



UNIVERSIDAD NACIONAL DE CÓRDOBA

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

SISTEMAS DE CONTROL 1

Trabajo Final 2024

***“Control de Movimiento XYZ en una
Impresora 3D”***

Agustin Trachta

DNI: 43271890

Ing. En Computación

Profesores:

Ing. Adrián Agüero

Ing. Juan Pedroni

Contenido

1-1 Introducción	2
2-1 Definición del Sistema	3
3 - Análisis de Planta	6
3-1 <i>Modelo Eléctrico</i>	
3-2 <i>Modelo Mecánico</i>	
3-3 <i>Función de Transferencia</i>	
3-4 <i>Error en Estado Estable</i>	
4 - Perturbación	11
4-1 <i>Estabilidad Absoluta</i>	
4-2 <i>Respuesta Temporal</i>	
5 - Diseño de Controlador	16
6 - Simulación Final	19
Conclusión	21
Bibliografía	22

INTRODUCCIÓN

Las impresoras 3D, como se muestra en la figura 1, han revolucionado la fabricación al permitir la creación precisa de objetos tridimensionales a partir de modelos digitales. Uno de los aspectos más cruciales en el funcionamiento de una impresora 3D es su sistema de control de movimiento, el cual gestiona el desplazamiento del cabezal de impresión a lo largo de los ejes X, Y y Z. Este control preciso es esencial para depositar material de manera exacta y uniforme, siguiendo las coordenadas especificadas en el diseño digital (G-code).

En este informe, se presenta el análisis y diseño de un sistema de control de movimiento para la construcción de una impresora 3D. El enfoque se centra en el uso de motores paso a paso y encoders capacitivos incluidos para lograr una alta precisión en el posicionamiento del cabezal de impresión. El objetivo principal es ***desarrollar y optimizar un sistema de control que garantice movimientos precisos y coordinados*** del cabezal, minimizando errores de posicionamiento y mejorando la estabilidad del sistema.

Para alcanzar estos objetivos, se implementa un controlador PD (Proporcional-Derivativo). Este controlador ajusta dinámicamente las señales de control para corregir cualquier desviación en la trayectoria del cabezal de impresión, asegurando así una precisión y estabilidad óptimas.



Figura 1. Impresora 3D

DEFINICIÓN DEL SISTEMA

El sistema de control de movimiento de una impresora 3D gestiona el desplazamiento del cabezal de impresión a lo largo de los ejes X, Y y Z para construir objetos tridimensionales capa por capa. El cabezal de impresión deposita material fundido (como filamento de plástico) siguiendo trayectorias precisas dictadas por un archivo de diseño digital (G-code). Este movimiento debe ser preciso y coordinado para garantizar la calidad y exactitud de las piezas impresas, por lo tanto se busca controlar la posición del cabezal de impresión optimizando el funcionamiento de los motores paso a paso utilizados, estos motores son los **NEMA 14** (figura 2), estos actúan como planta del sistema, ya que un control bien desarrollado permitiría asegurar que el cabezal se mueva exactamente a las coordenadas especificadas en el G-code, permitiendo el depósito preciso del material de impresión. Esto incluye:

- **Eje X, Y y Z:** Movimiento del cabezal de impresión. Estos movimientos permiten al cabezal desplazarse horizontalmente sobre el área de impresión.



Figura 2. Motor NEMA 14

Como microcontrolador se utiliza un **ESP32**, el cual controla los motores del sistema, permitiendo correcciones precisas según los datos de retroalimentación de los encoders capacitivos incluidos en estos motores (**AMT112S**). Los encoders capacitivos funcionan mediante un disco que modula la capacitancia. Un sensor integrado detecta estos cambios y genera pulsos eléctricos correspondientes al movimiento del motor. Estos pulsos se convierten en señales digitales mediante circuitos de acondicionamiento de señal, permitiendo al microcontrolador leer la posición exacta del motor.

El problema de este sistema es la carga que deben desplazar estos motores, y debido a cierta distancia del cabezal a estos, se genera una perturbación que afecta el momento de inercia (**J**) y modifica considerablemente la respuesta. Para combatir esta perturbación se realiza una acción de control.

La acción de control se ejecuta mediante los motores que reciben señales de control del **controlador PD**. Estos motores convierten las señales eléctricas en movimientos precisos del cabezal y la cama de impresión. El ESP32 genera las señales de control basándose en las desviaciones detectadas entre la posición deseada y la posición actual. El controlador PD ajusta dinámicamente las señales de control para minimizar el error y mantener la precisión del movimiento.

Etapa del Sistema	Variable	Unidad de Medida	Descripción
Entrada	Voltaje de entrada al motor	Voltios (V)	Voltaje para alimentar al motor
Controlador PD	Salida del controlador	Voltios (V)	Señal ajustada por el controlador PD basada en el error
Función de Transferencia Eléctrica	Corriente del motor	Amperios (A)	Relación entre la corriente y la señal de control aplicada
Función de Transferencia Mecánica	Velocidad angular	Radianes/segundo (rad/s)	Relación entre la velocidad angular del motor y la corriente
Integrador	Posición angular	Radianes (rad)	Integración de la velocidad angular para obtener la posición angular
Retroalimentación del Encoder	Posición medida	Pulsos por revolución (PPR)	Salida del encoder que mide la posición del motor
Retroalimentación Contraelectromotriz	Fuerza contraelectromotriz	Voltios (V)	Voltaje inducido por el movimiento del motor
Salida	Posición angular	Radianes (rad)	Posición angular final del motor.

