UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO
Facultad de Ciencias

Autor: Adrián Aguilera Moreno

Lógica Computacional

Semanal 2

1. Para cada uno de los siguientes ejercicios, **justifica ampliamente** tu respuesta.

   a) **Define recursivamente** la función $atom(\phi)$ que, para $\phi \in PL$, regrese el número de fórmulas atómicas ($\top, \bot$, o variables proposicionales) en ϕ.

   b) **Define recursivamente** la función $con(\phi)$ que, para $\phi \in PL$, regresa el número de conectivos lógicos en ϕ.

   c) **Demuestra** que para cualquier fórmula $\phi \in PL$ se cumple que

   $$atom(\phi) \leq con(\phi) + 1$$

   Debes usar las funciones que definiste en los dos incisos anteriores.

▽ **Solución:**

a) Sea $\varphi \in ATOM$, definimos $atom(\varphi) = 1$. De igual manera, tenemos que

$$atom(\top) = 1 = atom(\bot)$$

Para ϕ, γ fórmulas en PL, definimos para los casos no atómicos (casos con llamada recursiva), esto es

$$\begin{array}{rcl} atom(\neg\phi) & = & atom(\phi) \\ atom(\phi \wedge \gamma) & = & atom(\phi) + atom(\gamma) \\ atom(\phi \vee \gamma) & = & atom(\phi) + atom(\gamma) \\ atom(\phi \Rightarrow \gamma) & = & atom(\phi) + atom(\gamma) \\ atom(\phi \Leftrightarrow \gamma) & = & atom(\phi) + atom(\gamma) \end{array}$$

Así, $atom : PL \to \mathbb{N}/\{0\}$. Nótese que el codominio de "*atom*" no puede contener al 0, pues $\{\{\neg\}, \{\wedge\}, \{\vee\}, \{\Rightarrow\}, \{\Leftrightarrow\}\} \nsubseteq PL$[1].

b) Para $\varphi \in ATOM \cup \{\bot, \top\}$, definimos $con(\varphi) = 0$. Luego, para $\phi, \gamma \in PL$, tenemos que

$$\begin{array}{rcl} con(\neg\phi) & = & 1 + con(\phi) \\ con(\phi \wedge \gamma) & = & 1 + con(\phi) + con(\gamma) \\ con(\phi \vee \gamma) & = & 1 + con(\phi) + con(\gamma) \\ con(\phi \Rightarrow \gamma) & = & 1 + con(\phi) + con(\gamma) \\ con(\phi \Leftrightarrow \gamma) & = & 1 + con(\phi) + con(\gamma) \end{array}$$

De lo anterior podemos constatar que, $con : PL \to \mathbb{N}$.

> Nótese que, como
>
> $$\{\{\neg\}, \{\wedge\}, \{\vee\}, \{\Rightarrow\}, \{\Leftrightarrow\}\} \nsubseteq PL$$
>
> entonces no tendremos cosas como $con(\neg) = 1 = con(\wedge) = con(\vee) = con(\Rightarrow) = con(\Leftrightarrow)$, es por esto que no entran en nuestro caso base de la recursión.

c) ***Demostración:*** Sea $\varphi \in ATOM \cup \{\bot, \top\}$, así

$$\begin{array}{lll} \Rightarrow & atom(\varphi) \leq con(\varphi) + 1 & \text{Es lo que queremos ver.} \\ \Rightarrow & atom(\varphi) \leq 0 + 1 & \text{Por definición de "}con\text{".} \\ \Rightarrow & 1 \leq 1 & \text{Por definición de "}atom\text{".} \end{array}$$

[1] Por la definición recursiva de PL, el caso base se da cuando $\varphi \in ATOM$.

