UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO
Facultad de Ciencias

Autor: Adrián Aguilera Moreno

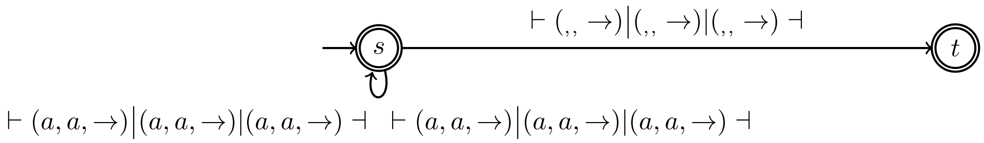
Autómatas y Lenguajes Formales

Tarea 3

1. Diseña una máquina de Turing que reconozca el lenguaje

$$\{\alpha\alpha\alpha \big| \alpha \in\in \{a, b\}^*\}$$

A continuación se diseña una máquina de Turing que cumple los requerimientos:



de esta manera se acepta la división de la cadena original en tres cadenas y la máquina de Turing verifica que estos segmentos sean los mismos. $\square$

2. Demuestra (sin utilizar el teorema de Rice) que el conjunto

$$REG = \{\langle M\rangle \big| L(M) \text{ es regular}\}$$

no es recursivamente enumerable y tampoco lo es su complemento. **Sugerencia:** $\emptyset$ y Σ^* son regulares.

Desmotración: Analicemos 2 posibles casos:
1. [REG no es r.e.] Para este caso realicemos la reducción

$$\sim HP \leq_m REG$$

como consecuencia de lo anterior se tiene que existe una función computable σ, tal que si

$$\langle M\rangle\#\langle\alpha\rangle \in \sim HP \Leftrightarrow \sigma\left(\langle M\rangle\#\langle\alpha\rangle\right) \in REG$$

entonces, definimos a σ como

1: $\sigma(M, \alpha)$ computable

Input: $M \in TM$ y $\alpha \in \Sigma^*$.
Output: Una $M' \in TM$ que simula a M.

```
1 Sea M'(β): simulación de M(α);
2 if β = 0^n 1^n then
3 |  termina y acepta;
4 end
5 termina y rechaza;
6 return M';
```

ahora, analicemos dos posibles casos:

$\Rightarrow$) En este caso, si M no se detiene con la cadena α, tenemos entonces

$$\begin{aligned} \langle M\rangle\#\langle\alpha\rangle \in \sim HP \quad &\Rightarrow \quad M' \text{ solo puede recibir a la cadena } \alpha = \emptyset. \\ &\Rightarrow \quad L(M') = \emptyset \in REG. \end{aligned}$$

de lo anterior se cumple la ida de la demostración.

$\Leftarrow$) En este caso particular, procedamos por contrapositiva, esto es

$$\begin{aligned} \langle M\rangle\#\langle\alpha\rangle \notin \sim HP \quad &\Rightarrow \quad M \text{ se detiene con } \alpha. \\ &\Rightarrow \quad \text{por } \sigma \text{ y la línea 2 del algoritmo, } \beta = 0^n1^n. \\ &\Rightarrow \quad L(M') = \{0^n1^n\} \notin REG. \end{aligned}$$

la última implicación se sigue del **Lema del Bombeo** [demostración hecha en clase]. Como tomamos la contrapositiva, esto es equivalente a

$$\sigma\left(\langle M\rangle\#\langle\alpha\rangle\right) \in REG \Rightarrow \langle M\rangle\#\langle\alpha\rangle \in \sim HP.$$

del análisis anterior podemos concluir que

$$\sim HP \leq_m REG$$

son reducibles. Como $\sim HP$ no es semidecidible, y esto a su vez implica que no es recursivamente enumerable. Entonces REG no es recursivamente enumerable.
2. [$\sim REG$ no es r.e.] Para este caso realicemos la reducción

$$\sim HP \leq_m \sim REG$$

de esto se sigue que, existe una función computable δ tal que

$$\langle M\rangle\#\langle\alpha\rangle \in \sim HP \Leftrightarrow \delta\left(\langle M\rangle\#\langle\alpha\rangle\right) \in \sim REG$$

entonces, definimos δ tal que

2: $\delta(M, \alpha)$ computable

Input: $M \in TM$ y $\alpha \in \Sigma^*$.
Output: Una $M' \in TM$ que simula a M.

```
1 Sea M'(β);
2 if β = 0^n 1^n then
3 |  termina y acepta;
4 end
5 simulación de M(α);
6 termina y rechaza;
7 return M';
```

ahora, analicemos dos posibles casos:

$\Rightarrow$) En este caso, si M no se detiene con la cadena α, tenemos entonces

$$\begin{aligned} \langle M\rangle\#\langle\alpha\rangle \in \sim HP &\Rightarrow \beta = 0^n1^n. \\ &\Rightarrow L(M') = \{0^n1^n\} \notin REG \\ &\Rightarrow L(M') \in \sim REG. \end{aligned}$$

la penúltima implicación se sigue del **Lema del Bombeo** [demostración hecha en clase].

$\Leftarrow$) En este caso particular, procedamos por contrapositiva, esto es

$$\begin{aligned} \langle M\rangle\#\langle\alpha\rangle \in\ HP &\Rightarrow M \text{ se detiene con } \alpha. \\ &\Rightarrow \text{por } \sigma \text{ y las líneas 5 y 6 del algoritmo aceptan } \Sigma^*. \\ &\Rightarrow L(M') \in REG. \end{aligned}$$

Como tomamos la contrapositiva, esto es equivalente a

$$\sigma\left(\langle M\rangle\#\langle\alpha\rangle\right) \in \sim REG \Rightarrow \langle M\rangle\#\langle\alpha\rangle \in \sim HP.$$

del análisis anterior podemos concluir que

$$\sim HP \leq_m \sim REG$$

son reducibles. Como $\sim HP$ no es semidecidible, y esto a su vez implica que no es recursivamente enumerable. Entonces $\sim REG$ no es recursivamente enumerable. $\square$

3. Demuestra ahora que REG no es ni siquiera recursivamente enumerable por medio de uno de los teoremas de Rice.

 Demostración: Por el 2^{do} teorema de Rice tenemos que para una propiedad no trivial de lenguajes recursivamente enumerables NO monótona, la propiedad no es siquiera semidecidible.

 Recordemos que, con refrente a la clasificación de propiedades monótonas, la propiedad de ser regular no es monótona. De lo anterior y por el 2^{do} teorema de Rice, se sigue que REG no es siquiera semidecidible.

 Sabemos que una propiedad es semidecidible si y sólo si es recursivamente enumerable. Como REG no es siquiera semidecidible, concluimos por transatividad que

$$\therefore \ \ REG \text{ no es siquiera recursivamente enumerable.}$$

 $\square$

4. Demuestra que los lenguajes decidibles son cerrados bajo unión y concatenación.

 Demostración: Para este ejercicio, analicemos dos posibles casos:

 - Cerradura bajo unión:
   Sean dos lenguajes cualesquiera L, L' decidibles, y M, M' máquinas de Turing totales tales que
   $$L(M) = L \quad \text{y} \quad L(M') = L'$$
   tomemos un elemento en
   $$x \in L \cup L'$$
   y observemos que $x \in L$ o $x \in L'$, si $x \in L$ entonces esta en un lenguaje decidible y por tanto x es decidible. Si $x \in L'$, entonces esta en un lenguaje decidible y nuevamente x es decidible.
   $$\therefore \ \ \{\text{Lenguajes decidibles}\} \text{ son cerrados bajo unión.}$$
 - Sean dos lenguajes cualesquiera L, L' decidibles, y M, M' máquinas de Turing totales tales que
   $$L(M) = L \quad \text{y} \quad L(M') = L'$$
   tomemos
   $$x \in L \quad \text{y} \quad x' \in L'$$
   y notemos que $xx' \in LL'$, pero xx' es una cadena aceptada por $N \in TM$ tal que N es de dos cintas donde una de las cintas es la simulación de M y otra cinta es M', entonces basta con recorrer y aceptar x con la primer cinta, caso análogo con x' pero con la segunda cinta. Luego, $N(xx')$, como N corresponde a dos cintas que previamente sabiamos que generaban un lenguaje decidible, entonces podemos concluir que xx' son parte de un lenguaje decidible y como
   $$xx' \in LL'$$
   entonces, LL' es decidible.

 $\square$