UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

FACULTAD DE CIENCIAS

Tarea 4

INTEGRANTES

Torres Valencia Kevin Jair - 318331818
Aguilera Moreno Adrián - 421005200
Natalia Abigail Pérez Romero - 31814426

PROFESOR

Miguel Ángel Piña Avelino

AYUDANTE

Pablo Gerardo González López

ASIGNATURA

Computación Distribuida

13 de octubre de 2022

1. Describe un algoritmo distribuido basado en DFS que cuente el número de procesos en un sistema distribuido cuya gráfica G es arbitraria. Al terminar de contar, debe informar a todos los procesos el resultado del conteo. Muestra que es correcto.

Caso base.

Sea G una gráfica tal que $V_G = \{p_1\}$, por la linea 8 $contarProcesosDFS() = 1$ lo cual es correcto.

Hipótesis de inducción

Para cualquier gráfica G `contarProcesosDFS()` cuenta la cantidad procesos n de G Al inicio de la ejecución si no ha recibido ningún mensaje el líder asigna como padre a si mismo y el $numProcesos = 1$, luego explora a sus vecinos enviándoles el número de procesos al momento, si el numero de procesos actual es menor al que recibió actualiza la cantidad de procesos y le envía la nueva cantidad de procesos $< numP >$ a sus vecinos, cuando el vértice recibe el mensaje $< numP >$ aumenta en uno el número de procesos y se lo envía a sus vecinos, cuando ya no quedan más vecinos p_j le envía el mensaje $< parent, numP >$ al vértice del que llego el último mensaje $< numP >$, es decir p_{j-1} el cual inserta p_j en el conjunto de sus hijos y explora a sus vecinos donde nuevamente verifica que los vértices conozcan el último conteo de procesos, el algoritmo termina cuando $numProcesos \geqslant numP$, $Padre == ID$ y SinExplorar= $\emptyset$.

Paso inductivo

Por demostrar que dada una gráfica G' tal que $V_{G'} = V_G \cup \{p_{i+1}\}$ el algoritmo `cuentaProcesosDFS` devuelve $n + 1$ vértices. Por hipótesis de inducción el algoritmo `contarProcesosDFS()` cuenta la cantidad procesos n hasta el vértices p_i. Como p_i es vecino de p_{i+1}, SinExplorar=$\{p_{i+1}\}$, entonces p_{i+1} recibe $< numP >$ asigna a p_i como su padre, $numProcesos = n + 1$ por la linea 14 y ejecuta el proceso `EXPLORE` el cual como el numProcesos ha cambiado envía el mensaje $< numP >$ a sus vecinos, de forma que estos tienen el nuevo número de procesos $n + 1$ y lo envían a los demás vecinos hasta que $numProcesos \geqslant numP$, $Padre == ID$ y SinExplorar= $\emptyset$.

Algorithm 1 contarProcesosDFS(ID,soyLider)

$Padre = \perp$
$Hijos = \emptyset$
numProcesos = 0
SinExplorar = todos los vecinos
Si no he recibido algún mensaje
if soyLider and Padre == $\perp$ **then**
  Padre = ID
  numProcesos = 1
  explore(numProcesos)
end if
Al recibir $< numP >$ desde el vecino p_j:
if Padre == $\perp$ **then**
  Padre = j
  numProcesos = numP + 1
  elimina p_j de SinExplorar
  explore(numProcesos)
else
  send($< already >$) a p_j:
  elimina p_j de SinExplorar
end if
Al recibir $< already >$ desde p_j
explore(numProcesos)
Al recibir $< parent, numP >$
Hijos $\cup p_j$
explore(numProcesos)
procedure EXPLORE(numP)
  if numProcesos < numP **then**
    numProcesos = numP
    for p_i en Vecinos **do**
      send($< numP >$) a p_i
    end for
  end if
  if SinExplorar $\neq \emptyset$ **then**
    elegir p_k en SinExplorar
    eliminar p_k de SinExplorar
    send ($< numP >$) a p_k
  else
    if Padre $\neq$ ID **then**
      send($< parent, numP >$) a Padre
    end if
  end if
end procedure

2. Describe un algoritmo distribuido basado en DFS que, en una gráfica arbitraria G con n vértices anónimos, asigne etiquetas únicas en el rango $[1, ..., n]$ a los vértices de G. Muestra que es correcto.
Hint: Puedes suponer que cada proceso conoce a sus vecinos aunque estos no tengan una etiqueta explicita.

Algorithm 2 asignarEtiquetasDFS()

1: Al inicio seleccionar un nodo al azar para empezar a enviar mensajes
2: $Hijos = \emptyset$
3: $ID = 1$
4: Padre = ID
5: SinExplorar = todos los vecinos
6: etiqueta = ID
7: EXPLORE($< etiqueta, 1 >$)
8: Al recibir $< etiqueta, i >$ desde el vecino p_j:
9: **if** Padre == $\perp$ **then**
10:     Padre = j
11:     ID = i
12:     elimina p_j de SinExplorar
13:     EXPLORE(etiqueta,i)
14: **else**
15:     send($< already >$) a p_j:
16:     elimina p_j de SinExplorar
17: **end if**
18: Al recibir $< already >$ desde p_j
19: EXPLORE(etiqueta)
20: Al recibir $< parent, i >$ desde p_j
21: Hijos $\cup p_j$
22: EXPLORE(etiqueta,i)
23: **procedure** EXPLORE(etiqueta,i)
24:     **if** SinExplorar $\neq \emptyset$ **then**
25:         $k = i, j = 0$
26:         **while** $j < |SinExplorar|$ **do**
27:             $k+ = 1$
28:             send ($< etiqueta, k >$) a p_j
29:             eliminar p_j de SinExplorar
30:             $j+ = 1$
31:         **end while**
32:     **else**
33:         **if** Padre $\neq$ ID **then**
34:             send($< parent, etiqueta >$) a Padre
35:         **end if**
36:     **end if**
37: **end procedure**

Por demostrar que el algoritmo es correcto, es decir, dada una gráfica arbitraria G con n vértices anónimos, asigne etiquetas únicas en el rango $[1, \ldots, n]$ a los vértices de G Demostración por inducción:
Demostración por inducción sobre n número de vértices anónimos en G.

Caso base.
Sea G una gráfica tal que $V_G = \{p_1\}$, por la linea 3 el $ID(p_1) = 1$ por lo tanto todos los vértices de G tiene una etiqueta única y conoce las etiquetas de sus vecinos.