Para lograr los propósitos de este trabajo, el sistema debe cumplir con ciertos ***criterios***:

- El error y el sobrepasamiento durante los movimientos deben ser ***mínimos o nulos***, esto aseguraría la precisión en el control de la posición del cabezal de impresión y la cama de impresión, es crucial para garantizar que el material de impresión se deposite exactamente en las coordenadas especificadas por el G-code.
- El tiempo de establecimiento debe ser el mínimo posible.

A continuación se dará comienzo al ***análisis del sistema***, es necesario que el lector tenga en consideración que este sistema no está puesto en práctica y que la mayoría de resultados y números son calculados en Octave por la precisión que estas herramientas nos brindan, en caso contrario se dará aviso con sus respectivas explicaciones. Estos códigos y herramientas se darán al final de este informe.

ANÁLISIS DE PLANTA

Para el control de movimiento de una impresora 3D, es esencial contar con un modelo matemático preciso sobre la relación entre la **posición y voltaje** de motores paso a paso, ya que estos motores son responsables de los movimientos precisos del cabezal de impresión y de la cama de impresión. El modelo matemático de un motor paso a paso puede dividirse en dos componentes principales: el modelo eléctrico y el modelo mecánico.

Modelo Eléctrico

El modelo eléctrico describe cómo la corriente y el voltaje se relacionan en los devanados del motor. Para un motor paso a paso, la ecuación eléctrica se puede describir utilizando la Ley de Faraday y la Ley de Ohm:

$$V(s) = L \frac{dI(s)}{dt} + RI(s) + E_b(s)$$

donde:

- $V(s)$ Es el voltaje aplicado a los devanados del motor (V).
- L Es la inductancia de los devanados del motor (H).
- R Es la resistencia de los devanados del motor (Ω).
- $I(s)$ es la corriente a través de los devanados del motor (A).
- $E_b(s)$ es la fuerza contraelectromotriz (V).

La fuerza contraelectromotriz $E_b(s)$ se relaciona con la velocidad angular del motor y se puede expresar como:

$$E_b(s) = K_b \cdot w(s)$$

donde:

- K_b es la constante de fuerza contraelectromotriz (V·s/rad).
- $w(s)$ es la velocidad angular del motor (rad/s).

Modelo Mecánico

El modelo mecánico describe la relación entre el torque generado por el motor y la carga que mueve. La ecuación mecánica se puede derivar de la segunda ley de Newton aplicada a la rotación:

$$J \frac{dw(s)}{dt} + B w(s) = T_m(s) - T_L(s)$$

donde:

- J Es el momento de inercia del rotor del motor ($\text{kg}\cdot\text{m}^2$).
- B es el coeficiente de fricción viscosa ($\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{s}/\text{rad}$).
- $T_m(s)$ Es el torque generado por el motor ($\text{N}\cdot\text{m}$).
- $T_L(s)$ es el torque de carga ($\text{N}\cdot\text{m}$).

El torque generado por el motor se relaciona con la corriente a través de los devanados:

$$T_m(s) = K_t \cdot I(s)$$

donde:

- K_t es la constante de torque del motor ($\text{N}\cdot\text{m}/\text{A}$).

En este apartado cabe recalcar que como la perturbación mencionada anteriormente es la de la carga del sistema, el momento de inercia J se verá modificado, siendo este $J_{total} = J_{motor} + J_{carga}$. Los detalles serán evaluados más adelante.

Función de transferencia

Para obtener la **función de transferencia del motor**, combinamos los modelos eléctrico y mecánico. Utilizando las transformadas de Laplace y asumiendo condiciones iniciales nulas, obtenemos las ecuaciones en el dominio de Laplace:

1. *Ecuación Eléctrica:*

$$V(s) = LsI(s) + RI(s) + K_b \cdot w(s)$$

2. *Ecuación Mecánica:*

$$Jsw(s) + B w(s) = K_t \cdot I(s) - T_L(s)$$

Siendo $T_L(s) = 0$ (sin carga variable) y sustituyendo $I(s)$ de la primera ecuación en la segunda:

$$I(s) = \frac{V(s) - K_b w(s)}{Ls + R}$$

$$Jsw(s) + B w(s) = K_t \left(\frac{V(s) - K_b w(s)}{Ls + R} \right)$$

Reordenando y resolviendo para $w(s)$ en términos de $V(s)$:

$$(Js + B)(Ls + R)w(s) = K_t \cdot V(s) - K_t K_b w(s)$$

$$(JLs^2 + (JR + BL)s + BR + K_t K_b)w(s) = K_t \cdot V(s)$$

La función de transferencia del motor, que relaciona la velocidad angular del motor con el voltaje aplicado, es:

$$\frac{w(s)}{V(s)} = \frac{K_t}{JLs^2 + (JR + BL)s + BR + K_t K_b}$$

Para obtener la función de transferencia que relaciona la posición angular con el voltaje aplicado, **integramos la velocidad angular**:

$$\frac{\Theta(s)}{V(s)} = \frac{w(s)}{V(s)} \cdot \frac{1}{s}$$

$$\frac{\Theta(s)}{V(s)} = \frac{K_t}{s(JLs^2 + (JR + BL)s + BR + K_t K_b)}$$

Esta función de transferencia (figura 3) relaciona directamente la posición angular Θ del motor con el voltaje aplicado (V). Al controlar el voltaje aplicado al motor, se puede ajustar directamente la posición angular del motor, y, por ende, la posición lineal del cabezal de impresión.

