

# Diseño y operación de un ciclotrón

ANGEL AGUILAR ARGÁEZ <sup>1,\*</sup>

<sup>1</sup>Departamento de física, Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Monterrey, 2021 Av. Eugenio Garza Sada 2501 Sur, Tecnológico, 64849 Monterrey, N.L.

\*A00827217@itesm.mx

**Abstract:** Los aceleradores de partículas son herramientas que forman parte de la investigación actual en la física de altas energías. Comenzando desde los Linacs, a comienzos del siglo pasado, hasta llegar a los colisionadores modernos como el LHC; todos basan su funcionamiento en principios de la teoría electromagnética clásica. A través de este artículo revisaremos un breve repaso a la historia de los aceleradores, explicaremos los conceptos básicos de funcionamiento de un acelerador y profundizaremos en los ciclotrones. Finalmente, presentaremos algunas de sus aplicaciones en la industria y en la medicina y se mostrarán algunos cálculos de algunas de las propiedades del ciclotrón.

*Palabras clave:* Aceleradores de partículas, ciclotrón, electromagnetismo

© 2021 Optical Society of America under the terms of the [OSA Open Access Publishing Agreement](#)

## 1. Introducción

El uso de campos electromagnéticos macroscópicos para la aceleración de partículas cargadas data desde mediados del siglo XIX. Inclusive, el mismo J.J. Thompson utilizó un acelerador primitivo en el descubrimiento del electrón. Hoy en día, con el desarrollo de potenciales electrostáticos del orden de cientos de kilovolts y con el progreso de la aceleración de corriente directa, se ha reconocido que los campos electromagnéticos que varían en el tiempo son la vía para alcanzar energías aún mayores. El predecesor del acelerador lineal moderno fue desarrollado primero por Wideroe en 1928; el ciclotrón fue propuesto al año siguiente por Lawrence, y la aceleración se demostró en esta primera variedad de acelerador circular en 1931. El desarrollo del ciclotrón avanzó rápidamente, y a finales de la década se había logrado una energía cinética superior a los 10 MeV. [1]

### 1.1. ¿Qué es un ciclotrón?

Un ciclotrón es un acelerador de partículas. Se trata de una máquina accionada eléctricamente que produce un haz de partículas cargadas que puede utilizarse en procesos médicos, industriales y de investigación. Como puede intuirse, acelera las partículas cargadas en una trayectoria en espiral, lo que permite una trayectoria de aceleración mucho más larga que la de un acelerador en línea recta. [2]

El ciclotrón fue inventado por Ernest Lawrence en la década de 1930 como herramienta para la investigación física y la producción de isótopos. En su forma más sencilla, el **ciclotrón** está compuesto por dos semicilindros conductores en forma de D que se evacúan y se colocan entre los polos de un imán de corriente continua. Se aplica una diferencia de potencial alterna entre los dos D, de manera que cuando se inyectan protones en el centro de los D, éstos son acelerados hacia el potencial negativo. Bajo el campo magnético constante, viajan en órbitas circulares, experimentando una aceleración cada vez que alcanzan el hueco. [3]

Los ciclotrones modernos aceleran los iones negativos creados en un plasma. Cuando estos iones negativos alcanzan el borde exterior de la cámara, los electrones sobrantes se desprenden de los iones formando partículas positivas, como un protón o un deuterón, que pueden extraerse del ciclotrón en forma de haz. El tamaño de la cámara de vacío determina la longitud de la

trayectoria en espiral y, por tanto, la cantidad de energía alcanzada por la partícula. [2]

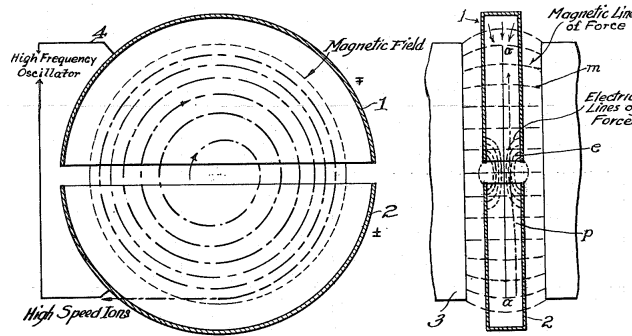


Fig. 1. Esquema de la patente original de Lawrence en 1934

### 1.2. ¿Para qué sirve?

Los ciclotrones se utilizan para acelerar partículas cargadas pesadas, como protones, deuterones e iones más pesados. Desde la década de 1960 se utiliza para producir protones para la radioterapia en varios laboratorios de física de todo el mundo, como los de Estados Unidos, Rusia, Europa y Japón, ya que, los átomos con protones adicionales en el núcleo se denominan deficientes en neutrones y se producen en un acelerador de partículas como el ciclotrón. Mientras, que los átomos con neutrones adicionales en el núcleo se denominan ricos en neutrones y se producen en un reactor nuclear, como el OPAL. Los radioisótopos ricos en neutrones y los deficientes en neutrones se desintegran por medios diferentes y, por tanto, tienen propiedades y usos distintos. Los radioisótopos fabricados en ciclotrones complementan a los fabricados en un reactor. Ambos tipos de radioisótopos son necesarios para atender todas las necesidades médicas nucleares del mundo. [2]

Asimismo, los ciclotrones también se han utilizado para producir haces de neutrones terapéuticos mediante la interacción de haces de protones o deuterones acelerados con berilio u otros blancos ligeros. Para la terapia con protones se necesitan energías de 200 MeV o más si se quiere llegar a todas las zonas del cuerpo. Las energías de deuterones de aproximadamente 50 MeV son adecuadas para la producción de haces de neutrones para la terapia. Los haces de protones y deuterones de estas energías pueden producirse en ciclotrones adecuadamente diseñados. La mayoría de los aceleradores que se utilizan actualmente para la terapia de protones son ciclotrones. [3]