Hipótesis de inducción
Para cualquier gráfica G con n vértices `asignarEtiquetasDFS()` asigna etiquetas únicas en el rango $[1, \ldots, n]$. Al inicio de la ejecución el nodo elegido tiene $ID(p_1) = 1$ luego envía $< etiqueta, 1 >$ a uno de sus vecinos p_j este asigna $ID(p_j) = 2$ si tiene vecinos diferentes del líder, es decir $SinExplorar \neq \emptyset$ de manera similar asigna un nuevo ID una unidad mayor, es decir $ID(p_{j+1}) = ID(p_j) + 1$, cuando el proceso p_j ya no tenga vecinos por explorar le envía el mensaje $< parent, i >$ donde la i es la última etiqueta asignada, cuando los vértices reciben

$< parent, i >$ desde p_j guardan este vecino en el conjunto de sus hijos y envían la etiqueta i a su padre, cuando $Padre == ID$ termina la asignación de ID de los vecinos de uno de los hijos del proceso con $ID = 1$ y procede a enviar $< etiqueta, i >$, donde i es el último ID asignado, a otro de los hijos del proceso con $ID = 1$, de manera similar recorre los vecinos asignando un ID mayor al que recibieron. Hasta que el proceso con $ID = 1$ no tenga vértice por explorar el algoritmo termina.

Paso inductivo

Por demostrar que dada una gráfica G con $n + 1$ vértices `asignarEtiquetasDFS()` asigna etiquetas únicas en el rango $[1, \ldots, n + 1]$.

Sea un vértice p_{j+1} que no tiene etiqueta, pero sabemos que es vecino de al menos un vértice p_j, que por hipótesis inductiva tiene una etiqueta al igual que sus vecinos excepto p_{j+1}, por lo tanto SinExplorar de p_j es $\{p_{j+1}\}$ y por la linea 28 en el procedimiento `EXPLORE` P_{j+1} recibe el mensaje:$< etiqueta, i >$, asigna a p_j como su padre y $ID(p_{j+1}) = ID(p_j) + 1$, por lo tanto todos los vértices $n + 1$ de G tienen una etiqueta única en el rango $[1, \ldots, n + 1]$.

3. Modifica el algoritmo DFS para que se ejecute en tiempo a lo más $2|V|$ y no mande más de $2|E|$ mensajes, suponiendo que las aristas son bidireccionales.
Hint: Cuando un proceso recibe el mensaje `M` por primer vez, este notifica a todos sus vecino pero envía el mensaje a sólo uno de ellos.

Algoritmo: DFS Modificado.

```
Padre = ⊥
Hijos = ∅
sinExplorar = todos los vecinos

Si no he recibido algún mensaje:
    if padre = ⊥ then
        soyLider = ID
        Padre = p_i
        explore()

Al recibir < leader, nuevo − id > desde el vecino p_j:
    if soyLider < nuevo-id then
        soyLider = nuevo-id
        Padre = p_j
        Hijos = ∅
        sinExplorar = todos los vecinos, excepto p_j
        explore()
    else if soyLider = nuevo-id then
        send < alredy, soyLider > a p_j
//De lo contrario, soyLider > nuevo-id y el DFS para nuevo-id se detiene

Al recibir < soyLider, nuevo − id > desde el vecino p_j:
    if nuevo-id = soyLider then explore()

Al recibir parent, nuevo − id > desde el vecino p_j:
    if nuevo-id = soyLider then
        Hijos ∪ {p_j}
        explore()

procedure explore():
    if sinExplorar = ∅ then
        elegir p_k en sinExplorar
        eliminar p_k de sinExplorar
        send (< leader, soyLider >) a p_k
    else:
        if Padre ≠ ID then send (< parent, leader >) a Padre
            terminar
```

4. Considera el algoritmo 1, que calcula una $\Delta + 1$ coloración, donde Δ es el grado máximo en la gráfica. Muestra una gráfica G con al menos 10 vértices y una asignación de IDs, donde el algoritmo coloree todos los procesos (el primer momento en el que todas las variables c son distintas de $\perp$) en tiempo $diam(G)$. Muestra otra asignación de IDs para las que el algoritmo coloree en tiempo a los más $diam(G)/2$.

Pseudocódigo 1: $\Delta + 1$ coloración

```
Algoritmo coloring(ID):
  c = ⊥

Ejecutar inicialmente:
  send(⟨ID,c⟩)

Al tener todos los mensajes de todos mis vecinos en t ≥ 1:
  Mensajes = ⟨ID_1,c_1⟩,... ⟨ID_j,c_j⟩  \(j\) = grado maximo en la grafica
  A = {ID_i | c_i = ⊥}
  if c == ⊥ ∧ ID = máx(A ∪ {ID}) then
     c = mín({1,...,Δ+1} \ {c_i ≠ ⊥})
  send(⟨ID,c⟩) a todos los vecinos
```

▷ Para este problema dividamos la solución en 2 respectivas soluciones:

1. Mostrar una ejecución en tiempo $\mathtt{diam}(G)$, con G una gráfica tal que $|V_G| = 10$.

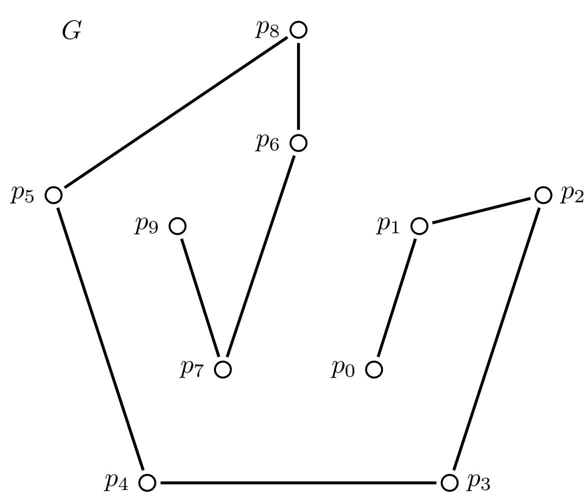

Figura 1: Gŕagica G.

En la ronda 0 tenemos que:

Se envían los ID_i's a todos los vecinos para cada proceso, por motivos de visualización de la gráfica no se ilustra cada ID_i para algún $i \in [0, \cdots, 9]$, pero cuándo sea necesario se indicara [1].

[1] Además es claro que para un proceso p_j existe un ID_j único.

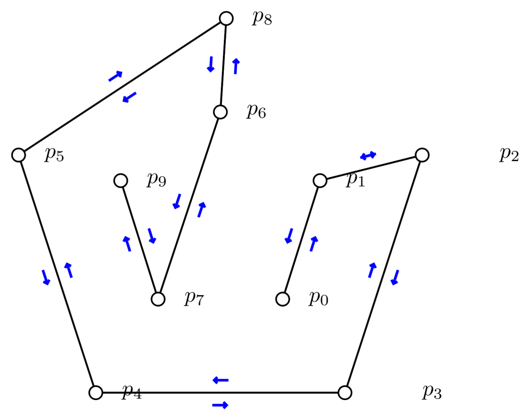

Figura 2: Grágica correspondiente a R_0.

