UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO
Facultad de Ciencias

Adrián Aguilera Moreno - 421005200

Seminario de Computación B: Estructuras de Datos Avanzadas.

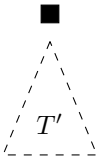
Tarea 02

Pregunta 1. Muestra que dado un conjunto T de n nodos $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con valores y prioridades distintas, el árbol treap asociado a T es único. Hint: utiliza inducción sobre n.

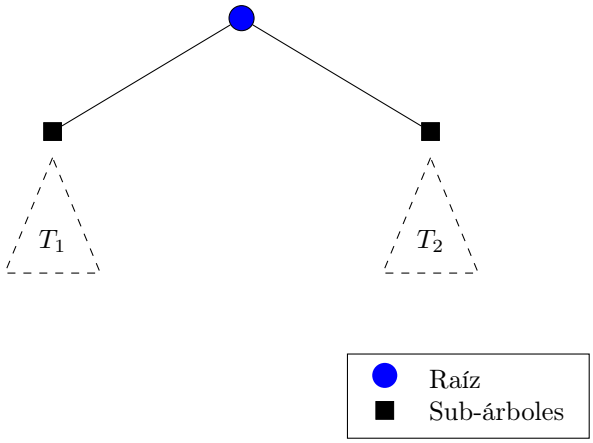
Demostración: Procedamos por inducción en el número de nodos. Observemos que para un nodo

se cumple que el árbol Treap asociado a q (en este caso) es único.

Supongamos que para un conjunto $T' = \{q_1, \cdots, q_k\}$ de tamaño $k < n$ con valores y prioridades distintas se cumple que el árbol Treap asociado a T' es único[1].



Ahora, observemos que un árbol Treap T de n nodos tiene cómo sub-hijo izquierdo un sub-árbol, digamos T_1, y cómo sub-hijo derecho un sub-árbol, digamos T_2. A continuación se muestra un bosquejo



Podemos notar que T_1 y T_2 tienen una cantidad de nodos menor que n. Por nuestra hipótesis de inducción T_1 y T_2 es único, lo que implica que T es único. □

[1] Hipótesis de inducción.

Pregunta 2 Se pueden utilizar las estructuras de búsqueda de rangos ortogonales para determinar si un punto particular (a, b) está en un conjunto dado, haciendo una consulta al rango $[a : a] \times [b : b]$.

1. Prueba que hacer una consulta así en un árbol KD toma tiempo $O(\log n)$.
2. ¿Cuál es la complejidad para una consulta así en un árbol de rangos?

▷ **Solución:** Para este problema dividamos la solución en dos posibles casos:

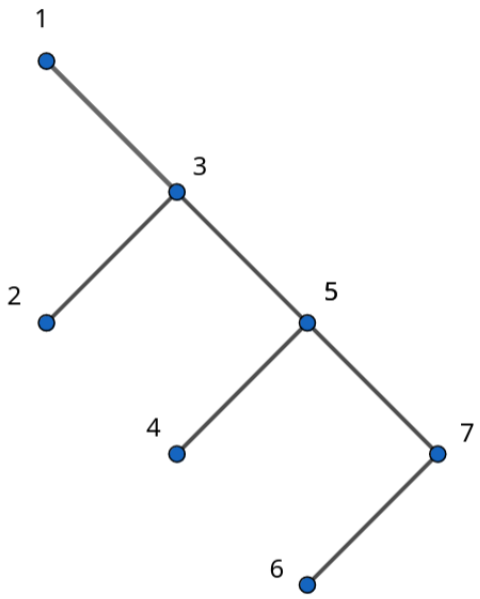
a) Sabemos que hacer una consulta, en un árbol Kd, para un rango en general nos toma $\mathcal{O}(\sqrt{n} + k)$. Sin embargo, consultar un punto en un árbol Kd sería equivalente a particionar la nuve de puntos por la mitad y preguntarnos en qué parte queda nuestro punto distinguido, llamemosle q. Así, descartamos aproximadamente la mitad de puntos en dónde no se encuentra q. Luego, subdividimos nuevamente el conjunto de puntos restantes en 2 y nos preguntamos en qué parte se encuentra q y podemos descartar la parte en la que no se encuentre. De esta manera y recursivamente nuestro espacio de búsqueda se reduce a la mitad cada vez, esto equivale hacer un recorrido de la raíz de nuestro árbol kd hacia las hojas en búsca del punto q. Como cada vez descontamos la mitad del conjunto de puntos de búsqueda, tenemos la recurrencia $T(n) = 1 + T(\frac{n}{2})$ de manera vértical y $T(n) = 1 + 2T(\frac{n}{4})$ de manera horizontal, que sabemos que nos genera un orden logarítmico en base 2 (equivale a bajar por el árbol). Cómo el número de consultas es igual a 1, entonces $k = 1 \in \mathcal{O}(1)$. Por tanto, la complejidad de esta consulta es $\mathcal{O}(\log n)$.