## 2. Marco Teórico

En términos generales, el **ciclotrón** hace uso de la fuerza magnética que se ejerce sobre una carga móvil, para llevarla y guiarla sobre una trayectoria semicircular. La carga móvil se acelera aplicando un campo eléctrico. Este campo eléctrico acelera los electrones entre las "D" de la región de campo magnético. El campo eléctrico se invierte a la frecuencia de ciclotrón para acelerar los electrones cada vez que cruzan a otra región "D", a través del hueco entre ellas. [4]

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (1)$$

Entonces, podemos decir que utiliza campos magnéticos y eléctricos "cruzados" en ángulo recto para lograr el objetivo. El papel principal del campo magnético es hacer que el proceso de aceleración se limite a una región pequeña y manejable. En cuanto al cambio de velocidad, sólo

se ve afectado por el campo eléctrico. Recordemos que el campo magnético no puede cambiar la magnitud de la velocidad. [5]

### 2.1. Aceleración debido a $\vec{E}$

Debido a la extensa teoría como la de Griffiths, sabemos que la fuerza eléctrica acelera la partícula sólo para cambiar su velocidad si el movimiento de la partícula cargada está en la dirección del campo eléctrico.

$$\vec{F}_e = Q\vec{E} \quad (2)$$

Una diferencia de potencial  $V$  acelera a la partícula para que alcance una velocidad dada por:

$$\frac{1}{2}mv^2 = eV \quad (3)$$

Despejando para la velocidad y sustituyendo el potencial por un valor límite  $10^6$  V (el cual es muy difícil de generar), tenemos:

$$v = \sqrt{\frac{(2)(1.6 \times 10^{-19})}{(1.66 \times 10^{-27})}} = 1.39 \times 10^7 \text{ m/s} \quad (4)$$

Lo cual representa solo un **4.63%** de la velocidad de la luz en el vacío. Por lo tanto, se requiere que la velocidad de la partícula sea sometida a la aplicación repetida de la fuerza eléctrica. Entonces, surge la idea de utilizar un campo magnético para doblar la trayectoria del movimiento y presentar la partícula cargada repetidamente al campo eléctrico para la aceleración.

### 2.2. ¿Que se puede acelerar?

Los ciclotrones se pueden utilizar para acelerar partículas elementales cargadas o iones cargados. Es importante recalcar que este tipo de acelerador no es capaz de acelerar una partícula neutra o partículas de masa ligera como el electrón o el positrón. La razón es que el electrón, que tiene una masa insignificante, se acelera demasiado rápido para una aceleración repetida dentro del tamaño del ciclotrón. En su lugar, las partículas cargadas de masa ligera se aceleran mediante un dispositivo conocido como "betatrón". Por lo tanto, nos referiremos al ciclotrón con la aceleración de partículas cargadas como el protón, el deuterón ionizado, la partícula alfa y otros iones similares. [5]

### 2.3. Ciclotrón clásico

Al ciclotrón inventado por Lawrence se le llama **ciclotrón clásico**. Mediante el cual, la partícula puede ganar energías que son decenas o cientos de veces el voltaje del electrodo. Esto es posible porque la frecuencia de revolución de una partícula  $\omega$  en un campo magnético uniforme  $\vec{B}$  es constante, independiente de la velocidad de la partícula (isocronismo), donde  $q$  y  $m$  son la carga y la masa de la partícula respectivamente. [6]

$$\omega = \frac{qB}{m} \quad (5)$$

Por lo tanto, fijando la frecuencia del voltaje del electrodo acelerador en una radiofrecuencia fija igual a  $\omega/2\pi$ , la partícula puede ser acelerada cada vez que pasa por el hueco de aceleración entre los electrodos. La partícula se desplaza entonces a lo largo de una órbita en espiral, cuyo radio aumenta en proporción a su velocidad. [6]

## 2.4. Funcionamiento

La partícula cargada, un protón cargado positivamente, se libera cerca del punto medio de la cara de uno de las 'D'. Al estar en el campo eléctrico de una 'D' a otra, es acelerada por la fuerza eléctrica en la dirección del campo eléctrico. Cuando la partícula entra en el 'D' contiguo, la fuerza magnética, siendo perpendicular a él, hace que la partícula cargada se mueva a lo largo de una trayectoria semicircular dentro del 'D'. En el momento en que emerge de nuevo en el estrecho espacio que separa las dos 'D', la polaridad eléctrica de las 'D' cambia de modo que la partícula se acelera de nuevo con un aumento de velocidad. Como consecuencia, se presenta un incremento del radio dado por la expresión:

$$r = \frac{mv}{qB} \quad (6)$$

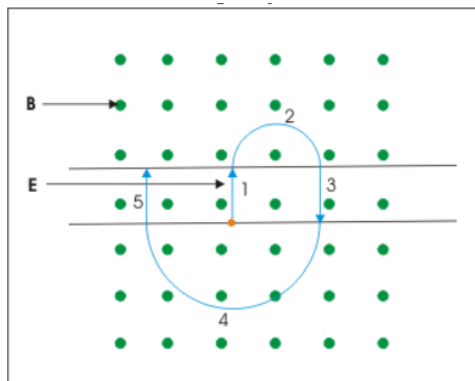


Fig. 2. Funcionamiento de un ciclotrón

En la figura 2 podemos apreciar 5 secciones clave:

1. La partícula es acelerada en línea recta por la fuerza eléctrica. La  $\vec{v}$  y la  $E_k$  aumentan.
2. La partícula es afectada por la fuerza magnética, traza un movimiento semicircular con aceleración centrípeta. La  $\vec{v}$  y la  $E_k$  no se ven afectadas.
3. La partícula es nuevamente acelerada por la  $\vec{F}_e$ , que va en dirección opuesta a la  $\vec{F}_e$  en el punto 1. Nuevamente la  $\vec{v}$  y la  $E_k$  incrementan en la misma cantidad que en el punto 1.
4. Se describe una curva de radio mayor debido al aumento de  $\vec{v}$ . La partícula es acelerada centrípetamente sin cambios en  $\vec{v}$  y  $E_k$ .
5. La partícula se ve acelerada por  $F_e$  en dirección opuesta. La  $\vec{v}$  y la  $E_k$  incrementan en la misma cantidad que en el punto 1 y 3.