En la ronda ronda 1[2] tenemos que:

- Estado de p_0:
  - M = $\{\langle ID_1, \perp\rangle\}$
  - A = $\{ID_1\}$
  - C = $\perp$
- Estado de p_1:
  - M = $\{\langle ID_0, \perp\rangle,\ \langle ID_2, \perp\rangle\}$
  - A = $\{ID_0,\ ID_2\}$
  - C = $\perp$
- Estado de p_2:
  - M = $\{\langle ID_1, \perp\rangle,\ \langle ID_3, \perp\rangle\}$
  - A = $\{ID_1,\ ID_3\}$
  - C = $\perp$
- Estado de p_3:
  - M = $\{\langle ID_2, \perp\rangle,\ \langle ID_4, \perp\rangle\}$
  - A = $\{ID_2,\ ID_4\}$
  - C = $\perp$
- Estado de p_4:
  - M = $\{\langle ID_3, \perp\rangle,\ \langle ID_5, \perp\rangle\}$
  - A = $\{ID_3,\ ID_5\}$
  - C = $\perp$
- Estado de p_5:
  - M = $\{\langle ID_4, \perp\rangle,\ \langle ID_8, \perp\rangle\}$
  - A = $\{ID_4,\ ID_8\}$
  - C = $\perp$
- Estado de p_6:
  - M = $\{\langle ID_7, \perp\rangle,\ \langle ID_8, \perp\rangle\}$
  - A = $\{ID_7,\ ID_8\}$
  - C = $\perp$
- Estado de p_7:
  - M = $\{\langle ID_6, \perp\rangle,\ \langle ID_9, \perp\rangle\}$
  - A = $\{ID_6, ID_9\}$
  - C = $\perp$
- Estado de p_8:
  - M = $\{\langle ID_5, \perp\rangle,\ \langle ID_6, \perp\rangle\}$
  - A = $\{ID_5,\ ID_6\}$
  - C = 1
- Estado de p_9:
  - M = $\{\langle ID_7, \perp\rangle\}$
  - A = $\{ID_7\}$
  - C = 1

[2] R_i representa a “ronda i”.

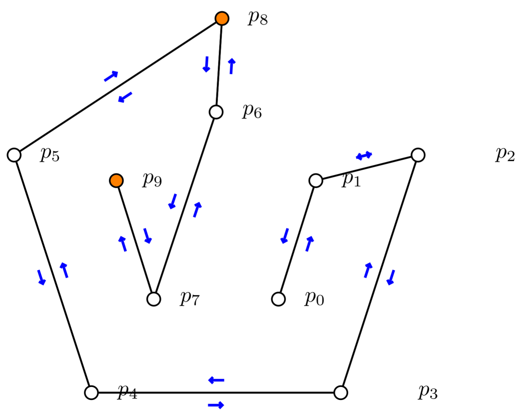

Figura 3: Grágica correspondiente a R_1.

En la ronda ronda 2 tenemos que:

- Estado de p_0:
  - `M` = $\{\langle ID_1, \perp\rangle\}$
  - `A` = $\{ID_1\}$
  - `C` = $\perp$
- Estado de p_1:
  - `M` = $\{\langle ID_0, \perp\rangle,\ \langle ID_2, \perp\rangle\}$
  - `A` = $\{ID_0,\ ID_2\}$
  - `C` = $\perp$
- Estado de p_2:
  - `M` = $\{\langle ID_1, \perp\rangle,\ \langle ID_3, \perp\rangle\}$
  - `A` = $\{ID_1,\ ID_3\}$
  - `C` = $\perp$
- Estado de p_3:
  - `M` = $\{\langle ID_2, \perp\rangle,\ \langle ID_4, \perp\rangle\}$
  - `A` = $\{ID_2,\ ID_4\}$
  - `C` = $\perp$
- Estado de p_4:
  - `M` = $\{\langle ID_3, \perp\rangle,\ \langle ID_5, \perp\rangle\}$
  - `A` = $\{ID_3,\ ID_5\}$
  - `C` = $\perp$
- Estado de p_5:
  - `M` = $\{\langle ID_4, \perp\rangle,\ \langle ID_8, 1\rangle\}$
  - `A` = $\{ID_4\}$
  - `C` = 2
- Estado de p_6:
  - `M` = $\{\langle ID_7, \perp\rangle,\ \langle ID_8, 1\rangle\}$
  - `A` = $\{ID_7\}$
  - `C` = $\perp$
- Estado de p_7:
  - `M` = $\{\langle ID_6, \perp\rangle,\ \langle ID_9, 1\rangle\}$
  - `A` = $\{ID_6\}$
  - `C` = 2
- Estado de p_8:
  - `M` = $\{\langle ID_5, \perp\rangle,\ \langle ID_6, \perp\rangle\}$
  - `A` = $\{ID_5,\ ID_6\}$
  - `C` = 1
- Estado de p_9:
  - `M` = $\{\langle ID_7, \perp\rangle\}$
  - `A` = $\{ID_7\}$
  - `C` = 1

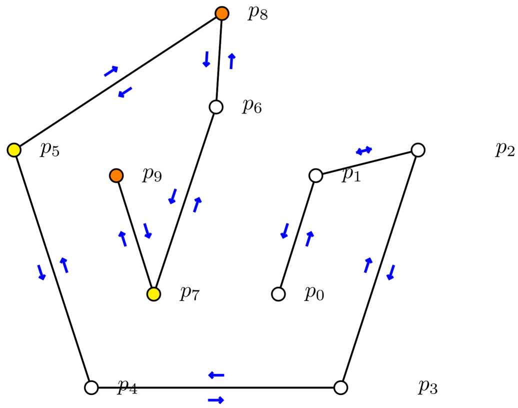

Figura 4: Grágica correspondiente a R_2.

En la ronda 3 tenemos que:

