Optimización del bienestar colectivo en una sociedad bajo un enfoque de física estadística

Angel Aguilar — A00827217

Septiembre 2021

1. Introducción

Hoy en día la física ha tenido un efecto dominante en el desarrollo de teoría económica formal. Es sabido que las ciencias sociales son propensas a tomar prestado ideas, o analogías, del mundo natural para ejemplificar procesos complejos. Sin embargo, a diferencia de la física, la teoría económica carece de leyes fundamentales o universales; orientándose hacia la elección, la gestión del riesgo y los problemas de toma de decisiones.
En 1900, Louis Bachelier, en su tesis doctoral, determinó la probabilidad de los cambios en los precios. La propuesta original de Bachelier, una Guassiana, fue rápidamente reemplazada por modelos alternativos, como el del movimiento Browniano, donde la diferencia de los logaritmos de los precios se distribuyen de manera Gaussiana. Además, en 1936, Majorana publicó su artículo *Il valore delle leggi statistiche nella fisica e neller scienze socialli* donde establecía de manera formal analogías entre la física estadística y las ciencias sociales. A partir de los años 70's, un numero creciente de físicos se dedican a analizar y modelar mercados financieros, y de manera más general, sistemas económicos. [3]

1.1. La econofísica

La econofísica fue, desde el principio, la aplicación de los principios de la física al estudio de los mercados financieros, bajo la hipótesis de que el mundo económico se comporta como un conjunto de electrones o un grupo de moléculas de agua que interactúan entre sí, y siempre se ha considerado que los econofísicos, con las nuevas herramientas de la física estadística y los recientes avances en la comprensión de los sistemas caóticos, están haciendo un polémico comienzo para desmenuzar algunos aspectos económicos desconcertantes y reducirlos a unos pocos y elegantes principios generales con la ayuda de algunas matemáticas serias tomadas del estudio de los materiales desordenados. [3]

2. El modelo de Yakovenko

En su artículo *Statistical mechanics of money* (2000) Yakovenko *et al* postula que en un sistema económico cerrado el dinero se conserva. De manera que, análogo a la energía, la distribución de probabilidad de equilibro del dinero sigue la ley exponencial de Boltzmann-Gibbs caracterizada por una temperatura efectiva igual a la cantidad media de dinero por agente económico. Además, se demuestra cómo surge la distribución de Boltzmann-Gibbs en las simulaciones computacionales de modelos económicos. Asimismo , se considera una máquina térmica, en la que la diferencia de temperaturas permite extraer un beneficio monetario. Es importante aclarar que Yakovenko hace hincapié en que la distribución instantánea del dinero entre los agentes de un sistema no debe confundirse con la distribución de la riqueza, ya que, esta última incluye también la riqueza material, que no se conserva, y, por lo tanto, puede tener una distribución diferente (por ejemplo, una ley de potencia).[2][5]

3. Simulación

Se realizó una simulación en **Python**, utilizando la herramienta **Jupyter Notebook**. En la cuál, exploramos un aspecto fundamental de un sistema de N actores que interactúan de manera aleatoria: la naturaleza entrópica de la distribución de la cantidad total del dinero de la sociedad. Dicha cantidad se debe mantener constante, lo cual representa una restricción para la evolución del sistema en el tiempo. El sistema inicial es totalmente anárquico, es decir, que no cuenta con ninguna autoridad reguladora. Posteriormente, se explora la intervención de una autoridad a través de la recaudación de impuestos y su redistribución.

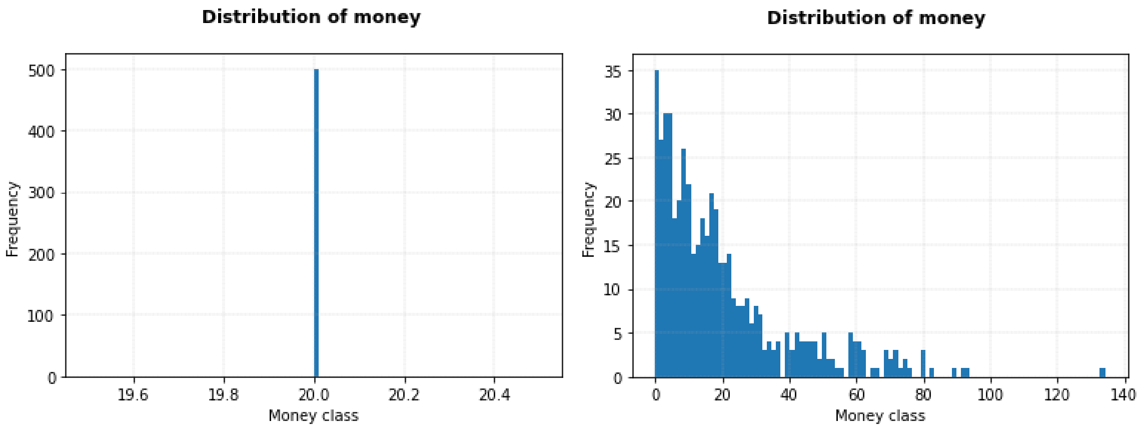
3.1. Modelo anárquico

Este modelo parte de una distribución inicial **Delta**, dada por $\delta(m_l - \frac{M}{N})$. Además, utiliza una función de objetivo del sistema dada por $O(n_1, n_2, ..., n_c) = \sum_{k=1}^{C} n_k o_1(M_k)$ donde M_k es la cantidad de dinero de cada uno de los miembros de la clase k y n_k es el número de agentes en la misma clase, C es el número de clases y $O_1 = 1 - e^{-aM}$. Los parámetros utilizados se listan abajo 1.

