

UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Facultad de Ciencias

Autor: Adrián Aguilera Moreno



Autómatas y Lenguajes Formales

Tarea 1

1. Dados $0 \leq m < k$ y $2 \leq p$, sea

$$A_{k,m,p} = \{a \in \{0, 1, \dots, p-1\}^* \mid a \text{ es una representación } p\text{-aria de } x \text{ y } x \bmod k = m\}.$$

Da un método general para construir un autómata que acepte $A_{k,m,p}$.

▽ **Solución:** Sea α una cadena p -aria, entonces $\#\alpha$ es el número que representa a esta cadena en notación decimal. De lo anterior se propone la función de transición de cadenas

$$\delta^*(0, \alpha) = \#\alpha \bmod k$$

Así, cuando se quiera construir un autómata se debe considerar como estado final a los residuos indicados¹ de manera explícita.

Entonces $A_{k,m,p} = \langle Q, \Sigma, \delta, s, F \rangle$ tales que

$$\begin{aligned} Q &= \{0, \dots, k-1\} && \text{Residuos al dividir entre } k. \\ \Sigma &= \{0, \dots, p-1\} && \text{Los posibles valores de la notación.} \\ F &= \{\text{Los } m \text{ (residuos) indicados}\} \end{aligned}$$

Definimos

$$\begin{aligned} \#(\alpha d) &= p \cdot (\#\alpha) + d \\ \delta(q, d) &= (pq + d) \bmod k \end{aligned}$$

donde $d \in 0, 1, \dots, p-1$ es alguna transición y q un estado en el autómata.

Ahora mostremos lo anterior por inducción en α [en la cadena p -aria], esto es

$$\begin{aligned} \delta^*(0, \lambda) &= 0 && \text{Por definición de } \delta. \\ &= \#\lambda && \text{Pues } \#\lambda = 0. \\ &= \#\lambda \bmod k && \text{Sabemos que } 0 \bmod k = 0. \end{aligned}$$

y como se puede ver, la cadena vacía cumple con nuestra definición. Ahora, supongamos sin pérdida de generalidad que nuestra condición se cumple para alguna cadena p -aria μ , *i.e.*

$$\delta^*(0, \mu) = \#\mu \bmod k \quad \text{H.I.}$$

veamos que pasa con la cadena μd , donde $d \in \{0, 1, \dots, p-1\}$, así

$$\begin{aligned} \delta^*(0, \mu) &= \delta(\delta^*(0, \mu), d) && \text{Definición alternativa de } \delta^*. \\ &= \delta(\#\mu \bmod k, d) && \text{Hipótesis de inducción.} \\ &= (p \cdot (\#\mu \bmod k) + d) \bmod k && \text{Definición de } \delta. \\ &= (p \cdot \#\mu + d) \bmod k && \text{Teoría de Números.} \\ &= \#\mu d \bmod k && \text{Definición dada previamente.} \end{aligned}$$

Ahora, veamos un ejemplo de esta construcción:

“Diseña un autómata que acepte números en notación ternaria que al ser divididos entre 3 dejen residuo de 2”. Resolviendo tenemos que: Sea $A_{3,2,3}$ un autómata tal que resuelve el problema anteriormente planteado, así el estado terminal (en este caso, el único estado terminal) es 2.

¹En caso de pedir que un valor sea múltiplo, el estado terminal debe ser 0.

Observemos los primeros 15 valores en notación terciaria

0 – 0	11 – 4	22 – 8	110 – 12
1 – 1	12 – 5	100 – 9	111 – 13
2 – 2	20 – 6	101 – 10	112 – 14
10 – 3	21 – 7	102 – 11	120 – 15

esto nos ayudará a encontrar las transiciones (al usar δ con algunas de estas cadenas terciarias).