Por la dicotomía de "$\leq$", tenemos que $1 = 1$ y se cumple lo anterior.
Ahora, supongamos que para ϕ, γ fórmulas en PL se cumple que

$$\begin{array}{rcl} atom(\phi) & \leq & con(\phi) + 1 \\ atom(\gamma) & \leq & con(\gamma) + 1 \end{array}$$

luego, observemos los siguientes casos:

·) Negación. Supongamos sin pérdida de generalidad a ϕ, así

$$\begin{array}{rcll} atom(\neg\phi) & = & atom(\phi) & \text{Definición de "}atom\text{".} \\ & \leq & con(\phi) + 1 & \text{Por hipótesis de inducción.} \\ & = & con(\neg\phi) & \text{Por definición de "}con\text{".} \\ & \leq & con(\neg\phi) + 1 & \text{Por dicotomía de "}\leq\text{", tenemos "}<\text{".} \end{array}$$

$$\therefore\ atom(\neg\phi) \leq con(\phi) + 1$$

·) Conjunción. Veamos que

$$\begin{array}{rcll} atom(\phi \wedge \gamma) & = & atom(\phi) + atom(\gamma) & \text{Por definición de "}atom\text{".} \\ & \leq & (con(\phi) + 1) + (con(\gamma) + 1) & \text{Por hipótesis inductiva.} \\ & = & (1 + con(\phi) + con(\gamma)) + 1 & \text{Asociatividad en la suma.} \\ & = & con(\phi \wedge \gamma) + 1 & \text{Definición de "}con\text{".} \end{array}$$

$$\therefore\ atom(\phi \wedge \gamma) \leq con(\phi \wedge \gamma) + 1$$

·) Disyunción. Observemos que

$$\begin{array}{rcll} atom(\phi \vee \gamma) & = & atom(\phi) + atom(\gamma) & \text{Por definición de "}atom\text{".} \\ & \leq & (con(\phi) + 1) + (con(\gamma) + 1) & \text{Por hipótesis inductiva.} \\ & = & (1 + con(\phi) + con(\gamma)) + 1 & \text{Asociatividad en la suma.} \\ & = & con(\phi \vee \gamma) + 1 & \text{Definición de "}con\text{".} \end{array}$$

$$\therefore\ atom(\phi \vee \gamma) \leq con(\phi \vee \gamma) + 1$$

·) Implicación simple. Tenemos que

$$\begin{array}{rcll} atom(\phi \Rightarrow \gamma) & = & atom(\phi) + atom(\gamma) & \text{Por definición de "}atom\text{".} \\ & \leq & (con(\phi) + 1) + (con(\gamma) + 1) & \text{Por hipótesis inductiva.} \\ & = & (1 + con(\phi) + con(\gamma)) + 1 & \text{Asociatividad en la suma.} \\ & = & con(\phi \Rightarrow \gamma) + 1 & \text{Definición de "}con\text{".} \end{array}$$

$$\therefore\ atom(\phi \Rightarrow \gamma) \leq con(\phi \Rightarrow \gamma) + 1$$

·) Bicondicional. Notemos que

$$\begin{array}{rcll} atom(\phi \Leftrightarrow \gamma) & = & atom(\phi) + atom(\gamma) & \text{Por definición de "}atom\text{".} \\ & \leq & (con(\phi) + 1) + (con(\gamma) + 1) & \text{Por hipótesis inductiva.} \\ & = & (1 + con(\phi) + con(\gamma)) + 1 & \text{Asociatividad en la suma.} \\ & = & con(\phi \Leftrightarrow \gamma) + 1 & \text{Definición de "}con\text{".} \end{array}$$

$$\therefore\ atom(\phi \Leftrightarrow \gamma) \leq con(\phi \Leftrightarrow \gamma) + 1$$

$\square$

$\triangleleft$

2. Para cada uno de los siguientes ejercicios, **justifica ampliamente** tu respuesta.

   a) **Define recursivamente** la función $icd(\phi)$ que, para $\phi \in PL$, regresa la fórmula resultante de intercambiar en ϕ todas las conjunciones por disyunciones y todas las disyunciones por conjunciones.

   b) **Verifica** la definición de tu función mostrando paso a paso la ejecución de

$$icd(p \wedge (q \vee \neg r) \rightarrow \neg(r \vee s) \wedge t)$$

$\triangledown$ **Solución:** Analicemos ambos incisos:

$\square$ Sea $\varphi \in ATOM$, entonces definimos a $icd(\varphi) = \varphi$. En general, para ϕ, γ fórmulas en PL se tiene que

$$\begin{array}{rcl} icd(\neg\phi) & = & \neg icd(\phi) \\ icd(\phi \wedge \gamma) & = & icd(\phi) \vee icd(\gamma) \\ icd(\phi \vee \gamma) & = & icd(\phi) \wedge icd(\gamma) \\ icd(\phi \Rightarrow \gamma) & = & icd(\phi) \Rightarrow icd(\gamma) \\ icd(\phi \Leftrightarrow \gamma) & = & icd(\phi) \Leftrightarrow icd(\gamma) \end{array}$$

así, $icd : PL \rightarrow PL$ [por la definición recursiva de PL].