Tabla 1: Parámetros anárquicos

Parámetro	Valor
C	100
M	10000
N	500
a	0.003
t	10000

3.1.1. Resultados

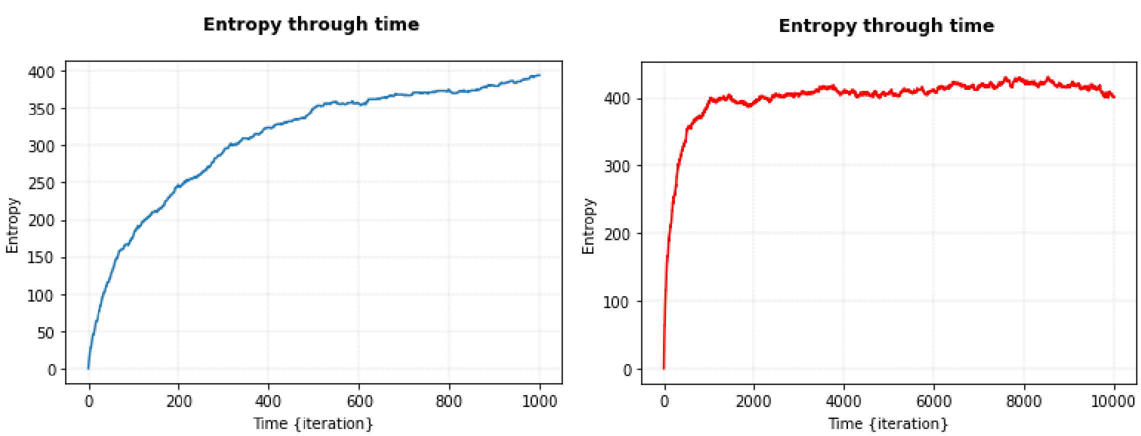


(a) Distribución delta.

(b) Distribución final exponencial.

Figura 1: Distribución final e inicial

Observamos que la distribución final corresponde a los resultados predichos por Yakovenko, es decir, se nota una clara acumulación de agentes en las clases de menor ingreso y muy pocas en la de altos ingresos. *A priori* se podría asumir que el sistema va de un estado justo a unos meno justo. Sin embargo, para poder sostener esta aseveración necesitamos estudiar la evolución de dos entidades clave del sistema: la **entropía** y el **bienestar**.



(a) Entropía en las primeras para $t < 1000$.

(b) Entropía a tráves del tiempo exponencial.

Figura 2: Evolución de la entropía del sistema

Es interesante observar que la entropía comienza desde 0, lo cual representa el estado más 'justo', es decir, una sociedad donde todos tienen lo mismo. Sin embargo, notamos que a través del tiempo el sistema tiendo a volverse caótico en las primeras 1000 iteraciones, presentando cada vez un menor crecimiento, tendiendo a estabilizarse como una exponencial negativa. Alcanzando un valor final de 422.029. De esta manera, podemos afirmar que el sistema tiende a ser cada vez más entrópico y, por ende, más injusto.

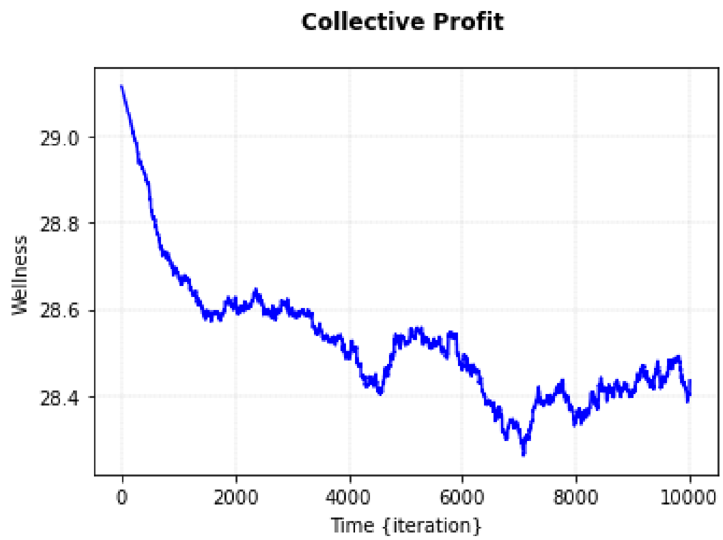


Figura 3: Bienestar del sistema

De igual forma, conviene revisar la evolución del beneficio colectivo o bienestar del sistema. El cuál esta calculado mediante la función objetiva y nos indica el rendimiento neto del mismo. Identificamos una clara tendencia a la baja, con ciertos brotes o remontes, pero que puede aproximarse mediante una función logarítmica negativa. Como es de esperarse, el valor inicial es máximo, ya que, representa la manera más justa de distribuir el dinero entre los agentes.
Finalmente, es necesario cerciorarse de la constancia del dinero, ya que, es el principal supuesto del modelo. Esperamos ver una linea recta en $y = 10,000$.