Cabe mencionar que la trayectoria resultante de la partícula cargada es en forma espiral, no circular.

## 2.5. Frecuencia del voltaje

Aunque la partícula se acelera dos veces en un ciclo se requiere el cambio de dirección del campo eléctrico sólo una vez. Una de las direcciones es la existente y la otra es la dirección invertida o cambiada. Esto significa que la frecuencia del oscilador eléctrico debe ser igual a la frecuencia de las revoluciones. Entonces, podemos decir que la frecuencia del oscilador eléctrico está dada por:

$$v = \frac{qB}{2\pi m} \quad (7)$$

Es importante observar que la frecuencia con la que la partícula cargada completa la revolución en espiral es independiente de la velocidad. Lo cual resulta ser una característica muy importante del movimiento. Además, debemos notar que aunque la velocidad aumenta a cada paso por un 'gap', el tiempo necesario para alcanzar el siguiente 'gap' es el mismo. Esto, nos permite tener una frecuencia fija del oscilador eléctrico para un campo magnético dado o, a la inversa, nos permite tener un campo magnético constante para una frecuencia dada del oscilador eléctrico. Por supuesto, estos valores constantes se determinan teniendo en cuenta la carga específica (relación de carga y masa) y el tamaño del ciclotrón.

### 3. Problemas

1. Mostrar que el periodo del movimiento (o sea, el tiempo entre un impulso y el siguiente impulso en la misma dirección), no depende de la velocidad del protón considerando velocidades pequeñas en comparación con la velocidad de la luz. Como consecuencia favorable de este resultado, podemos colocar a través de las Ds una diferencia de potencial sinusoidal con el mismo periodo y así lograr una aceleración continua hasta el radio máximo del ciclotrón.

**Solución:**

Considerando una partícula, sumergida en un campo magnético  $\vec{B}$  hacia afuera de la pantalla, que se mueve en sentido de las manecillas del reloj con velocidad  $\vec{v}$ , alrededor de un círculo de radio  $R$ , la  $\vec{F}_B$ , tiene una magnitud fija de  $QvB$ ; sostiene un movimiento circular uniforme dado por:

$$QvB = m \frac{v^2}{R} \quad (8)$$

Recordan la definición de velocidad angular, tenemos que:

$$QB = m\omega \quad (9)$$

Despejando para  $\omega$  tenemos que:

$$\omega = \frac{QB}{m} \quad (10)$$

2. Uno de los primeros ciclotrones de Ernest Lawrence, construido en 1932, tenía un diámetro de sólo unos 30 cm y fue colocado en un campo magnético de aproximadamente 1 T. ¿Cuál era la frecuencia de la diferencia de potencial sinusoidal colocada a través de las Ds para acelerar los protones?

**Solución:**

De acuerdo con la ecuación 7 de la frecuencia de voltaje.

$$V = \frac{qB}{2\pi m} \quad (11)$$

Podemos observar que esta depende solo del  $\vec{B}$ , la  $q$  y la masa de la partícula acelerada. Entonces, considerando un protón de masa  $1.6726219 \times 10^{-27}$  kg y  $1.60217662 \times 10^{-19}$  C de carga.

$$v = \frac{(1.60217662 \times 10^{-19} \text{ C})(1 \text{ kg/Cs})}{(2\pi)(1.6726219 \times 10^{-27} \text{ kg})} \quad (12)$$

$$v = 15,245,186.46Hz \quad (13)$$

3. Demuestra que el potencial eléctrico equivalente de este pequeño ciclotrón era de unos millones de voltios. Es decir, la ganancia de energía cinética desde el centro hasta el radio más exterior fue de  $\Delta k = e\Delta V_{eq}$ , con  $\Delta V_{eq} = 1 \times 10^6 V$ .

**Solución:**

Iniciamos planteando la  $\Delta E_k$  como:

$$\Delta E_k = E_{kf} - E_{ki} \quad (14)$$

Como sabemos que parte del reposo, 14 se reduce a:

$$\Delta E_k = E_{kf} \quad (15)$$

Por definición la  $E_k$ :

$$E_k = \frac{1}{2}mv^2 \quad (16)$$

Igualando la  $\vec{F}_B$  a la  $F_c$  tenemos:

$$\frac{mv^2}{r} = qvB \quad (17)$$

Despejando para la velocidad.

$$v = \frac{qBR}{m} \quad (18)$$

Sustituyendo en 16.

$$E_k = \frac{q^2 B^2 R^2}{2m} \quad (19)$$

$$E_k = \frac{(1.60217662 \times 10^{-19} C)^2 (1T^2) (0.15m)^2}{2(1.6726219 \times 10^{-27} kg^2)} = 1.7265 \times 10^{-13} J \quad (20)$$

$$\Delta E_k = e(1 \times 10^6 V) \quad (21)$$

$$1.7265 \times 10^{-13} J = e(1 \times 10^6 V) \quad (22)$$

$$\frac{1.7265 \times 10^{-13} J}{10^6 J/C} = e \quad (23)$$

$$e \approx 1.7265 \times 10^{-19} C \quad (24)$$

4. Si la diferencia de potencial sinusoidal aplicada a las Ds tenía una amplitud de 500 V (es decir, variaba entre +500 y -500 V), mostrar que un protón tarda unos 65 microsegundos en moverse del centro al radio exterior.