- Estado de p_0:
  - `M` = $\{\langle ID_1, \perp\rangle\}$
  - `A` = $\{ID_1\}$
  - `C` = $\perp$
- Estado de p_1:
  - `M` = $\{\langle ID_0, \perp\rangle,\ \langle ID_2, \perp\rangle\}$
  - `A` = $\{ID_0,\ ID_2\}$
  - `C` = $\perp$
- Estado de p_2:
  - `M` = $\{\langle ID_1, \perp\rangle,\ \langle ID_3, \perp\rangle\}$
  - `A` = $\{ID_1,\ ID_3\}$
  - `C` = $\perp$
- Estado de p_3:
  - `M` = $\{\langle ID_2, \perp\rangle,\ \langle ID_4, \perp\rangle\}$
  - `A` = $\{ID_2,\ ID_4\}$
  - `C` = $\perp$
- Estado de p_4:
  - `M` = $\{\langle ID_3, \perp\rangle,\ \langle ID_5, 2\rangle\}$
  - `A` = $\{ID_3\}$
  - `C` = 1
- Estado de p_5:
  - `M` = $\{\langle ID_4, \perp\rangle,\ \langle ID_8, 1\rangle\}$
  - `A` = $\{ID_4\}$
  - `C` = 1
- Estado de p_6:
  - `M` = $\{\langle ID_7, 2\rangle,\ \langle ID_8, 1\rangle\}$
  - `A` = $\emptyset$
  - `C` = 3
- Estado de p_7:
  - `M` = $\{\langle ID_6, \perp\rangle,\ \langle ID_9, 1\rangle\}$
  - `A` = $\{ID_6\}$
  - `C` = 2
- Estado de p_8:
  - `M` = $\{\langle ID_5, 2\rangle,\ \langle ID_6, \perp\rangle\}$
  - `A` = $\{ID_6\}$
  - `C` = 1
- Estado de p_9:
  - `M` = $\{\langle ID_7, 2\rangle\}$
  - `A` = $\emptyset$
  - `C` = 1

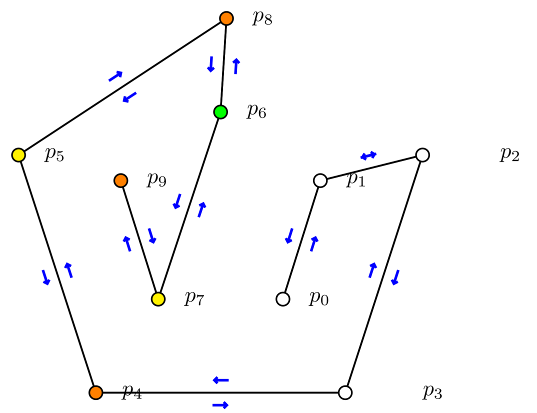

Figura 5: Grágica correspondiente a R_3.

En la ronda 4 tenemos que:

- Estado de p_0:
  - M = $\{\langle ID_1, \perp\rangle\}$
  - A = $\{ID_1\}$
  - C = $\perp$
- Estado de p_1:
  - M = $\{\langle ID_0, \perp\rangle,\ \langle ID_2, \perp\rangle\}$
  - A = $\{ID_0,\ ID_2\}$
  - C = $\perp$
- Estado de p_2:
  - M = $\{\langle ID_1, \perp\rangle,\ \langle ID_3, \perp\rangle\}$
  - A = $\{ID_1,\ ID_3\}$
  - C = $\perp$
- Estado de p_3:
  - M = $\{\langle ID_2, \perp\rangle,\ \langle ID_4, 1\rangle\}$
  - A = $\{ID_2\}$
  - C = 2
- Estado de p_4:
  - M = $\{\langle ID_3, \perp\rangle,\ \langle ID_5, 2\rangle\}$
  - A = $\{ID_3\}$
  - C = 1
- Estado de p_5:
  - M = $\{\langle ID_4, 1\rangle,\ \langle ID_8, 1\rangle\}$
  - A = $\emptyset$
  - C = 1
- Estado de p_6:
  - M = $\{\langle ID_7, 2\rangle,\ \langle ID_8, 1\rangle\}$
  - A = $\emptyset$
  - C = 3
- Estado de p_7:
  - M = $\{\langle ID_6, 3\rangle,\ \langle ID_9, 1\rangle\}$
  - A = $\emptyset$
  - C = 2
- Estado de p_8:
  - M = $\{\langle ID_5, 2\rangle,\ \langle ID_6, 3\rangle\}$
  - A = $\emptyset$
  - C = 1
- Estado de p_9:
  - M = $\{\langle ID_7, 2\rangle\}$
  - A = $\emptyset$
  - C = 1

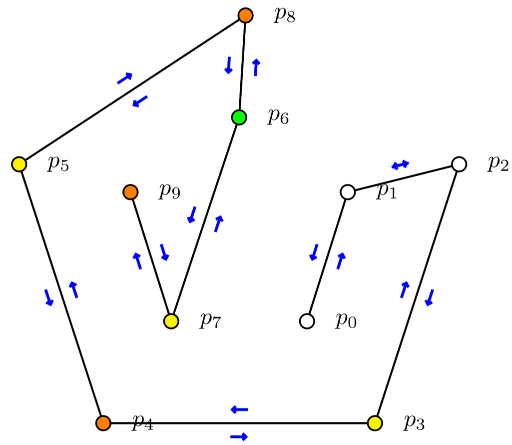

Figura 6: Gŕagica correspondiente a R_4.

En la ronda 5 tenemos que:

- Estado de p_0:
  - `M` = $\{\langle ID_1, \perp\rangle\}$
  - `A` = $\{ID_1\}$
  - `C` = $\perp$
- Estado de p_1:
  - `M` = $\{\langle ID_0, \perp\rangle,\ \langle ID_2, \perp\rangle\}$
  - `A` = $\{ID_0,\ ID_2\}$
  - `C` = $\perp$
- Estado de p_2:
  - `M` = $\{\langle ID_1, \perp\rangle,\ \langle ID_3, 2\rangle\}$
  - `A` = $\{ID_1\}$
  - `C` = 1
- Estado de p_3:
  - `M` = $\{\langle ID_2, \perp\rangle,\ \langle ID_4, 1\rangle\}$
  - `A` = $\{ID_2\}$
  - `C` = 2
- Estado de p_4:
  - `M` = $\{\langle ID_3, 2\rangle,\ \langle ID_5, 2\rangle\}$
  - `A` = $\emptyset$
  - `C` = 1
- Estado de p_5:
  - `M` = $\{\langle ID_4, 1\rangle,\ \langle ID_8, 1\rangle\}$
  - `A` = $\emptyset$
  - `C` = 1
- Estado de p_6:
  - `M` = $\{\langle ID_7, 2\rangle,\ \langle ID_8, 1\rangle\}$
  - `A` = $\emptyset$
  - `C` = 3
- Estado de p_7:
  - `M` = $\{\langle ID_6, 3\rangle,\ \langle ID_9, 1\rangle\}$
  - `A` = $\emptyset$
  - `C` = 2
- Estado de p_8:
  - `M` = $\{\langle ID_5, 2\rangle,\ \langle ID_6, 3\rangle\}$
  - `A` = $\emptyset$
  - `C` = 1
- Estado de p_9:
  - `M` = $\{\langle ID_7, 2\rangle\}$
  - `A` = $\emptyset$
  - `C` = 1

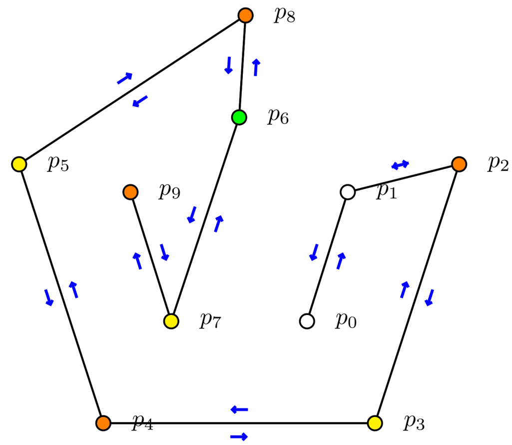

Figura 7: Grágica correspondiente a R_5.