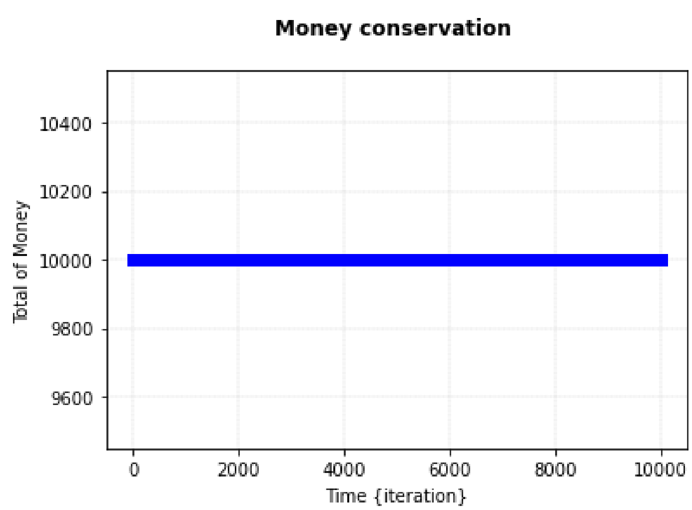


Figura 4: Dinero total del sistema a tráves del tiempo

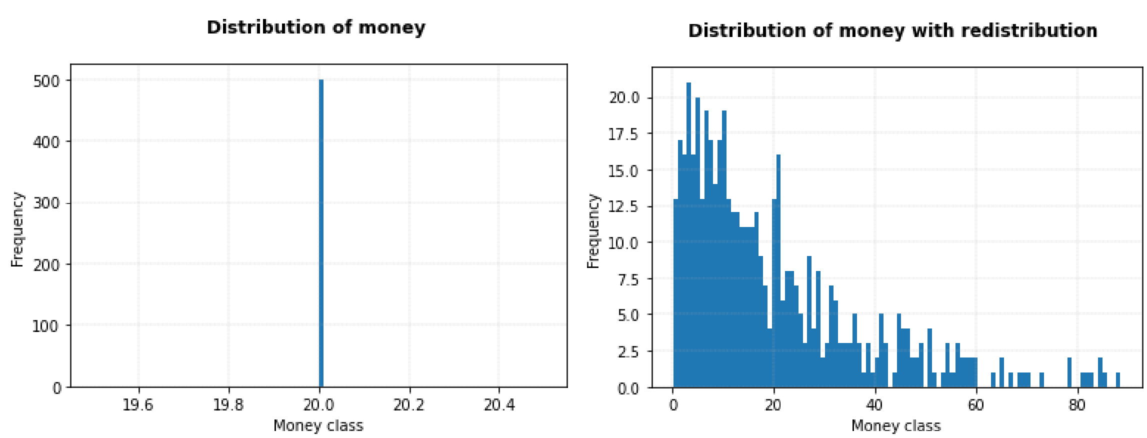
3.2. Modelo con redistribución

Se simuló un caso con un **agente especial**, simulando el efecto de un gobierno, se recoge una fracción λ_t en cada transacción y se redistribuye la cantidad recolectada en cada tiempo τ_s. Del mismo modo, se realizan intercambios aleatorios de una fracción del promedio de los dos agentes. Los parámetros utilizados se encuentran listados en la tabla 3.

Tabla 2: Parámetros con redistribución

Parámetro	Valor
C	100
M	10000
N	500
a	0.003
t	10000
tax	0.16
timer	10

3.2.1. Resultados

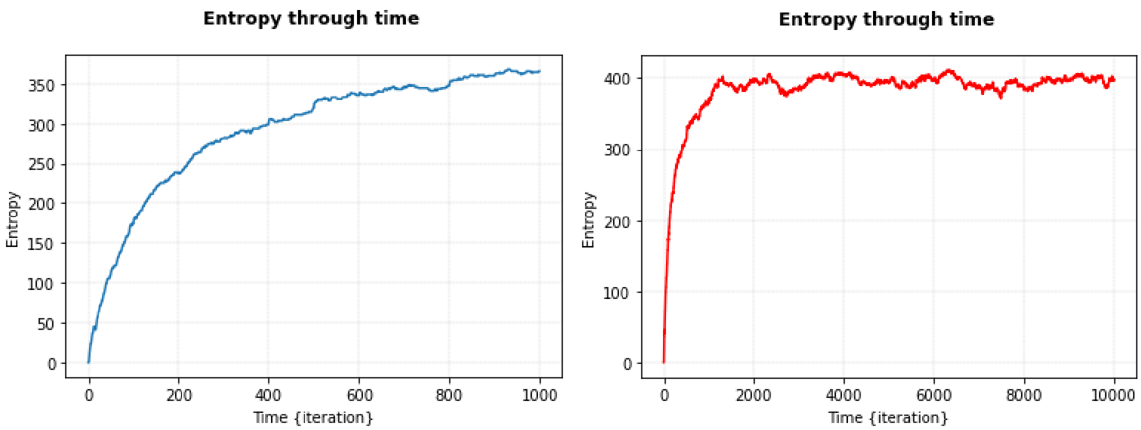


(a) Distribución delta. (b) Distribución final exponencial.

