UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO

Facultad de Ciencias

Autor: Adrián Aguilera Moreno

Lógica Computacional

Semanal 5

Para cada uno de los ejercicios, **justifica ampliamente** tu respuesta.

- **Da** la especificación formal del siguiente argumento, definiendo previamente una signtura adecuada.

  «Los alumnos de la Facultad de Ciencias y los programadores sólo alcanzan su máximo nivel cuando la luna es rosa.»

  Solución: Definamos la signatura para este enunciado, esto es

  $$Personas \cup \{luna\} \cup \{colorear^2\} \cup \{Pers^1, AlumnoFC^1, Prog^1, EsColor^2, MaxNivel^1\}$$

  que significan:

  - $colorear(x, y) = x$ coloreado de y [se devuelve x, solo cambia su estado], esto es una función.
  - $Pers(x) = x$ es una persona.
  - $AlumnoFC(x) = x$ es alumno de la Facultad de Ciencias.
  - $Prog(x) = x$ es programador.
  - $EsColor(x, y) = x$ es de color y.
  - $MaxNivel(x) = x$ ha alcanzado su máximo nivel.

  Dada la signatura anterior, tenemos que el enunciado se traduce como

  $$\forall_x\,(Pers(x) \wedge AlumnoFC(x) \wedge Prog(x) \to (EsColor(colorear(luna, rosa), rosa) \to MaxNivel(x)))$$

  □

- Dadas las siguientes expresiones:

  1. $\forall_x \forall_u\,(M(a, x) \to M(a, u))$
  2. $(\forall_{x,u}\,(M(a, x)) \to M(a, u)$
  3. $\forall_x (M(a, x) \to M(a, u))$

  Realiza lo siguiente:

  a) Indica si las relaciones

  $$(1) \sim_\alpha (2) \qquad (2) \sim_\alpha (3) \qquad (1) \sim_\alpha (3)$$

  de α-equivalencia se cumplen.

  b) Aplica la sustitución

  $$\delta = [x, u := \ell(a, n, d, r, o), c(i, z, o)]$$

  a cada una de las expresiones.

Solución: Primero, encontremos las $\sim_\alpha$ equivalencias, esto es

$$\begin{aligned} 1.\ \forall_x \forall_u\,(M(a, x) \to M(a, u)) &\sim_\alpha \forall_w \forall_u (M(a, w) \to M(a, u)) \\ &\sim_\alpha \forall_w \forall_v (M(a, w) \to M(a, v)) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
2.\ (\forall_{xu} M(a,x)) \to M(a,u) &\sim_\alpha (\forall_{wu} M(a,w)) \to M(a,u)\\
&\sim_\alpha (\forall_{wv} M(a,w)) \to M(a,u)\\
&\sim_\alpha (\forall_{w} M(a,w)) \to M(a,u)
\end{aligned}
$$

$$3.\ \forall_x\,(M(a,x) \to M(a,u)) \sim_\alpha \forall_w\,(M(a,w) \to M(a,u))$$

Ahora, veamos que (1) $\not\sim_\alpha$ (2), pues difieren en variables no ligadas, como lo es u en (2), pues en (1) la única variable no ligada es a.
En cambio, (2) $\sim_\alpha$ (3), pues por definición de $\sim_\alpha$ se tiene que a lo más difieran en sus variables ligadas, el cual es el caso, ya que, $\{a, u\}$ son variables no ligadas.
Como (1) $\not\sim_\alpha$ (2) y (2) $\sim_\alpha$ (3), entonces por transitividad tenemos que 1 $\not\sim_\alpha$ (3).
Ahora, realicemos las sustituciones con δ, estas las aplicaremos a las $\sim_\alpha$ a las que hemos llegado, esto es

$$
\begin{aligned}
1.\ \underbrace{\forall_w\forall_v(M(a,w) \to M(a,v))}_{\delta} &= \forall_w \underbrace{\forall_v(M(a,w) \to M(a,v))}_{\delta}\\
&= \forall_w\forall_v(\underbrace{M(a,w) \to M(a,v)}_{\delta})\\
&= \forall_w\forall_v(\underbrace{M(a,w)}_{\delta} \to \underbrace{M(a,v)}_{\delta})\\
&= \forall_w\forall_v(M(\underbrace{a}_{\delta},\underbrace{w}_{\delta}) \to M(\underbrace{a}_{\delta},\underbrace{v}_{\delta}))\\
&= \forall_w\forall_v(M(a,w) \to M(a,v))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
2.\ \underbrace{(\forall_w M(a,w)) \to M(a,u)}_{\delta} &= (\underbrace{\forall_w M(a,w)}_{\delta}) \to \underbrace{M(a,u)}_{\delta}\\
&= (\forall_w M(\underbrace{a}_{\delta},\underbrace{w}_{\delta})) \to M(\underbrace{a}_{\delta},\underbrace{u}_{\delta})\\
&= (\forall_w M(a,w)) \to M(a,c(i,z,o))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
3.\ \underbrace{\forall_w\,(M(a,w) \to M(a,u))}_{\delta} &= \forall_w\,\underbrace{(M(a,w) \to M(a,u))}_{\delta}\\
&= \forall_w(\underbrace{M(a,w)}_{\delta} \to \underbrace{M(a,u)}_{\delta})\\
&= \forall_w(M(\underbrace{a}_{\delta},\underbrace{w}_{\delta}) \to M(\underbrace{a}_{\delta},\underbrace{u}_{\delta}))\\
&= \forall_w\,(M(a,w) \to M(a,c(i,z,o)))
\end{aligned}
$$

□