UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Facultad de Ciencias

Autor: Adrián Aguilera Moreno

**Lógica Computacional**

# Semanal 8

Para cada uno de los siguientes ejercicios, **justifica ampliamente** tu respuesta.

1. **Obtén** la Forma Normal Negativa y la Forma Normal Prenex de las siguientes fórmulas:

- $\forall_x \forall_y (\exists_z (R(x,z) \to R(z,y)) \to P(y,x)) \to \exists_x (\forall_y P(x,y) \to \exists_y P(y,x)) \to \forall_x P(x,x)$:

  ***Solución:*** Llamemos $\varphi$ a la ecuación anterior. Así, al rectificar nuestra ecuación tenemos que

$$\begin{aligned} rec(\varphi) &= \forall_{x'} \forall_{y'} (\exists_{z'} (R(x',z') \to R(z',y')) \to P(y',x')) \to \exists_m (\forall_n P(m,n) \to \exists_y P(y,m)) \\ &\quad \to \forall_x P(x,x) \\ &= \varphi' \end{aligned}$$

  encontrando la Forma Normal Negativa tenemos que

$$\begin{aligned} fnn(\varphi') &= \forall_{x'} \forall_{y'} (\exists_{z'} (\neg R(x',z') \lor R(z',y')) \to P(y',x')) \to \exists_m (\neg \forall_n P(m,n) \lor \exists_y P(y,m)) \\ &\quad \to \forall_x P(x,x) \\ &= \forall_{x'} \forall_{y'} (\neg \exists_{z'} (\neg R(x',z') \lor R(z',y')) \lor P(y',x')) \to \exists_m (\neg \forall_n P(m,n) \lor \exists_y P(y,m)) \\ &\quad \to \forall_x P(x,x) \\ &= \neg \forall_{x'} \forall_{y'} (\neg \exists_{z'} (\neg R(x',z') \lor R(z',y')) \lor P(y',x')) \lor \exists_m (\neg \forall_n P(m,n) \lor \exists_y P(y,m)) \\ &\quad \to \forall_x P(x,x) \\ &= \neg (\neg \forall_{x'} \forall_{y'} (\neg \exists_{z'} (\neg R(x',z') \lor R(z',y')) \lor P(y',x')) \lor \exists_m (\neg \forall_n P(m,n) \lor \exists_y P(y,m))) \\ &\quad \lor \forall_x P(x,x) \\ &= \forall_{x'} \forall_{y'} (\neg \exists_{z'} (\neg R(x',z') \lor R(z',y')) \lor P(y',x')) \land \neg \exists_m (\neg \forall_n P(m,n) \lor \exists_y P(y,m)) \\ &\quad \lor \forall_x P(x,x) \\ &= \forall_{x'} \forall_{y'} (\forall_{z'} (R(x',z') \land \neg R(z',y')) \lor P(y',x')) \land \forall_m (\forall_n P(m,n) \land \forall_y \neg P(y,m)) \\ &\quad \lor \forall_x P(x,x) \\ &= \varphi'' \end{aligned}$$

  por último, encontremos la Forma Normal de Prenex. Esto es

$$\begin{aligned} prenex(\varphi'') &= \forall_{x'} \forall_{y'} (\forall_{z'} (R(x',z') \land \neg R(z',y')) \lor P(y',x')) \land \forall_m (\forall_n P(m,n) \land \forall_y \neg P(y,m)) \\ &\quad \lor \forall_x P(x,x) \\ &= \forall_x (\forall_{x'} \forall_{y'} (\forall_{z'} (R(x',z') \land \neg R(z',y')) \lor P(y',x')) \land \forall_m (\forall_n P(m,n) \land \forall_y \neg P(y,m)) \\ &\quad \lor P(x,x)) \\ &= \forall_x (\forall_{x'} \forall_{y'} (\forall_{z'} (R(x',z') \land \neg R(z',y')) \lor P(y',x')) \land \forall_y \forall_n \forall_m (P(m,n) \land \neg P(y,m)) \\ &\quad \lor P(x,x)) \\ &= \forall_x (\forall_y \forall_n \forall_m \forall_{x'} \forall_{y'} (\forall_{z'} (R(x',z') \land \neg R(z',y')) \lor P(y',x')) \land (P(m,n) \land \neg P(y,m)) \\ &\quad \lor P(x,x)) \\ &= \forall_x (\forall_{z'} \forall_y \forall_n \forall_m \forall_{x'} \forall_{y'} ((R(x',z') \land \neg R(z',y')) \lor P(y',x')) \land (P(m,n) \land \neg P(y,m)) \\ &\quad \lor P(x,x)) \\ &= \forall_x \forall_{z'} \forall_y \forall_n \forall_m \forall_{x'} \forall_{y'} (((R(x',z') \land \neg R(z',y')) \lor P(y',x')) \land P(m,n) \land \neg P(y,m)) \\ &\quad \lor P(x,x)) \end{aligned}$$