Figura 5: Distribución final e inicial

Con el modelo de redistribución, partimos de una distribución inicial delta y llegamos a una distribución final non-Boltzmann-Gibbs, la cual se caracteriza por un desplazamiento en el equilibrio de la distribución, que deja un hueco en $m = 0$, desplazando la distribución hacia la derecha. De esta forma, la población de bajos recursos es suprimida, mediante lo que podría describirse como un 'impulso' gubernamental.

Encontramos un comportamiento similar obtenido al caso sin redistribución. En el cual, la entropía inicia en su valor mínimo $t(0) = 0$ y tiende hacia un comportamiento cuasiestático o de equilibro cuando $t >> 1$, alcanzando un valor final de 398.198. Es importante recalcar que el valor de la entropía, en el estado estacionario, del modelo con redistribución es menor a la



(a) Entropía para $t < 1000$ (b) Entropía a tráves del tiempo.

Figura 6: Evolución de la entropía del sistema

obtenida en el modelo sin agentes reguladores externos. Por lo que se podría concluir que esta consideración nos lleva a una distribución más justa.

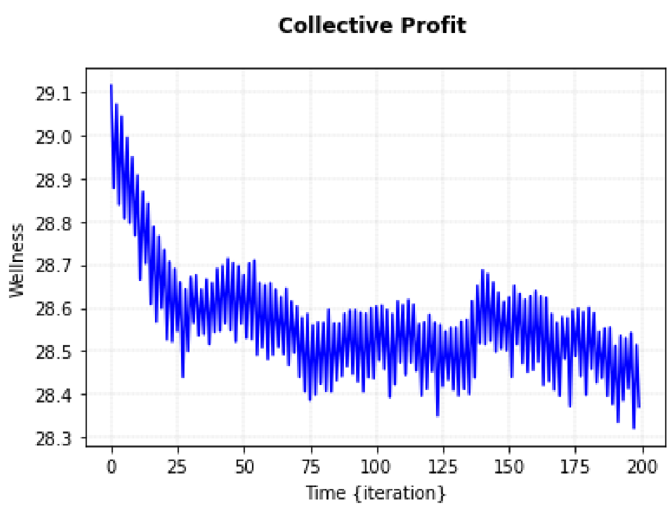
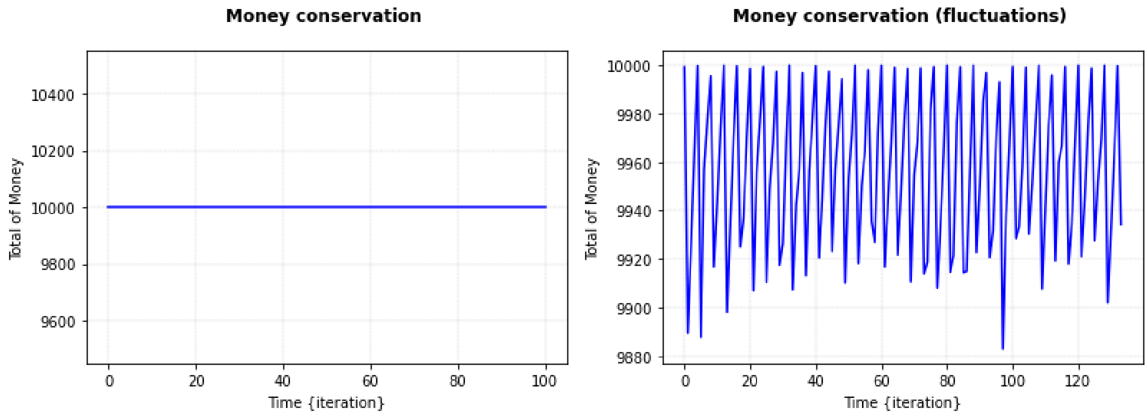


Figura 7: Bienestar del sistema con redistribución

Analizando la gráfica del beneficio colectivo para el caso con redistribución, notamos una mayor oscilación de los valores en el tiempo. Este comportamiento tiene su origen en la cantidad sustraída de dinero al sistema, es decir, existen periodo es donde la cantidad de dinero es mayor o menor (pero siempre menor a 10,000), lo cual impacta directamente en el calculo del bienestar, ya que, la función objetiva del sistema depende directamente de dinero que reside en cada clase.

En la gráficas 8 podemos observar las variaciones en el tiempo del dinero en el sistema. En la figura 8a observamos la suma del dinero extraído (reservorio) y en 8b observamos solo la cantidad en el sistema para un determinado tiempo. Entonces, las variaciones en la cantidad de dinero en el sistema para un tiempo t ocasiona una variación mayor en el beneficio colectivo. Mediante este modelo, se deduce que las distribución de Boltzmann-Gibbs no es completamente



