lui $\mathcal{A}_1 \cup \mathcal{A}_2$ să conțină exact 4 semidrepte.

b) Se dau două mulțimi \mathcal{M}_1 și \mathcal{M}_2 din \mathbb{R}^2 , fiecare având câte 4 puncte, astfel ca, pentru fiecare dintre ele, diagrama Voronoi asociată să conțină exact 3 semidrepte. Câte semidrepte poate avea diagrama Voronoi asociată lui $\mathcal{M}_1 \cup \mathcal{M}_2$? Enumerați (și justificați) toate variantele posibile.

5.9 În \mathbb{R}^2 considerăm punctele $A = (1, 1)$, $B = (1, -1)$, $C = (-1, -1)$, $D = (-1, 1)$, $E = (\lambda, \lambda)$, $F = (1, \mu)$, cu $\lambda \in [-1, 1]$ și $\mu \in \mathbb{R}$. Discutați, în funcție de λ și μ câte muchii de tip semidreaptă are diagrama Voronoi asociată mulțimii $\{A, B, C, D, E, F\}$.

6. Dualitate

6.1. (Seminar 7, Problema 4) (i) Fie punctul $A = (1, 2)$. Alegeți două drepte distincte d, g care trec prin A , determinați dualele A^*, d^*, g^* și verificați că A^* este dreapta determinată de punctele d^* și g^* .

(ii) Determinați duala următoarei configurații: Fie patru drepte care trec printr-un același punct M . Se aleg două dintre ele; pe fiecare din aceste două drepte se consideră câte un punct diferit de M și se consideră dreapta determinată de cele două puncte. Desenați ambele configurații. Completați configurația inițială (adăugând puncte/drepte) astfel încât să obțineți o configurație autoduală (i.e. configurația duală să aibă aceleași elemente geometrice și aceleași incidențe ca cea inițială).

6.2 Fie punctul $p = (-1, 1)$; dreapta $d : (y = 3x + 4)$. Verificați că $p \in d$ și că $d^* \in p^*$.

6.3 Fie punctele $p_1 = (2, 5)$; $p_2 = (1, 6)$. Scrieți ecuația dreptei $p_1 p_2$ și detaliați (cu calcule explicite!) configurația din planul dual.

6.4 Fie dreapta $d : (y = 2x + 1)$ și $p = (1, 8)$. Verificați că p este deasupra lui d și că d^* este deasupra lui p^* .

6.5 (i) Fie dreapta $d : (y = 2x - 3)$. Alegeți două puncte distincte $P, Q \in d$, determinați dualele d^*, P^*, Q^* și verificați că $\{d^*\} = P^* \cap Q^*$.

(ii) Determinați duala următoarei configurații: *Fie trei drepte care trec prin același punct M ; pe fiecare dreaptă se ia câte un punct (diferit de M), astfel ca aceste puncte să fie coliniare.*

6.6 Fie dreapta $d : x = y - 1$. Alegeți două puncte distincte P, Q pe d , determinați dualele d^*, P^*, Q^* și verificați că d^* este punctul de intersecție a dreptelor P^* și Q^* .

6.7 Fie configurația: *trei drepte care trec prin același punct; pe fiecare dreaptă se alege un punct, diferit de punctul comun al celor trei drepte.* Descrieți configurația duală. Desenați!

7. Intersecții. Subdiviziuni planare

7.1 Fie segmentele $[AB], [CD], [EF]$. Stabiliți care este complexitatea algebrică a calculului pentru ca (i) cele trei segmente să aibă același mijloc; (ii) cele trei segmente să aibă aceeași lungime.

7.2 Fie punctele $P_1 = (4, 3), P_2 = (1, 1), P_3 = (6, 2), P_4 = (11, 8)$; $Q_1 = (4, 5), Q_2 = (9, 9), Q_3 = (6, 7), Q_4 = (11, 0)$. Pentru fiecare $i = 1, \dots, 4$ notăm cu s_i segmentul $[P_i Q_i]$. Scrieți cum evoluează statutul dreptei de baleiere, precum și evenimentele care determină modificarea sa (dreapta de baleiere este orizontală, iar statutul este o mulțime neordonată de segmente).

