UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Facultad de Ciencias

Autor: Adrián Aguilera Moreno

Lógica Computacional

Semanal 4

Para cada uno de los ejercicios, **justifica ampliamente** tu respuesta.

1. **Obten** la Forma Normal Negativa de las siguientes fórmulas:

   ·) $\varphi = ((p \to r) \land (q \to r)) \to ((p \land q) \to r)$.

   ·) $\phi = (p \land (q \to r)) \to s$.

   Solución: Analicemos dos posibles casos:

   1. Solucionemos $\varphi = ((p \to r) \land (q \to r)) \to ((p \land q) \to r)$, veamos que

$$
\begin{array}{rcll}
p \to r & \equiv & \neg p \lor r. & \text{Por eliminación: } \varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \lor \psi. \\
q \to r & \equiv & \neg q \lor r. & \text{Por eliminación: } \varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \lor \psi. \\
(p \land q) \to r & \equiv & \neg(p \land q) \lor r & \text{Por eliminación: } \varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \lor \psi. \\
 & \equiv & \neg p \lor \neg q \lor r & \text{Por De Morgan: } \neg(\varphi \land \psi) \equiv \neg\varphi \lor \neg\psi.
\end{array}
$$

   de lo anterior se sigue que

$$((p \to r) \land (q \to r)) \to ((p \land q) \to r) \equiv (\neg p \lor r) \land (\neg q \lor r) \to \neg p \lor \neg q \lor r$$

   empleando nuevamente eliminación [$\varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \lor \psi$] tenemos que

$$
\begin{array}{rcl}
(\neg p \lor r) \land (\neg q \lor r) \to \neg p \lor \neg q \lor r & \equiv_1 & \neg((\neg p \lor r) \land (\neg q \lor r)) \lor \neg p \lor \neg q \lor r \\
 & \equiv_2 & \neg(\neg p \lor r) \lor \neg(\neg q \lor r) \lor \neg p \lor \neg q \lor r \\
 & \equiv_3 & (\neg\neg p \land \neg r) \lor (\neg\neg q \land \neg r) \lor \neg p \lor \neg q \lor r \\
 & \equiv_4 & (p \land \neg r) \lor (q \land \neg r) \lor \neg p \lor \neg q \lor r \\
 & \equiv_5 & (\neg r \land (p \lor q)) \lor \neg p \lor \neg q \lor r
\end{array}
$$

   1^{ra} línea por eliminación de la implicación.

   2^{da} y 3^{ra} línea por De Morgan.

   4^{ta} línea por doble negación.

   5^{ta} línea por distributividad.

$$\therefore \quad \varphi \equiv (\neg r \land (p \lor q)) \lor \neg p \lor \neg q \lor r$$

   2. Llevemos a $\phi = (p \land (q \to r)) \to s$ a FNN, veamos que

$$
\begin{array}{rcll}
\phi & \equiv & \neg(p \land (q \to r)) \lor s & \text{Por eliminación: } \varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \lor \psi. \\
 & \equiv & (\neg p \lor \neg(q \to r)) \lor s & \text{Distributividad de la negación.} \\
 & \equiv & (\neg p \lor (q \land \neg r)) \lor s & \text{Negación de la implicación.}
\end{array}
$$

$$\therefore \quad \phi \equiv (\neg p \lor (q \land \neg r)) \lor s$$

□

2. **Obten** la Forma Normal Conjuntiva de las siguientes fórmulas:

   ·) $\varphi = ((p \to r) \to q) \land (r \to q)$.

   ·) $\phi = \neg p \land q \to p \land (r \to q)$.

Solución: Ahora, analicemos dos posibles casos:

1. Pasando a la FNC la fórmula $\varphi = ((p \to r) \to q) \land (r \to q)$, tenemos

$$\begin{array}{rcll} \varphi & \equiv & (\neg(q \to r) \lor q) \land (\neg r \lor q) & \text{Por eliminación: } \varphi \to \psi \equiv \neg\varphi \lor \psi. \\ & \equiv & ((q \land \neg r) \lor q) \land (\neg r \lor q) & \text{Negación de implicación.} \\ & \equiv & (q \lor q) \land (q \lor \neg r) \land (\neg r \lor q) & \text{Distributividad.} \\ & \equiv & q \land (q \lor \neg r) & \text{Idenpotencia.} \\ & \equiv & q & \text{Absorción.} \end{array}$$

$$\therefore \quad \varphi \equiv q$$

Obs. En clase con la profesora se discutió acerca de FNC y FND, en ambos casos, se concluyó que se aceptan $\bot, \top$, y algún $x \in VarProp$ como casos triviales de estas formas normales. En adelante se omite esta observación.

2. Pasando a FNC por medio de equivalencias lógicas a la función $\phi = \neg p \land q \to p \land (r \to q)$, tenemos que

$$\begin{array}{rcll} \phi & \equiv & \neg(\neg p \land q) \lor (p \land (\neg r \lor q)) & \text{Eliminación de la implicación.} \\ & \equiv & (p \lor \neg q) \lor (p \land \neg r) \lor (p \land q) & \text{Leyes de De Morgan y distributividad.} \\ & \equiv & p \lor (p \land \neg r) \lor \neg q \lor (p \land q) & \text{Conmutatividad de } \lor. \\ & \equiv & ((p \lor p) \land (p \lor \neg r)) \lor ((\neg q \lor q) \land (p \lor \neg q)) & \text{Distributividad.} \\ & \equiv & (p \land (p \lor \neg r)) \lor (\top \land (p \lor \neg q)) & \text{Idempotencia y } 3^{\text{ro}} \text{ excluido.} \\ & \equiv & p \lor (p \lor \neg q) & \text{Neutro conjuntivo y absorción.} \\ & \equiv & p & \text{Absorción.} \end{array}$$

$$\therefore \quad \phi \equiv p$$

□

3. **Obten** la Forma Normal Disyuntiva de las siguientes fórmulas:

   ·) $\neg(w \to \neg p) \lor \neg((\neg s \leftrightarrow w) \lor (p \land s))$.