**Solución:** Primero, recordamos que por la construcción del sistema, la partícula recorre las vueltas en tiempos iguales, es decir, que aumenta su velocidad de tal forma que todas las distancias se cumplen en alrededor del mismo tiempo. Entonces, aprovechando esa característica, para calcular el tiempo que le toma a la partícula salir disparada desde el centro hasta el borde, debemos calcular el tiempo de una iteración y multiplicar el resultado por el número total de vueltas dadas dentro del ciclotrón.

Suponiendo un movimiento circular, tenemos que el tiempo está dado por:

$$T = \frac{2\pi r}{v} \quad (25)$$

Calculando la  $\vec{v}_{max}$  y usando el radio mayor de 15 cm.

$$v_{max} = \frac{qBR}{m} \quad (26)$$

$$v_{max} = \frac{(1.60217662 \times 10^{-19} C)(1T)(0.15m)}{1.6726219 \times 10^{-27} kg} = 1.4368 \times 10^7 m/s \quad (27)$$

Sustituyendo 27 en 25

$$T = \frac{2\pi(0.15m)}{1.4368 \times 10^7 m/s} = 6.5594 \times 10^{-8} s \quad (28)$$

Ahora calculamos el número de vueltas que realiza la partícula dentro del ciclotrón:

$$N = \frac{q^2 B^2 R^2}{4mqV} \quad (29)$$

$$N = \frac{(1.60217662 \times 10^{-19} C)^2 (1T)^2 (0.15m)^2}{4(1.6726219 \times 10^{-27} kg^2)(1.60217662 \times 10^{-19} C)(500V)} \quad (30)$$

$$N = 1.0776 \times 10^3 \quad (31)$$

Para calcular el tiempo multiplicamos 31 por 28

$$Tiempo = (1.0776 \times 10^3)(6.5594 \times 10^{-8} s) = 7.0686 \times 10^{-5} s \approx 70.686 \mu s \quad (32)$$

**El tiempo empleado por la partícula dentro del ciclotrón es: 70.686  $\mu s$**

## 4. Simulación dinámica de partículas

Con el objetivo de corroborar los resultados obtenidos de manera analítica, se procedió a realizar una simulación en MATLAB®. Se pretende analizar la energía cinética de la partícula, el tiempo total que le toma realizar el recorrido y verificar que la velocidad final de la misma sea mucho menor a la velocidad de la luz.

### 4.1. Desarrollo

El desarrollo de la simulación partió de una previa investigación del sistema físico del ciclotrón, en la cual se encontraron 2 principales vertientes: el **ciclotrón clásico** que contempla un campo magnético  $\vec{B}$  uniforme en todo el espacio, incluyendo en el gap; y el **ciclotrón modificado**, el cual contempla únicamente un campo  $\vec{B}$  dentro de las D's. La selección de una de estas dos configuraciones resultará en una trayectoria similar, pero no igual, para cada una de ellas. Además, para cada caso se deberá contemplar una función de diferencia de potencial particular como se observa en la tabla 4.1.

Caso	Potencial
Ciclotrón clásico	$\frac{-V}{D} \sin \omega t$
Ciclotrón modificado	$\frac{-V}{D} \cos [t\omega(1 + e^{-t/1 \times 10^{-7}})]$

### 4.2. Código

```
1 %% General parameters
2 R = 0.05; % Radius (m)
3 Ds = 0.005; % Gap between D's (m)
4 B = [0,0,1]; % Magnetic field (T)
5 V = 5000; % Potential diff (V)
6 m = 1.6726219*10^-27; % Mass (kg) (proton)
7 q = 1.602176634*10^-19; % Charge (C) (proton)
8 dt = 10^-11; % Delta time (seconds)
9 tf = 4e-06; % Final time (s) 0.7854 microseconds
10 t = [0:dt:tf]; % Time (s)
11 w = q*norm(B)/m; % Frequency
12 % Oscillating electric field used assuming B in all space.
13 E = (-V/Ds)*sin(w.*t);
14 % Oscillating electric field used assuming B just in the D's.
15 V = @(t) 5000/Ds*cos(t.*w.*(1+exp(-t./1e-7)));
16 c = 2.998e+8; % Light speed
```

En la primera sección del código podemos observar la definición de los parámetros generales a utilizar, es decir, el radio del ciclotrón, la distancia de separación entre las D's, el campo magnético en forma vectorial, la amplitud de voltaje máxima, la carga, la masa y el paso de tiempo. Usando estos valores calculamos la frecuencia del ciclotrón, el campo eléctrico oscilante y un campo eléctrico alterno sinusoidal que incluye un término exponencial que decae con el tiempo, a fin de poder describir una trayectoria semicircular.

```
1 %% Initial vectors
2 r = [0 -0.005 0]; % Position
3 rx = r(1); % Position x
4 ry = r(2); % Position y
5 rz = r(3); % Position z
6 v = [0 0 0]; % Velocity
7 KE = [0]; % Kinetic energy
```