En la ronda 6 tenemos que:

- Estado de p_0:
  - `M` = $\{\langle ID_1, \perp\rangle\}$
  - `A` = $\{ID_1\}$
  - `C` = $\perp$
- Estado de p_1:
  - `M` = $\{\langle ID_0, \perp\rangle,\ \langle ID_2, 1\rangle\}$
  - `A` = $\{ID_0\}$
  - `C` = 2
- Estado de p_2:
  - `M` = $\{\langle ID_1, \perp\rangle,\ \langle ID_3, 2\rangle\}$
  - `A` = $\{ID_1\}$
  - `C` = 1
- Estado de p_3:
  - `M` = $\{\langle ID_2, 1\rangle,\ \langle ID_4, 1\rangle\}$
  - `A` = $\emptyset$
  - `C` = 2
- Estado de p_4:
  - `M` = $\{\langle ID_3, 2\rangle,\ \langle ID_5, 2\rangle\}$
  - `A` = $\emptyset$
  - `C` = 1
- Estado de p_5:
  - `M` = $\{\langle ID_4, 1\rangle,\ \langle ID_8, 1\rangle\}$
  - `A` = $\emptyset$
  - `C` = 1
- Estado de p_6:
  - `M` = $\{\langle ID_7, 2\rangle,\ \langle ID_8, 1\rangle\}$
  - `A` = $\emptyset$
  - `C` = 3
- Estado de p_7:
  - `M` = $\{\langle ID_6, 3\rangle,\ \langle ID_9, 1\rangle\}$
  - `A` = $\emptyset$
  - `C` = 2
- Estado de p_8:
  - `M` = $\{\langle ID_5, 2\rangle,\ \langle ID_6, 3\rangle\}$
  - `A` = $\emptyset$
  - `C` = 1
- Estado de p_9:
  - `M` = $\{\langle ID_7, 2\rangle\}$
  - `A` = $\emptyset$
  - `C` = 1

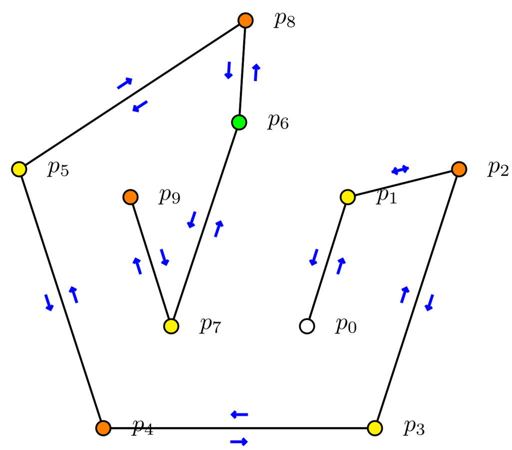

Figura 8: Gŕagica correspondiente a R_6.

En la ronda 7 tenemos que:

- Estado de p_0:
  - `M` = $\{\langle ID_1, 2\rangle\}$
  - `A` = $\emptyset$
  - `C` = 1
- Estado de p_1:
  - `M` = $\{\langle ID_0, \perp\rangle,\ \langle ID_2, 1\rangle\}$
  - `A` = $\{ID_0\}$
  - `C` = 2
- Estado de p_2:
  - `M` = $\{\langle ID_1, 2\rangle,\ \langle ID_3, 2\rangle\}$
  - `A` = $\emptyset$
  - `C` = 1
- Estado de p_3:
  - `M` = $\{\langle ID_2, 1\rangle,\ \langle ID_4, 1\rangle\}$
  - `A` = $\emptyset$
  - `C` = 2
- Estado de p_4:
  - `M` = $\{\langle ID_3, 2\rangle,\ \langle ID_5, 2\rangle\}$
  - `A` = $\emptyset$
  - `C` = 1
- Estado de p_5:
  - `M` = $\{\langle ID_4, 1\rangle,\ \langle ID_8, 1\rangle\}$
  - `A` = $\emptyset$
  - `C` = 1
- Estado de p_6:
  - `M` = $\{\langle ID_7, 2\rangle,\ \langle ID_8, 1\rangle\}$
  - `A` = $\emptyset$
  - `C` = 3
- Estado de p_7:
  - `M` = $\{\langle ID_6, 3\rangle,\ \langle ID_9, 1\rangle\}$
  - `A` = $\emptyset$
  - `C` = 2
- Estado de p_8:
  - `M` = $\{\langle ID_5, 2\rangle,\ \langle ID_6, 3\rangle\}$
  - `A` = $\emptyset$
  - `C` = 1
- Estado de p_9:
  - `M` = $\{\langle ID_7, 2\rangle\}$
  - `A` = $\emptyset$
  - `C` = 1

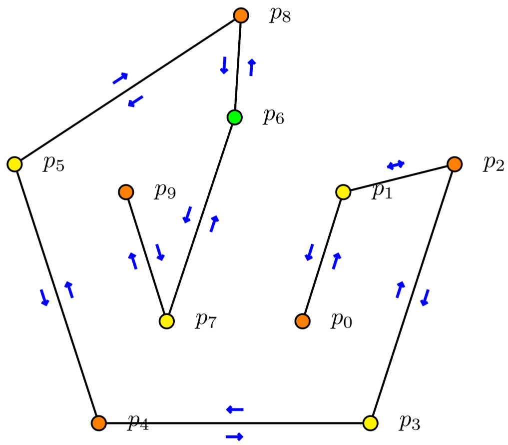

Figura 9: Grágica correspondiente a R_7.