Veamos en la siguiente tabla la relación de módulos con $k = 3$:

Expresión	Residuo
$0 \bmod 3$	0
$1 \bmod 3$	1
$2 \bmod 3$	2
$3 \bmod 3$	0

Nótese que

$$0 \bmod 3 \equiv 3 \bmod 3$$

por tanto consideraremos solo los tres primeros casos, también es claro que la columna de Residuos son los estados en $A_{3,2,3}$. A continuación se muestra la tabla de transición de $A_{3,2,3}$:

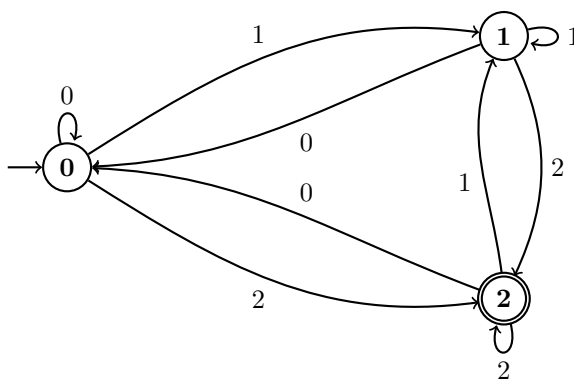
Q	0	1	②
$\rightarrow 0$	0	1	2
1	0	1	2
2	0	1	2

Obs. En este caso “ $\rightarrow 0$ ” indica el estado inicial en el autómata, mientras que ② indica el estado terminal.

Así, podemos comprobar la información en la tabla de transición por medio de la función δ^* , esto es

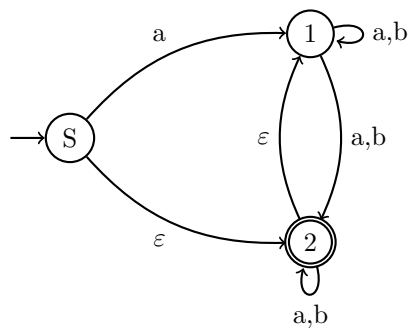
$\delta(0) = 0$	$\delta^*(11) = 1$	$\delta^*(22) = 2$	$\delta^*(110) = 0$
$\delta(1) = 1$	$\delta^*(12) = 2$	$\delta^*(100) = 0$	$\delta^*(111) = 1$
$\delta(2) = 2$	$\delta^*(20) = 0$	$\delta^*(101) = 1$	$\delta^*(112) = 2$
$\delta^*(10) = 0$	$\delta^*(21) = 1$	$\delta^*(102) = 2$	$\delta^*(120) = 0$