b) En este caso, tenemos una complejidad general de $\mathcal{O}(\log^2 n + k)$, cómo solo estamos consultando un punto y no un rango, entonces $k = 1 \in \mathcal{O}(1)$. En la consulta debemos bajar por el árbol hasta encontrar $q.X$ y bajar su árbol "colgado" o su árbol asociado en y, hacer esto es igual a $\log m$ dónde m es la altura del árbol asociado con $m \neq n$, pues cada nivel y nodo tiene un árbol compacto de tamaño constante. Por tanto, la complejidad esta contenida en $\mathcal{O}(\log m \cdot \log n) = \mathcal{O}(\log n)$ con m constante respecto de n.

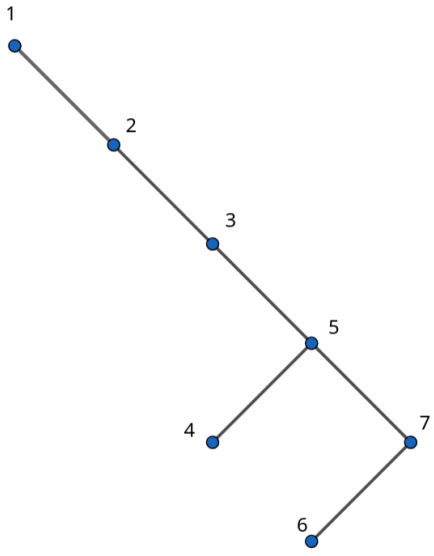
◁

Pregunta 3 Describe una secuencia de accesos a un árbol splay T de n nodos, con $n \geq 5$ impar, que resulte en T siendo una sola cadena de nodos en la que el camino para bajar en el árbol alterne entre hijo izquierdo e hijo derecho.

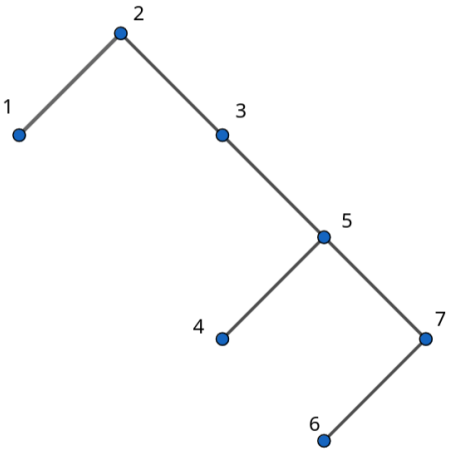
▷ **Solución:** Propongamos el siguiente árbol Splay[2]



Accedamos a 2 realizando `Zig(2)` seguido de la operación `Zag(2)`:



(a) Zig(2)

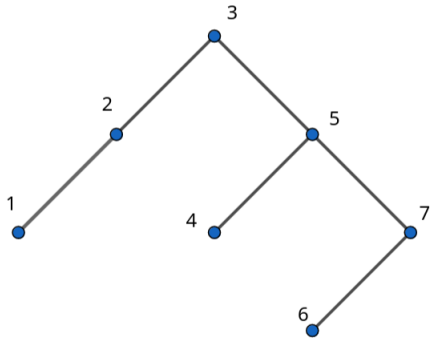


(b) Zag(2)

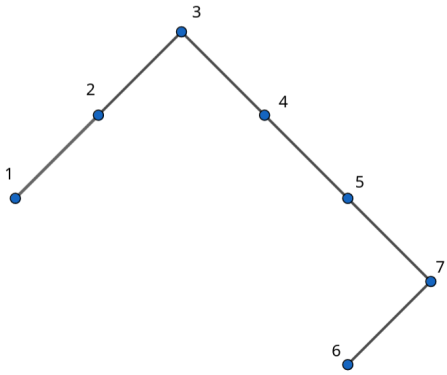
Acceder a 2.