En la ronda 8 tenemos que:

- Estado de p_0:
  - `M` = $\{\langle ID_1, 2\rangle\}$
  - `A` = $\emptyset$
  - `C` = 1
- Estado de p_1:
  - `M` = $\{\langle ID_0, 1\rangle, \langle ID_2, 1\rangle\}$
  - `A` = $\emptyset$
  - `C` = 2
- Estado de p_2:
  - `M` = $\{\langle ID_1, 2\rangle, \langle ID_3, 2\rangle\}$
  - `A` = $\emptyset$
  - `C` = 1
- Estado de p_3:
  - `M` = $\{\langle ID_2, 1\rangle, \langle ID_4, 1\rangle\}$
  - `A` = $\emptyset$
  - `C` = 2
- Estado de p_4:
  - `M` = $\{\langle ID_3, 2\rangle, \langle ID_5, 2\rangle\}$
  - `A` = $\emptyset$
  - `C` = 1
- Estado de p_5:
  - `M` = $\{\langle ID_4, 1\rangle, \langle ID_8, 1\rangle\}$
  - `A` = $\emptyset$
  - `C` = 1
- Estado de p_6:
  - `M` = $\{\langle ID_7, 2\rangle, \langle ID_8, 1\rangle\}$
  - `A` = $\emptyset$
  - `C` = 3
- Estado de p_7:
  - `M` = $\{\langle ID_6, 3\rangle, \langle ID_9, 1\rangle\}$
  - `A` = $\emptyset$
  - `C` = 2
- Estado de p_8:
  - `M` = $\{\langle ID_5, 2\rangle, \langle ID_6, 3\rangle\}$
  - `A` = $\emptyset$
  - `C` = 1
- Estado de p_9:
  - `M` = $\{\langle ID_7, 2\rangle\}$
  - `A` = $\emptyset$
  - `C` = 1

Como podemos notar, en la ronda 8 (R_8) no se colorea ningún proceso, pues todos han sido coloreados. En esta ronda solo hacemos $A = \emptyset$ a los procesos restantes. La complejidad en tiempo del algoritmo ha sido

$$\texttt{diam}(G)\ -2 \in \mathcal{O}(\texttt{diam(G)}).$$

2. Mostrar una ejecución en tiempo $\frac{\mathtt{diam}(G)}{2}$, con G una gráfica tal que $|V_G| = 10$. La nueva asignación de ID_i's se muestra a continuación:

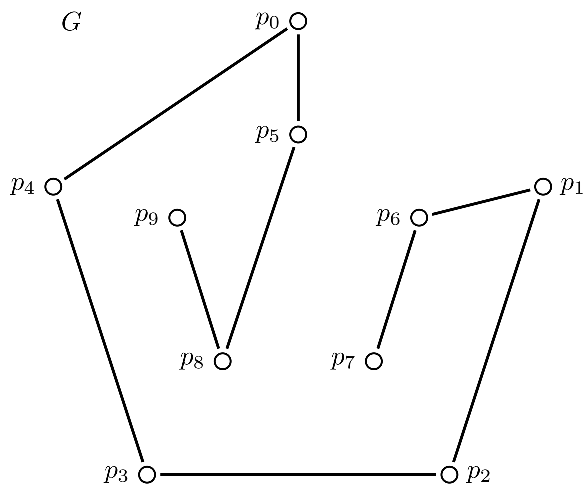

Figura 10: Gŕagica G.

En la ronda 0 tenemos que:

Se envían los ID_i's a todos los vecinos para cada proceso, por motivos de visualización de la gráfica no se ilustra cada ID_i para algún $i \in [0, \cdots, 9]$, pero cuándo sea necesario se indicara [3].

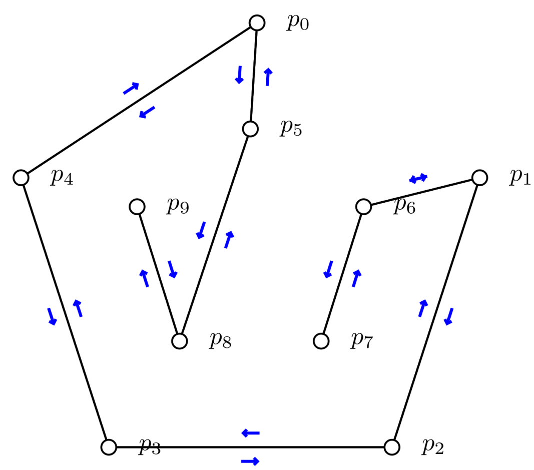

Figura 11: Gŕagica correspondiente a R_0.

En la ronda 1 tenemos que:

- Estado de p_0:
  - M = $\{\langle ID_4, \perp\rangle,\ \langle ID_5, \perp\rangle\}$
  - A = $\{ID_4,\ ID_5\}$
  - C = $\perp$
- Estado de p_1:
  - M = $\{\langle ID_2, \perp\rangle,\ \langle ID_6, \perp\rangle\}$
  - A = $\{ID_2,\ ID_6\}$
  - C = $\perp$

[3] Además es claro que para un proceso p_j existe un ID_j único.

- Estado de p_2:
  - `M` = $\{\langle ID_1, \perp\rangle,\ \langle ID_3, \perp\rangle\}$
  - `A` = $\{ID_1,\ ID_3\}$
  - `C` = $\perp$
- Estado de p_3:
  - `M` = $\{\langle ID_2, \perp\rangle,\ \langle ID_4, \perp\rangle\}$
  - `A` = $\{ID_2,\ ID_4\}$
  - `C` = $\perp$
- Estado de p_4:
  - `M` = $\{\langle ID_0, \perp\rangle,\ \langle ID_3, \perp\rangle\}$
  - `A` = $\{ID_0,\ ID_3\}$
  - `C` = 1
- Estado de p_5:
  - `M` = $\{\langle ID_0, \perp\rangle,\ \langle ID_8, \perp\rangle\}$
  - `A` = $\{ID_0,\ ID_8\}$
  - `C` = $\perp$
- Estado de p_6:
  - `M` = $\{\langle ID_1, \perp\rangle,\ \langle ID_7, \perp\rangle\}$
  - `A` = $\{ID_1,\ ID_7\}$
  - `C` = $\perp$
- Estado de p_7:
  - `M` = $\{\langle ID_6, \perp\rangle\}$
  - `A` = $\{ID_6\}$
  - `C` = 1
- Estado de p_8:
  - `M` = $\{\langle ID_5, \perp\rangle,\ \langle ID_9, \perp\rangle\}$
  - `A` = $\{ID_5,\ ID_9\}$
  - `C` = $\perp$
- Estado de p_9:
  - `M` = $\{\langle ID_8, \perp\rangle\}$
  - `A` = $\{ID_8\}$
  - `C` = 1

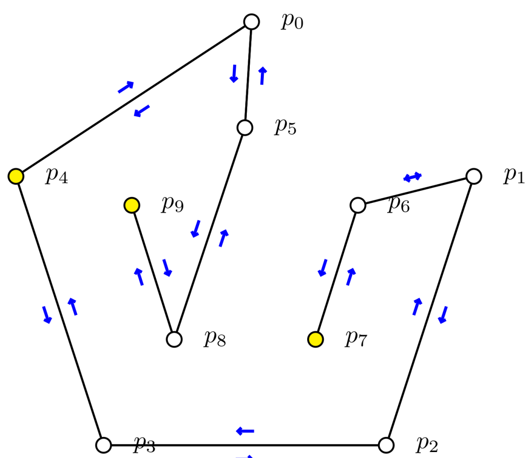

Figura 12: Grágica correspondiente a R_1.

