UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO

Facultad de Ciencias

Autor: Adrián Aguilera Moreno

Autómatas y Lenguajes Formales

Tarea 2

1. Demuestra que el lenguaje

$$\{\mathbf{a} \in \{a, b, c\}^* \mid \text{la longitud de } \mathbf{a} \text{ es el cuadrado de un natural.}\}$$

no es regular. Usa tanto el teorema del bombeo como el de Myhill-Nerode.

Demostración: Antes de iniciar con las demostraciones por los teoremas requeridos, analicemos la estructura de las cadenas generadas por

$$L(A) = \{\mathbf{a} \in \{a, b, c\}^* \mid \text{la longitud de } \mathbf{a} \text{ es el cuadrado de un natural.}\}$$

Suponiendo que existe el autómata $A \in DFA$ tal que reconoce el lenguaje anterior.

Nótese que $\Sigma = \{a, b, c\}$ y $L(A) = \Sigma^*$, entonces **a** debe ser una cadena finita y supondremos que $L(A)$ es un lenguaje "muy grande" pero finito.

Además, para nuestras demostraciones nos fijaremos en la longitud de las cadenas generadas por nuestro lenguaje y no necesariamente en la estructura de estas cadenas, entonces

$$|abababcbacbabc| = |aaaaabbbbbbccc| = |a^5 b^6 c^3|$$

por tanto, en las demostraciones supondré, sin pérdida de generalidad, que

$$\mathbf{a} = a^i b^j c^r$$

para $i, j, r \in \mathbb{N}$.

Obs. El que **a** tenga la estructura anterior no indica que b siempre debe estar en esa posición, incluso podriamos precindir de b o de algún término en la cadena, al suponer esa estructura solo simplificamos el considerar casos (que por ser un conjunto infinito o muy grande, tendriamos muchas combinaciones para concatenar elementos del alfabeto).

Para este ejercicio analicemos 2 versiones en la demostración, *i.e.*,

- **Demostración por Teorema del Bombeo.** Procedamos por reducción al absurdo, supongamos que el lenguaje dado es regular y que $A = \langle Q_A, \Sigma, \delta_A, s, \mathbb{F}_A \rangle$ es un autómata determinista finito [en caso de no serlo, siempre se puede reducir a un DFA] con k estados y $L(A)$ como se definió previamente.
  Sea $\mathbf{a} = a^i b^j c^r$ una cadena aceptada por nuestro autómata con

  $$i + j + r > k \text{ y al menos } j > k.$$

  de lo anterior, podemos deducir que durante la lectura de la cadena **a**, al menos en 2 ocasiones se pasa por algún estado q en A (es claro que q debe ser estado de A). Así, para la función δ_A de transición en A, tenemos que

  $$\begin{aligned} \delta^*(s, a^i b^m) &= q \\ \delta^*(q, b^n) &= q \\ \delta^*(q, b^l c^r) &= f \in \mathbb{F}_A. \end{aligned}$$

  $\forall_{m,n,l} \in \mathbb{N}$. Donde $m + n + l = j$ y en particular $n \neq 0$ [b^n no se colapsa a λ].
  Como A es determinista, tenemos que para todo $p \in \mathbb{N}$ se cumple que

  $$\delta^*(q, b^{np}) = q$$

como consecuencia, directa se tiene que

$$\delta^*(s, a^i b^m b^{np} b^l c^r) = f \in \mathbb{F}_A.$$

pero $m + np + l \neq j$ cuando $p \neq 1$. Por tanto $a^i b^m b^{np} b^l c^r \in L(A)$, lo que implica

$$i + m + np + l + r = t^2$$

con $t \in \mathbb{N}$. Sin embargo,

$$i + m + np + l + r = t^2 \not\Rightarrow i + m + n(p+1) + l + r = t^2 + n = x^2 \text{ !!!}$$

Contraejemplo: Con $i = 6, m = 3, n = 4, l = 2, r = 1$.

$$\begin{aligned} 16 &= 6 + 3 + 4 + 2 + 1 && \text{Con } p = 1. \\ 20 &= 6 + 3 + 4(2) + 2 + 1 = 6 + 3 + 8 + 2 + 1 && \text{Con } p = 2. \end{aligned}$$

Claramente 20 no es el cuadrado de un natural.

lo cual es una contradicción, pues esto debe funcionar para cualquier p natural.

$$\therefore \{\mathbf{a} \in \{a, b, c\}^* \mid \text{la longitud de } \mathbf{a} \text{ es el cuadrado de un natural.}\} \textbf{ NO} \text{ es regular.}$$

- **Demostración por Teorema de Myhill-Nerode.** Por refutación, supongamos que

En todos los casos se obvia que la demostración para $\mathbf{a} = \lambda$ [cadena vacía] es por vacuidad. □