[2]Su altura no es logarítmica, pero sus consultas son amortizadas.

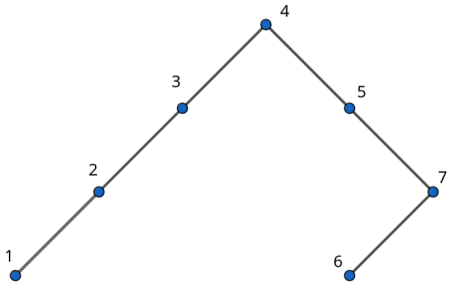
Ahora, accedamos a 3 realizando un `Zag(3)`



Luego, accedamos a 4 realizando `Zig(4)` seguido de la operación `Zag(4)`:



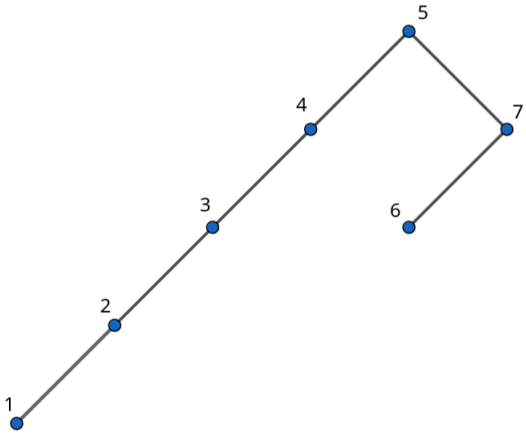
(a) Zig(4)



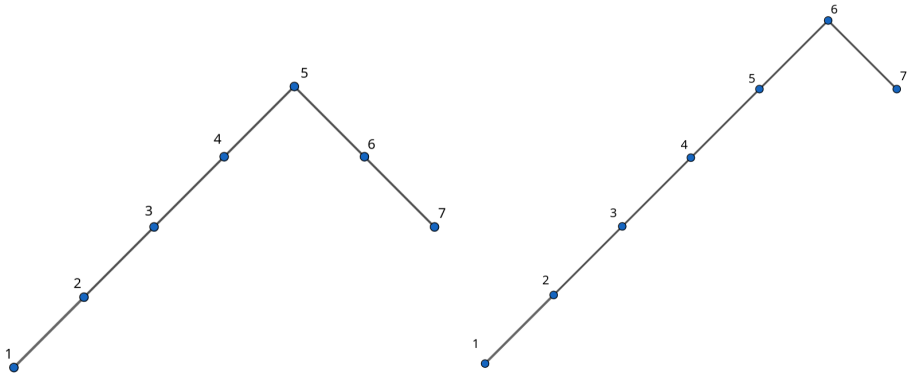
(b) Zag(4)

Acceder a 4.

Así, accedamos a 5 realizando un `Zag(5)`



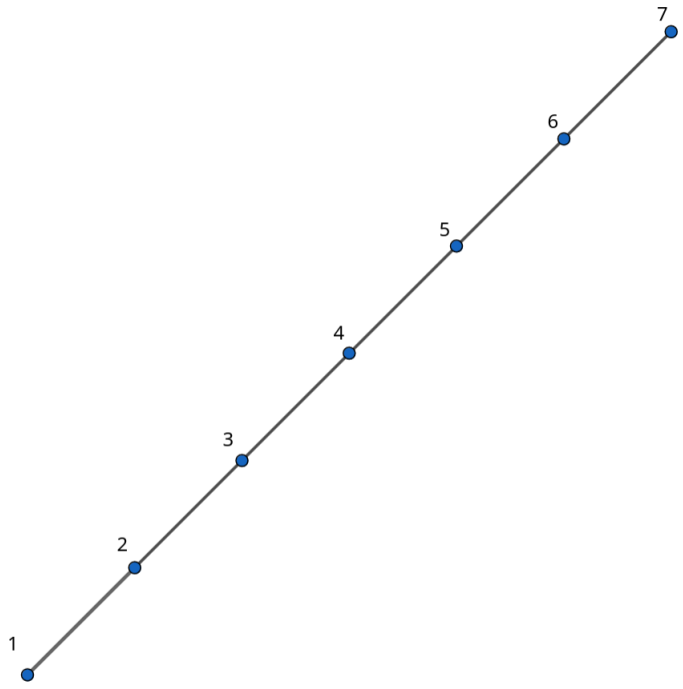
Luego, accedamos a 6 realizando `Zig(6)` seguido de la operación `Zag(6)`:



(a) Zig(6) (b) Zag(6)

Acceder a 6.