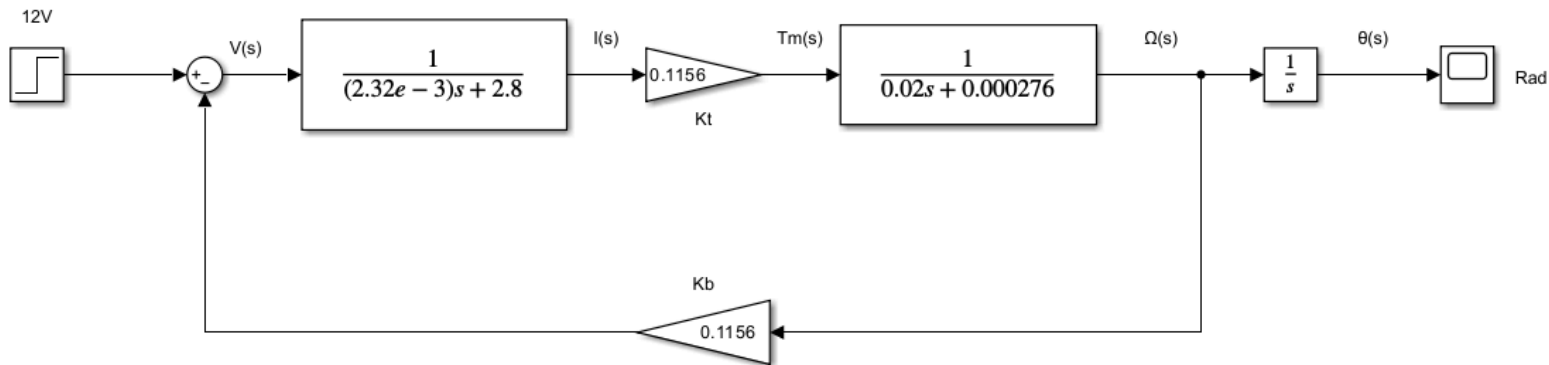


Figura 3. FdtLA del motor.

Antes de continuar con los cálculos, la integral realizada en la última función de transferencia nos permite cumplir con uno de los criterios mencionados en la definición del sistema: **el error en estado estable es nulo**.

Error en estado estable

La presencia del integrador ($\frac{1}{s}$) en la función de transferencia hace que el sistema sea de **tipo 1**. En teoría de control, un sistema de tipo 1 tiene un **polo en el origen** debido al integrador. Este tipo de sistema tiene la capacidad de eliminar el error en estado estable para una **entrada escalón**.

En este caso, al sistema se le aplica una entrada escalón de 12V, y observando la siguiente tabla que nos brinda Katsuhiko Ogata en su libro “*ingeniería de control moderna*”:

	Entrada escalón $r(t) = 1$	Entrada rampa $r(t) = t$	Entrada de aceleración $r(t) = \frac{1}{2}t^2$
Sistema de tipo 0	$\frac{1}{1+K}$	∞	∞
Sistema de tipo 1	0	$\frac{1}{K}$	∞
Sistema de tipo 2	0	0	$\frac{1}{K}$

Podemos observar sin la necesidad de realizar cálculos adicionales que **el error en estado estable en este sistema es cero** ($e_{ss} = 0$).

PERTURBACIÓN

Como se observará en este apartado, en el caso de estos motores, generalmente el polo dominante se encuentra en la función de transferencia del modelo mecánico, por lo tanto las perturbaciones relacionadas a este afectarán considerablemente la respuesta.

Los datos obtenidos en el datasheet del motor, junto a algunos que requieren un poco de cálculos debido a que no se dan claramente son:

- $L = 2.32e-3 \text{ H}$
- $R = 3.8 \Omega$
- $K_t = 0.1156 \text{ Nm/A}$
- $J = 4.24e-7 \text{ kg}\cdot\text{m}^2$
- $B = 0.000276 \text{ Nm}\cdot\text{s/rad}$
- $K_b = 0.1156 \text{ V}\cdot\text{s/rad}$

Para la carga del sistema, se obtienen datos aproximados, ya que esta construcción es solo simulada. Siendo “m” la carga del cabezal y “d” la distancia entre el motor y la carga.

- $m = 0.5 \text{ kg}$
- $d = 0.20$; % Distancia en metros

Por lo tanto, el momento de inercia final, como se mencionó anteriormente es:

$$J_{total} = J_{motor} + J_{carga}$$

siendo,

$$J_{carga} = m \cdot d^2 = 0.5 \cdot (0.20^2) = 0.02 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

$$J_{total} = 4.24e^{-7} + 0.02 = 0.02 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Aumentando considerablemente el momento de inercia del motor, esto se puede observar mediante una simulación, donde se observará el sistema en lazo cerrado (figura 4) ya que la respuesta se da en base a la retroalimentación del encoder incluido en el motor.

