UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO

Facultad de Ciencias

Autor: Adrián Aguilera Moreno

Autómatas y Lenguajes Formales

Tarea 2

1. Demuestra que el lenguaje

$$\{\mathbf{a} \in \{a, b, c\}^* \mid \text{la longitud de } \mathbf{a} \text{ es el cuadrado de un natural.}\}$$

no es regular. Usa tanto el teorema del bombeo como el de Myhill-Nerode.

Demostración: Antes de iniciar con las demostraciones por los teoremas requeridos, analicemos la estructura de las cadenas generadas por

$$L(A) = \{\mathbf{a} \in \{a, b, c\}^* \mid \text{la longitud de } \mathbf{a} \text{ es el cuadrado de un natural.}\}$$

Suponiendo que existe el autómata $A \in DFA$ tal que reconoce el lenguaje anterior.

Nótese que $\Sigma = \{a, b, c\}$ y $L(A) = \Sigma^*$, entonces **a** debe ser una cadena finita y supondremos que $L(A)$ es un lenguaje "muy grande" pero finito.

Además, para nuestras demostraciones nos fijaremos en la longitud de las cadenas generadas por nuestro lenguaje y no necesariamente en la estructura de estas cadenas, entonces

$$|abababcbacbabc| = |aaaaabbbbbbccc| = |a^5b^6c^3|$$

por tanto, en las demostraciones supondré, sin pérdida de generalidad, que

$$\mathbf{a} = a^i b^j c^r$$

para $i, j, r \in \mathbb{N}$.

> **Obs.** El que **a** tenga la estructura anterior no indica que b siempre debe estar en esa posición, incluso podriamos precindir de b o de algún término en la cadena, al suponer esa estructura solo simplificamos el considerar casos (que por ser un conjunto infinito o muy grande, tendriamos muchas combinaciones para concatenar elementos del alfabeto).

Para este ejercicio analicemos 2 versiones en la demostración, *i.e.*,

- **Demostración por Teorema del Bombeo.** Procedamos por reducción al absurdo, supongamos que el lenguaje dado es regular y que $A = \langle Q_A, \Sigma, \delta_A, s, \mathbb{F}_A \rangle$ es un autómata determinista finito [en caso de no serlo, siempre se puede reducir a un DFA] con k estados y $L(A)$ como se definió previamente.
  Sea $\mathbf{a} = a^i b^j c^r$ una cadena aceptada por nuestro autómata con

  $$i + j + r > k \text{ y al menos } j > k.$$

  de lo anterior, podemos deducir que durante la lectura de la cadena **a**, al menos en 2 ocasiones se pasa por algún estado q en A (es claro que q debe ser estado de A). Así, para la función δ_A de transición en A, tenemos que

  $$\begin{aligned} \delta_A^*(s, a^i b^m) &= q \\ \delta_A^*(q, b^n) &= q \\ \delta_A^*(q, b^l c^r) &= f \in \mathbb{F}_A. \end{aligned}$$

  $\forall_{m,n,l} \in \mathbb{N}$. Donde $m + n + l = j$ y en particular $n \neq 0$ [b^n no se colapsa a λ].
  Como A es determinista, tenemos que para todo $p \in \mathbb{N}$ se cumple que

  $$\delta_A^*(q, b^{np}) = q$$

como consecuencia, directa se tiene que

$$\delta_A^*(s, a^i b^m b^{np} b^l c^r) = f \in \mathbb{F}_A.$$

pero $m + np + l \neq j$ cuando $p \neq 1$. Por tanto $a^i b^m b^{np} b^l c^r \in L(A)$, lo que implica

$$i + m + np + l + r = t^2$$

con $t \in \mathbb{N}$. Sin embargo,

$$i + m + np + l + r = t^2 \not\Rightarrow i + m + n(p+1) + l + r = t^2 + n = x^2 \text{ !!!}$$

Contraejemplo: Con $i = 6, m = 3, n = 4, l = 2, r = 1$.

$$\begin{array}{rcll} 16 & = & 6+3+4+2+1 & \text{Con } p = 1. \\ 20 & = & 6+3+4(2)+2+1 = 6+3+8+2+1 & \text{Con } p = 2. \end{array}$$

Claramente 20 no es el cuadrado de un natural.

lo cual es una contradicción, pues esto debe funcionar para cualquier p natural.

