Geometría Computacional

Problemas de iluminación y visualización.

Profesores:
Adriana Ramírez Vigueras
Marco Antonio Velasco Flores
Fhernanda Montserrat Romo Olea

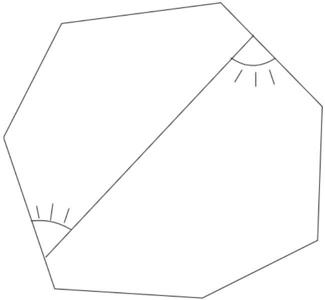
Adrián Aguilera Moreno.

aguilera@ciencias.unam.mx

Introducción

Problemas de iluminación.

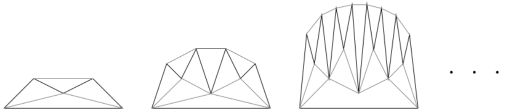
Un problema de iluminación consta de iluminar áreas específicas con fuentes. Las fuentes de luz utilizadas para iluminar nuestros objetos pueden ser de varios tipos, lámparas que emiten luz alrededor de ellas, reflectores o fuentes de luz que solo iluminan dentro de una zona angular, etc.



Iluminación.

Introducción
Problemas de visualización.

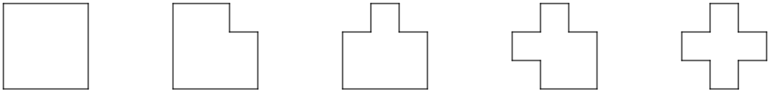
Intimamente ligado a los problemas de iluminación está el estudio de gráficas de visibilidad. Dado un polıígono P en el plano, la gráfica de visibilidad interna de P es la gráfica cuyos vértices son los vértices de P, en la cual dos vértices son adyacentes, si el segmento de línea que los une está totalmente contenido en P (análoga la definición externa).



Gráficas de visibilidad en una familia de polígonos.

Polígonos Ortogonales.

Un polígono simple en el plano se llama ortogonal si sus aristas son paralelas a los ejes coordenados.



Ejemplos de polígonos ortogonales.

Antecedente I.

¿Cuántos vértices concavos hay en un polígono ortogonal?

Sabemos que los ángulos en un polígono ortogonal son $\frac{\pi}{2}$ o $\frac{3\pi}{2}$. Los vértices concavos son siempre de $\frac{3\pi}{2}$.

Lema. Todo polígono ortogonal con n vértices tine $\frac{n-4}{2}$ vértices concavos.

Demostración.

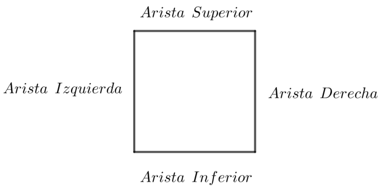
Procedamos por inducción sobre el número de vértices. Es fácil ver que sólo podemos agregar $2m$ vértices a la vez, con $m \in \mathbb{Z}$. Supongamos que para k vértices se cumple el lema. ¿Qué pasa con $k+2$ vértices?

$$\frac{k-4}{2} + 1 = \frac{k-4+2}{2} = \frac{(k+2)-4}{2}.$$

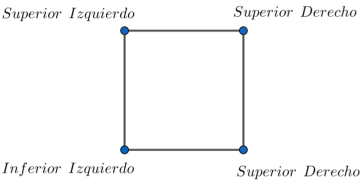
$\square$

Antecedente II.

Clasificando vértices y aristas.

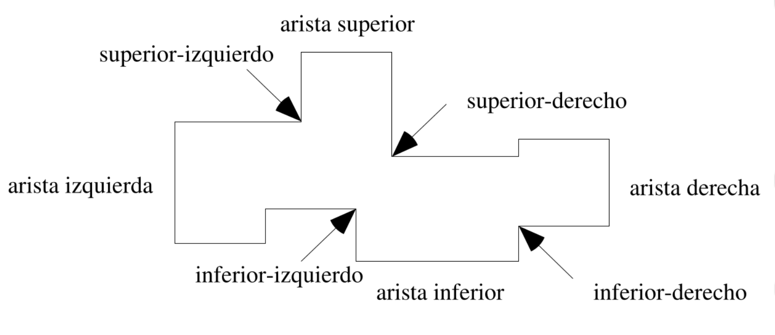


Clasificación de aristas.



Clasificación de Vértices.