(a) Suma del dinero en el sistema y en el reservorio

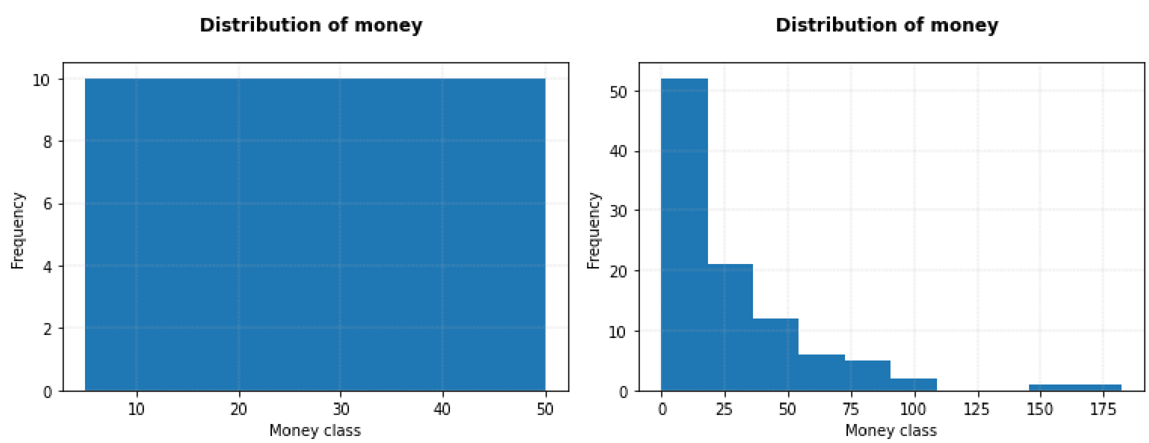
(b) Dinero en el sistema en el tiempo.

Figura 8: Evolución del dinero total en el tiempo

universal, es decir, que no se ajusta a cualquier modelo de intercambio que conserve una cantidad fija de dinero. Sin embargo, se puede decir que es universal para modelos con simetría temporal.

3.3. Modelo anárquico con distribución uniforme

Para este caso, se consideró una distribución inicial uniforme dada por $f(m_l) = cte$, en la que cada clase tiene la misma frecuencia como se puede ver en la figura.

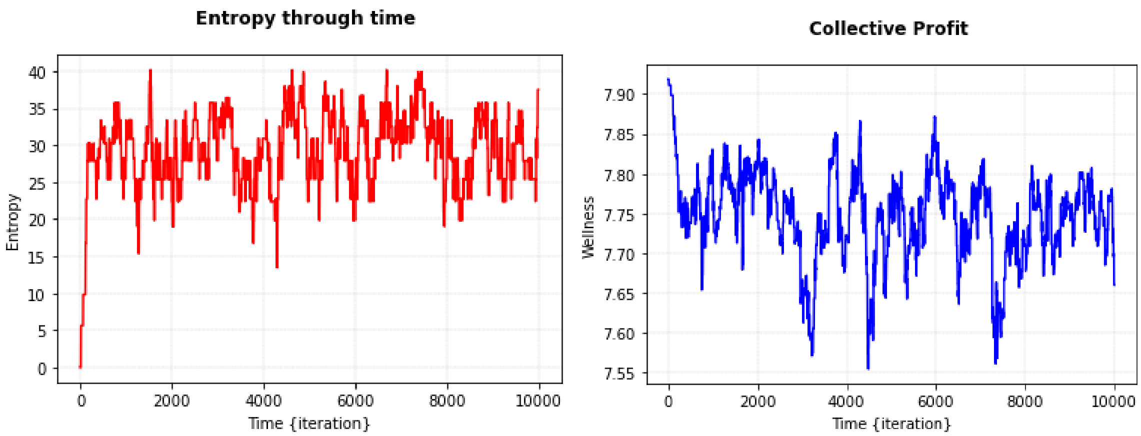


(a) Distribución inicial uniforme

(b) Distribución final Boltzmann-Gibbs.

Figura 9: Distribución inicial y final

Para este caso, observamos nuevamente el surgimiento de una distribución exponencial de Boltzmann-Gibbs, en la cual existe una mayor concentración de agentes en las clases de bajo ingreso y pocos en la clase de altos ingresos. Además, en la figura 10a podemos observar un comportamiento más oscilatorio que el obtenido con la distribución delta, teniendo como valor final de la entropía 37.512



(a) Evolución temporal de la entropía (b) Bienestar Colectivo

Figura 10: Características del sistema

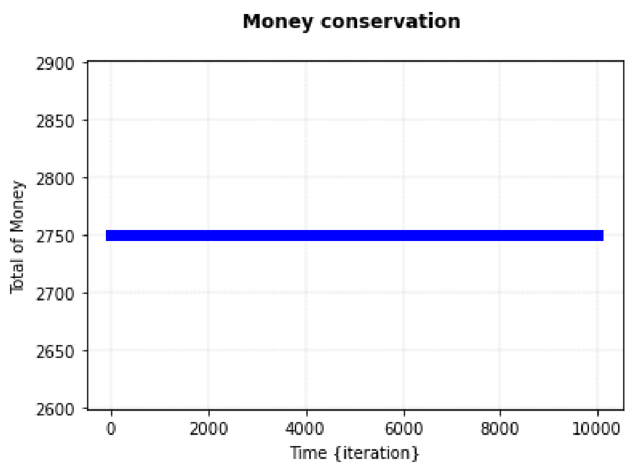


Figura 11: Conservación del dinero para distribución uniforme

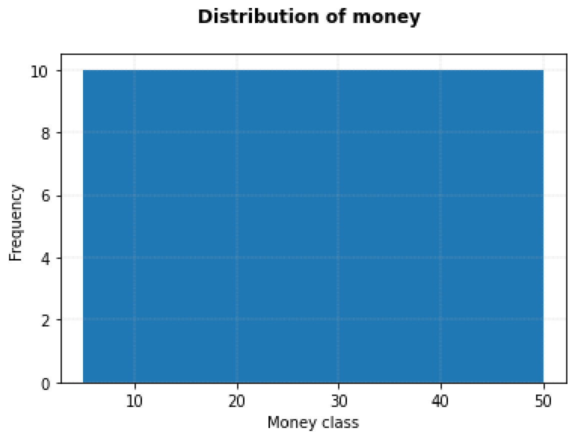
De manera similar, al analizar la evolución temporal del beneficio colectivo, observamos un comportamiento similar al obtenido en el caso de la distribución Delta. Empezamos en un máximo y se va disminuyendo de manera constante, aunque, para este caso obtuvimos una mayor cantidad de oscilaciones.