$\therefore$ $\{\mathbf{a} \in \{a, b, c\}^* \mid$ la longitud de $\mathbf{a}$ es el cuadrado de un natural.$\}$ **NO** es regular.

- **Demostración por Teorema de Myhill-Nerode.** Por refutación, supongamos que L es regular, entonces tenemos que si

$$\begin{array}{rcl} \alpha & = & (a^i b^j c^r)^{w^2} \text{ tal que } (i+j+r)^{w^2} = x^{w^2} \Rightarrow \alpha \in L. \\ \beta & = & (a^m b^n c^k)^{v^2} \text{ tal que } (m+n+k)^{v^2} = (y)^{v^2} \Rightarrow \beta \in L. \\ \varphi & = & \alpha. \end{array}$$

Donde $v \neq w$. Así,

$$\begin{array}{rcll} \alpha\varphi & = & (a^i b^j c^r)^{w^2} \cdot (a^i b^j c^r)^{w^2} & \\ & = & (a^i b^j c^r)^{w^2+w^2} & \text{Aplicando el supuesto del inicio.} \\ & \Rightarrow & |\alpha\varphi| = (i+j+r)^{w^2+w^2} & \\ & & = (i+j+r)^{2w^2} & \\ & & = \left((i+j+r)^{w^2}\right)^2 & \end{array}$$

Luego, por el Teorema de Myhill-Nerode tenemos que

$$\alpha \equiv_L \beta \quad \Leftrightarrow \quad \forall_{n\in\mathbb{N}}\, \alpha\varphi^{n^2} \in L \Leftrightarrow \beta\varphi^{n^2} \in L$$

Ahora, verifiquemos que $\beta\varphi \in L$, *i.e.*,

$$\begin{array}{rcl} \beta\varphi & = & (a^m b^n c^k)^{v^2} \cdot (a^i b^j c^r)^{w^2} \\ & \Rightarrow & (y)^{v^2} \cdot (x)^{w^2} \end{array}$$

- Si $v > w$, entonces

$$\begin{array}{rcl} y^{v^2-w^2+w^2} \cdot x^{w^2} & = & y^{v^2-w^2} \cdot (xy)^{w^2+w^2} \\ & = & y^{v^2-w^2} \cdot \left((xy)^{w^2}\right)^2 \end{array}$$

sabemos que $v^2 - w^2 = z^2$ solo para $\{v, w, z\}$ una terna pitagórica, y no es cierto para cualesquiera naturales, esto contradice que $\beta\varphi \in L$, sin embargo nos falta analizar otro caso.

- Si $w > v$, entonces

$$y^{w^2-v^2+v^2} \cdot x^{w^2} \quad = \quad y^{w^2-v^2} \cdot (xy)^{v^2+w^2}$$

como podemos observar, sucede lo mismo que en el caso anterior, pues $w^2-v^2 = z^2$ y $v^2+w^2 = t^2$ solo se cumplen para ternas pitagóricas específicas y no para cualesquiera naturales, luego llegamos a contradecir el teorema de Myhill-Nerode.

$\therefore$ $\{\mathbf{a} \in \{a,b,c\}^* \mid$ la longitud de $\mathbf{a}$ es el cuadrado de un natural.$\}$ **NO** es regular.

En todos los casos se obvia que la demostración para $\mathbf{a} = \lambda$ [cadena vacía] es por vacuidad.

De los analisis anteriores (tanto por Teo. del Bombeo como del Teo. de Myhill-Nerode) concluimos que

$\therefore$ $\{\mathbf{a} \in \{a,b,c\}^* \mid$ la longitud de $\mathbf{a}$ es el cuadrado de un natural.$\}$ **NO** es regular.

$\square$