# UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

## Facultad de Ciencias

Autor: Adrián Aguilera Moreno

**Lógica Computacional**

# Semanal 11

Para cada uno de los siguientes ejercicios, **justifica ampliamente** tu respuesta.
**Desmuestra** mediante deducción natural lo siguiente:

- $(a)$

$$\begin{array}{c} (r \lor p) \land q \to l \\ m \lor q \to s \land t \\ (s \land t) \land l \to r \\ p \to q \\ \hline \therefore \quad m \land q \to r \end{array}$$

***Demostración:***

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $(r \lor p) \land q \to l$ | Premisa 1. |
| 2. | $m \lor q \to s \land t$ | Premisa 2. |
| 3. | $(s \land t) \land l \to r$ | Premisa 3. |
| 4. | $p \to q$ | Premisa 4. |
| 5. | $m \land p$ | Por la proposición 1 en la nota de clase 14. |
| 6. | $p$ | $\mathrm{E}_\land$ de 5. |
| 7. | $m$ | $\mathrm{E}_\land$ de 5. |
| 8. | $q$ | $\mathrm{E}_\to$ de 6 y 4. |
| 9. | $m \lor q$ | $\mathrm{I}_\lor$ de 7 y 8. |
| 10. | $s \land t$ | $\mathrm{E}_\to$ de 9 y 2. |
| 11. | $s$ | $\mathrm{E}_\land$ de 10. |
| 12. | $t$ | $\mathrm{E}_\land$ de 10. |
| 13. | $r \lor p$ | $\mathrm{I}_\lor$ de 6. |
| 14. | $(r \lor p) \land q$ | $\mathrm{I}_\land$ de 13. |
| 15. | $l$ | $\mathrm{E}_\to$ de 1 y 14. |
| 16. | $(s \land t) \land l$ | $\mathrm{I}_\land$ de 10 y 15. |
| 17. | $r$ | $\mathrm{E}_\to$ de 3 y 16. |

$\square$

- $(b)$

$$\begin{array}{c} p \to q \lor r \\ \neg p \to t \\ (\neg t \lor s) \land \neg q \\ \hline \therefore \quad r \lor s \end{array}$$

***Demostración:***

| | | |
|---|---|---|
| 1. | $p \to q \lor r$ | Premisa 1. |
| 2. | $\neg p \to t$ | Premisa 2. |
| 3. | $(\neg t \lor s) \land \neg q$ | Premisa 3. |
| 4. | $\neg t \lor s$ | $\mathrm{E}_\land$ de 3. |
| 5. | $\neg q$ | $\mathrm{E}_\land$ de 3. |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6. | Suponemos $\neg p$ | | 6. | Suponemos $p$ | |
| 7. | $t$ | $\mathrm{E}_{\to}$ de 6 y 2. | 7. | $q \vee r$ | $\mathrm{E}_{\to}$ de 1 y 6. |
| 8. | $s$ | $\mathrm{E}_{\vee}$ de 4 y 7. | 8. | $r$ | $\mathrm{E}_{\vee}$ de 5 y 7. |
| 9. | $r \vee s$ | $\mathrm{I}_{\vee}$ de 6. | 9. | $r \vee s$ | $\mathrm{I}_{\vee}$ de 8. |

**Nota**: el paso 6 es un supuesto, es por eso que se habré en dos, esto sería como decir

$$p \to \bot \qquad\qquad p \to \top$$

y por eso lo demuestro para ambos casos. Esto lo tenía como duda, hoy consulté y comentó la profesora que estaba bien siempre que en ambas partes se llegue a la conclusión que queriamos. Los pasos 8's quedan justificados con la demostración de abajo. $\square$

En el ejercicio anterior se usa

$$\begin{array}{c} \Gamma \vdash A \vee B \\ \Gamma \vdash \neg A \\ \hline \therefore\ \Gamma \vdash B \end{array}$$

a continuación se demuestra

| | | |
|---|---|---|
| | **H.I.** | |
| | **H.I.** $\quad \Gamma', A \vdash A \quad (\mathbf{E}_{\to})$ | |
| | $\Gamma', A \vdash A \quad \Gamma', A \vdash \neg A \ (:= A \to \bot)$ | |
| | $\Gamma', A \vdash \bot \quad (\mathbf{E}\neg)$ | **H.I.** |
| $\Gamma' \vdash A \vee B$ | $\Gamma', A \vdash B \quad (\mathbf{E}_{\vee})$ | $\Gamma', B \vdash B \quad (\mathbf{E}_{\vee})$ |
| | $\Gamma' = \{\Gamma, A \vee B, \neg A\} \vdash B \quad (\mathbf{E}_{\to}) \times \mathbf{2}$ | |
| | $\Gamma \vdash (A \wedge B) \to \neg A \to B \quad (\mathbf{I}_{\to}) \times \mathbf{2}$ | |

Al principio me rehuse de hacer la demostración con el árbol porque tal vez pueda ser enredado, pero después de ver la demostración en clase (esta demostración) me quedo más claro así, aunque pasarla en LaTeX no es lo más bonito que digamos. Hice unas líneas para que sea más fácil seguirlo: