UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Facultad de Ciencias

Autor: Adrián Aguilera Moreno

Algoritmos II

Resumenes.

0.1 Punto de visibilidad.

Obejetivo: Dado un punto q *kernel* de un polígono P, queremos encontrar el polígono construido a partir de segmentos de la frontera de P tal que q puede visualizarlo.

Desarrollo: Existen diversos tipos de polígonos interesantes. Nos centraremos en polígonos simples. Dentro de los polígonos simples existen *polígonos con revoluciones* y *polígonos sin revoluciones*. El algoritmo de *lee* para encontrar el polígono de visibilidad dado q se comporta bien en polígonos sin revoluciones, así analicemos un algoritmo de preprocesamiento:

Algoritmo de Bhattacharya: Poda de polígonos.

1. Tracemos una horizontal ℓ a P a partir de q.
2. Tomemos la primer intersección de ℓ con la frontera de P, digamos x_1, cómo nuestro punto de inicio para recorrer la frontera de nuestro polígono P.
3. Clasifiquemos a partir de x_1 a los puntos de intersección de ℓ con P cómo bajos y altos. Inicialmente, x_1 es un punto alto si fue escogido a la derecha de q, en otro caso se clasificó cómo bajo.
4. Recorriendo en sentido *anti-horario* clasificamos al siguiente punto de intersección de ℓ con P cómo la clasificación contraria a la de x_1 y así consecutivamente. En alguna iteración llegaremos nevamente a x_1, pues el polígono es una trayectoria cíclica. Sin embargo, no reclasificaremos a x_1.
5. El siguiente paso se basa en encontrar a las primeras aristas de ℓ que están acotadas internamente por P, tales que sus extremos son puntos clasificados como: bajo-alto o alto-bajo, esto es, que tengan distinta clasificación.
6. Al encontrar estás aristas, y que sean más cercanas a q, recortamos nuestro polígono uniendo las aristas encontradas a P y descartando el resto de P (P después de cada arista). Esto nos garantiza que el polígono P' resultante no tenga revoluviones.

Análisis de complejidad.

1. Intersectar ℓ nos toma $\mathcal{O}(n)$.
2. Clasificar las intersecciones de ℓ en P requiere recorrer P y nos toma $\mathcal{O}(n)$.
3. Encontrar las aristas que cunplan tener extremos clasificados de distinta manera y unirlos a P nos toma $\mathcal{O}(n)$, pues en el peor caso hay que recorrer P nuevamente.
4. Concluimos que nuestro algoritmo tiene una complejidad contenida en $\mathcal{O}(n)$.

Ahora, supongamos que P ha sido podado y no tiene revoluciones. Analicemos el siguiente algoritmo para encontrar el polígono de visibilidad en P dado q:

Algoritmo de Lee: Encontrar el polígono de visibilidad de P dado q.

1. Tirar un rayo horizontal a la derecha de q tal que intersecte la frontera de P. Si q se encuentra fuera de P se preprocesa en base a dos casos: (1) q está fuera de la envolvente convexa de P, (2) q está dentro de la envonlvente convexa de P. Este preprocesamiento se realiza en $\mathcal{O}(n)$.
2. Realizamos un recorrido con una pila para realizar *backtraking* desde el punto de intersección encontrado.

3. Todo punto contenido en los segmentos de la frontera de P entran a la pila *si y sólo si* es un punto visible desde q.

4. Si aplicamos retroceso, entonces lanzaremos un rayo desde el punto de iteración (el punto dónde va la ejecución) e incluiremos la intersección de este rayo con la frontera de P cómo un punto construido a la pila.

5. Al final, la pila contiene los puntos que forman el polígono de visibilidad de P desde q.

Análisis de complejidad.

1. Lanzar un rayo desde q hacia su derecha lo realizamos en $\mathcal{O}(1)$.

2. Encontrar la intersección del rayo con la frontera de P es equivalente a realizar una búsqueda binaria y se puede hacer en $\mathcal{O}(\log n)$.

3. Recorrer nuestro polígono con retroceso lo realizamos a lo más en un orden $\mathcal{O}(n)$.

4. Concluimos con una complejidad en $\mathcal{O}(n)$.

0.2 Tres problemas de iluminación y visibilidad.

Obejetivo: Probar que

1. Para una gráfica de visibilidad en un polígono. La suma de aristas estrictamente internas y estrictamente externas es al menos $\lceil \frac{3n-1}{2} \rceil - 4$.
2. En polígonos ortogonales el número mínimo de reflectores para iluminarlos es de $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$.
3. Para polígonos convexos, existen reflectores f_1, f_2, f_3 tales que $f_1 + f_2 + f_3 \geq \pi$ que iluminan al polígono.