En la ronda 2 tenemos que:

- Estado de p_0:
  - `M` = $\{\langle ID_4, 1\rangle,\ \langle ID_5, \perp\rangle\}$
  - `A` = $\{ID_5\}$
  - `C` = $\perp$
- Estado de p_1:
  - `M` = $\{\langle ID_2, \perp\rangle,\ \langle ID_6, \perp\rangle\}$
  - `A` = $\{ID_2,\ ID_6\}$
  - `C` = $\perp$
- Estado de p_2:
  - `M` = $\{\langle ID_1, \perp\rangle,\ \langle ID_3, \perp\rangle\}$

- $A = \{ID_1,\ ID_3\}$
- $C = \perp$

▪ Estado de p_3:

- $M = \{\langle ID_2, \perp\rangle,\ \langle ID_4, 1\rangle\}$
- $A = \{ID_2\}$
- $C = 2$

▪ Estado de p_4:

- $M = \{\langle ID_0, \perp\rangle,\ \langle ID_3, \perp\rangle\}$
- $A = \{ID_0,\ ID_3\}$
- $C = 1$

▪ Estado de p_5:

- $M = \{\langle ID_0, \perp\rangle,\ \langle ID_8, \perp\rangle\}$
- $A = \{ID_0,\ ID_8\}$
- $C = \perp$

▪ Estado de p_6:

- $M = \{\langle ID_1, \perp\rangle,\ \langle ID_7, 1\rangle\}$
- $A = \{ID_1\}$
- $C = 2$

▪ Estado de p_7:

- $M = \{\langle ID_6, \perp\rangle\}$
- $A = \{ID_6\}$
- $C = 1$

▪ Estado de p_8:

- $M = \{\langle ID_5, \perp\rangle,\ \langle ID_9, 1\rangle\}$
- $A = \{ID_5\}$
- $C = 2$

▪ Estado de p_9:

- $M = \{\langle ID_8, \perp\rangle\}$
- $A = \{ID_8\}$
- $C = 1$

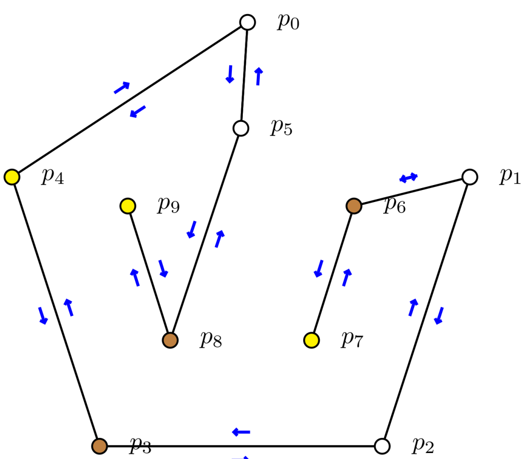

Figura 13: Gŕagica correspondiente a R_2.

En la ronda 3 tenemos que:

▪ Estado de p_0:

- $M = \{\langle ID_4, 1\rangle,\ \langle ID_5, \perp\rangle\}$
- $A = \{ID_5\}$
- $C = \perp$

▪ Estado de p_1:

- $M = \{\langle ID_2, \perp\rangle,\ \langle ID_6, \perp\rangle\}$
- $A = \{ID_2,\ ID_6\}$
- $C = \perp$

▪ Estado de p_2:

- $M = \{\langle ID_1, \perp\rangle,\ \langle ID_3, 2\rangle\}$
- $A = \{ID_1\}$
- $C = 1$

- Estado de p_3:
  - `M` = $\{\langle ID_2, \perp\rangle,\ \langle ID_4, 1\rangle\}$
  - `A` = $\{ID_2\}$
  - `C` = 2
- Estado de p_4:
  - `M` = $\{\langle ID_0, \perp\rangle,\ \langle ID_3, \perp\rangle\}$
  - `A` = $\{ID_0,\ ID_3\}$
  - `C` = 1
- Estado de p_5:
  - `M` = $\{\langle ID_0, \perp\rangle,\ \langle ID_8, 2\rangle\}$
  - `A` = $\{ID_0\}$
  - `C` = 1
- Estado de p_6:
  - `M` = $\{\langle ID_1, \perp\rangle,\ \langle ID_7, 1\rangle\}$
  - `A` = $\{ID_1\}$
  - `C` = 2
- Estado de p_7:
  - `M` = $\{\langle ID_6, 2\rangle\}$
  - `A` = $\emptyset$
  - `C` = 1
- Estado de p_8:
  - `M` = $\{\langle ID_5, \perp\rangle,\ \langle ID_9, 1\rangle\}$
  - `A` = $\{ID_5\}$
  - `C` = 2
- Estado de p_9:
  - `M` = $\{\langle ID_8, 2\rangle\}$
  - `A` = $\emptyset$
  - `C` = 1

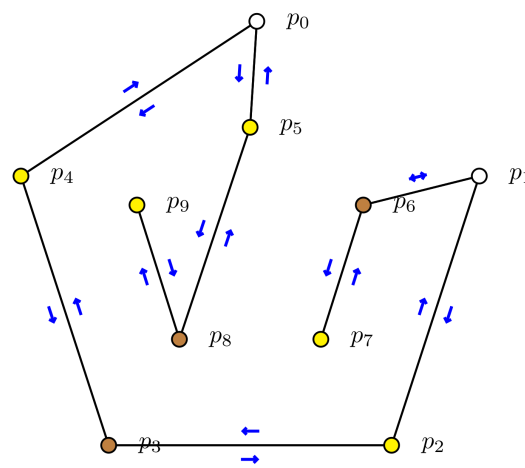

Figura 14: Gŕagica correspondiente a R_3.

En la ronda 4 tenemos que:

- Estado de p_0:
  - `M` = $\{\langle ID_4, 1\rangle,\ \langle ID_5, 1\rangle\}$
  - `A` = $\emptyset$
  - `C` = 2
- Estado de p_1:
  - `M` = $\{\langle ID_2, 1\rangle,\ \langle ID_6, 2\rangle\}$
  - `A` = $\emptyset$
  - `C` = 3
- Estado de p_2:
  - `M` = $\{\langle ID_1, \perp\rangle,\ \langle ID_3, 2\rangle\}$
  - `A` = $\{ID_1\}$
  - `C` = 1
- Estado de p_3:
  - `M` = $\{\langle ID_2, 1\rangle,\ \langle ID_4, 1\rangle\}$

- `A` = $\emptyset$
- `C` = 2

- Estado de p_4:
  - `M` = $\{\langle ID_0, \perp\rangle,\ \langle ID_3, 2\rangle\}$
  - `A` = $\{ID_0\}$
  - `C` = 1

- Estado de p_5:
  - `M` = $\{\langle ID_0, \perp\rangle,\ \langle ID_8, 2\rangle\}$
  - `A` = $\{ID_0\}$
  - `C` = 1