Por último, veamos la representación de $A_{3,2,3}$ como una gráfica de estados



◁

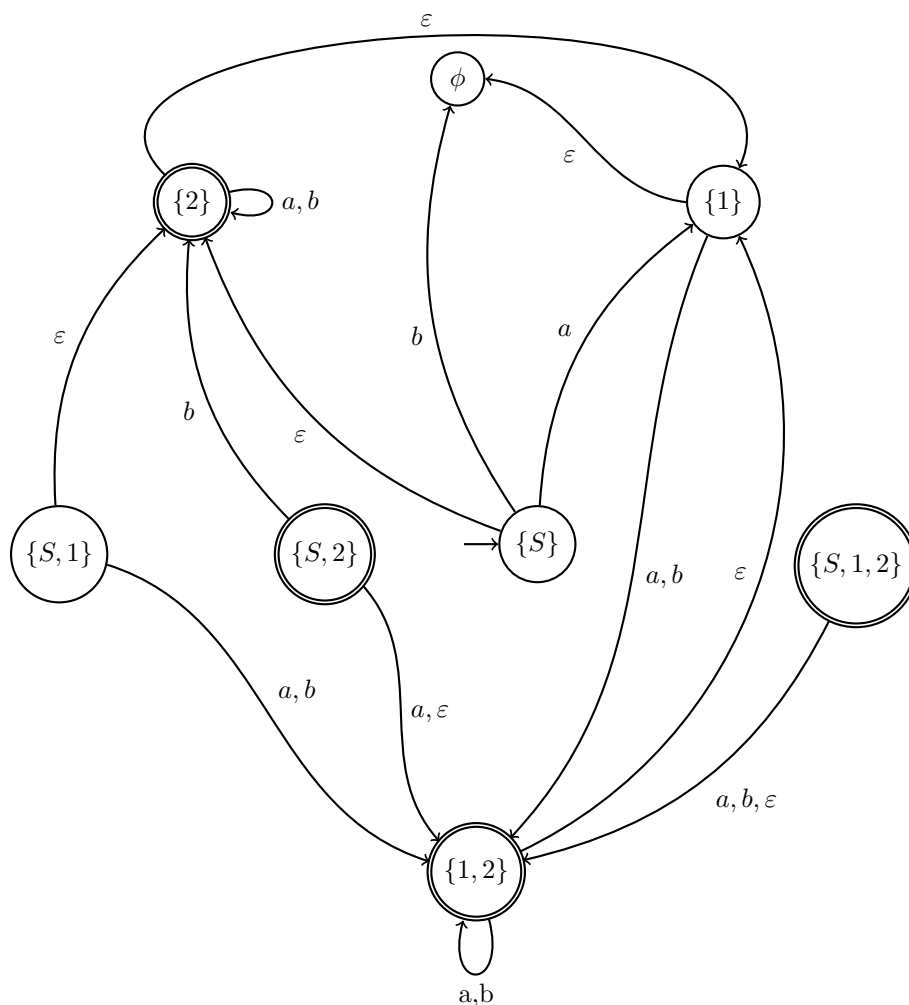
2. Transforma el siguiente autómata no determinista con transiciones- ε en uno determinista usando los métodos vistos en clase.



∇ **Solución:** Sea $A_\varepsilon = \langle Q, \Sigma, \Delta, S, F \rangle$ el autómata representado por la gráfica de estados anterior, y sea $Q = \{S, 1, 2\}$ el conjunto de estados, entonces

$$\mathcal{P}(Q) = \{\phi, \{S\}, \{1\}, \{2\}, \{S, 1\}, \{S, 2\}, \{1, 2\}, \{S, 1, 2\}\}$$

Definamos $A = \langle Q_D, \Sigma, \delta_D, s_D, F_D \rangle$ cuya gráfica de estados se presenta a continuación



$\Delta_\varepsilon^* (\{S\}, \varepsilon) = \{2\}$	$\Delta_\varepsilon^* (\{S\}, a) = \{1\}$	$\Delta_\varepsilon^* (\{S\}, b) = \phi$
$\Delta_\varepsilon^* (\{1\}, \varepsilon) = \phi$	$\Delta_\varepsilon^* (\{1\}, a) = \{1, 2\}$	$\Delta_\varepsilon^* (\{1\}, b) = \{1, 2\}$
$\Delta_\varepsilon^* (\{2\}, \varepsilon) = \{1\}$	$\Delta_\varepsilon^* (\{2\}, a) = \{2\}$	$\Delta_\varepsilon^* (\{2\}, b) = \{2\}$
$\Delta_\varepsilon^* (\{1, 2\}, \varepsilon) = \{1\}$	$\Delta_\varepsilon^* (\{1, 2\}, a) = \{1, 2\}$	$\Delta_\varepsilon^* (\{1, 2\}, b) = \{1, 2\}$
$\Delta_\varepsilon^* (\{S, 1\}, \varepsilon) = \{2\}$	$\Delta_\varepsilon^* (\{S, 1\}, a) = \{1, 2\}$	$\Delta_\varepsilon^* (\{S, 1\}, b) = \{1, 2\}$
$\Delta_\varepsilon^* (\{S, 2\}, \varepsilon) = \{1, 2\}$	$\Delta_\varepsilon^* (\{S, 2\}, a) = \{1, 2\}$	$\Delta_\varepsilon^* (\{S, 2\}, \varepsilon) = \{2\}$
$\Delta_\varepsilon^* (\{S, 1, 2\}, \varepsilon) = \{1, 2\}$	$\Delta_\varepsilon^* (\{S, 1, 2\}, a) = \{1, 2\}$	$\Delta_\varepsilon^* (\{S, 1, 2\}, \varepsilon) = \{1, 2\}$

