UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO

Facultad de Ciencias

Autor: Adrián Aguilera Moreno

Autómatas y Lenguajes Formales

La propuesta de estos boletines fue hecha por:

- **Dr. Favio E. Miranda Parea.**
- **Dra. Lourdes González Huesca.**
- **Mtra. A. Liliana Reyes Cabello.**

Boletín 1

1. Sea $w = babbab$ una cadena sobre el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$. Describa los conjuntos de *todos* los prefijos y sufijos de w. ¿Cuáles son propios?

   $\triangledown$ **Solución:**

   Prefijos: $\{babbab, babba, babb, bab, ba, b, \lambda\}$.

   Sufijos: $\{babbab, abbab, bbab, bab, ab, b, \lambda\}$.

   Prefijos propios: $\{babba, babb, bab, ba, b\}$.

   Sufijos propios: $\{abbab, bbab, bab, ab, b\}$.

   $\triangleleft$

2. Demostrar las propiedades de concatenación de cadenas usando inducción:

   - Asociatividad: $(uv)w = u(vw)$.
   - Identidad: $v\lambda = \lambda v = v$.
   - Longitud: $|vw| = |v| + |w|$.

   Demostración: Consideremos las definiciones recursivas de cadena concatenada por la izquierda. Así, analicemos 3 posibles casos:

   (a) Asociatividad.

   (b) Identidad.

   (c) Longitud. Sea Σ un alfabeto, $\forall_{w_1, w_2} \in \Sigma^*$; y $a \in \Sigma$:

   $$|w_1 \cdot w_2| = |w_1| + |w_2|$$

   Para este inciso haremos inducción sobre la estructura de la cadena w_1. Nótese que si $w_1 = \lambda$, entonces

   $$\begin{aligned}
   |w_2 \cdot w_2| &= |\lambda \cdot w_2| && \text{Recordemos que } w_1 = \lambda. \\
   &= |w_2| && \text{Concatenación con la cadena vacía.} \\
   &= 0 + |w_2| && \text{El cero es el neutro aditivo.} \\
   &= |\lambda| + |w_2| && \text{Por definición: } |\lambda| = 0. \\
   &= |w_1| + |w_2| && \text{Nuevamente: } w_1 = \lambda.
   \end{aligned}$$

   Ahora, supongamos que para alguna cadena $w \in \Sigma^*$ se cumple que $|w \cdot w_2| = |w| + |w_2|$, en partícular podemos suponer $w = w_1$, luego

   $$\begin{aligned}
   |(a \cdot w_1) \cdot w_2| &= |a \cdot (w_1 \cdot w_2)| && \text{Asociatividad en la concatenación.} \\
   &= 1 + |w_1 \cdot w_2| && \text{Para } x \text{ cadena y } b \text{ símbolo, se tiene que } |b \cdot x| = 1 + |x|. \\
   &= 1 + |w_1| + |w_2| && \text{Uso de la hipótesis de inducción.} \\
   &= |a \cdot w_1| + |w_2| && \text{Para } x \text{ cadena y } b \text{ símbolo, se tiene que } |b \cdot x| = 1 + |x|.
   \end{aligned}$$

   $$\therefore \quad |vw| = |v| + |w|$$

   QED