Por último, accedamos a 7 realizando un `Zag(7)`



Cómo podemos notar; 7 → derecho, 6 → izquierdo, 5 → derecho, 4 → izquierdo, 3 → derecho, 2 → izquierdo, y por último tenemos al 1 que en primer instancia fue la raíz y por vacuidad podemos asumir que es un hijo derecho.

De lo anterior, hemos encontrado una cadena de nodos tal que al decender por la raíz hasta la hoja se encuentran los elementos iniciales de manera alternada entre hijos izquierdos y derechos. ◁

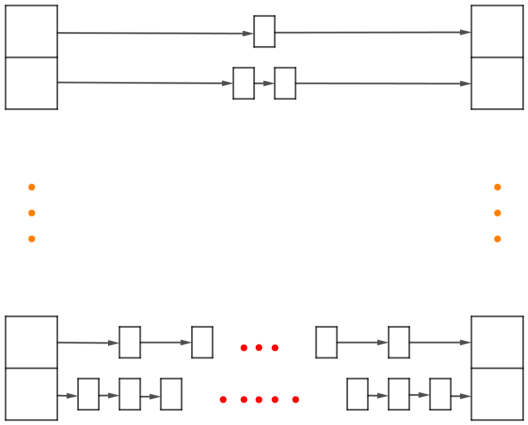
Pregunta 4 Describe cómo modificar una *skip-list* L para poder realizar las siguientes dos operaciones en tiempo esperado $O(\log n)$:

a) Dado un índice i, obtener el elemento de L en la posición i.

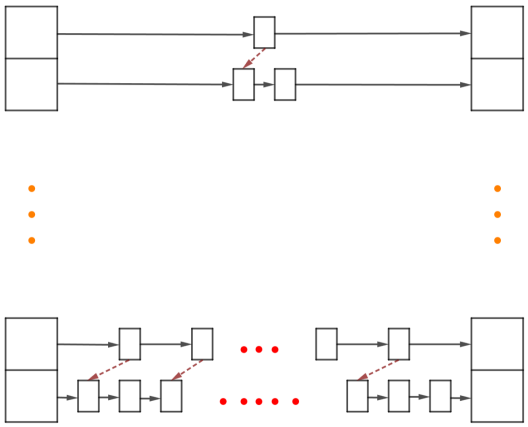
b) Dado un valor x, obtener la cantidad de elementos en L menores a x.

▷ **Solución:** Para que las operaciones anteriores sean consistentes y se mantengan en un orden de tiempo $\mathcal{O}(\log n)$ esperados podemos mantener nuestra *skip-list* L perfecta o semi-perfecta, esto implicaría un cambio de complejidad en algunas de sus operaciones básicas y a su vez nos permitiría obtener el orden deseado en las operaciones ya mencionadas. A continuación veamos con más detalle cómo mantener nuestra *skip-list* semi-perfecta:

1. **Construcción.** Ordenamos nuestros valores de entrada y los posicionamos en el nivel más bajo. Construimos los niveles superiores tomando un valor representante por cada par de izquierda a derecha y así de manera recursiva hasta llegar al nivel 0, el bosquejo de la estructura quedará de la siguiente manera



estos valores tienen apuntadores para saber quién sigue en el orden, esto por cada posición en la lista original. Cómo es necesario mantener nuestros elementos ordenados y esto lo representamos por renglón (además de que eliminamos la mitad de los elementos en cada reglón de abajo hacia arriba), entonces nuestra construcción se toma $\mathcal{O}(n \log n)$. Además, anexaremos apuntadores de los elementos en niveles superiores a su nivel próximo inferior, a manera de que el elemento al que apunten sea el anterior más próximo en el orden, un bosquejo se vería de la siguiente manera



notemos que esto último no nos $\mathcal{O}(n \log n)$. De la misma manera, cada nodo debe contener su respectivo índice suponiendo que tenemos una enumeración en el orden inicial (elementos del último nivel que están ordenado y se encuentran todos/completos).