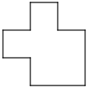
Antecedente III.
Clasificando vértices y aristas.



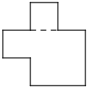
Clasificando aristas y vértices.

Antecedente IV.
Corte impar.

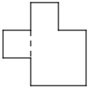
Def. Dado un polígono ortogonal P, definimos un *corte horizontal* o *vértical* de P, como la extensión de una arista horizontal o vértical de P a partir de un vértice concávo hacia el interior de P hasta un punto de intersección con la frontera de P.



Polígono.



Corte horizontal.



Corte vértical.

Def. Un corte impar es un corte horizontal o vértical, tal que uno de los subpolígonos que forma es de tamaño $4k + 2$. Con $k \in \mathbb{Z}$.

El problema.

¿Cuántas lámparas son necesarias para iluminar?

Teorema

$\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ *lámparas son siempre son siempre suficientes y a veces necesarias para iluminar cualquier polígono ortogonal con n vértices.*

El problema.

¿Cuántas lámparas son necesarias para iluminar?

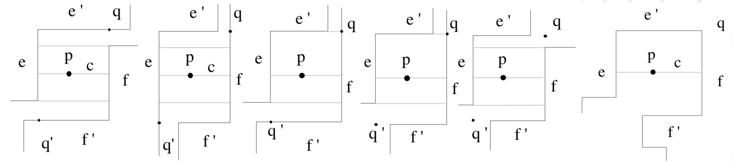
Demostración: Sea P de al menos 8 vértices. Sean S_1 y S_2 conjuntos tales que contengan los vértices superiores derechos; inferiores izquierdos y los superiores izquierdos; inferiores derechos, respectivamente. S_1 o S_2 contiene a lo más $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ vértices concavos. Supongamos que es S_1 quién contiene a lo más $\lfloor \frac{n}{4} \rfloor$ vértices concavos. Si esos vértices iluminan a P, entonces terminamos.

Supongamos que los vértices concavos de S_1 no iluminan P. Entonces, mostremos que existe un corte vértical u horizontal impar. Sean, $p \in P$ tal que no es iluminado por algún $s \in S_1$; c un segmento horizontal (vértical) más largo que contiene a p; e, f aristas de P que contienen los extremos de c. R es el rectángulo más grande contenido en P con lados paralelos a los ejes coordenados que contenga a c.

El problema.

¿Cuántas lámparas son necesarias para iluminar?

Obs. Sean q, q' los vértices *superior derecho* e *inferior izquierdo* respectivamente. Si $q, q' \in V_P \longrightarrow P = R$.



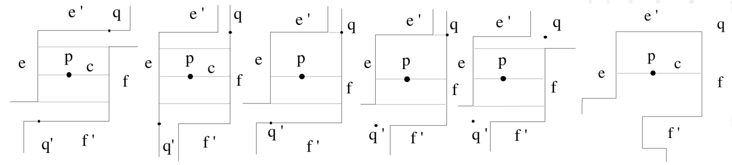
Casos generados por q y q'.

El problema.

¿Cuántas lámparas son necesarias para iluminar?

Analicemos 2 posibles casos:

- q y q' no son vértices de P.
- Exactamente uno de ellos, digamos que q, es vértice de P.

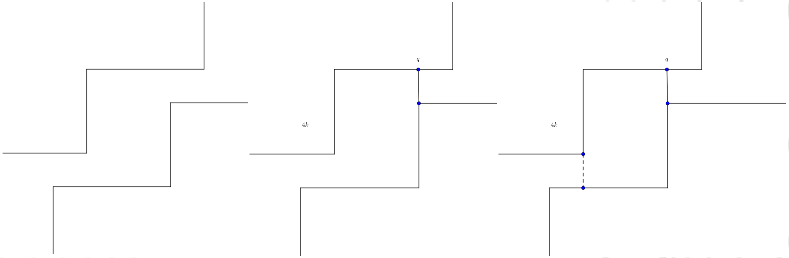


Casos generados por q y q'.

El problema.

¿Cuántas lámparas son necesarias para iluminar?

Para el caso (1) es fácil ver que podemos generar dos cortes vérticales (horizontales) en P que generen R o un rectángulo contenido en el y que contiene a c. Es sencillo observar que al menos un corte es impar.



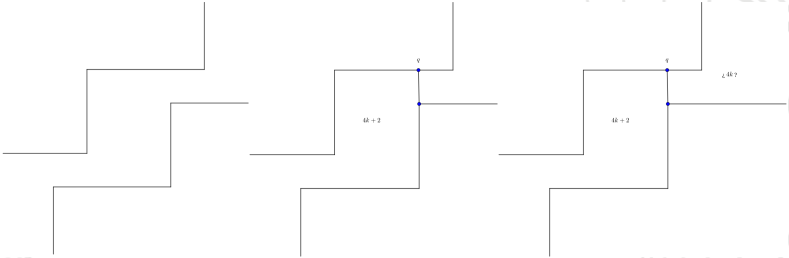
Suponemos que el primer corte genera a un corte de tamaño $4k$.

De lo anterior tenemos $4k - 3 + 1 = 4k - 2 = 4k' + 2$.

El problema.

¿Cuántas lámparas son necesarias para iluminar?

Otro posibles caso es



Suponemos que ambos cortes generan polígonos de tamaño $4k$.

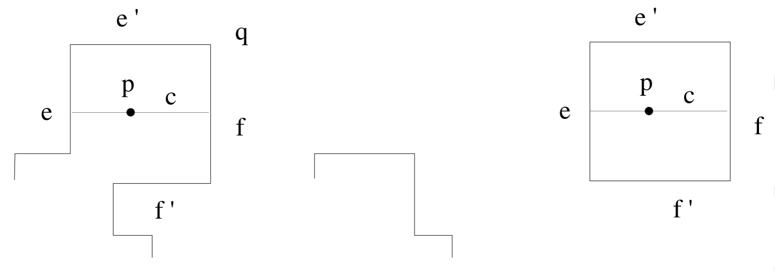
De lo anterior tenemos

$$(4k + 2 - 1) + (4k' - 1) - 1 = 4(k + k') - 1 = 4k'' - 1 \quad !!!$$

El problema.

¿Cuántas lámparas son necesarias para iluminar?

Para el caso (2) basta extender e y f' hasta que se intersecten y obtenemos un polígno de $n - 4$ vértices tal que por inducción se puede iluminar con $\lfloor \frac{n-4}{4} \rfloor$ lámparas. Por tanto terminamos. $\square$



Bosquejo del punto 2.

El problema.

Teorema

Sean $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ tres ángulos tales que

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = \pi$$

y sea P un polígono convexo. Entonces siempre podemos colocar tres reflectores de tamaño a lo más $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ con ápices sobre vértices de P de manera que P quede iluminado, y no coloquemos más de un reflector sobre cada vértice de P.

Prueba.

Es fácil ver que un triángulo cumple con el teorema. Supongamos P un polígono convexo con al menos 4 vértices.

Supongamos que $\alpha_1 \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \Rightarrow \alpha_2 < \frac{\pi}{2}$. Además, cómo P tiene al menos 4 vértices entonces al menos uno de los ángulos generados por sus vértices es mayor o igual que $\frac{\pi}{2}$. Sea T un triángulo cuyos ángulos sean α_1, α_2, y α_3 tal que:

1. El vértice de T de tamaño α_2 está colocado sobre un vértice v de P que genera un ángulo mayor o igual a α_2.
2. Los otros dos vértices de T están colocados sobre dos puntos x, y en la frontera de P.

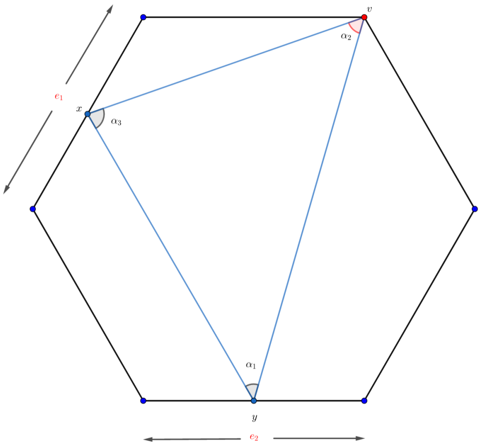
Supongamos que x, y pertenecen a aristas distintas en P.