En esta sección, se define la posición inicial y los vectores que almacenarán las evaluaciones en cada uno de los puntos del espacio y tiempo discretizados.

```

1 %% Cyclotron
2 loops = 0;
3 sig = -1;
4 for i = 1:length(t)
5     % Particle in the gap -> Adapting electric force.
6     if r(1) < Ds/2 && r(1) > -Ds/2
7         % Case 1: Assuming B in all space.
8         f = [q*E(i), 0, 0] + q*cross(v,B); % Lorentz force
9         % Case 2: Assuming B just into the D's.
10        % DP = V(t(i));
11        % f = [q*DP, 0, 0]; % Electric force
12    else
13        % Particle into the D's -> Adapting magnetic force.
14        f = q*cross(v,B); % Magnetic force
15    end
16    v = v + f*dt/m; % New velocity
17    r = r + dt*v; % New position
18    rx(i+1) = r(1); % x component
19    ry(i+1) = r(2); % y component
20    rz(i+1) = r(3); % z component
21    KE(i+1) = 0.5*m*(norm(v)^2); % New kinetic energy
22    if rx(i+1) > 0 && sig < 0 % Lap counter
23        loops = loops + 1;
24        sig = 1;
25    elseif rx(i+1) < 0
26        sig = -1;
27    end
28    % Break statement. If the radius of the trajectory is larger than R of
29    % the cyclotron.
30    if norm(r)<R
31        continue
32    else
33        break
34    end
35 end

```

El apartado **Cyclotron** es el más importante de toda la simulación, ya que, en él se evoluciona el movimiento del protón en el tiempo. Primero se evalúa una condición para decidir en qué sección del ciclotrón se encuentra el protón. Si el valor absoluto de su coordenada en Z (medida desde el origen) es menor que la distancia de separación, entonces se encuentra en el gap y debe de sufrir el efecto de la fuerza eléctrica. Por el contrario si este valor es mayor, se encuentra dentro de alguna de las D's y sufre la fuerza magnética.

Es importante mencionar que en esta sección se encuentran los dos casos mencionados previamente: el **caso 1**, corresponde a asumir un campo  $\vec{B}$  en todo el espacio, lo que resulta en la aplicación de la fuerza de Lorentz; mientras que el **caso 2** solo considera la fuerza eléctrica al suponer que en el gap no existe un campo magnético.

Además, encontramos la implementación del **método de euler** al partir de una condición inicial y calcular el valor de la velocidad y posición siguiente, en base al valor anterior.

$$f_n = f_{n-1} + hf(x_{n-1}, y_{n-1}) \quad (33)$$

A continuación encontramos un condicional para el conteo del número de vueltas que da la partícula y una condición de escape, al calcular el radio de la trayectoria del protón y verificar que se encuentre a una distancia menor que la del radio del ciclotrón. En caso de encontrarse a una distancia mayor, la simulación se detiene e imprime los resultados y gráficas.

```

1 %% Kinetic energy analysis
2 figure(2)
3 eV = 1.60218*10^-19;
4 Ekv = KE/eV;
5 tEk = t(1,1:length(KE));
6 plot(tEk,Ekv,'r','LineWidth',1);
7 title('Kinetic energy of the proton')
8 xlabel('Time (seconds)')
9 ylabel('Kinetic Energy (eV)')
10 legend('Ek')
11 grid on
12
13 fprintf('The kinetic energy in Joules is: %2.10f \n',KE(end))
14 fprintf('The kinetic energy in eV is: %2.10f \n',Ekv(end))
15
16
17 %% Time
18 Time = length(rx)*dt; % Total time
19 fprintf('The elapsed time was: %d \n',Time)
20
21 %% Final velocity
22 finalv = norm(v);
23 perOfC = finalv/c*100;
24 fprintf('The velocity is %d m/s \n',finalv)
25 fprintf('The velocity is %f of c \n',perOfC)

```

Finalmente, tenemos la sección de análisis de energía, tiempo y velocidades finales. Donde convertimos el vector de energía cinética, calculado en joules, a  $eV$  y lo graficamos. Asimismo, obtenemos el tiempo al multiplicar la longitud del vector por el diferencial de tiempo (uniformemente espaciado) para obtener la cantidad total de segundos que duró la trayectoria. La velocidad final es calculada como la norma de la última posición del vector de velocidad y está dada en  $m/s$ .

```

1 %% Cyclotron plot
2 figure(1)
3 th = linspace(pi/2, -pi/2, 100);
4 xR = R*cos(th)+Ds/2;
5 yR = R*sin(th);
6 plot(xR,yR,'r','LineWidth',2);
7 axis equal;
8 hold on
9 plot([Ds/2 Ds/2], [-R R], 'r', 'LineWidth', 2)
10 xL = -(R*cos(th)+Ds/2) ;
11 yL = -(R*sin(th)) ;
12 hold on
13 plot(xL,yL,'r','LineWidth',2)
14 hold on
15 plot([-Ds/2 -Ds/2], [-R R], 'r', 'LineWidth', 2)
16 xlim([-R-2*Ds R+2*Ds])
17 ylim([-R-2*Ds R+2*Ds])
18 hold on
19
20 %% Magnetic field plot
21 x = -R:Ds:R;
22 y = -R:Ds:R;
23 [X,Y] = meshgrid(x,y);
24 plot(X,Y,'b.')
25 title("Bird's eye view of ciyclotron")
26 xlabel('Z')
27 ylabel('X')

```

```

28 hold on
29
30 % x2 = Ds:Ds:R;
31 % y2 = -R:Ds:R;
32 % [X2,Y2] = meshgrid(x2,y2);
33 % plot(X2,Y2,'b.')
34 %% Plot of the particle in certain t.
35 plot3(rx',ry',rz','b')
36 title("Particle trajectory")
37 xlabel('Z')
38 ylabel('X')
39 axis square
40 grid on