  $\square$

- $\forall_x \forall_y (P(x,y) \to \exists_z (R(x,y) \land R(z,y))) \to \exists_x (\forall_y P(x,y) \land \forall_y P(y,x)) \lor \exists_x P(x,x)$:

***Solución:*** Llamemos $\phi$ a la ecuación anterior. Así, al rectificar nuestra ecuación tenemos que

$$\begin{aligned} rec(\phi) &= \forall_{x'}\forall_{y'}\,(P(x',y') \to \exists_z(R(x',y') \wedge R(z,y'))) \to \exists_m\,(\forall_n P(m,n) \wedge \forall_s P(s,m)) \vee \exists_x P(x,x) \\ &= \phi' \end{aligned}$$

encontrando la Forma Normal Negativa tenemos que

$$\begin{aligned} fnn(\phi') &= \forall_{x'}\forall_{y'}\,(\neg P(x',y') \vee \exists_z(R(x',y') \wedge R(z,y'))) \to \exists_m\,(\forall_n P(m,n) \wedge \forall_s P(s,m)) \vee \exists_x P(x,x) \\ &= \neg\forall_{x'}\forall_{y'}\,(\neg P(x',y') \vee \exists_z(R(x',y') \wedge R(z,y'))) \vee \exists_m\,(\forall_n P(m,n) \wedge \forall_s P(s,m)) \vee \exists_x P(x,x) \\ &= \exists_{x'}\exists_{y'}\,(P(x',y') \wedge \forall_z(\neg R(x',y') \vee \neg R(z,y'))) \vee \exists_m\,(\forall_n P(m,n) \wedge \forall_s P(s,m)) \vee \exists_x P(x,x) \\ &= \phi'' \end{aligned}$$

por último, encontremos la Forma Normal de Prennex, esto es

$$\begin{aligned} prennex(\phi'') &= \exists_{x'}\exists_{y'}\forall_z\,(P(x',y') \wedge (\neg R(x',y') \vee \neg R(z,y'))) \vee \exists_m\forall_n\forall_s\,(P(m,n) \wedge P(s,m)) \vee \exists_x P(x,x) \\ &= \exists_{x'}\exists_{y'}\forall_z\exists_x\exists_m\forall_n\forall_s\,(P(x',y') \wedge (\neg R(x',y') \vee \neg R(z,y')) \vee (P(m,n) \wedge P(s,m)) \vee P(x,x)) \end{aligned}$$

□

- $\forall_x\exists_y\,(B(x,a) \wedge M(y,x)) \to \exists_z\,(B(x,w) \wedge M(z,x))$:

***Solución:*** Llamemos  a la ecuación anterior. Así, al rectificar nuestra ecuación tenemos que que

$$\begin{aligned} rec(\theta) &= \forall_{x'}\exists_{y'}\,(B(x',a) \wedge M(y',x')) \to \exists_z\,(B(x,w) \wedge M(z,x)) \\ &= \theta' \end{aligned}$$

encontrando la Forma Normal Negativa, tenemos que

$$\begin{aligned} fnn(\theta') &= \neg\forall_{x'}\exists_{y'}\,(B(x',a) \wedge M(y',x')) \vee \exists_z\,(B(x,w) \wedge M(z,x)) \\ &= \exists_{x'}\forall_{y'}\,(\neg B(x',a) \vee \neg M(y',x')) \vee \exists_z\,(B(x,w) \wedge M(z,x)) \\ &= \theta'' \end{aligned}$$

por último, encontremos la Forma Normal de Prennex, esto es

$$prennex(\theta'') = \exists_z\exists_{x'}\forall_{y'}\,(\neg B(x',a) \vee \neg M(y',x')) \vee (B(x,w) \wedge M(z,x))$$

□