- Estado de p_6:
  - `M` = $\{\langle ID_1, \perp\rangle,\ \langle ID_7, 1\rangle\}$
  - `A` = $\{ID_1\}$
  - `C` = 2

- Estado de p_7:
  - `M` = $\{\langle ID_6, 2\rangle\}$
  - `A` = $\emptyset$
  - `C` = 1

- Estado de p_8:
  - `M` = $\{\langle ID_5, 1\rangle,\ \langle ID_9, 1\rangle\}$
  - `A` = $\emptyset$
  - `C` = 2

- Estado de p_9:
  - `M` = $\{\langle ID_8, 2\rangle\}$
  - `A` = $\emptyset$
  - `C` = 1

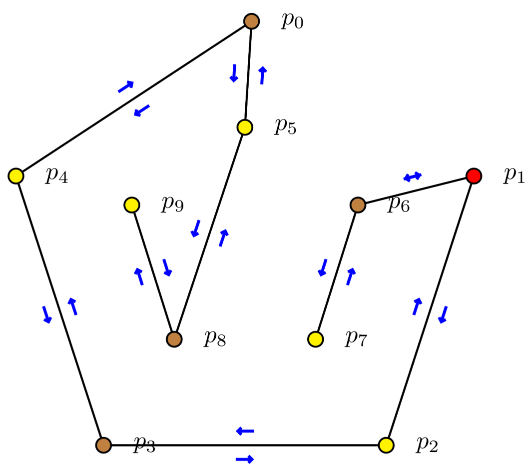

Figura 15: Grágica correspondiente a R_4.

En la ronda 5 tenemos que:

- Estado de p_0:
  - `M` = $\{\langle ID_4, 1\rangle,\ \langle ID_5, 1\rangle\}$
  - `A` = $\emptyset$
  - `C` = 2

- Estado de p_1:
  - `M` = $\{\langle ID_2, 1\rangle,\ \langle ID_6, 2\rangle\}$
  - `A` = $\emptyset$
  - `C` = 3

- Estado de p_2:
  - `M` = $\{\langle ID_1, 3\rangle,\ \langle ID_3, 2\rangle\}$
  - `A` = $\emptyset$
  - `C` = 1

- Estado de p_3:
  - `M` = $\{\langle ID_2, 1\rangle,\ \langle ID_4, 1\rangle\}$
  - `A` = $\emptyset$
  - `C` = 2

- Estado de p_4:
  - `M` = $\{\langle ID_0, 2\rangle,\ \langle ID_3, 2\rangle\}$
  - `A` = $\emptyset$
  - `C` = 1
- Estado de p_5:
  - `M` = $\{\langle ID_0, 2\rangle,\ \langle ID_8, 2\rangle\}$
  - `A` = $\emptyset$
  - `C` = 1
- Estado de p_6:
  - `M` = $\{\langle ID_1, 3\rangle,\ \langle ID_7, 1\rangle\}$
  - `A` = $\emptyset$
  - `C` = 2
- Estado de p_7:
  - `M` = $\{\langle ID_6, 2\rangle\}$
  - `A` = $\emptyset$
  - `C` = 1
- Estado de p_8:
  - `M` = $\{\langle ID_5, 1\rangle,\ \langle ID_9, 1\rangle\}$
  - `A` = $\emptyset$
  - `C` = 2
- Estado de p_9:
  - `M` = $\{\langle ID_8, 2\rangle\}$
  - `A` = $\emptyset$
  - `C` = 1

Como podemos notar, en la R_5 (ronda 5) no se colorea ningún proceso, pues todos los procesos de G se han coloreado. En esta ronda solo hacemos $A = \emptyset$ para el resto de procesos con $A \neq \emptyset$. Como `diam`(G) = 9 y nosostros terminamos en R_4 (ronda 4), entonces el algoritmo se ejecuto en tiempo $\frac{\mathtt{diam}(G)}{2}$. ◁

5. Un toro $n \times m$ es una versión dos dimensional de un anillo, donde un nodo en la posición (i, j) tiene un vecino hacia el norte en $(i, j-1)$, al este en $(i+1, j)$, al sur en $(i, j+1)$ y al oeste en $(i-1, j)$. Esos valores se calculan módulo n para la primera coordenada y módulo m para la segunda; de este modo $(0, 0)$ tiene vecinos $(0, m-1)$, $(1, 0)$, $(0, 1)$ y $(n-1, 0)$.
Supongamos que tenemos una red síncrona de paso de mensajes en forma de un toro $n \times m$, consistente de procesos anónimos idénticos, los cuáles no conocen n, m o sus propias coordenadas, pero tienen sentido de la dirección (es decir, puede decir cual de sus vecinos está al norte, este, etc.).
Pruebe o refute: Bajo estas condiciones, ¿existe un algoritmo determinista que calcule cuando $n > m$?

▷ Para este problema preguntémonos ¿qué necesitamos conocer para calcular si $n > m$ es verdad o falso para el "toro" T descrito?, la respuesta a esta pregunta es que debemos conocer los valores de n y m. Inicialmente no conocemos los valores de m y n, ahora supongamos que eventualmente podemos conocer los valores de n y m, las maneras de conocer estos valores se listan a continuación:

1. Conocer el volumen de T. Esto implicaría tener una infinidad de procesos y una infinidad de aristas que relacionen estos procesos[4], sin embargo, desconocemos si existe un algoritmo determinista que lo cálcule. Pues lo anterior implicaría al problema de paro y por tanto nuestro algoritmo no terminaría. Esto contradice el que podamos conocer n y m por medio del volumen de T.

2. Conocer la superficie de T. Mismo caso que el anterior, pues la superficie de T es continua. Por tanto, por aquí tampoco se puede.

[4] La topoogía de T es continua, para conocer su volumen necesitamos que nuestra red sea continua

3. Suponer que iniciamos un algoritmo determinista desde un proceso exterior a T, esto es, que podamos conocer un proceso distinguido p ubicado en la capa externa de T. Si existe una circunferencia tangente a 90 de T y p se encuentra en esta, entonces podemos dar indicaciones hacia todas las direcciones posibles (todas a la vez). En cuanto lleguemos a p nuevamente tendremos al menos dos medidas. Sin embargo, suponiendo que nos resultan exactamente dos medidas y no contamos ninguna diagonal circular, aunque nos resultará una medida mayor a la otra (asumiendo que las aristas nos pueden ayudar a esto) no sabriamos cuál corresponde a n y cual a m. Por tanto, este no es un camino viable.

En general, supongamos que existe tal algoritmo, entonces ese algoritmo tiene alguna manera de contar lo continuo de manera discreta (o discretizar lo continuo), esto es contradictorio a que nuestro algoritmo sea determinista. $\triangleleft$