Por último, es necesario asegurarse que el total del dinero en el sistema no cambie, por lo que graficamos la suma del dinero de todos los agentes en la figura 11, esperamos ver una linea en $y = 2750$.

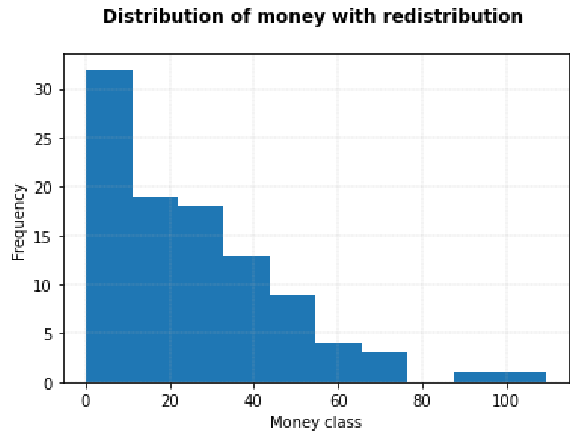
3.4. Modelo con redistribución: Distribución Uniforme

Para este modelo, se partió de la distribución uniforme hasta llegar a una distribución non-Boltzmann-Gibbs como se puede ver en la figura 12.

De igual forma, la entropía del sistema comienza en un mínimo y aumenta conforme



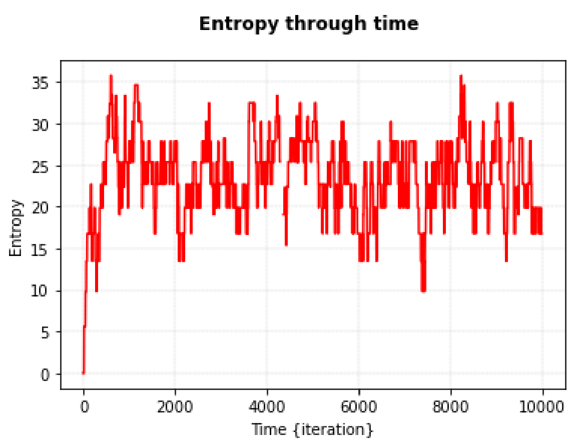
(a) Distribución inicial uniforme



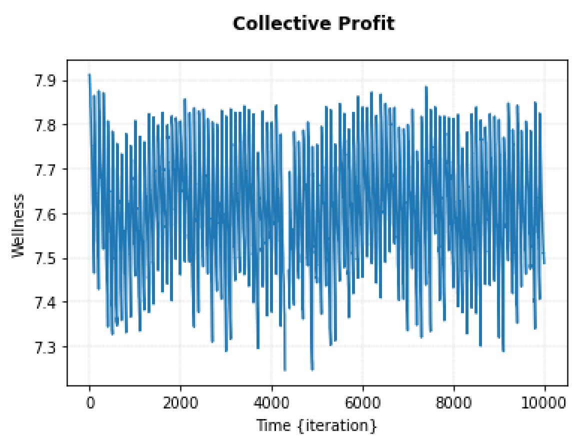
(b) Distribución final non-Boltzmann-Gibbs

Figura 12: Distribución inicial y final

transcurre el tiempo, hasta un valor final de 16.794 (menor que para el caso sin redistribución). Análogamente, el bienestar del sistema, como es de esperarse, comienza en un máximo y desciende a cada iteración, con la diferencia de la gran cantidad de oscilaciones que presenta.



(a) Entropía del sistema



(b) Bienestar colectivo del sistema

Figura 13: Características del sistema

En conclusión, al utilizar una distribución uniforme el modelo presenta una mayor cantidad de oscilaciones y ruido que dificulta la observación del cumplimiento de la ley de Boltzmann-Gibbs. Sin embargo, los resultados se apegan a lo que se describe en los artículos de Yakovenko.

4. El modelo de Wright

El modelo de Wright permite organizar al sistema en subsistemas, identificados en 3 principales grupos: los empleados, los desempleados y los empresarios. Con esto se buscan lograr un modelo que produzca la aparición de dos clases de ingresos fundamentalmente diferentes.

En la figura 14 se pueden observar las interacciones entre las clases.

