UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO
Facultad de Ciencias

Autor: Adrián Aguilera Moreno

Autómatas y Lenguajes Formales

La propuesta de estos boletines fue hecha por:

- **Dr. Favio E. Miranda Parea.**
- **Dra. Lourdes González Huesca.**
- **Mtra. A. Liliana Reyes Cabello.**

Boletín 1

1. Sea $w = babbab$ una cadena sobre el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$. Describa los conjuntos de *todos* los prefijos y sufijos de w. ¿Cuáles son propios?

   $\triangledown$ **Solución:**

   Prefijos: $\{babbab, babba, babb, bab, ba, b, \lambda\}$.

   Sufijos: $\{babbab, abbab, bbab, bab, ab, b, \lambda\}$.

   Prefijos propios: $\{babba, babb, bab, ba, b, \lambda\}$.

   Sufijos propios: $\{abbab, bbab, bab, ab, b, \lambda\}$.

   $\triangleleft$

2. Demostrar las propiedades de concatenación de cadenas usando inducción:

   - Asociatividad: $(uv)w = u(vw)$.
   - Identidad: $v\lambda = \lambda v = v$.
   - Longitud: $|vw| = |v| + |w|$.

   Demostración: Consideremos las definiciones recursivas de cadena concatenada por la izquierda. Así, analicemos 3 posibles casos:

   (a) Asociatividad. Sea Σ un alfabeto, $\forall_{w_1,w_2,w_3} \in \Sigma^*$; y $a \in \Sigma$:
   Para este inciso haremos inducción sobre la estructura de las cadenas. Si $w_1 = \lambda$, entonces

   $$\begin{aligned} w_1 \cdot (w_2 \cdot w_3) &= \lambda \cdot (w_2 \cdot w_3) && \text{Sabemos que } w_1 = \lambda. \\ &= (w_2 w_3) && \text{Identidad en cadenas.} \\ &= (w_2 w_3) \cdot \lambda && \text{Identidad en cadenas.} \\ &= (w_2 \cdot w_3) \cdot \lambda && \text{Definición de concatenación.} \end{aligned}$$

Obsérvese que "$\cdot$" es usado para indicar la concatenación, cuando se omite podemos trabajar esa concatenación como una cadena. En adelante se omite esta observación y se emplea de manera indistinta.

   Así, supongamos sin pérdida de generalidad que, para alguna cadena $w \in \Sigma^*$ se cumple que $w \cdot (w_2 \cdot w_3) = (w \cdot w_2) \cdot w_3$, entonces

   $$\begin{aligned} a \cdot (w \cdot (w_2 \cdot w_3)) &= aw \cdot (w_2 \cdot w_3) && \text{Concatenación de un símbolo y una cadena.} \\ &= aw \cdot w_2 w_3 && \text{Resultado de concatenar 2 cadenas.} \\ &= aww_2w_3 && \text{Resultado de concatenar 2 cadenas.} \\ &= aww_2 \cdot w_3 && \text{Concatenación respecto a un sufijo.} \\ &= (a \cdot ww_2) \cdot w_3 && \text{Concatenación respecto a un prefijo.} \\ &= (a \cdot (w \cdot w_2)) \cdot w_3 && \text{Definición de concatenación.} \end{aligned}$$

   $$\therefore \quad (uv)w = u(vw)$$

   (b) Identidad. Propongamos a λ como el neutro para la concatenación de cadenas.

   (c) Longitud. Sea Σ un alfabeto, $\forall_{w_1,w_2} \in \Sigma^*$; y $a \in \Sigma$:

Para este inciso haremos inducción sobre la estructura de las cadenas. Nótese que si $w_1 = \lambda$, entonces

$$\begin{aligned}
|w_1 \cdot w_2| &= |\lambda \cdot w_2| && \text{Recordemos que } w_1 = \lambda. \\
&= |w_2| && \text{Concatenación con la cadena vacía.} \\
&= 0 + |w_2| && \text{El cero es el neutro aditivo.} \\
&= |\lambda| + |w_2| && \text{Por definición: } |\lambda| = 0. \\
&= |w_1| + |w_2| && \text{Nuevamente: } w_1 = \lambda.
\end{aligned}$$

Ahora, supongamos sin pérdida de generalidad que, para alguna cadena $w \in \Sigma^*$ se cumple que $|w \cdot w_2| = |w| + |w_2|$, luego

$$\begin{aligned}
|(a \cdot w) \cdot w_2| &= |a \cdot (w \cdot w_2)| && \text{Asociatividad en la concatenación.} \\
&= 1 + |w \cdot w_2| && \text{Para } u \text{ cadena y } b \text{ símbolo, se tiene que } |b \cdot u| = 1 + |u|. \\
&= 1 + |w| + |w_2| && \text{Uso de la hipótesis de inducción.} \\
&= |a \cdot w| + |w_2| && \text{Para } u \text{ cadena y } b \text{ símbolo, se tiene que } |b \cdot u| = 1 + |u|.
\end{aligned}$$

$$\therefore \quad |vw| = |v| + |w|$$

QED

3. Demostrar que dado un alfabeto cualquiera y para cualesquiera cadenas u, v, w en la cerradura, se cumplen las siguientes propiedades:
   (a) $|w| = |w|$.
   (b) $\left(w^R\right)^R = w$.
   (c) $(uv)^R = v^R u^R$.
   (d) Para cada $n \geq 0$, $(w^n)^R = (w^n)^R$.
4. Sea $\Sigma = \{a, b\}$, el lenguaje L se define como:
   i) $\lambda \in L$.
   ii) Si $w_1, w_2 \in L$, entonces aw_1bw_2 y bw_1aw_2 pertenecen a L.
   iii) Son todas las cadenas en L.
5. Suponer que $L_1 \geq \{a, b\}^*$ esta definido por:
   i) $\lambda \in L_1$.
   ii) para cada $w \in L_1$ sucede que wa y wba también pertenecen a L_1.

   Demuestre que para cada $v \in L_1$ las siguientes afirmaciones se cumplen:
   (a) Cualquier cadena $u \in L_1$ tiene mayor o igual número de a's que de b's ($\#_a \geq \#_b$).
   (b) Cualquier cadena $u \in L_1$ no contiene la subcadena bb.