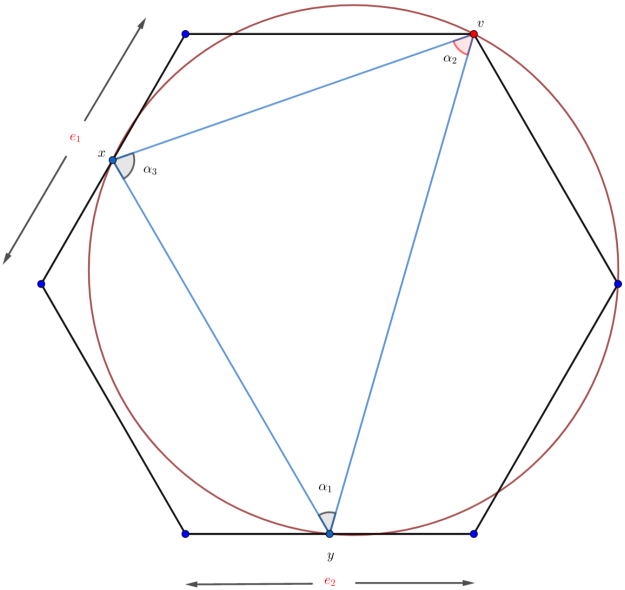
Prueba.

Análicemos dos posibles casos:

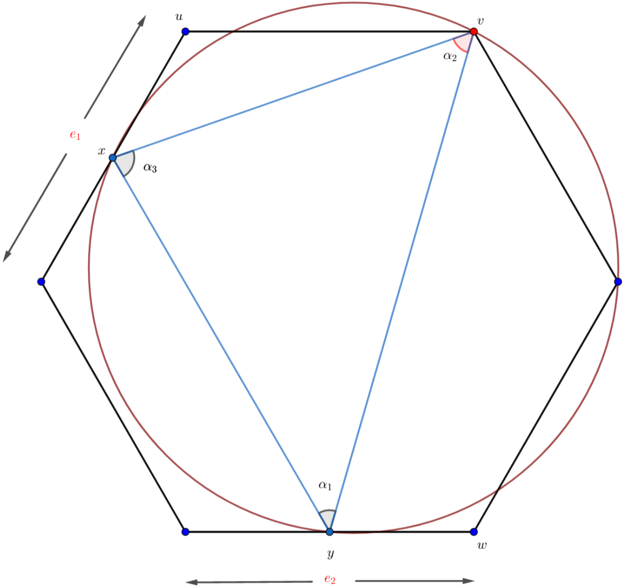
1. $u \neq w$. Coloquemos un reflector f_1 sobre u iluminando la zona angular determinada por v, u, x y otro, f_3 sobre w iluminado la zona angular determinada por v, w, y. Como f_1 y f_3 no están en el interior de C, los angulos de iluminación de f_1 y f_3 son a lo más, α_1 y α_2 respectivamente.
2. $u = w$. Sea T' el triángulo determinado por el segmento que une a x con y, y las tangentes a C en estos puntos. El ángulo generado en el vértice z de T' que no está sobre C es $\pi - 2\alpha_2$. Nótese que z pertenece al interior del triángulo T'' con vértices x, y, u y por tanto el ángulo de T'' en u es menor que $\pi - 2\alpha_2$. Como $\alpha \leq \alpha_2 \leq \alpha_3 \leq \pi - 2\alpha_2 \leq (\pi - (\alpha_1 + \alpha_2)) = \alpha_3$. Por tanto colocando un reflector de tamaño a lo más α_3 en u iluminamos P.

Caso 1.