```

#### 4.2.1. Diagrama de flujo

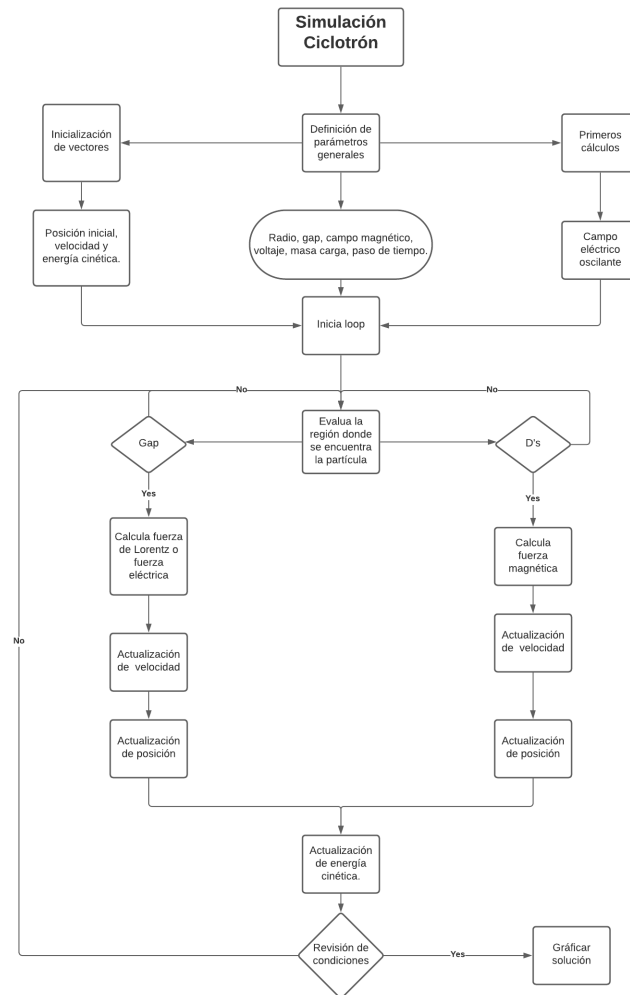


Fig. 3. Diagrama de flujo de la simulación

### 4.3. Disposición del ciclotrón

Como podemos observar en el esquema 4 el ciclotrón reside en el plano  $(x, z)$ , mientras que el campo magnético uniforme apunta en dirección de  $+y$ , lo cual cumple con la regla de la mano derecha  $\hat{x} \times \hat{y} = \hat{z}$ .

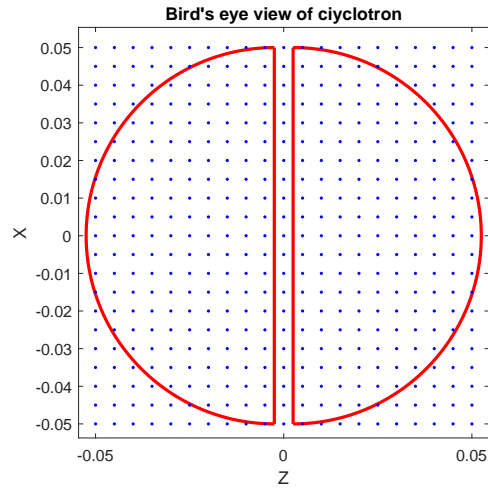


Fig. 4. Diseño del ciclotrón clásico

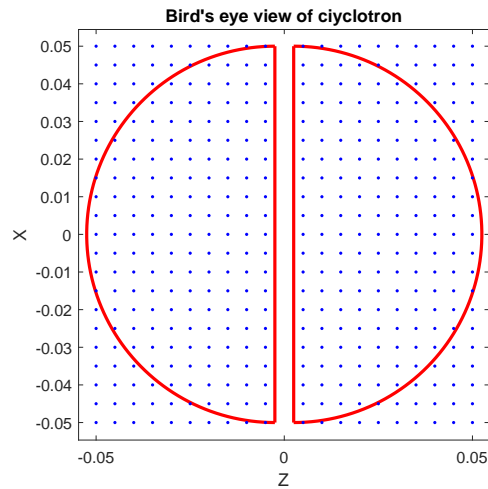


Fig. 5. Diseño del ciclotrón modificado

### 4.4. Resultados

#### 4.4.1. Trayectoria

En la figura 6 se muestra la trayectoria del recorrido realizado por un protón en el ciclotrón. Se asume que el protón no alcanza una velocidad lo suficientemente cercana a la velocidad de la luz como para requerir corrección relativista.

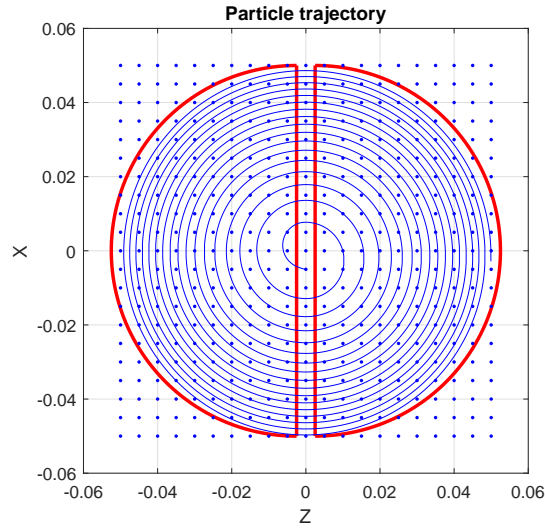


Fig. 6. Trayectoria descrita por el protón en el ciclotrón clásico

Podemos observar que la partícula viaja en trayectoria circular a lo largo del dispositivo, lo cual concuerda con la predicción del movimiento que debe de realizar una partícula dentro de un ciclotrón clásico, bajo el efecto de la Fuerza de Lorentz, vista en la sección 2.