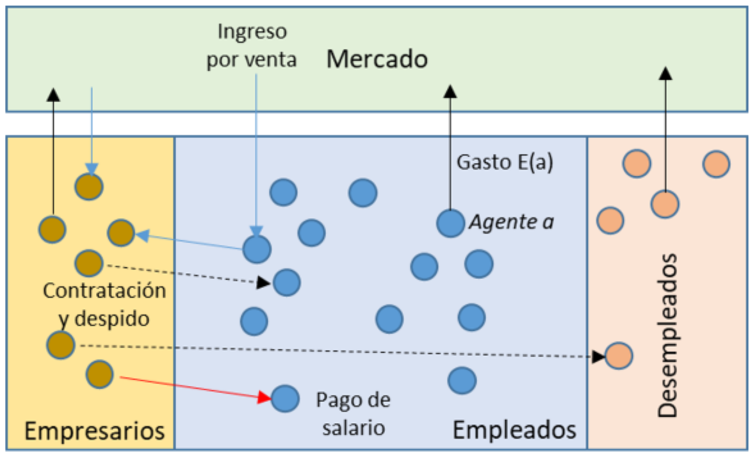


Figura 14: Esquema de relaciones en el modelo de Wright

Las tres clases interactúan de manera directa y a través del mercado. Todos los agentes a, en su turno, pueden realizar un gasto mediante la aplicación de la regla $E(a)$, mediante la cual una cantidad aleatoria de dinero es transferida al mercado, aumentando el valor del mismo. Sólo los empresarios, considerados los únicos productores de bienes y servicios, pueden recibir ingresos por parte del mercado. En el caso de que un empleado realiza una venta, entonces la cantidad de dinero es transferida a su empleador. Los empleados se quedan con su empleador hasta que son despedidos. Nuevas contrataciones se hacen sólo entre los desempleados. Todos empleadores realizan contrataciones nuevas en cuanto tengan el dinero suficiente para pagar los salarios adicionales; de manera análoga, despiden el número de empleados cuyo salario no pueden solventar. Todos los procesos se realizan de manera aleatoria usando distribuciones uniformes y ciertos intervalos predefinidos para cada variable aleatoria. [4]

4.1. Simulación

Para esta parte se realizó un código en MATLAB©. Con los siguientes parámetros.

Como podemos observar en la figura 15 se alcanza un punto donde los empresarios han sobrepasado a los empleados y a los desempleados disponibles, causando una muerte térmica, es decir, el sistema no es capaz de continuar con las interacciones, dando lugar a fenómenos interesantes.

A diferencia de los sistemas de intercambios aleatorios, al entropía del sistema de clases alcanza un valor máximo y luego comienza a disminuir. Esto debido a que las clases aumentan

Tabla 3: Parámetros con redistribución

Parámetro	Valor
M	2000
N	100
V	0
t	10000
Salario	[3 8]

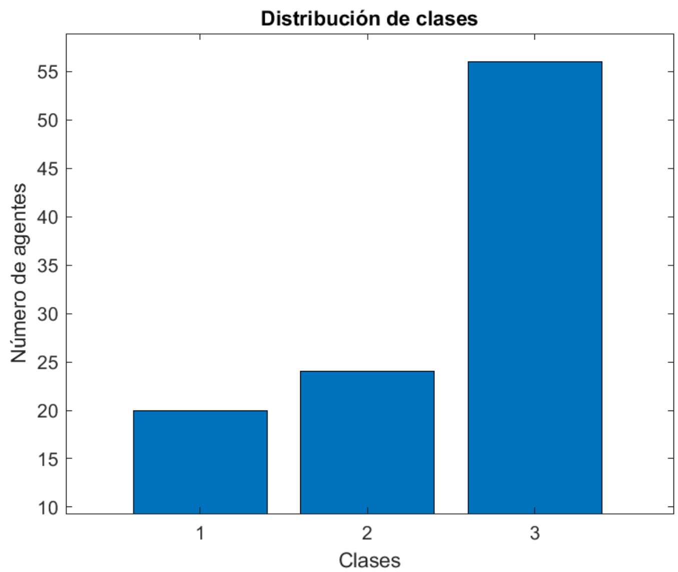


Figura 15: Distribución final de las clases

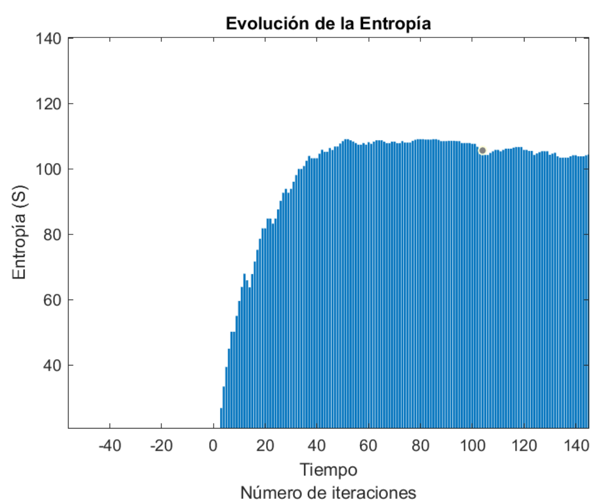


Figura 16: Entropía del sistema

y disminuyen de manera aleatoria y las combinaciones se reducen conforme los actores se van moviendo entre las clases.

