UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO
Facultad de Ciencias

Autor: Adrián Aguilera Moreno

Lógica Computacional

Semanal 2

1. Para cada uno de los siguientes ejercicios, **justifica ampliamente** tu respuesta.

   a) **Define recursivamente** la función $atom(\phi)$ que, para $\phi \in PL$, regrese el número de fórmulas atómicas ($\top, \bot$, o variables proposicionales) en ϕ.

   b) **Define recursivamente** la función $con(\phi)$ que, para $\phi \in PL$, regresa el número de conectivos lógicos en ϕ.

   c) **Demuestra** que para cualquier fórmula $\phi \in PL$ se cumple que

   $$atom(\phi) \leq con(\phi) + 1$$

   Debes usar las funciones que definiste en los dos incisos anteriores.

▽ **Solución:**

a) Sea $\varphi \in ATOM$, definimos $atom(\varphi) = 1$. De igual manera, tenemos que

$$atom(\top) = 1 = atom(\bot)$$

Para ϕ, γ fórmulas en PL, definimos para los casos no atómicos (casos con llamada recursiva), esto es

$$\begin{array}{rcl} atom(\neg\phi) & = & atom(\phi) \\ atom(\phi \land \gamma) & = & atom(\phi) + atom(\gamma) \\ atom(\phi \lor \gamma) & = & atom(\phi) + atom(\gamma) \\ atom(\phi \Rightarrow \gamma) & = & atom(\phi) + atom(\gamma) \\ atom(\phi \Leftrightarrow \gamma) & = & atom(\phi) + atom(\gamma) \end{array}$$

Así, $atom : PL \to \mathbb{N}/\{0\}$. Nótese que el codominio de "*atom*" no puede contener al 0, pues $\{\{\neg\}, \{\land\}, \{\lor\}, \{\Rightarrow\}, \{\Leftrightarrow\}\} \nsubseteq PL$[1].

b) Para $\varphi \in ATOM \cup \{\bot, \top\}$, definimos $con(\varphi) = 0$. Luego, para $\phi, \gamma \in PL$, tenemos que

$$\begin{array}{rcl} con(\neg\phi) & = & 1 + con(\phi) \\ con(\phi \land \gamma) & = & 1 + con(\phi) + con(\gamma) \\ con(\phi \lor \gamma) & = & 1 + con(\phi) + con(\gamma) \\ con(\phi \Rightarrow \gamma) & = & 1 + con(\phi) + con(\gamma) \\ con(\phi \Leftrightarrow \gamma) & = & 1 + con(\phi) + con(\gamma) \end{array}$$

De lo anterior podemos constatar que, $con : PL \to \mathbb{N}$.

c) ***Demostración:*** Sea $\varphi \in ATOM \cup \{\bot, \top\}$, así

$$\begin{array}{lll} \Rightarrow & atom(\varphi) \leq con(\varphi) + 1 & \text{Es lo que queremos ver.} \\ \Rightarrow & atom(\varphi) \leq 0 + 1 & \text{Por definición de “}con\text{”.} \\ \Rightarrow & 1 \leq 1 & \text{Por definición de “}atom\text{”.} \end{array}$$

Por la dicotomía de "$\leq$", tenemos que $1 = 1$ y se cumple lo anterior.
Ahora, supongamos que para ϕ, γ fórmulas en PL se cumple que

$$\begin{array}{rcl} atom(\phi) & \leq & con(\phi) + 1 \\ atom(\gamma) & \leq & con(\gamma) + 1 \end{array}$$

luego, observemos los siguientes casos:

[1] Por la definición recursiva de PL, el caso base se da cuando $\varphi \in ATOM$.

·) Negación. Supongamos sin pérdida de generalidad a ϕ, así

$$\begin{array}{rcll} atom(\neg\phi) & = & atom(\phi) & \text{Definición de ``}atom\text{''.} \\ & \leq & con(\phi)+1 & \text{Por hipótesis de inducción.} \\ & = & con(\neg\phi) & \text{Por definición de ``}con\text{''.} \\ & \leq & con(\neg\phi)+1 & \text{Por dicotomía de ``}\leq\text{'', tenemos ``}<\text{''.} \end{array}$$

$$\therefore\ atom(\neg\phi) \leq con(\neg\phi)+1$$

·) Conjunción. Veamos que

$$\begin{array}{rcll} atom(\phi\wedge\gamma) & = & atom(\phi)+atom(\gamma) & \text{Por definición de ``}atom\text{''.} \\ & \leq & (con(\phi)+1)+(con(\gamma)+1) & \text{Por hipótesis inductiva.} \\ & = & (1+con(\phi)+con(\gamma))+1 & \text{Asociatividad en la suma.} \\ & = & con(\phi\wedge\gamma)+1 & \text{Definición de ``}con\text{''.} \end{array}$$