$\square$ Ahora, verifiquemos la definición anterior con el siguiente caso particular, esto es

$$\begin{array}{rcl} icd(p \wedge (q \vee \neg r) \rightarrow \neg(r \vee s) \wedge t) & = & icd(p \wedge (q \vee \neg r)) \rightarrow icd(\neg(r \vee s) \wedge t)) \\ & = & icd(p) \vee icd((q \vee \neg r)) \rightarrow icd(\neg(r \vee s)) \vee icd(t) \\ & = & p \vee (icd(q) \wedge icd(\neg r)) \rightarrow \neg icd((r \vee s)) \vee t \\ & = & p \vee (q \wedge \neg icd(r)) \rightarrow \neg(icd(r) \wedge icd(s)) \vee t \\ & = & p \vee (q \wedge \neg r) \rightarrow \neg(r \wedge s) \vee t \end{array}$$

$\triangleleft$

Desafío extra...
En una granja con mucho folklore se discute acerca del siguiente razonamiento.

«El día que nace un becerro, cualquiera lo puede cargar con facilidad. Y los becerros no crecen demasiado en un día, entonces si puedes cargar a un becerro un día, lo puedes cargar también al día siguiente. Siguiendo con este razonamiento, entonces también debería serte posible cargar al becerro el día siguiente y el siguiente y así sucesivamente. Pero después de un año, el becerro se va a convertir en una vaca adulta de 1000kg, algo que claramente ya no puedes cargar.»

Muestra, si es posible, que el argumento es correcto utilizándo inducción. En caso contrario, **indica** en donde está el error en el razonamiento inductivo. **Justifica ampliamente tu respuesta**.

$\triangledown$ **Solución:** Observemos que el enunciado tiene como conclusión al predicado: "Pero después de un año, el becerro se va a convertir en una vaca adulta de 1000kg, algo que claramente ya no puedes cargar", que se resume en "El becerro se va a convertir en una vaca adulta de 1000kg" **y** "algo que claramente ya no puedes cargar", si nosotros suponemos que el argumento en general es válido, entonces se debe cumplir la conjunción anterior, entonces concluimos que no se puede cargar al becerro (vaca) después de un año [en la conjunción ambos conjuntos deben tener un valor de verdad 1 o verdadero para que el enunciado sea válido].
Así mostremos que el becerro después de un año aún se podrá cargar, esto por inducción en la cantidad de días que pasan.

Caso base: "El día que nace un becerro, cualquiera lo puede cargar con facilidad".
Hipótesis de Inducción: "debería serte posible cargar al becerro el día siguiente y el siguiente y así sucesivamente".
Paso de inducción: Supongamos un día x donde el becerro se pueda cargar, entonces el $sig(x) = y$ es un día, y por hipótesis de inducción tenemos que en el día y se puede cargar el becerro. Así, todos los días se puede cargar al becerro, en particular cuando este tenga más de un año!!, he aquí un contradicción, pues habíamos notado que después de un año la vaca ya no podría ser cargada.

Pero ¿dónde surge el error? El error surge de la hipótesis de inducción, si vemos al argumento como algo definido recursivamente, entonces podemos notar que su definición está hecha sin mayor cuidado, pues se hace en base a los días transcurrido sin percatarse del peso que adquiere día con día, y si bien la hipótesis es cierta para los primeros días, se deja de cumplir cuando el becerro alcanza un peso mayor a lo que es humanamente posible de cargar. Así, definir que el becerro se puede cargar el siguiente de un día en donde se puede cargar es incorrecto. $\triangleleft$