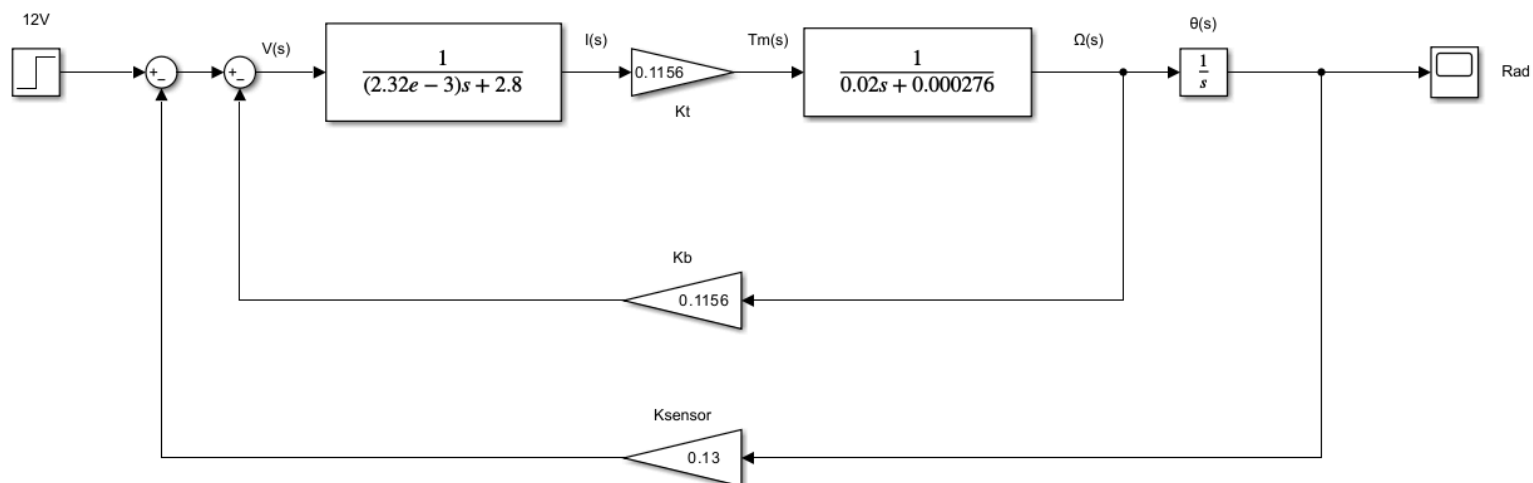


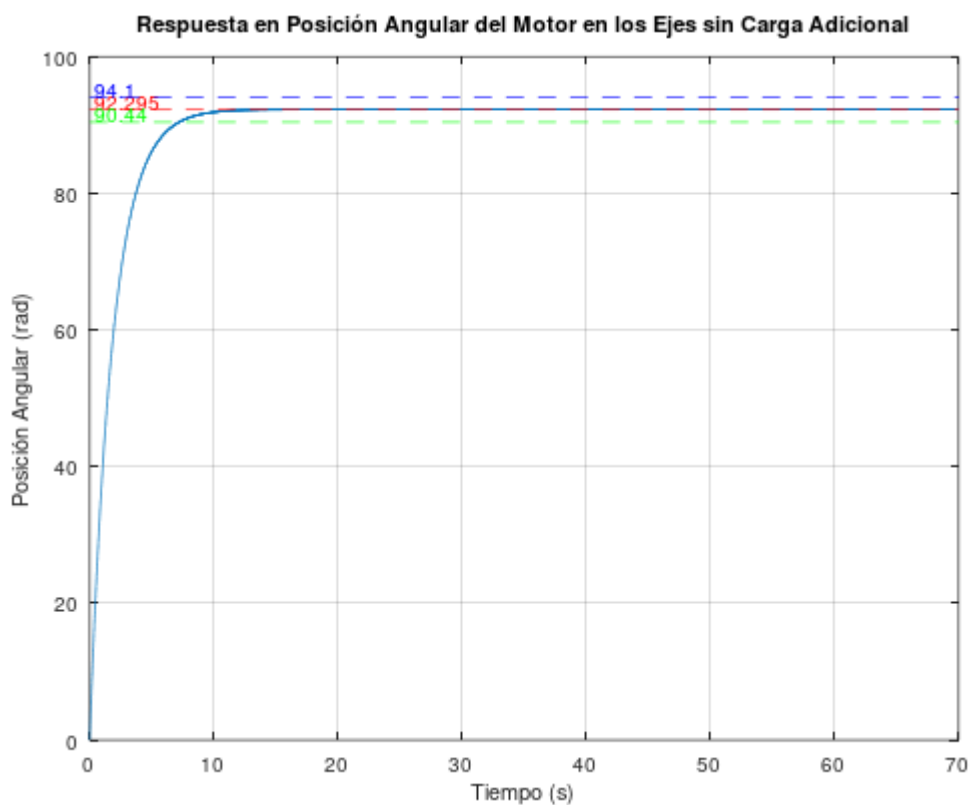
Figura 4. FdtLC del motor con encoder, sin controlador.