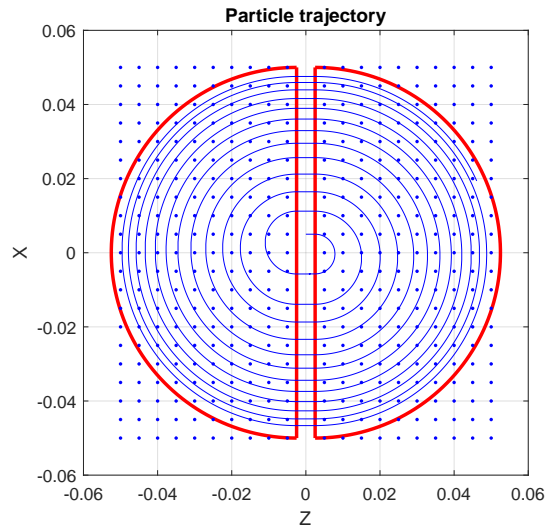


Fig. 7. Trayectoria de la partícula en el ciclotrón modificado

Por otro lado, en el caso de la figura 7 observamos que la trayectoria de la partícula es semicircular como se predijo en la sección 2, ya que, en el gap la aceleración y el movimiento es lineal, mientras que en las D's se curva la trayectoria.

#### 4.5. Energía cinética

Graficamos la energía cinética  $E_k$ , en  $eV$  del protón en función del tiempo. Es importante recalcar que si el protón gana demasiada energía cinética mientras se encuentra dentro de las D's, esto significa que el tamaño de  $\Delta t$  es muy grande, por lo tanto, para solucionar este problema se debió ajustar el  $\Delta t$  de manera experimental. Con lo anterior, surge de manera natural la pregunta: ¿Qué valor de  $\Delta t$  da valores razonables? Bueno para nuestra simulación se determinó de manera que un  $\Delta t = 10^{-11}$  es razonable para no extralimitar la capacidad de computo y mantenernos dentro de las cifras que el programa MATLAB© puede manejar antes de asumir un valor de 0.

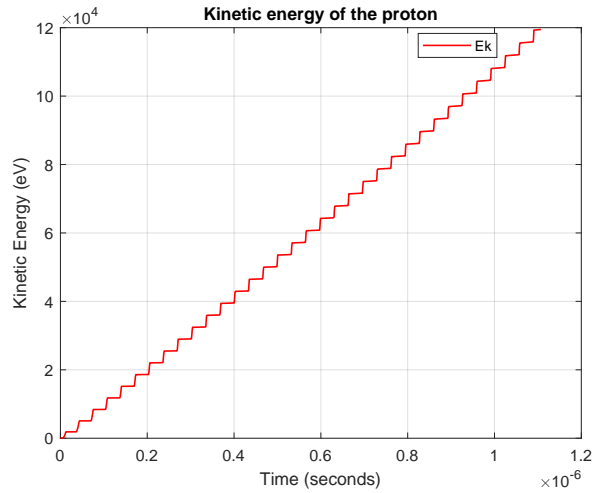


Fig. 8. Energía cinética de la partícula en el ciclotrón clásico

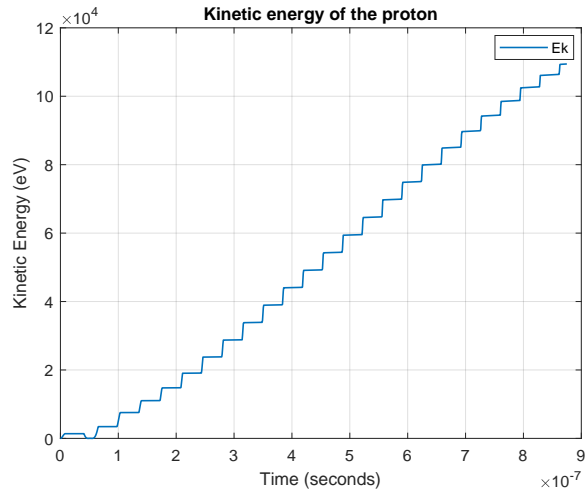


Fig. 9. Energía cinética de la partícula en el ciclotrón modificado

En ambas gráficas, 8 y 9, se puede observar una especie de escalera. Esta curiosa forma se debe a que la energía cinética del protón aumenta cada vez que atraviesa por el gap, se mantiene

constante durante su trayecto por la D, y vuelve a ganar energía al salir y entrar de nuevo al gap. Otra particularidad que encontramos, es que el diseño clásico dotó de una mayor energía a nuestro protón, lo que podemos explicar debido a la fuerza de Lorentz existente en el sistema, lo que le permite acelerar con mayor rapidez.

- ¿Qué valor tiene  $K$  (eV) cuando el protón alcanza el borde exterior del ciclotrón?  
Para el caso del **ciclotrón clásico** el valor de la  $E_k$  es de  $119465.4524797730 \text{ eV} \approx 119.46 \text{ keV}$ . Mientras que para el caso del **ciclotrón modificado**  $E_k$  es  $109436.9091574346 \text{ eV} \approx 109.42 \text{ keV}$
- ¿Cuántas orbitas debió haber hecho el protón para alcanzar el borde exterior del ciclotrón?  
Para el **ciclotrón clásico**, la partícula realizó un total de **17 órbitas** o vueltas antes de ser expulsada. Por su parte, en el **ciclotrón modificado** la partícula admitió **13 órbitas**.

#### 4.6. Frecuencia $\omega$

Como sabemos la frecuencia del ciclotrón  $\omega$  es uno de los parámetros más importantes del sistema, ya que, es la encargada de regular los cambios en la polarización del voltaje sinusoidal, lo que permite la aceleración de la partícula cada vez que alcance el gap.