Desarrollo: Esbocemos las pruebas de los resultados anteriores:

1. Sea P un polígono simple con n vértices. Definimos
   - $int(P) \to \#$ aristas estrictamente internas.
   - $ext(P) \to \#$ aristas estrictamente externas.
   - Vértice interno de P si pertenece al interior de $Conv(P)$.

Lema. Sea P un polígono de n vértices, con k vértices internos. Entonces

$$ext(P) \geq k.$$

Lema. Si P tiene k vértices internos, entonces

$$int(P) + ext(P) \geq (n+3) + k.$$

Lema. Todo polígono con k vértices internos puede descomponerse en $k+1$ polígonos convexos $P_1, \cdots, P_{k+1}$. Esta descomposición puede obtenerse de tal forma que si P_i tiene n_i vértices $i \in [1, \cdots, k+1]$ entonces $n_1 + \cdots + n_{k+1} = n + 3k$.

Lema. Sea P_i' el polígno formado por vértices reales para cada P_i y sea m_i el número de vértices de P_i'. Entonces si $m_i \geq 4$, entonces cualquier arista extrictamente interna de P_i es intersectada por, al menos, $m_i - 3$ aristas estrictamente internas de P_i'.

Teo. Para cualquier polígono simple con n vértices

$$int(P) + ext(P) \geq \lceil \frac{3n-1}{2} \rceil - 4.$$

Demostración: Supongamos que P tiene k vértices internos. Obtengamos una partición en $k+1$ polígonos convexos. Para cada $m_i \geq 4$ tómese una arista de visibilidad estrictamente interna e_i de P_i'.

*Es fácil ver que siempre existe una triangulación T de P que contiene a todas las aristas estrictamente internas de P_i'.

Ahora, probemos que $int(P) \geq 2n - 2k - 6$. Para cada $m_i \geq 4$, se tiene que e_i se intersecta por lo menos con $m_i - 3$ aristas estrictamente internas de P_i'. *Si $e_i \in T_P$ entonces las aristas anteriores no pertenecen a T (las triangulaciones son planas y simples). Como estas aristas son estrictamente internas de P, tenemos que

$$int(P) \geq (n-3) + \sum_{m_i \geq 4} (m_i - 3) \geq (n-3) + \sum_{i \in [1, \cdots, k+1]} (m_i - 3)$$

Observemos que

$$\sum_{i\in[1,\cdots,k+1]}(m_i-3)=n+k-3(k+1)=n-2k-3.$$

Así

$$int(P)\geq(n-3)+\sum_{i\in[1,\cdots,k+1]}(m_i-3)=2n-2k-6.$$

Además, sabemos que $ext(P)\geq k$. Entonces

$$int(P)+ext(P)\geq(2n-2k-3)+k=2n-k-6.$$

Antes habíamos probado que $int(P)+ext(P)\geq(n-3)+k$. Por lo que, al sumar ambos resultados tenemos que

$$\begin{aligned}
2\cdot int(P)+2\cdot ext(P) &\geq (2n-k-6)+(n-3)+k\\
&\geq 3n-k-9+k\\
&\geq 3n-9\\
\Rightarrow int(P)+ext(P) &\geq \lceil\frac{3n-9}{2}\rceil\\
&\geq \lceil\frac{3n-8-1}{2}\rceil\\
&\geq \lceil\frac{3n-1}{2}-4\rceil\\
&\geq \lceil\frac{3n-1}{2}\rceil-4.
\end{aligned}$$

□

2. Sabemos que los ángulos en un polígono ortogonal son $\frac{\pi}{2}$ o $\frac{3\pi}{2}$. Los vértices concavos son siempre de $\frac{3\pi}{2}$.

Lema. Todo polígono ortogonal con n vértices tine $\frac{n-4}{2}$ vértices concavos.

Demostración: Procedamos por inducción sobre el número de vértices. Es fácil ver que sólo podemos agregar $2m$ vértices a la vez, con $m\in\mathbb{Z}$. Supongamos que para k vértices se cumple el lema. ¿Qué pasa con $k+2$ vértices?

$$\frac{k-4}{2}+1=\frac{k-4+2}{2}=\frac{(k+2)-4}{2}.$$

□

Def. Un corte impar es un corte horizontal o vértical, tal que uno de los subpolígonos que forma es de tamaño $4k+2$. Con $k\in\mathbb{Z}$.