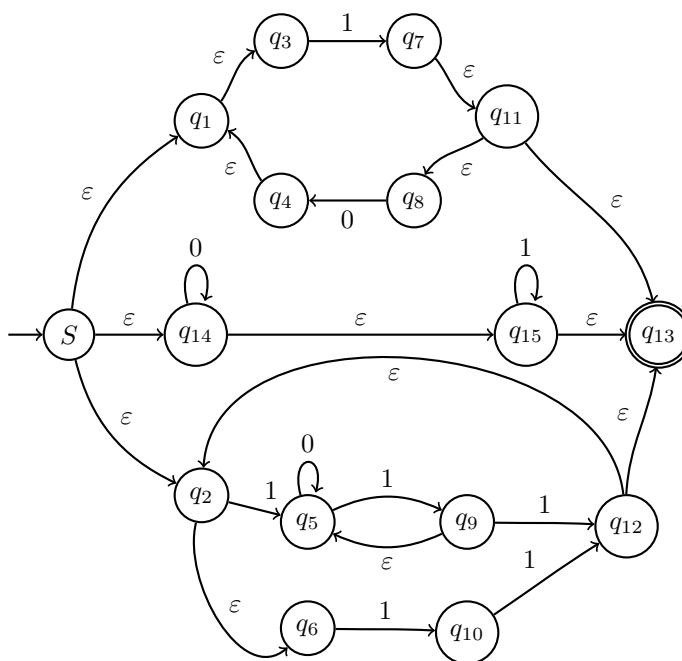
Q	{S}	ϕ	{1}	final: {2}	final: {1, 2}	{S, 1}	final: {S, 2}	final: {S, 1, 2}
$\rightarrow \{S\}$	—	b	a	ε	—	—	—	—
ϕ	—	—	—	—	—	—	—	—
{1}	—	ε	—	—	a, b	—	—	—
{2}	—	—	ε	a, b	—	—	—	—
{1, 2}	—	—	ε	—	a, b	—	—	—
{S, 1}	—	—	—	ε	a, b	—	—	—
{S, 2}	—	—	—	b	a, ε	—	—	—
{S, 1, 2}	—	—	—	—	a, b, ε	—	—	—

△

3. Construye un autómata que acepte el lenguaje generado por la expresión regular siguiente

$$(1 + 1(0^*1)^*1)^* + (0^*1^* + (10)^*)$$

∇ **Solución:** A continuación se muestra la gráfica de transiciones del autómata que acepta la expresión regular



Así, el autómata referente a la anterior gráfica de transiciones es $A_\varepsilon = \langle Q, \Sigma, \delta, S, F \rangle$, donde $Q = \{S, q_0, q_1, \dots, q_{14}, q_{15}\}$, $\Sigma = \{0, 1\}$, $\delta = (1 + 1(0^*1)^*1)^* + (0^*1^* + (10)^*)$, $S = \{S\}$ y $F = \{q_{13}\}$. \triangleleft

4. Da una gramática que genere el lenguaje aceptado por el autómata del ejercicio 1.

▽ **Solución:** Sea $G_1 = \langle \Sigma, \Gamma, S, \rightarrow_{G_1} \rangle$ la gramática que genera el lenguaje aceptado por el autómata del ejercicio 1, entonces

$$\begin{aligned}\Sigma &= \{0, 1, \dots, p-1\} \\ \Gamma &= \{0, 1, \dots, k-1\} / \{m\} \\ S &= \{0\} \\ \rightarrow_{G_1} &= \{S \rightarrow mS, S \rightarrow (m + a * k)S, S \rightarrow (m + a * k), S \rightarrow m\}\end{aligned}$$

donde $a \in \mathbb{N}$ y m, k corresponden a la definición dada en el ejercicio 1. \triangleleft