- ¿Cuál es la frecuencia angular  $\omega$  de la diferencia de potencial sinusoidal que se requiere aplicar? Recordando que la frecuencia del campo eléctrico sinusoidal está indicada por la ecuación 10, tenemos que:

$$\omega = \frac{QB}{m} = 9.578833291612409 \times 10^7 \text{ Hz} \quad (34)$$

- ¿Qué ocurre si se utiliza una frecuencia distinta para la diferencia de potencial sinusoidal? Por ejemplo, utilice una frecuencia de  $0.6\omega$ . Al utilizar una frecuencia distinta a la calculada se obtuvo una trayectoria caótica para el caso clásico (con  $\vec{B}$  en todo el espacio) y para el caso modificado se obtuvo un movimiento semicircular alrededor del origen de poca amplitud. Esto lo podemos explicar, ya que, al no estar la polaridad en fase con el movimiento del proton, no se consigue la aceleración lineal en el gap; ocasionando que la partícula desvíe su trayectoria.

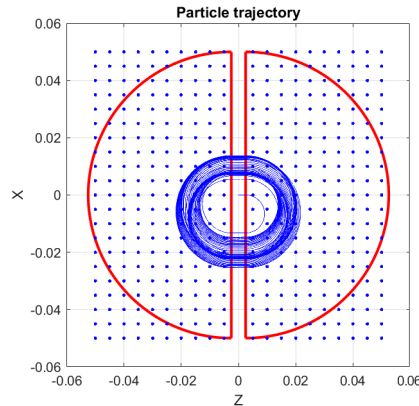


Fig. 10. Trayectoria con  $0.6\omega$  el ciclotrón modificado

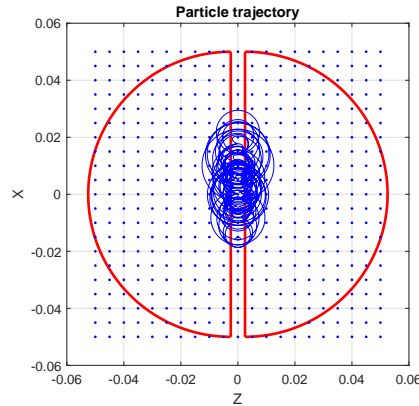


Fig. 11. Trayectoria con  $0.6\omega$  para el ciclotrón clásico

#### 4.7. Tiempo

Como se planteó en la sección 2, el tiempo empleado por la partícula en sus viaje por el ciclotrón es muy pequeño para ser medido mediante dispositivos convencionales, esto debido a que la velocidad que alcanzan los protones son muy altas en comparación con cualquier objeto que se mueva en la tierra.

- *¿Cuánto tiempo le toma al protón alcanzar el borde exterior del ciclotrón?* En el caso modificado le toma alrededor de  $8.75010 \times 10^{-7} s \approx 0.87501 \mu s$ , lo cual concuerda con el resultado analítico de  $0.7854 \mu s$ . Asimismo, para el caso clásico se obtuvo un tiempo de  $1.106860 \times 10^{-6} \approx 1.10686 \mu s$ , que de igual forma concuerda con lo predicho.

#### 4.8. Velocidad

De acuerdo a la literatura, las velocidades alcanzadas por los protones dentro de un ciclotrón deben de ser pequeñas en comparación con la velocidad de la luz  $c \approx 2.998 \times 10^8 m/s$ . Entonces, ¿cuál es la velocidad final del protón? ¿se cumple que  $v \ll c$ ?

Para el **caso clásico**, el protón registró una velocidad final de  $4.784019 \times 10^6 m/s$ , que representa un **1.595737%** de la velocidad de la luz. Mientras, que para el **caso modificado** alcanzó los  $4.578821 \times 10^6 m/s$ , equivalente a **1.527292%** de la velocidad de la luz.

#### 4.9. Conclusiones

Mediante la simulación pudimos comprobar el comportamiento de una partícula bajo la acción de la fuerzas magnéticas y eléctricas. A través de la evolución del sistema en el tiempo fuimos capaces de modelar un campo electrico cambiante en el tiempo y constante en el espacio, como se vio en la teoría de las clases, a fin de sincronizar el cambio de la polaridad del voltaje. A pesar de los resultados obtenidos, debemos considerar que este modelo se trata de una simplificación de los conceptos de teoría electromagnética, ya que, suponemos un campo magnético constante espacial y temporalmente. Además, es necesario recordar que tenemos un grado de error asociado a la discretización del espacio. Finalmente, la simulación fue realizada en MATLAB®, el cual tiene un error de redondeo de  $10^{-16}$ .



## References

1. D. Edwards and M. Syphers, *An Introduction to the Physics of High Energy Accelerators* (WILEY-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, Weinheim, 2004).
2. J. Bennet and A. Winthorpe, "National Research Cyclotron | Research Facilities | ANSTO," .
3. L. J. Verhey and P. L. Petti, "Principles of Radiation Physics," in *Leibel and Phillips Textbook of Radiation Oncology*, (Elsevier, 2010), pp. 95–119.
4. "Cyclotron," [retrieved 17 March 2021], <http://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/magnetic/cyclot.html>.
5. "Cyclotron - Electricity and magnetism - OpenStax CNX," [retrieved 13 May 2021],<https://cnx.org/contents/UBPo-xuY@13.12:aSdcsOPH@2/Cyclotron>, urldate = 2021-04-17.
6. A. Goto, T. Tachikawa, Y. Jongen, and M. Schillo, "Cyclotrons," *Compr. Biomed. Phys.* **8**, 179–195 (2014).