Teo. $\lfloor\frac{n}{4}\rfloor$ lámparas son siempre son siempre suficientes y a veces necesarias para iluminar cualquier polígono ortogonal con n vértices.

3. Por último tenemos

Teo. Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tres ángulos tales que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$$

y sea P un polígono convexo. Entonces siempre podemos colocar tres reflectores de tamaño a lo más $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ con ápices sobre vértices de P de manera que P quede iluminado, y no coloquemos más de un reflector sobre cada vértice de P.

Demostración: Es fácil ver que un triángulo cumple con el teorema. Supongamos P un polígono convexo con al menos 4 vértices.

Supongamos que $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \Rightarrow \alpha_2 < \frac{\pi}{2}$. Además, cómo P tiene al menos 4 vértices entonces al menos uno de los ángulos generados por sus vértices es mayor o igual que $\frac{\pi}{2}$. Sea T un triángulo cuyos ángulos sean α_1, α_2, y α_3 tal que:

(a) El vértice de T de tamaño α_2 está colocado sobre un vértice v de P que genera un ángulo mayor o igual a α_2.

(b) Los otros dos vértices de T están colocados sobre dos puntos x, y en la frontera de P.

Supongamos que x, y pertenecen a aristas distintas en P.

Análicemos dos posibles casos:

(a) $u \neq w$. Coloquemos un reflector f_1 sobre u iluminando la zona angular determinada por v, u, x y otro, f_3 sobre w iluminado la zona angular determinada por v, w, y. Como f_1 y f_3 no están en el interior de C, los angulos de iluminación de f_1 y f_3 son a lo más, α_1 y α_2 respectivamente.

(b) $u = w$. Sea T' el triángulo determinado por el segmento que une a x con y, y las tangentes a C en estos puntos. El ángulo generado en el vértice z de T' que no está sobre C es $\pi - 2\alpha_2$. Nótese que z pertenece al interior del triángulo T'' con vértices x, y, u y por tanto el ángulo de T'' en u es menor que $\pi - 2\alpha_2$. Como $\alpha \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \pi - 2\alpha_2 \leq (\pi - (\alpha_1 + \alpha_2)) = \alpha_3$. Por tanto colocando un reflector de tamaño a lo más α_3 en u iluminamos P.

$\square$

0.3 Iluminación de polígonos con refelctores.

Obejetivo: Cotas sobre el número de reflectores suficientes para iluminar un polígono simple.

Desarrollo: Para cada vértice p_i en el polígono se asignan pesos de α_i correspondiente al ángulo de iluminación a partir de p_i. Cabe mencionar que no es cierto que para cada p_i corresponda un α_i necesariamente.

Dado un subconjunto S de los vértices de P, decimos que S ilumina a P si todo punto de P es visible desde algún vértice en S. Asociaremos un peso a S igual a la suma de los pesos de los elementos de S.

Teo 1. Todo polígono P con n vértices tiene un subconjunto S que lo ilumina de tal manera que el peso de S es a lo más

$$\frac{(n-2)\pi}{3}.$$

Para cada $\epsilon > 0$ existen polígonos tales que no tienen conjuntos de vértices que los iluminen de peso

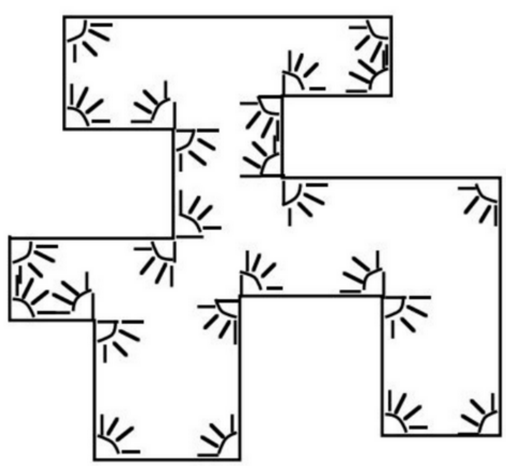
$$\frac{(n-2)\pi}{3} - \epsilon.$$

Teo 2. Para cualquier $\epsilon > 0$, existen polígonos simples que no pueden ser iluminados con reflectores de tamaño menor o igual a $\pi - \epsilon$ aún permitiendo un reflector por vértice. A nosotros nos importará demostrar que esto es cierto para $\epsilon \geq \frac{1}{2}$.

