UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Facultad de Ciencias

Autor: Adrián Aguilera Moreno

Lógica Computacional

Semanal 7

Para cada uno de los ejercicios, **justifica ampliamente** tu respuesta.

1. Para cada una de las siguientes fórmulas, **encuentra** una fórmula que sea α-equivalente tal que cada cuantificador ligue a una variable distinta.

   - $\varphi = \forall_v.(\exists_y.(S(u,y,z))) \vee \exists_z.(P(f(v),g(y),z))$
   - $\phi = \exists_x.(\forall_y.(R(x,y) \to Q(z)) \wedge Q(x))$
   - $\gamma = P(x,y) \wedge \exists_y.(Q(x,y) \leftrightarrow P(y,y))$
   - $\psi = \forall_x.(P(y,z) \to \exists_y.(R(x,y,w) \vee S(a,y)))$

   Solución:

$$
\begin{array}{rcl}
\varphi & \sim_\alpha & \forall_v.(\exists_r.(S(u,r,z))) \vee \exists_z.(P(f(v),g(y),z)) \\
 & \sim_\alpha & \forall_v.(\exists_r.(S(u,r,z))) \vee \exists_p.(P(f(v),g(y),p)). \\
\phi & \sim_\alpha & \exists_v.(\forall_y.(R(v,y)) \to Q(z)) \wedge Q(v) \\
 & \sim_\alpha & \exists_v.(\forall_u.(R(v,u)) \to Q(z)) \wedge Q(v). \\
\gamma & \sim_\alpha & P(x,y) \wedge \exists_m.(Q(x,m) \leftrightarrow P(m,m)). \\
\psi & \sim_\alpha & \forall_v.(P(y,z) \to \exists_y.(R(v,y,w) \vee S(a,y))) \\
 & \sim_\alpha & \forall_v.(P(y,z) \to \exists_u.(R(v,u,w) \vee S(a,u))).
\end{array}
$$

□

2. **Realiza** las siguientes sustituciones:

   - $\varphi[w := f(u), u := g(y,z), y := b]$
   - $\phi[x := g(h(a,y)), y := g(b), z := f(y)]$
   - $\gamma[x, y, z := y, f(g(a)), f(b)]$
   - $\psi[x, y, w := y, f(c), x]$

   Solución: Sustitución en φ. Sean $\beta = [w := f(u)]$, $\eta = [u := g(y,z)]$ y $\theta = [y := b]$. Entonces,

$$
\begin{array}{rcl}
[\forall_v.(\exists_r.(S(u,r,z))) \vee \exists_p.(P(f(v),g(y),p))]\beta\eta\theta & = & [\forall_v.(\exists_r.(S(u,r,z))) \vee \exists_p.(P(f(v),g(y),p))]\eta\theta \\
 & = & [\forall_v.(\exists_r.(S(g(y,z),r,z))) \vee \exists_p.(P(f(v),g(y),p))]\theta \\
 & = & \forall_v.(\exists_r.(S(g(b,z),r,z))) \vee \exists_p.(P(f(v),g(b),p)).
\end{array}
$$

   Notemos que se omite la aplicación del algoritmo de sustitución, pues en la tarea semanal 6 se ejemplifica paso a paso este proceso.

   Sustitución en ϕ. Sean $\beta = [x := g(h(a,y))]$, $\eta = [y := g(b)]$ y $\theta = [z := f(y)]$. Entonces,

$$
\begin{array}{rcl}
[\exists_v.(\forall_u.(R(v,u)) \to Q(z)) \wedge Q(v)]\beta\eta\theta & = & [\exists_v.(\forall_u.(R(v,u)) \to Q(z)) \wedge Q(v)]\eta\theta \\
 & = & [\exists_v.(\forall_u.(R(v,u)) \to Q(z)) \wedge Q(v)]\theta \\
 & = & \exists_v.(\forall_u.(R(v,u)) \to Q(f(y))) \wedge Q(v).
\end{array}
$$

   Mismo caso que el anterior.

Sustitución en γ. Sea $\eta = [x, y, z := y, f(g(a)), f(b)]$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
[P(x,y) \land \exists_m.(Q(x,m) \leftrightarrow P(m,m))]\eta &= \underbrace{P(x,y)}_{\eta} \land \underbrace{\exists_m.(Q(x,m) \leftrightarrow P(m,m))}_{\eta} \\
&= P(\underbrace{x}_{\eta}, \underbrace{y}_{\eta}) \land \exists_m.(\underbrace{Q(x,m)}_{\eta} \leftrightarrow \underbrace{P(m,m)}_{\eta}) \\
&= P(y, f(g(a))) \land \exists_m.(Q(\underbrace{x}_{\eta}, \underbrace{m}_{\eta}) \leftrightarrow P(\underbrace{m}_{\eta}, \underbrace{m}_{\eta})) \\
&= P(y, f(g(a))) \land \exists_m.(Q(y,m) \leftrightarrow P(m,m)).
\end{aligned}
$$

Sustitución en ψ. Sea $\eta = [x, y, w := y, f(c), x]$. Entonces,

$$
\begin{aligned}
[\forall_v.(P(y,z) \to \exists_u.(R(v,u,w) \lor S(a,u)))]\eta &= \forall_v.(\underbrace{P(y,z) \to \exists_u.(R(v,u,w) \lor S(a,u))}_{\eta}) \\
&= \forall_v.(\underbrace{P(y,z)}_{\eta} \to \underbrace{\exists_u.(R(v,u,w) \lor S(a,u))}_{\eta}) \\
&= \forall_v.(P(\underbrace{y}_{\eta}, \underbrace{z}_{\eta}) \to \exists_u.(\underbrace{R(v,u,w)}_{\eta} \lor \underbrace{S(a,u)}_{\eta})) \\
&= \forall_v.(P(f(c), z) \to \exists_u.(R(\underbrace{v}_{\eta}, \underbrace{u}_{\eta}, \underbrace{w}_{\eta}) \lor S(\underbrace{a}_{\eta}, \underbrace{u}_{\eta}))) \\
&= \forall_v.(P(f(c), z) \to \exists_u.(R(v,u,x) \lor S(a,u))).
\end{aligned}
$$

$\square$