El bienestar colectivo se asemeja bastante a los resultados obtenidos con las dinámicas de intercambios aleatorios. Sin embargo, es necesario señalar que en la dinámica de Wright estas

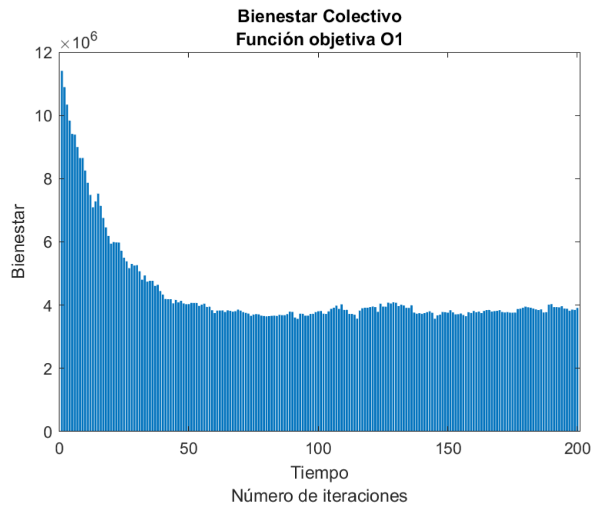


Figura 17: Bienestar colectivo utilizando una función lineal

alcanzan el estado cuasiestático de manera más rápida. Lo que indica que a mayor cantidad de interacciones, mayor entropía tiene el sistema. Dejando entrever la complejidad de la sociedad de hoy en día.

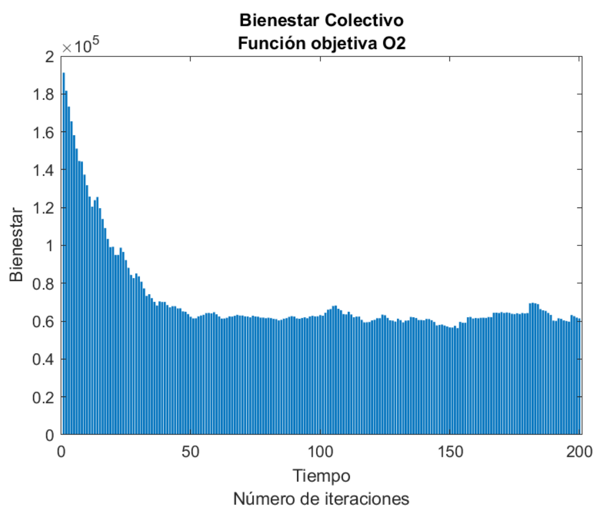


Figura 18: Bienestar colectivo utilizando una función exponencial

5. Conclusión

Los sistemas económicos son entes complejos y abstractos, con un sinfín de dinámicas difíciles de modelar. Como vimos, las distribuciones de Boltzmann-Gibbs tienen sus limitaciones en cuanto a la diversidad de fenómenos que pueden describir, siendo la restricción de simetría temporal la más importante para determinar su validez o no. Además, en la dinámica de Wright observamos el surgimiento de una larga cola en la distribución de los ingresos, que correspondería a los súper ricos o a las clases sociales más altas.
Finalmente, aterrizando al contexto mexicano, debemos recordar que México es un país con grandes desigualdades. Sin embargo, la información estadística disponible ha conducido a subestimar la desigualdad y sobre estimar la pobreza. Esto debido a dos razones principales: los ingresos verdaderos de los hogares son más altos de lo que se reporta, y los hogares con ingresos mucho mayores que los reportados no son incluidos dentro de la muestra. Del mismo modo, la discusión sobre la desigualdad económica entre las personas y hogares, tanto de riqueza como de ingresos, ha vuelto recientemente al centro de la atención de políticos y académicos. Autores como Piketty, proponen que la descontrolada desigualdad no solo es reflejo de un sistema económico injusto, sino que a fin de cuentas es un freno para la eficiencia y el crecimiento económico. En nuestro país, el libro Desigualdad extrema en México: Concentración del poder económico y político (2015) de Gerardo Esquivel, detonó una oleada de reflexiones y un renovado interés sobre la desigualdad en México. [1] De esta manera, queda mucho trabajo por hacer para lograr una modelación de la distribución de los ingresos que nos permita diseñar mejores estrategias para combatir la desigualdad y acabar con la pobreza.

Referencias

[1] Alfredo Bustos y Gerardo Leyva. *Hacia una estimación más realista de la distribución del ingreso en México - Este País*. URL: https://estepais.com/impreso/hacia-una-estimacion-mas-realista-de-la-distribucion-del-ingreso-en-mexico/ (visitado 13-09-2021).

[2] A. Drăgulescu y V. M. Yakovenko. “Statistical mechanics of money”. En: *European Physical Journal B* 17.4 (2000), págs. 723-729. ISSN: 14346028. DOI: 10.1007/s100510070114. arXiv: 0001432 [cond-mat].

[3] Gheorghe Săvoiu y Ion Iorga Simăn. “History and Role of Econophysics in Scientific Research”. En: *Econophysics: Background and Applications in Economics, Finance, and Sociophysics* (2012), págs. 3-16. DOI: 10.1016/B978-0-12-404626-9.00001-3.

[4] Ian Wright. *The social architecture of capitalism*. Vol. 346. 3-4. 2005, págs. 589-620. ISBN: 1650739982. DOI: 10.1016/j.physa.2004.08.006. arXiv: 0401053 [cond-mat].

[5] V M Yakovenko y A Dragulescu. “Evidence for the exponential distribution of income in the USA”. En: *The European Physical Journal B* 589 (2001), págs. 585-589.