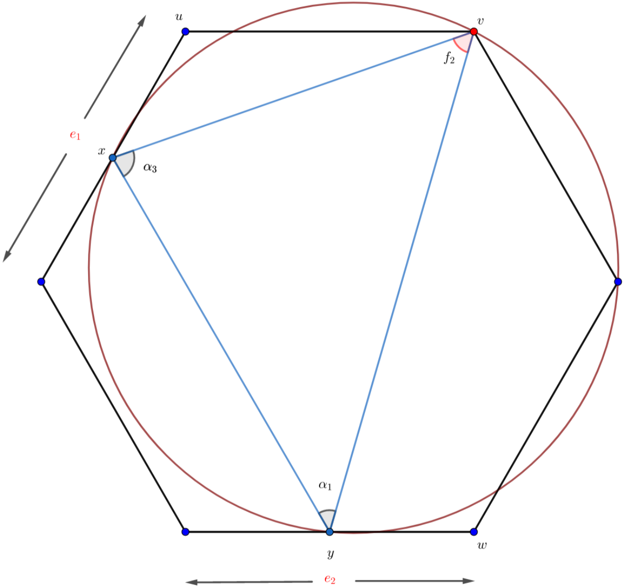


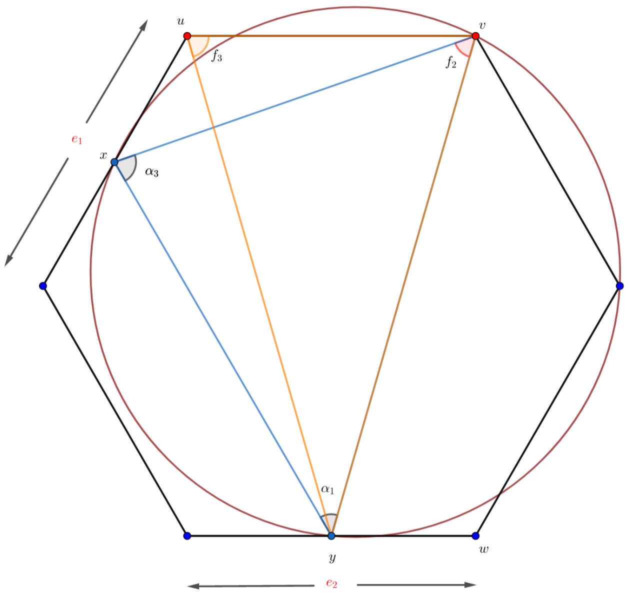


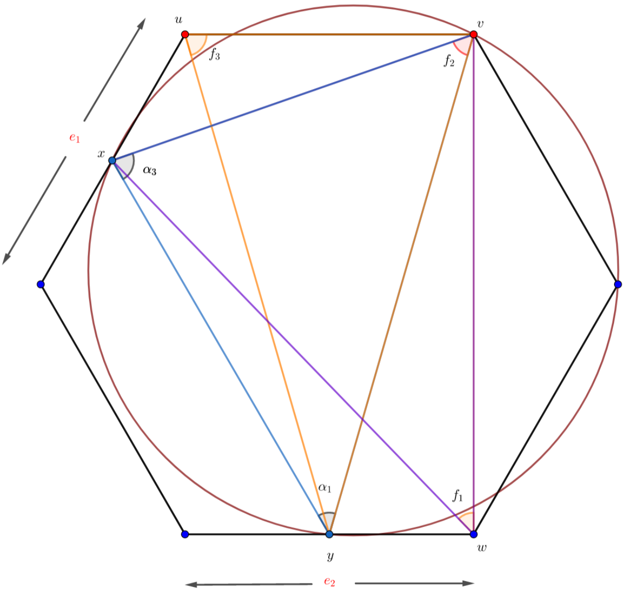
v
α_2
e_1
x
α_3
α_1
y
e_2



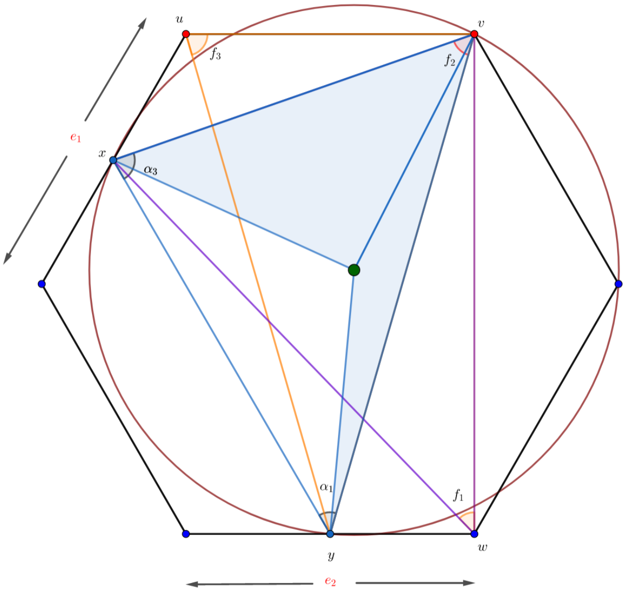
u
v
α_2
e_1
x
α_3
α_1
y
w
e_2

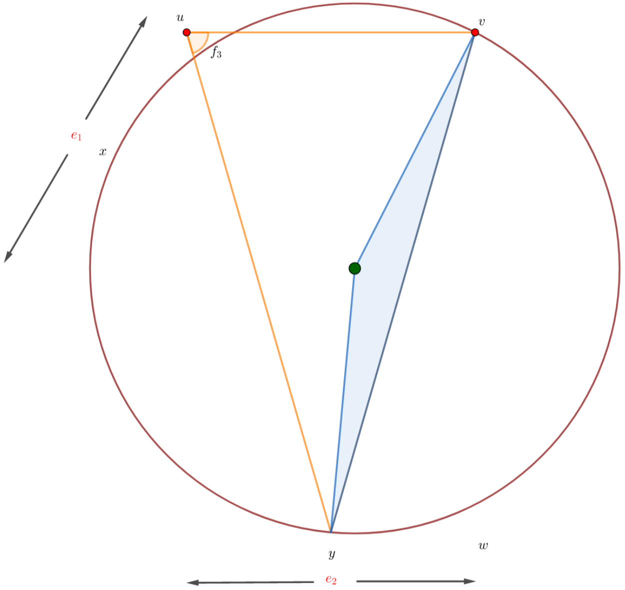

u
v
f_2
e_1
x
α_3
α_1
y
w
e_2


u
v
f_3
f_2
e_1
x
α_3
α_1
y
w
e_2

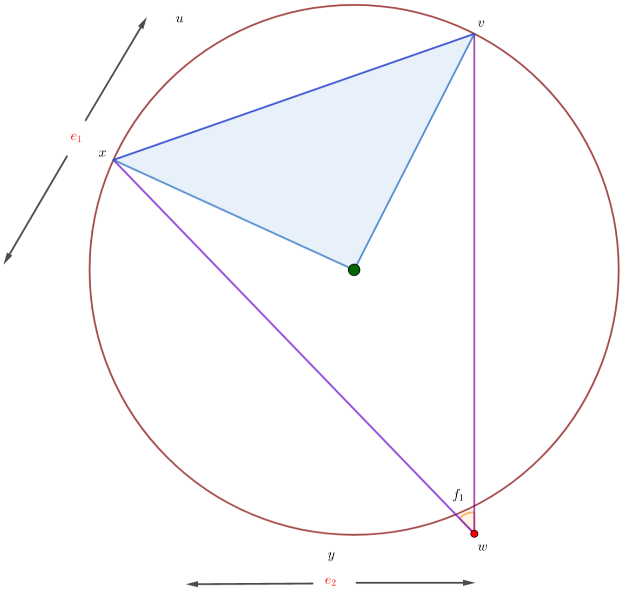