2. **Insertar.** Cada vez que insertemos consultamos el número de inserciones hechas después de la construcción[3], si este número es $o(n)$ respecto de los elementos originales entonces reconstruimos nuestra *Skip-List*. Sino, entonces agregamos en el nivel 0 (de arriba hacia abajo) y apuntamos al anterior menor en el nivel inferior. Esto nos toma $\mathcal{O}(\log \backslash)$ esperado (sólo cuándo está recién construida podemos garantizar esto), pues sólo realizamos una busqueda en el nivel 0 y en el 1 para encontrar su respectiva posición y apuntador.

3. **Consultar.** Debemos realizar una búsqueda desde el nivel 0, encontrar el último elemento menor al que búscamos consultar (o encontrar el elemento) e ir bajando por medio de sus apuntadores a sus niveles inferiores (de arriba hacia abajo). Esto hasta llegar al último nivel (puede que consultemos un elemento que no pertenece a L), lo que nos toma $\mathcal{O}(\log n)$ esperado.

4. **Borrar.** El borrado toma las mismas consideraciones que en el *inserta* y utiliza el consulta para localizar el elemento y eliminar sus respectivas direcciones.

Después de las indicaciones, observemos que

a) Basta encontrar el índice del elemento en el nivel 0 y bajar en busca de su respectivo índice (esto gracias a que cada nodo contiene su índice y un apuntador al anterior. Esto nos toma $\mathcal{O}(\log n)$ esperado y sólo es exacto si L no ha recibido modificaciones desde su creación.

b) De la misma manera que el inciso anterior, basta bajar hasta llegar al último valor mayor que x y observar su índice, digamos i, así sabemos que hay $i - 1$ elementos menor que x. Si llegamos al último nivel y todos los valores fueron mayores, significa que x es menor respecto a los elementos de L y devolvemos 0. Esto nos toma $\mathcal{O}(\log n)$ esperado.

De lo anterior concluimos el ejercicio. $\lhd$

[3]Basta usar un contador.

Pregunta 5 Sea S un conjunto de n segmentos de línea sin cruces entre ellos. Queremos responder rápidamente a consultas del tipo: dado un punto p encontrar al primer segmento en S por el que pasa el rayo vertical con origen en p y dirección hacia arriba. Da una estructura de datos para resolver este problema. Acota el tiempo de consulta y el espacio requerido por tu estructura. ¿Cuál es el tiempo de pre-procesamiento?

▷ **Solución.** Para este problema utilizaremos un árbol de segmentos modificando, dónde podamos consultar las intersecciones de la línea generada con el resto de líneas que ya se encuentran en el árbol, entonces ¿Cómo realizamos las consltas?

1. Generamos la línea l a partir de p, entonces consultamos las listas izquierdas y derechas de la raíz, si la línea intersecta, al menos, un segmento entonces hemos encontrado lo deseado.

2. Si la línea es menor (se encuentra a la izquierda) del nodo que estemos visitando, entonces descendemos por el hijo izquierdo y verificamos.

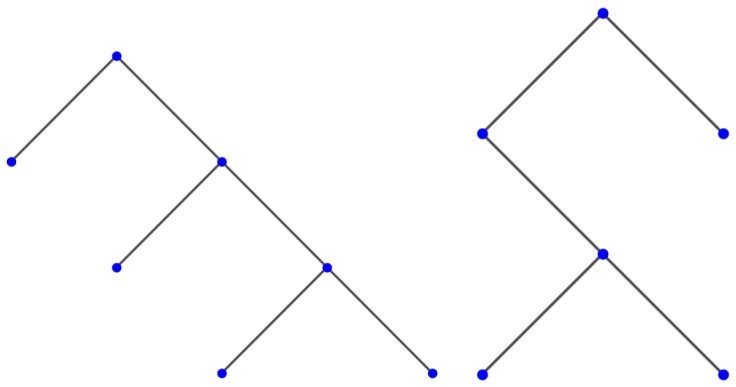
3. Si la línea es mayor (se encuentra a la derecha) del nodo que estemos visitando, entonces descendemos por la derecha y verificamos.

