UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Facultad de Ciencias

Autor: Adrián Aguilera Moreno

Lógica Computacional

Semanal 12

Para cada uno de los siguientes ejercicios, **justifica ampliamente** tu respuesta.

Desmuestra la consecuencia lógica de los siguientes usando tácticas:

- $$\mathrm{H} : \ (\mathrm{A} \to \mathrm{C}) \land (\mathrm{B} \to \mathrm{C}) \vdash \mathrm{A} \lor \mathrm{B} \to \mathrm{C}$$
- $$\mathrm{H}_1 \ : \ \exists_{\mathrm{x}}\mathrm{Qx}, \ \mathrm{H}_2 \ : \ \forall_{\mathrm{x}}(\mathrm{Qx} \land \exists_{\mathrm{y}}\mathrm{Py} \to \mathrm{Qfx}), \ \mathrm{H}_3 \ : \ \forall_{\mathrm{z}}(\mathrm{Qz} \to \mathrm{Qgz}) \vdash \mathrm{Pb} \to \exists_{\mathrm{w}}\mathrm{Qfgw}$$

Demostración para el primer punto (diagrama de árbol)[1]:

$$\text{(Intro)}\ \cfrac{\text{(destruct)}\ \cfrac{\text{(Apply)}\ \cfrac{\cfrac{\text{Assumption}\checkmark}{\Gamma, A \vdash A}}{\Gamma, A \vdash C} \qquad \text{(Apply)}\ \cfrac{\cfrac{\text{Assumption}\checkmark}{\Gamma, B \vdash B}}{\Gamma, B \vdash C}}{\Gamma, A \lor B \vdash C}}{\Gamma \vdash A \lor B \to C}$$

Para $\Gamma = \{A \to C, B \to C\}$.
De manera secuencial sería

1. `Intro`: $\vdash (A \to C) \to (B \to C) \to A \lor B \to C \quad \triangleright \quad (A \to C) \vdash (B \to C) \to A \lor B \to C$
2. `Intro`: $(A \to C) \vdash (B \to C) \to A \lor B \to C \quad \triangleright \quad (A \to C), (B \to C) \vdash A \lor B \to C$
3. `Intro`: $(A \to C), (B \to C) \vdash A \lor B \to C \quad \triangleright \quad (A \to C), (B \to C), (A \lor B) \vdash C$
4. `destruc`: $(A \to C), (B \to C), (A \lor B) \vdash C \quad \triangleright \quad \Gamma, A \vdash C \ ; \ \Gamma, B \vdash C$
5. `Apply`: $\Gamma, A \vdash C \ ; \ \Gamma, B \vdash C \quad \triangleright \quad \Gamma, A \vdash A \ ; \ \Gamma, B \vdash B$
6. `Assumption`: $\Gamma, A \vdash A \ ; \ \Gamma, B \vdash B \quad \triangleright \quad \Box$

Algunas observaciones:
1. En la demostración por árbol se dan por hecho los pasos 1 y 2.
2. El paso 4 destruye una disyunción.
3. El paso 5 es realmente un `Apply` simultáneo.
4. El paso 6 es relamente un `Assumption` simultáneo.
5. Me faltó especificar a que hipótesis se le aplica cada regla, pero en el árbol las marco. $\Box$

Demostración para el punto 2 (diagrama de árbol):

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\text{Assumption}\checkmark}{\Gamma'', Qt \vdash Qt}}{\Gamma'' \vdash Qt \ \text{(Destruct)}}}{\Gamma', Qt \to Qgt \vdash Qgt \ \text{(Apply)}}}{\Gamma' \vdash Qgt \ \text{(Destruct)}} \qquad \cfrac{\cfrac{\text{Assumption}\checkmark}{\Gamma' \vdash Pb}}{\Gamma' \vdash \exists_y Py \ \text{(Exists)}}}{\Gamma, Qgt \land \exists_y Py \to Qfgt, Pb \vdash Qfgt \ \text{(Apply)}}}{\Gamma, Pb \vdash Qfgt \ \text{(Destruct)}}}{\Gamma, Pb \vdash \exists_w Qfgw \ \text{(Exists)}}}{\Gamma \vdash Pb \to \exists_w Qfgw \ \text{(Intro)}}$$

Para $\Gamma = \{\exists_x Qx, \forall_x(Qx \land \exists_y Py \to Qfx), \forall_z(Qz \to Qgz)\}$, $\Gamma' = \{\Gamma, Qgt \land \exists_y Py \to Qfgt, Pb\}$, y $\Gamma'' = \{\Gamma', Qt \to Qgt\}$.
Así, de manera secuencial sería

[1] Se realiza razonamiento hacia atrás.

1. `Intro`: $\Gamma \vdash Pb \to \exists_w Qfgw$	$\triangleright$ $\Gamma, Pb \vdash \exists_w Qfgw$
2. `Exists`: $\Gamma, Pb \vdash \exists_w Qfgw$	$\triangleright$ $\Gamma, Pb \vdash Qfgt$
3. `Destruct`: $\Gamma, Pb \vdash Qfgt$	$\triangleright$ $\Gamma, Qgt \wedge \exists_y Py \to Qfgt, Pb \vdash Qfgt$
4. `Apply`: $\Gamma, Qgt \wedge \exists_y Py \to Qfgt, Pb \vdash Qfgt$	$\triangleright$ $\Gamma' \vdash Qgt \;;\; \Gamma' \vdash \exists_y Py$
5. `Exists`: $\Gamma' \vdash Qgt \;;\; \Gamma' \vdash \exists_y Py$	$\triangleright$ $\Gamma' \vdash Qgt \;;\; \Gamma' \vdash Pb$
6. `Assumption`: $\Gamma' \vdash Qgt \;;\; \Gamma' \vdash Pb$	$\triangleright$ $\Gamma' \vdash Qgt \;;\; \square$
7. `Destruct`: $\Gamma' \vdash Qgt$	$\triangleright$ $\Gamma', Qt \to Qgt \vdash Qgt$
8. `Apply`: $\Gamma', Qt \to Qgt \vdash Qgt$	$\triangleright$ $\Gamma'' \vdash Qt$
9. `Destruct`: $\Gamma'' \vdash Qt$	$\triangleright$ $\Gamma'', Qt \vdash Qt$
10. `Assumption`: $\Gamma'', Qt \vdash Qt$	$\triangleright$ $\square$

Algunas observaciones:
1. En el paso 2 se tiene un `Exists` con t.
2. El paso 3 destruye el para todo H_2.
3. En el paso 4 se aplica la hipótesis obtenida del paso 2. Aquí[2] se hacen dos pasos a la vez, pues se aplica el destructor de la conjunción.
4. El paso 6 funciona porque Pb es parte de Γ'. Así, solo nos queda concluir por una de las ramas.
5. En el paso 7 se destruye el para todo de H_3.
6. El paso 8 aplica la nueva hipótesis obtenida del paso 7.
7. En el paso 9 se destruye el existencial de H_1. $\square$

Nota: los demás pasos son más claros, no especifiqué más por el formato en el que dibujé los diagramas y realice los pasos en secuencia. Si llegara haber alguna duda agradecería que me preguntarán, pero entendería sino lo hicieran, en el examen trataré de hacer mir árboles más explícitos para no tener que explicar después.

[2] En el paso 4.