Esta retroalimentación será constante, pero no unitaria, ya que se devuelve a través de pulsos por revolución (PPR), los cuales son elegidos según el datasheet, para este caso, se eligió una resolución baja de 48 PPR.

Para un encoder con 48 PPR, la constante K_{sensor} se calcula como:

$$K_{sensor} = \frac{2\pi}{48} = 0.13 \text{ rad/pulsos}$$

Con estos datos, ahora es posible realizar una simulación detallada, obteniendo la siguiente respuesta temporal:



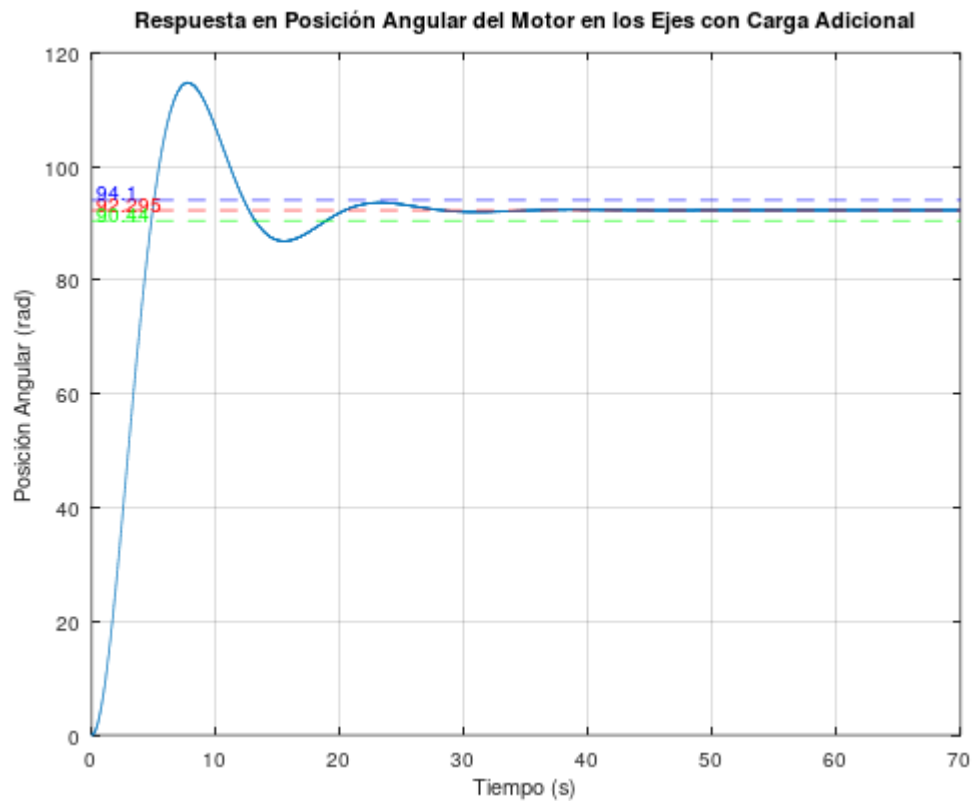


Figura 5 y 6. Simulaciones en Octave.

Como se observa en los gráficos, la carga adicional altera el sistema significativamente, debido a que los polos dominantes se ven afectados. Se observa un alto sobrepasamiento y un tiempo de establecimiento alto, aproximadamente de 18 segundos.

Será necesario **diseñar un controlador** que permita anular este sobrepasamiento y disminuir el tiempo de establecimiento al mínimo posible, como requieren los criterios. Antes se realizará un estudio de la estabilidad absoluta y la respuesta temporal del sistema, que serán necesarios para el diseño del controlador.

Estabilidad Absoluta

Con un programa de Octave, es posible determinar la **estabilidad absoluta del sistema**, la función de transferencia de lazo cerrado obtenida es la siguiente:

$$FdtLC = \frac{0.1156}{9.837e-10 s^3 + 2.252e-06 s^2 + 0.02778 s + 0.01503}$$

Los polos, calculados en Octave, son:

$$-1.1442e+03 + 5.1890e+03i$$

$$-1.1442e+03 - 5.1890e+03i$$

$$-5.4108e-01 + 0i$$

Todos los polos se encuentran en la parte negativa del plano, lo cual indica claramente que el sistema es **estable**, y la parte imaginaria de los polos dominantes explican las oscilaciones mostradas en la figura 5.

