UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO

Facultad de Ciencias

Autor: Adrián Aguilera Moreno

Autómatas y Lenguajes Formales

Tarea 1

1. Dados $0 \leq m < k$ y $2 \leq p$, sea

$$A_{k,m,p} = \{a \in \{0,1,\cdots,p-1\}^* | a \text{ es una representación } p\text{-aria de } x \text{ y } x \textbf{ mod } k = m\}.$$

Da un método general para construir un autómata que acepte $A_{k,m,p}$.

$\triangledown$ **Solución:** Sea α una cadena p-aria, entonces $\#\alpha$ es el número que representa a esta cadena en notación decimal. De lo anterior se propone la función de transición de cadenas

$$\delta^*(0,\alpha) = \#\alpha \textbf{ mod } k$$

Así, cuando se quiera construir un autómata se debe considerar como estado final a los residuos indicados[1] de manera explícita.

Definimos

$$\begin{aligned} \#(\alpha d) &= p \cdot (\#\alpha) + d \\ \delta(q,d) &= (pq+d) \textbf{ mod } k \end{aligned}$$

donde $d \in 0,1,\cdots,p-1$ es alguna transición y q un estado en el autómata.

Ahora mostremos lo anterior por inducción en α [en la cadena p-aria], esto es

$$\begin{aligned} \delta^*(0,\lambda) &= 0 && \text{Por definición de } \delta. \\ &= \#\lambda && \text{Pues } \#\lambda = 0. \\ &= \#\lambda \textbf{ mod } k && \text{Sabemos que } 0 \; mod \; k = 0. \end{aligned}$$

y como se puede ver, la cadena vacia cumple con nuestra definición. Ahora, supongamos sin pérdida de generalidad que nuestra condición se cumple para alguna cadena p-aria μ, *i.e.*

$$\delta^*(0,\mu) = \#\mu \textbf{ mod } k \qquad \text{H.I.}$$

veamos que pasa con la cadena μd, donde $d \in \{0,1,\cdots,p-1\}$, así

$$\begin{aligned} \delta^*(0,\mu) &= \delta(\delta^*(0,\mu),d) && \text{Definición alternativa de } \delta^*. \\ &= \delta(\#\mu \textbf{ mod } k, d) && \text{Hipótesis de inducción.} \\ &= (p \cdot (\#\mu \textbf{ mod } k) + d) \textbf{ mod } k && \text{Definición de } \delta. \\ &= (p \cdot \#\mu + d) \textbf{ mod } k && \text{Teoría de Números.} \\ &= \#\mu d \textbf{ mod } k && \text{Definición dada previamente.} \end{aligned}$$

Ahora, veamos un ejemplo de esta construcción:

"Diseña un autómata que acepte números en notación ternaria que al ser divididos entre 3 dejen residuo de 2". Resolviendo tenemos que: Sea $A_{3,2,3}$ un autómata tal que resuelve el problema anteriormente planteado, así el estado terminal (en este caso, el único estado terminal) es 2.

Observemos los primeros 15 valores en notación terciaria

$0-0$	$11-4$	$22-8$	$110-12$
$1-1$	$12-5$	$100-9$	$111-13$
$2-2$	$20-6$	$101-10$	$112-14$
$10-3$	$21-7$	$102-11$	$120-15$

esto nos ayudará a encontrar las transiciones (al usar δ con algunas de estas cadenas terciarias).

Veamos en la siguiente tabla la relación de módulos con $k=3$:

[1] En caso de pedir que un valor sea múltiplo, el estado terminal debe ser 0.

Expresión	Residuo
0 **mod** 3	0
1 **mod** 3	1
2 **mod** 3	2
3 **mod** 3	0

Nótese que

$$0 \textbf{ mod } 3 \equiv 3 \textbf{ mod } 3$$

por tanto consideraremos solo los tres primeros casos, también es claro que la columna de Residuos son los estados en $A_{3,2,3}$. A continuación se muestra la tabla de transición de $A_{3,2,3}$:

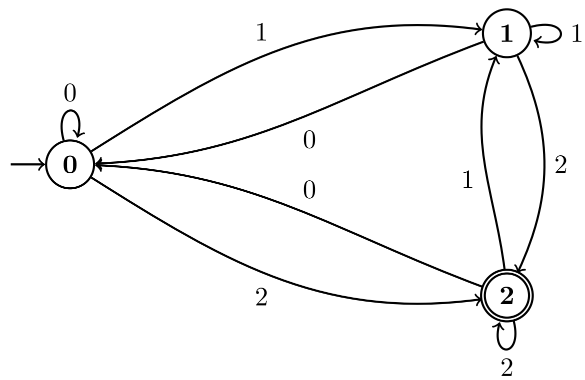
Q	**0**	**1**	2
$\rightarrow$ **0**	0	1	2
1	0	1	2
2	0	1	2

Obs. En este caso "$\rightarrow$ **0**" indica el estado inicial en el autómata, mientras que 2 indica el estado terminal.

Así, podemos comprobar la información en la tabla de transición por medio de la función δ^*, esto es

$$\begin{array}{cccc}
\delta(0) = 0 & \delta^*(11) = 1 & \delta^*(22) = 2 & \delta^*(110) = 0 \\
\delta(1) = 1 & \delta^*(12) = 2 & \delta^*(100) = 0 & \delta^*(111) = 1 \\
\delta(2) = 2 & \delta^*(20) = 0 & \delta^*(101) = 1 & \delta^*(112) = 2 \\
\delta^*(10) = 0 & \delta^*(21) = 1 & \delta^*(102) = 2 & \delta^*(120) = 0
\end{array}$$

Ahora veamos la representación de $A_{3,2,3}$ como una gráfica de estados



◁

2. Transforma el siguiente autómata no determinista con transiciones-ε en uno determinista usando los métodos vistos en clase.