Teo 3. Todo polígono ortogonal sin agujeros puede iluminarse con a lo más

$$\lfloor \frac{3n-4}{8} \rfloor$$

reflectores ortogonales.



Teo 4. Todo polígono ortogonal P con h agujeros y n vértices puede iluminarse con a lo más

$$\lfloor \frac{3n+4(h-1)}{8} \rfloor$$

reflectores ortogonales colocadas sobre los vértices de P.

Teo 5. Todo polígono ortogonal P con n vértices puede iluminarse con a lo más

$$\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$$

reflectores sobre la frontera de P. Dichos reflectores pueden ser localizados en tiempo lineal.
Resultado mostrado en la exposición de *Ares Castro Romero.*

0.4 Iluminando triángulos y rectángulos en el plano.

Obejetivo: Iluminar polígonos ortogonales y conjuntos de triángulos.

Desarrollo: Dividamos en dos el siguiente análisis:

1. Polígonos ortogonales. Análicemos dos posibles casos:

   (a) Para Rectángulos sin huecos basta con obtener una 3-coloración, resulta que un conjunto de rectángulos unidos por al menos una arista siempre admite una 3-coloración.

   Después, basta encontrar el color con menos apariciones. Así, coloreamos este conjunto de rectángulos con a lo más

   $$\lfloor \frac{4n+4}{3} \rfloor$$

   reflectores, colocados en los vértices con el color con menos apariciones.

   (b) Para rectángulos con huecos basta con que nuestro conjunto de rectángulos admita una 2-coloración por vértices, entonces tenemos que necesitamos a lo más

   $$\lfloor \frac{4n+4h+4}{3} \rfloor$$

   luces para iluminar nuestro conjunto de rectángulos, de hecho basta con los vértices de un mismo color en la 2-coloración admitida. Nuevamente, el conjutno de rectángulos unidos por al menos una arista siempre admite una 2-coloración por vértices.

   Una manera de mejorar esta cota es trazando diagonales en lo que sería cada hueco, así podemos aplicar la técnica para rectángulos sin huecos y disminuir la cota dada.

2. Con conjuntos de triángulos basta encontrar subregiones iluminadas adecuadamente, tal que al subdividir en $2(n+3)+1$ regiones, estas se puedan iluminar y su conjunto unión ilumine todo el conjunto de triángulos.

   Esto se puede mejorar un poco si nuestra gráfica subdividida en regiones es 2-coloreada, entonces basta iluminar cada vértice de un color y así obtenemos que podemos iluminar un conjunto de triángulos con a lo más

   $$\frac{4n+10}{3}$$

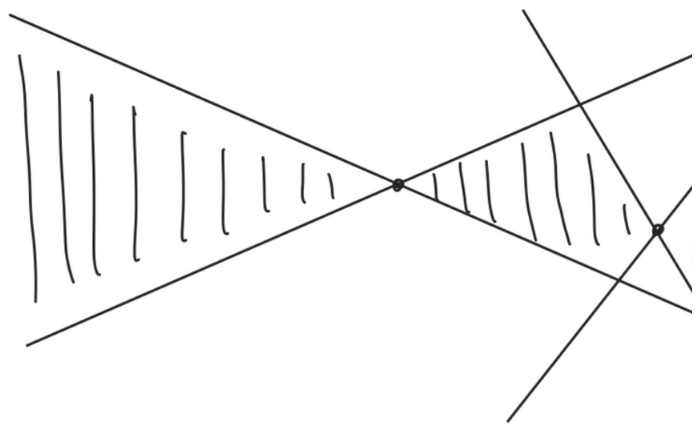
   luces. Nuevamente, se asume que la subdivisión plana resultante es 2-coloreable.

0.5 Segmentos de líneas punzantes.

Obejetivo: Algoritmo para determinar las líneas que interseca a cada uno de los n segmentos de línea dados en el plano.

Desarrollo: Para un conjunto S de n segmentos de línea en el plano. Si queremos calcular todas las líneas punzantes, entonces analicemos dos posibles casos:

1. Si sólo hay un segmento de línea en el conjunto S. Entonces, la región punzante es la doble cuña de este segmento.



2. Si hay al menos dos segmentos, dividir el conjunto S en dos subconjuntos de igual tamaño y calcular la región punzante de ambos subconjuntos de manera recursiva. La región punzante de todo el conjunto es la intersección de las regiones punzantes de los subconjuntos.