   ·) $\neg((q \lor \neg(p \to r)) \to (p \land (q \to r)))$.

Solución: Para este ejercicio analicemos los incisos por separado, esto es

1. Encontrado la FND de la fórmula $\neg(w \to \neg p) \lor \neg((\neg s \leftrightarrow w) \lor (p \land s))$, tenemos que si

$$\varphi \equiv \neg(w \to \neg p) \lor \neg((\neg s \leftrightarrow w) \lor (p \land s))$$

luego

$$\begin{aligned}
\varphi \quad &\equiv_1 \quad (w \land p) \lor \neg((\neg s \leftrightarrow w) \lor (p \land s)) \\
&\equiv_2 \quad (w \land p) \lor (\neg(\neg s \leftrightarrow w) \land \neg(p \land s)) \\
&\equiv_3 \quad (w \land p) \lor ((s \leftrightarrow w) \land (\neg p \lor \neg s)) \\
&\equiv_4 \quad (w \land p) \lor (((s \land w) \lor (\neg s \land \neg w)) \land (\neg p \lor \neg s)) \\
&\equiv_5 \quad (w \land p) \lor ((\neg p \lor \neg s) \land (s \land w)) \lor ((\neg p \lor \neg s) \land (\neg s \land \neg w)) \\
&\equiv_6 \quad (w \land p) \lor (\neg p \land (s \land w)) \lor (\neg s \land (s \land w)) \\
&\qquad\qquad \lor(\neg p \land (\neg s \land \neg w)) \lor (\neg s \land (\neg s \land \neg w)) \\
&\equiv_7 \quad (w \land p) \lor (\neg p \land s \land w) \lor ((\neg s \land s) \land w)) \\
&\qquad\qquad \lor(\neg p \land \neg s \land \neg w) \lor (\neg s \land \neg s \land \neg w) \\
&\equiv_8 \quad (w \land p) \lor (\neg p \land s \land w) \lor (\bot \land w) \\
&\qquad\qquad \lor(\neg p \land \neg s \land \neg w) \lor ((\neg s \land \neg s) \land \neg w) \\
&\equiv_9 \quad (w \land p) \lor (\neg p \land s \land w) \lor \bot \\
&\qquad\qquad \lor(\neg p \land \neg s \land \neg w) \lor (\neg s \land \neg w) \\
&\equiv_{10} \quad (w \land p) \lor (\neg p \land s \land w) \lor (\neg p \land \neg s \land \neg w) \lor (\neg s \land \neg w) \\
&\equiv_{11} \quad (w \land p) \lor (\neg p \land s \land w) \lor (\neg s \land \neg w)
\end{aligned}$$

1. Negación de la implicación.
2. Leyes de De Morgan.
3. Negación de bicondicional y leyes de De Morgan.
4. Eliminación de la bicondicional.
5. Distribución.
6. Distribución.
7. Asociación.
8. Contradicción y asociación.
9. Dominancia.
10. Neutro e idempotencia.
11. Absorción

$$\therefore \quad \neg(w \to \neg p) \lor \neg((\neg s \leftrightarrow w) \lor (p \land s)) \equiv (w \land p) \lor (\neg p \land s \land w) \lor (\neg s \land \neg w)$$

2. Encontrando la FND de $\neg((q \vee \neg(p \to r)) \to (p \wedge (q \to r)))$, tenemos que si

$$\phi \equiv \neg((q \vee \neg(p \to r)) \to (p \wedge (q \to r)))$$

entonces:

$$\begin{aligned}
\phi \quad &\equiv_1 \quad (q \vee \neg(p \to r)) \wedge \neg(p \wedge (q \to r)) \\
&\equiv_2 \quad (q \vee (p \wedge \neg r)) \wedge (\neg p \vee \neg(q \to r)) \\
&\equiv_3 \quad (q \vee (p \wedge \neg r)) \wedge (\neg p \vee (q \wedge \neg r)) \\
&\equiv_4 \quad (q \wedge (\neg p \vee (q \wedge \neg r))) \vee ((p \wedge \neg r) \wedge (\neg p \vee (q \wedge \neg r))) \\
&\equiv_5 \quad (q \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg r \wedge \neg p) \vee (p \wedge \neg r \wedge q \wedge \neg r) \\
&\equiv_6 \quad (q \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg r) \vee (\bot \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg r \wedge q) \\
&\equiv_7 \quad (q \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg r) \vee \bot \vee (p \wedge \neg r \wedge q) \\
&\equiv_8 \quad (q \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg r) \vee (p \wedge \neg r \wedge q) \\
&\equiv_9 \quad (q \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg r)
\end{aligned}$$

1. Negación de la implicación.
2. Negación de la implicación y leyes de De Morgan.
3. Negación de la implicación.
4. Distributividad.
5. Distributividad e idempotencia.
6. Conmutatividad, idempotencia y contradicción.
7. Dominancia.
8. Neutro.
9. Absorción.

$$\therefore \quad \phi \equiv (q \wedge \neg p) \vee (q \wedge \neg r)$$

$\square$