4. Si verificamos y encontramos intersecciones, entonces hemos encontrado lo deseado.

5. Si descendemos hasta alguna hoja y no encontramos intersecciones, entonces no hay intersecciones y terminamos. ◁

Pregunta 6 Decimos que un árbol binario de búsqueda T_1 puede ser RIGHT-CONVERTED a un árbol binario de búsqueda T_2 si es posible obtener T_2 de T_1 por a tráves de una serie de llamadas a la operación RIGHT-ROTATE.

- Da un ejemplo de dos árboles T_1 y T_2 tal que T_1 no pueda ser RIGHT-CONVERTED en T_2.



(a) T1 (b) T2

Árboles no reducibles por rotación.

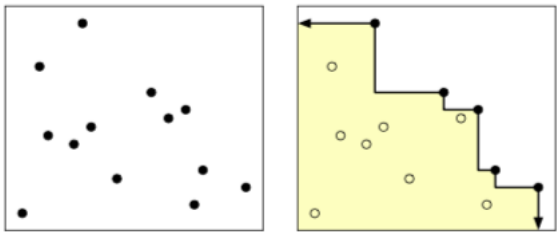
- Demuestra que si un árbol T_1 puede ser RIGHT-CONVERTED a T_2, entonces T_1 puede ser RIGHT-CONVERTED usando $O(n^2)$ operaciones RIGHT-ROTATE.

Observemos el peor caso para transformar T_1 a T_2 por medio de RIGHT-CONVERTED. Este se da cuándo T_2 es totalmente inverso a T_1, esto es, para el vértice raíz rotemos hacia la derecha $n-1$ veces, para los nodos hijos rotemos $n-2$ y $n-3$ veces de manera respectiva de izquierda a derecha. Si aplicamos estos pasos de manera iterativa podemos concluir que el número de rotaciones necesarias para transformar T_1 en T_2 son

$$(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}\in\mathcal{O}(n^2)$$

por lo que tenemos un orden de rotaciones cuadrático.

Pregunta 7 Let P be a set of n points in the plane. The staircase of P is the set of all points in the plane that have at least one point in P both above and to the right.



1. Describe an algorithm to compute the staircase of a set of n points in $O(n \log n)$ time.

   A continuación exhibimos un algoritmo que soluciona el problema dado

   (a) Ordenar nuestra nube de puntos. Esto nos toma $\mathcal{O}(n \log n)$.

   (b) Esta parte es un poco parecida a encontrar la envolvente convexa de una nube de puntos. Así,

      i. Encontrar el punto p_1 más alto (con mayor valor respecto de Y). Esto nos toma $\mathcal{O}(\log n)$ realizando una búsqueda binaria.

      ii. Encontrar el punto p_2 a la derecha de p_1 y que además sea el más alto del subconjunto de puntos menos p_1. Digamos que inicialmente p_1 era nuestro elemento pivotante, en este punto cambiemos nuestro pivote por p_2.

      iii. Repetimos para p_2 y de manera iterativa, hasta no encontrar algún elemento a la derecha.

      Todo esto se hace en a lo más $\mathcal{O}(n \log n)$.

   (c) Ahora que tenemos una selección que formará nuestra escalera podemos construir la misma de la siguiente manera:

      i. Notemos que el paso anterior nos da los puntos en el orden que deben encontrarse en nuestra escalera (descendiente).

      ii. Tomemos dos puntos de nuestra selección, los más cercanos en ella (equivale a tomar los consecutivos si se guardan en una lista) y proyectemos al primero de manera vértical y al segundo de manera horizontal (recordar que el primer elemento es el más "alto" de todos), el corte de las proyecciones lo podemos llamar "vértice artificial" y así podemos incluir la estructura en nuestra escalera. Es decir, unimos los vértice por medio del corte formado en el vértice artificial.

      iii. Repetimos hasta acabar con los vértices de la selección.

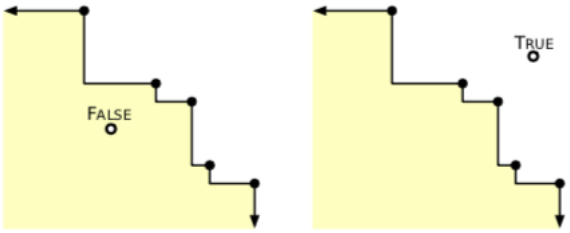
      Lo anterior nos toma a lo más $\mathcal{O}(n)$.