$$\therefore\ atom(\phi\wedge\gamma) \leq con(\phi\wedge\gamma)+1$$

·) Disyunción. Observemos que

$$\begin{array}{rcll} atom(\phi\vee\gamma) & = & atom(\phi)+atom(\gamma) & \text{Por definición de ``}atom\text{''.} \\ & \leq & (con(\phi)+1)+(con(\gamma)+1) & \text{Por hipótesis inductiva.} \\ & = & (1+con(\phi)+con(\gamma))+1 & \text{Asociatividad en la suma.} \\ & = & con(\phi\vee\gamma)+1 & \text{Definición de ``}con\text{''.} \end{array}$$

$$\therefore\ atom(\phi\vee\gamma) \leq con(\phi\vee\gamma)+1$$

·) Implicación simple. Tenemos que

$$\begin{array}{rcll} atom(\phi\Rightarrow\gamma) & = & atom(\phi)+atom(\gamma) & \text{Por definición de ``}atom\text{''.} \\ & \leq & (con(\phi)+1)+(con(\gamma)+1) & \text{Por hipótesis inductiva.} \\ & = & (1+con(\phi)+con(\gamma))+1 & \text{Asociatividad en la suma.} \\ & = & con(\phi\Rightarrow\gamma)+1 & \text{Definición de ``}con\text{''.} \end{array}$$

$$\therefore\ atom(\phi\Rightarrow\gamma) \leq con(\phi\Rightarrow\gamma)+1$$

·) Bicondicional. Notemos que

$$\begin{array}{rcll} atom(\phi\Leftrightarrow\gamma) & = & atom(\phi)+atom(\gamma) & \text{Por definición de ``}atom\text{''.} \\ & \leq & (con(\phi)+1)+(con(\gamma)+1) & \text{Por hipótesis inductiva.} \\ & = & (1+con(\phi)+con(\gamma))+1 & \text{Asociatividad en la suma.} \\ & = & con(\phi\Leftrightarrow\gamma)+1 & \text{Definición de ``}con\text{''.} \end{array}$$

$$\therefore\ atom(\phi\Leftrightarrow\gamma) \leq con(\phi\Leftrightarrow\gamma)+1$$

□

◁

2. Para cada uno de los siguientes ejercicios, **justifica ampliamente** tu respuesta.

   a) **Define recursivamente** la función $icd(\phi)$ que, para $\phi \in PL$, regresa la fórmula resultante de intercambiar en ϕ todas las conjunciones por disyunciones y todas las disyunciones por conjunciones.

b) **Verifica** la definición de tu función mostrando paso a paso la ejecución de

$$icd(p \wedge (q \vee \neg r) \rightarrow \neg(r \vee s) \wedge t)$$

▽ **Solución:** Analicemos ambos incisos:

☐ Sea $\varphi \in ATOM$, entonces definimos a $icd(\varphi) = \varphi$. En general, para ϕ, γ fórmulas en PL se tiene que

$$\begin{array}{rcl} icd(\neg\phi) & = & \neg icd(\phi) \\ icd(\phi \wedge \gamma) & = & icd(\phi) \vee icd(\gamma) \\ icd(\phi \vee \gamma) & = & icd(\phi) \wedge icd(\gamma) \\ icd(\phi \Rightarrow \gamma) & = & icd(\phi) \Rightarrow icd(\gamma) \\ icd(\phi \Leftrightarrow \gamma) & = & icd(\phi) \Leftrightarrow icd(\gamma) \end{array}$$

así, $icd : PL \rightarrow PL$ [por la definición recursiva de PL].

☐ Ahora, verifiquemos la definición anterior con el siguiente caso particular, esto es

$$\begin{array}{rcl} icd(p \wedge (q \vee \neg r) \rightarrow \neg(r \vee s) \wedge t) & = & icd(p \wedge (q \vee \neg r)) \rightarrow icd(\neg(r \vee s) \wedge t)) \\ & = & icd(p) \vee icd((q \vee \neg r)) \rightarrow icd(\neg(r \vee s)) \vee icd(t) \\ & = & p \vee (icd(q) \wedge icd(\neg r)) \rightarrow \neg icd((r \vee s)) \vee t \\ & = & p \vee (q \wedge \neg icd(r)) \rightarrow \neg(icd(r) \wedge icd(s)) \vee t \\ & = & p \vee (q \wedge \neg r) \rightarrow \neg(r \wedge s) \vee t \end{array}$$

◁