7.3 Fie punctele $A_1 = (6, 1), A_2 = (3, 2), A_3 = (1, 8), A_4 = (13, 7)$; $B_1 = (6, 6), B_2 = (11, 10), B_3 = (9, 0), B_4 = (13, -1)$. Scrieți cum evoluează statutul dreptei de baleiere, precum și evenimentele care determină modificarea sa (dreapta de baleiere este orizontală, iar statutul este o mulțime ordonată de segmente).

7.4 Fie punctele $P_1 = (4, -1), P_2 = (2, 8), P_3 = (3, 3), P_4 = (7, 0)$; $Q_1 = (4, 11), Q_2 = (8, 2), Q_3 = (10, 10), Q_4 = (7, 4)$. Pentru fiecare $i = 1, \dots, 4$ notăm cu s_i segmentul $[P_i Q_i]$. Considerăm dreapta de baleiere l dată de ecuația $y = 9$. Indicați evenimentele deja eliminate din coada de evenimente \mathcal{Q} , cele rămase în \mathcal{Q} , cele care urmează să fie incluse ulterior în \mathcal{Q} și precizați statutul corespunzător lui l (statutul este o mulțime ordonată de segmente).

7.5 a) Dați exemplu de mulțime de 5 segmente \mathcal{S} din \mathbb{R}^2 pentru care numărul de modificări de statut al dreptei de baleiere, în cazul în care statutul este o mulțime neordonată să coincidă cu numărul de modificări de statut al dreptei de baleiere, în cazul în care statutul este o mulțime ordonată (dreapta de baleiere este orizontală).

b) Dați exemplu de două mulțimi \mathcal{S}_1 și \mathcal{S}_2 din \mathbb{R}^2 , având număr diferit de segmente, dar pentru care, aplicând algoritmul de determinare a intersecțiilor în care statutul este o mulțime ordonată, numărul de modificări de statut să coincidă, fiind egal în ambele cazuri cu 3.

7.6 În planul \mathbb{R}^2 fie punctele $A_1 = (6, 3), A_2 = (3, 4), A_3 = (1, 10), A_4 = (13, 9)$; $B_1 = (6, 8), B_2 = (11, 12), B_3 = (9, 2), B_4 = (13, 1)$. Pentru fiecare $i = 1, \dots, 4$ notăm cu s_i segmentul $[A_i B_i]$. Notăm cu N_n , respectiv N_o , numărul de modificări de statut al dreptei de baleiere, în cazul în care statutul este o mulțime neordonată, respectiv ordonată de segmente (dreapta de baleiere este orizontală). Calculați $(N_o - N_n)$, justificând rezultatul obținut.

7.7 Explicați cum poate fi parcursă frontiera unei fețe și cum pot fi găsite toate muchiile din jurul unui vârf, folosind pointerii asociați elementelor unei subdiviziuni planare.

7.8 Considerăm un dreptunghi D din interiorul căruia este scos un dreptunghi Δ . Descrieți subdiviziunea planară asociată.

7.9 Considerăm trei dreptunghiuri D_1, D_2, D_3 astfel ca D_3 să fie situat în interiorul lui D_2 și D_2 în interiorul lui D_1 . Descrieți subdiviziunea planară asociată.

7.10 Fie punctele $A = (4, 0)$, $B = (0, 4)$, $C = (-4, 0)$, $D = (0, -4)$. Construiți două subdiviziuni planare distincte $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$ care au A, B, C, D ca vârfuri, astfel ca \mathcal{S}_1 să aibă două fețe, iar \mathcal{S}_2 să aibă trei fețe. Indicați numărul total de semimuchi pentru \mathcal{S}_1 , respectiv \mathcal{S}_2 .

8. Intersecții de semiplane. Elemente de programare liniară

8.1. (Seminar 7, Problema 5) a) Fie semiplanele $H : x + y - 3 \leq 0$ și $H' : -2x + y + 1 \leq 0$. Dați exemplu de semiplan H'' astfel ca intersecția $H \cap H' \cap H''$ să fie un triunghi dreptunghic.

b) Fie semiplanele H_1, H_2, H_3, H_4 date de inecuațiile

$$H_1 : -y + 1 \leq 0; \quad H_2 : y - 5 \leq 0; \quad H_3 : -x \leq 0; \quad H_4 : x - y + a \leq 0,$$

unde $a \in \mathbb{R}$ este un parametru. Discutați, în funcție de parametrul a , natura intersecției $H_1 \cap H_2 \cap H_3 \cap H_4$.