   Finalmente, devolvemos la construcción hecha en (c).

   Análisis de complejidad. Podemos notar que nuestra complejidad en tiempo está contenida en

   $$\mathcal{O}(n \log n) + \mathcal{O}(n \log n) + \mathcal{O}(n) = \mathcal{O}(n \log n).$$

2. Describe and analyze a data structure that stores the staircase of a set of points, and an algorithm ABOVE? (x, y) that returns TRUE if the point (x, y) is above the staircase, or FALS otherwise. Your data structure should use $O(n)$ space, and your ABOVE? algorithm should run in $O(logn)$ time.



Cómo entrada tenemos nuestra escalera que es a lo más de orde $\mathcal{O}(n)$, por tanto es suficiente con almacenar esta para responder nuestra pregunta. ¿Cómo lo hacemos?

- La idea será similar a los árboles de segmentos.
- Guardamos cada segmento en un nodo.
- Para construir este árbol basta dividir con un "rayo" nuestra escalera, así vamos equilibrando nuestro árbol (de hecho es exactamente igual a un árbol de segmentos).
- **Consultar.** Basta verificar si nuestro segmento es horizontal o vértical.
  - Si es horizontal basta comparar el punto x[4] con un extremo del segmento, si x es mayor, entonces verificamos si queda a la izquierda o derecha de nuestra escalera. Si sí regresamos TRUE, FALSE en otro caso.
  - Si es vértical basta verificar si x es mayor al extremo superior del segmento, si sí entonces verificamos si se encuentra a la izquierda o derecha de la escalera. Si sí, entonces devolvemos TRUE. FALSE en otro caso.

Cómo basta con bajar por nuestro árbol y es un árbol binario balanceado, entonces garantizamos que la consulta se realiza en $\mathcal{O}(\log n)$.

[4]Punto a comparar.

Pregunta 8 En algunas aplicaciones solo nos interesa el número de puntos que caen dentro de un rango y no reportar cada uno de ellos. En este caso nos gustaría evitar el término $O(k)$ en el tiempo de consulta.

1. Describe cómo un árbol de rangos de una dimensión puede adaptarse para que una consulta así se pueda realizar en tiempo $O(\log n)$.
2. Usando la solución al problema para una dimensión, describe cómo se pueden responder consultas de conteo en rangos de d dimensiones en tiempo $O(\log^d n)$.
3. Describe cómo se puede usar la técnica de cascada para mejorar el tiempo de consulta en un factor $O(\log n)$ para dos y más dimensiones.

▷ **Solución:** A continuación se da solución a cada uno de los incisos:

a) La versión para una dimensión sería bastante simple, y de hecho sería como un árbol binario de búsqueda balanceado, pues basta con preservar el árbol general sin los árboles "colgados" que tiene el árbol de búsuqeda ortogonal.

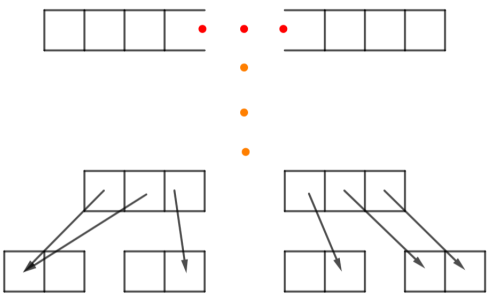
La manera de ahorrar $\mathcal{O}(k)$ durante la búsqueda de rango, sería no recorrer las hojas del rango encontrado. Pues, basta con realizar dos recorridos hacia abajo desde la raíz, uno para encontrar la cota inferior del rango y otro para encontrar la cota superior. Así, y por la propiedad de tener mayores a la derecha y menores a la izquierda concluimos que las hojas entre las seleccionadas forman parte del rango.