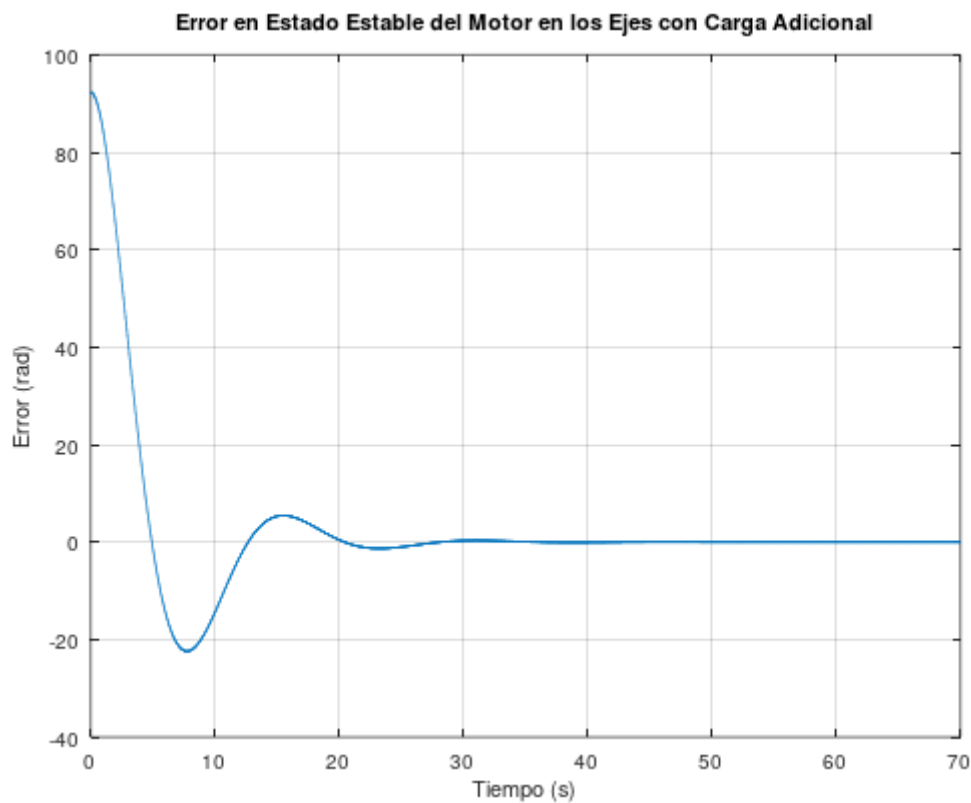


Figura 7. Error en estado estable.

Respuesta Temporal

El **pico máximo** del sobreimpulso es de 114.72 radianes, llegando a este en un **tiempo pico** de 7.75 segundos.

El **sobreimpulso** es de un 24% en relación al valor de estabilidad (92.295 radianes).

Conociendo este último valor, se puede obtener el valor de ζ . Dada la ecuación:

$$Mp = e^{\frac{-\pi\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}}$$

Y despejando, se obtiene $\zeta = 0.411$. Y dado:

$$t_p = \frac{\pi}{w_n \sqrt{1-\zeta^2}}$$

Se obtiene que $w_n = 0.455 \left[\frac{rad}{s}\right]$.

Por lo tanto, el tiempo de establecimiento es:

$$t_s = \frac{4}{0.411 \cdot 0.455} = 21,39 \text{ segundos.}$$

El valor de ζ nos indica que el sistema es **subamortiguado**, ya que $0 < \zeta < 1$, esto se confirma con la gráfica de la figura 6.

DISEÑO DE CONTROLADOR

Para este sistema, se **diseñará un controlador proporcional - derivativo (PD)**. La parte integral no es necesaria ya que este sistema la incluye al estudiar la posición angular, lo que añade un polo en 0 eliminando el error en estado estable como se demostró anteriormente.

La **acción proporcional** se basa en el error instantáneo del sistema, es decir, la diferencia entre la señal de referencia y la salida real. Mientras que la **acción derivativa** se basa en la tasa de cambio del error. Este componente genera una salida que es proporcional a la derivada del error respecto al tiempo. Esta última ayuda a anticipar cambios futuros en el error, proporcionando una corrección que puede reducir el sobrepasamiento y mejorar la estabilidad del sistema.

La acción de control de un controlador PD se define como:

$$u_{(t)} = K_P e_{(t)} + K_D T_d \frac{de_{(t)}}{dt}$$

$$K_D = K_P T_d$$

Y su función de transferencia:

$$C(s) = \frac{U(s)}{E(s)} = K_D(1 + T_d s) = K_P + K_D s$$

También será necesaria la función de transferencia de lazo abierto del sistema:

$$FdtLA(s) = \frac{0.1156}{s(4.64e-05 s^2 + 0.076 s + 0.02778)}$$

entonces,

$$G_{PD,LA} = C(s)G_{LA}(s) = \frac{(K_P + K_D s)0.1156}{4.64e-05 s^3 + 0.076 s^2 + 0.02778 s}$$

Para encontrar los valores de K_p y K_D , utilizamos las especificaciones de rendimiento deseadas (ζ y w_n), las cuales son $\zeta = 0.7$, el cual es un valor que proporciona equilibrio entre el sobreimpulso y el tiempo de asentamiento, y la frecuencia natural w_n afecta la rapidez con la que el sistema responde. Una mayor w_n generalmente significa que el sistema responde más rápido. Sin embargo, también puede hacer que el sistema sea más sensible a las perturbaciones y al ruido.

Se intentará que el sistema se estabilice cerca de los 2 segundos, es un valor elegido ya que, en caso de conseguirlo, el tiempo de establecimiento sería **considerablemente bajo** comparado al que actualmente tenemos.

Por lo tanto, al ser $t_s = \frac{4}{\zeta w_n}$, reemplazando por los valores deseados, se obtiene que $w_n = 2.86 \left[\frac{rad}{s} \right]$.