8.2. (Seminar 7, Problema 6) Scrieți inecuațiile semiplanelor corespunzătoare și studiați intersecția acestora, dacă normalele exterioare ale fețelor standard sunt coliniare cu vectorii

$$(0, 1, -1), (0, 1, 0), (0, 0, -1), (0, -1, 0), (0, -1, -1).$$

8.3 Considerăm două "piese" poligonale \mathcal{P}_1 și \mathcal{P}_2 , având normalele fețelor standard date de vectorii:

$$\mathcal{P}_1 : \nu_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right); \nu_2 = (1, 0); \nu_3 = (0, 1); \nu_4 = (-1, 0); \nu_5 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right);$$

$$\mathcal{P}_2 : \nu_1 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right); \nu_2 = (1, 0); \nu_3 = (0, 1); \nu_4 = (-1, 0); \nu_5 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

(în această ordine). Stabiliți care dintre piese poate fi extrasă din matricea asociată prin deplasare în direcția verticală - dată de $(0, 1)$. Desenați!

8.4 Considerăm semiplanele H_λ, H', H'' date de inecuațiile

$$H_\lambda : x - y - \lambda \leq 0 \ (\lambda \in \mathbb{R}), \quad H' : x - 1 \geq 0, \quad H'' : y - 5 \geq 0.$$

Discutați, în funcție de λ , natura intersecției $H_\lambda \cap H' \cap H''$.

8.5 Dați exemplu de cinci semiplane, dintre care trei semiplane inferioare și două superioare, astfel încât intersecția lor să fie un triunghi.

8.6 Dați exemplu de problemă de programare liniară pentru care regiunea fezabilă să fie un pătrat, iar optimul (maximul) să fie atins în colțul din dreapta sus.

8.7 Dați exemplu de problemă de programare liniară pentru care algoritmul prezentat la curs să aibă (în sensul discuției de la curs) timp total de rulare liniar.

8.8 Discutați, în funcție de α și de β , numărul de vârfuri și de muchii ale regiunii fezabile pentru problema de programare liniară dată de constrângerile $x + y \geq 0$; $x - y \geq 0$; $y \leq 4$; $y \geq \alpha$; $x \leq \beta + 4$ ($\alpha, \beta \in \mathbb{R}$).

9. Hărți trapezoidale

9.1 Considerăm un pătrat având laturile paralele cu axele de coordonate, în interiorul căruia se află un alt pătrat, astfel ca laturile sale să facă un unghi de 30° cu axele de coordonate. Stabiliți câte trapeze are harta trapezoidală a regiunii situate între cele două pătrate. Câte dintre acestea sunt degenerate (i.e. triunghiuri sau dreptunghiuri)?

9.2 Fie punctele $A = (1, 1)$, $B = (2, 6)$, $C = (5, 3)$, $D = (4, 7)$, $E = (8, 4)$, $F = (10, 7)$, $G = (6, 9)$, considerate în interiorul dreptunghiului R delimitat de axele de coordonate și de dreptele date de ecuațiile $x = 12$, respectiv $y = 12$. Câte trapeze are harta trapezoidală asociată subdiviziunii planare induse de triunghiul ABC și patrulaterul $DEFG$?

9.3 Considerăm două triunghiuri T_1 și T_2 (astfel ca laturile lor să fie segmente în poziție generală), în interiorul unui *bounding box* R . Câte trapeze are harta trapezoidală asociată? Depinde acest număr de poziția relativă a triunghiurilor?

9.4 Considerăm pătratul \mathcal{P} delimitat de dreptele $x = \pm 10$, $y = \pm 10$ (*bounding box*) și punctele $A = (2, 0)$, $B = (0, 2)$, $C = (-2, 0)$, $D = (0, \lambda)$, cu $\lambda \in [-9, 9]$. Fie \mathcal{Q} acoperirea convexă a mulțimii $\{A, B, C, D\}$. Discutați, în funcție de λ , numărul de trapeze ale hărții trapezoidale a regiunii situate între pătratul \mathcal{P} și poligonul \mathcal{Q} .