b) De la misma manera, que en el caso de una dimensión, nos ahorramos $\mathcal{O}(k)$ al no recorrer las hojas que quedan dentro del rango. Para generalizar a d dimensiones basta reproducir la idea de los árboles "colgados", pues cada nodo que no sea hoja tendrá, inicialmente una referencia al árbol con coordenadas en Y. Luego los árboles con coordenadas en Y tendrán colgados árboles con coordenadas en Z, y así de manera recursiva. Cuándo se requiera obtener el rango bastará con bajar por el árbol principal y recorrer cada árbol asociado de manera recursiva para inspeccionar que efectivamente el punto quede dentro del rango requerido. Cómo recorremos $\log n$ el árbol principal y por cada nodo distinto a una hoja recorremos su árbol asociado y a su vez los asociados recursivamente, entonces tenemos una complejidad de $k \cdot \log n$ dónde $k = \log m \cdot \log m' \cdots \log m''' \approx \log^{d-1} n$ y concluimos que la complejidad en general por recorrido para encontrar un punto en el rango es de $\mathcal{O}(\log^d n)$.

Como esto se tiene que hacer para el punto "menor" en el rango y para el punto "mayor" en el rango, entonces tenemos una complejidad contenida en

$$2 \cdot \mathcal{O}(\log^d n) \in \mathcal{O}(\log^d n).$$

c) Deseamos disminuir el número de operaciones en las consultas n-dimensionales. Basta dirigir apuntadores a rangos menores, tal cómo se usan usualmente en una dimensión. A continuación un bosquejo ilustrativo



Sin embargo, lo anterior sólo nos funciona en una dimensión, ¿Cómo hacemos esto de manera n-dimensional? Basta tener más apuntadores a una estructura similar que represente una segunda, tercera, ..., dimensión. De esta manera sólo debemos descender en un árbol y buscar sus coordenadas en otros ejes sería sencillo a través de redireccionamiento por medio de sus apuntadores. Esto es, por cada valor en el arreglo o subarreglo debemos apuntar a su respectiva $y, z, \cdots$ en estructuras similares. Cómo movernos por medio de estos apuntadores es $\mathcal{O}(1)$, tenemos que la consulta se ve reducida a un orden $\mathcal{O}(\log_2 n)$.

◁

Pregunta 9. Describe el proceso de dinamizar el árbol de rangos de dimensión 3.
▷ **Solución:** Para este ejercicio tendremos bosques que obedezcan a su codificación binaria, esto es, tendremos árboles de distinto tamaño que contengan distintos elementos. ¿Cómo logramos esto?

1. Inicialmente tomemos la representación binaria de nuestro bosque, esta representación será en forma de cadena cómo la siguiente

$$10101 \Rightarrow 2^4 \cdot 2^3 \cdot 2^2 \cdot 2^1 \cdot 2^0$$

que significa que tenemos un árboles de rango con 1 nodo, 4 hojas, 16 hojas respectivamente. Nuestro caso base siempre será $2^0 = 1$ nodo. A partir de aquí construiremos las operaciones **inserta**, **borra**, **colsulta**. El resto de operaciones se aplicaran a cada árbol del bosque cómo usualmente se aplican.

2. **Inserta.** Insertaremos punto a punto. Entonces verificamos si ya existe un árbol de rangos con un nodo (en el árbol principal). Si no existe, entonces nuestro elemento pasa hacer este nodo con referencias a sus subárboles en Y y Z. Si existe un árbol con un sólo nodo, entonces unimos nuestro nodo a este formando un nuevo árbol de codificación 2^1. Repetimos este procedimiento consultando que no haya más de un árbol con una misma codificación, en el momento que lleguemos a un árbol con codificación distinta tal que no haya codificaciones repetidas terminamos.

3. **Borra.** Esta operación es un poco más sencilla, pues basta verificar si hemos eliminado $o(n)$[5] elementos al menos para reconstruir nuestro bosque.

4. **Consulta.** Tomemos en cuenta que no tenemos un sólo árbol. Tenemos un bosque de árboles. Basta consultar en cada árbol hasta encontrar el elemento requerido o uno suficientemente cerca (en caso de no tener el elemento en ningún árbol). ¿Cuánto nos toma esto? La relación entre la codificación binaria y el número de árboles nos garantiza que el número de elementos en el bosque (árboles) es logarítmico respecto del número de hojas en el conjunto de árboles. Esto nos garantiza consultar del orden de $\mathcal{O}(\log^{d+1} n)$ si no es un árbol de rangos con cascada.

5. El resto de operaciones son las usuales aplicadas a cada elemento del bosque.

◁

[5] o pequeña. Equivaldría a verificar una fracción lineal.