Ahora es posible calcular los polos deseados del sistema (resultados obtenidos en Octave):

$$s_{1,2} = -\zeta w_n \pm w_n \sqrt{1 - \zeta^2} = -2.002 \pm 2.042406i$$

Como polo no dominante se elige $s_3 = -20$, un valor lo suficientemente grande para que no afecte al sistema.

Calculando el polinomio con estos polos deseados, se obtiene:

$$P_{deseado} = s^3 + 24.004s^2 + 88.26s + 163.59$$

Luego, cerrando la función de transferencia con controlador mostrada anteriormente, y utilizando la retroalimentación de 0.13 del sensor, podemos comparar, despejar, y obtener los valores.

$$\text{Con } G_{PD,LC} = \frac{K_t(K_D s + K_p)}{JLs^3 + (BL + JR)s^2 + (K_t K_{sensor} K_D + BR + K_b K_t)s + K_t K_{sensor} K_p}$$

Los valores que son de interés son los términos lineales y los términos independientes, ya que estos incluyen los datos para despejar. Por lo tanto resultaría lo siguiente:

$$K_t K_{sensor} K_P = 163.59$$

$$K_t K_{sensor} K_D + BR + K_b K_t = 88.26$$

reemplazando estas ecuaciones en Octave, se muestra el cálculo a continuación.

```
% Ecuaciones para Kp y Kd con retroalimentación de 0.13
K_sensor = 0.13;

%b0 = K_sensor * Kt * Kp_value; % Coeficiente constante
%despejando para resolver Kp
Kp_value = a0/ (Kt * K_sensor);

%luego, quedan
% b1 = K_sensor * Kt * Kd_value + Kb * Kt + B * L + J * R; % Coeficiente de s^1
%despejando este ultimo:

Kd_value = (a1 - B*R - Kb*Kt) / (K_sensor * Kt) ;
```

Dando como resultado:

- $K_D = 5872.05$
- $K_P = 10885.81$

SIMULACIÓN FINAL

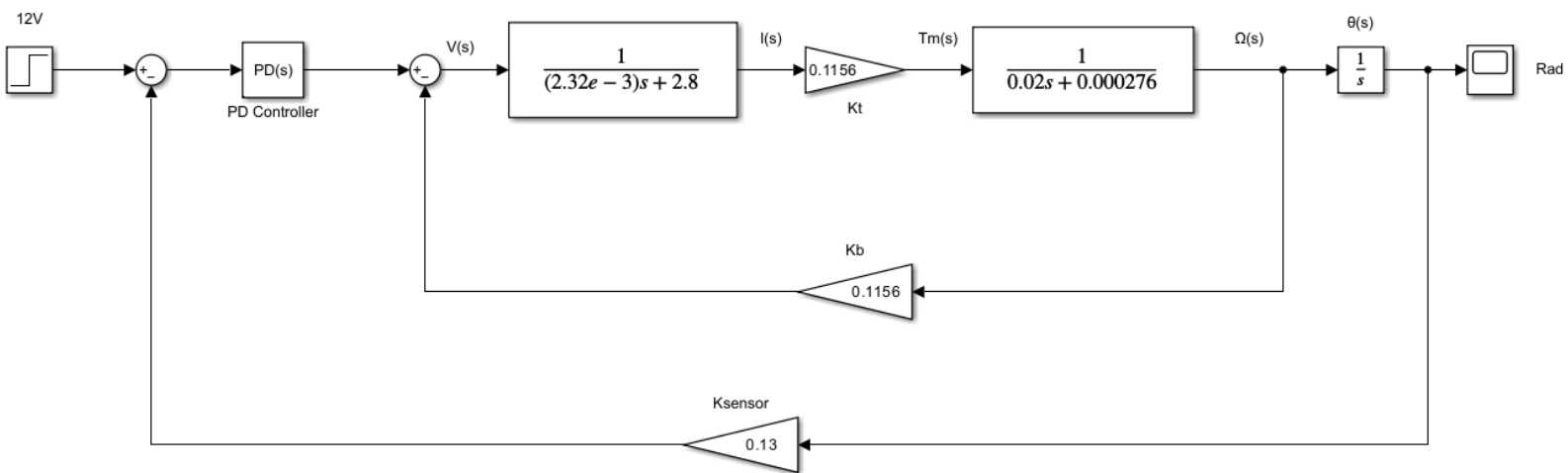


Figura 8. Sistema con Controlador PD.

Finalmente, simulando las gráficas del sistema completo **con controlador** (figura 8), se observa la siguiente gráfica:

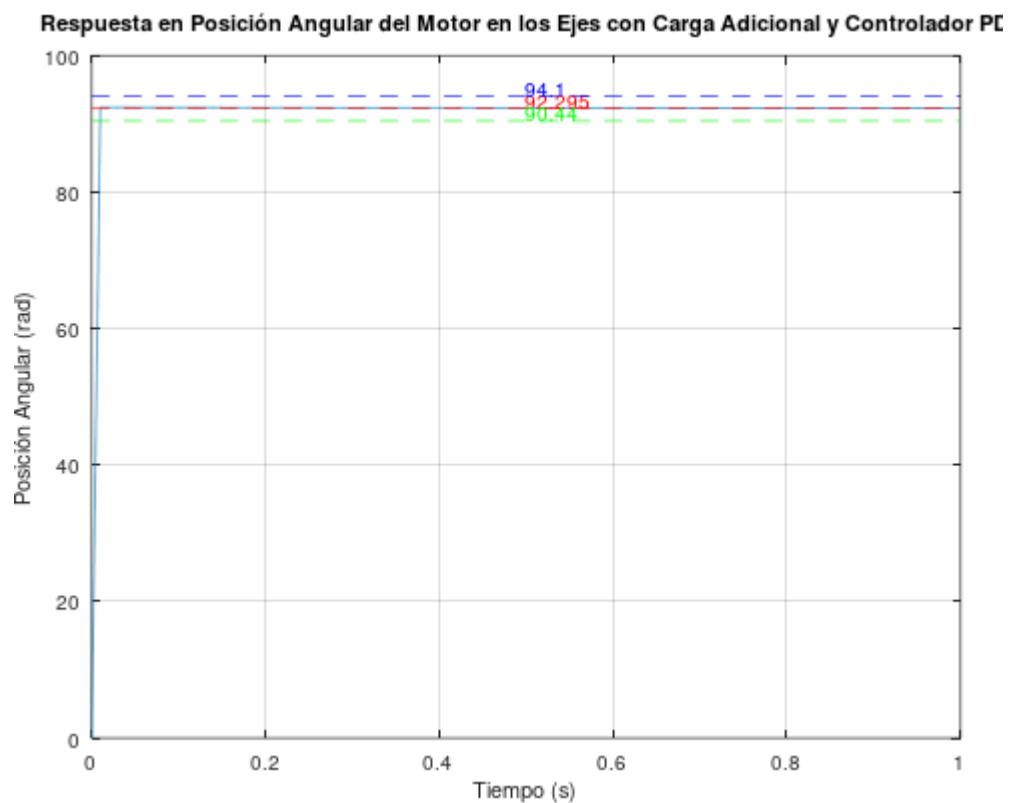


Figura 9. Simulación sistema con Controlador PD.

Se puede observar que el **sobrepasamiento es casi nulo** (0.16%) y el tiempo de establecimiento es de **0.01 segundos**. Este tiempo es mucho mejor del esperado, esto se debe a un muy buen funcionamiento del controlador PD.

```
Transfer function 'G_closed_PD' from input 'u1' to output ...  
  
          678.8 s + 1258  
y1:  -----  
      4.64e-05 s^3 + 0.076 s^2 + 88.27 s + 163.6  
  
Continuous-time model.  
ans =  
  
-8.1804e+02 + 1.1091e+03i  
-8.1804e+02 - 1.1091e+03i  
-1.8562e+00 +           0i  
  
Tiempo de pico (tp): 0.01 segundos  
Sobreimpulso (Mp): 0.16 %  
El error en estado estable calculado es: 0.0000 rad
```

Este resultado logra ***cumplir con los criterios establecidos*** al comienzo de este informe, aclarando nuevamente que al ser un estudio con fines educativos, se desestiman ciertos factores y perturbaciones que complejizan mucho más el sistema.

- Error en estado estable NULO.
- Sobrepasamiento prácticamente NULO (**0.16%**).
- Tiempo de establecimiento MÍNIMO (**0.01 segundos**).

Códigos y simulaciones

[Este enlace](#) redirige hacia GitHub, donde podrán tener a mano el informe y los códigos utilizados para estos análisis.

CONCLUSIÓN

Luego de este arduo trabajo de análisis y desarrollo de un sistema de control, me complace presentar un resultado exitoso.

Me encontré con muchos desafíos, partiendo de la selección del tema a presentar, la variedad era notable y sentía entusiasmo por más de uno, lo cual me motiva a intentar aplicar lo aprendido a futuros proyectos. El desarrollo del modelado matemático del motor y el resto de análisis me llevó a investigar en gran cantidad de fuentes, entendiendo y estudiando la importancia de la teoría de control. Este conocimiento se refleja en los resultados finales, donde la inclusión del controlador PD mejoró notablemente la respuesta del sistema, haciéndola más rápida y precisa.

Se pudieron observar tres escenarios distintos: primero, el motor sin carga, que mostró una gráfica simple y sin error; segundo, el motor con carga, que afectó significativamente al sistema, lo cual es comprensible dado que estos motores pequeños pierden precisión sin el uso de controladores adecuados, lo cual es inaceptable para una impresora 3D; y tercero, el motor con carga y controlador PD, que demostró una mejora sustancial en la exactitud y la velocidad de respuesta.

En conclusión, se logró desarrollar un sistema de control preciso y rápido para el movimiento del cabezal en los ejes X, Y y Z de una impresora 3D. Este trabajo me enorgullece debido al esfuerzo realizado y los conocimientos adquiridos.

Bibliografía

1. [Nema 14 - AMT112S Datasheet](#)
2. “Ingeniería de control moderna” - Katsuhiko Ogata
3. [Controlador PD - dademuchoconnection](#)
4. [Diagrama a Bloques de Motor de DC](#)
5. [J. P. Pedroni - Canal para estudiantes](#)