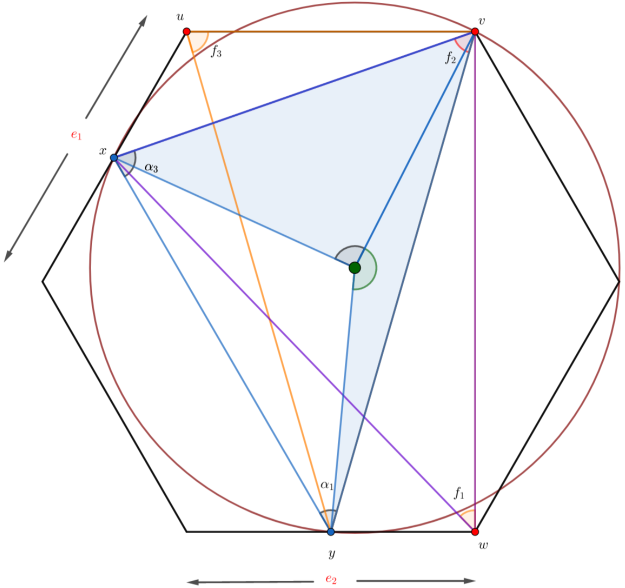
u
v
f3
f2
e1
x
α3
α1
f1
y
w
e2


u
v
f_3
f_2
e_1
x
α_3
α_1
f_1
y
w
e_2



u
v
f3
e1
x
y
w
e2


u
v
e_1
x
f_1
w
y
e_2



u
v
f_3
f_2
e_1
x
α_3
α_1
f_1
y
w
e_2

Cuentas ...

Primero observemos que

$$\begin{aligned} \sphericalangle vox &= 2\alpha_1 \\ \sphericalangle voy &= 2\alpha_3 \end{aligned}$$

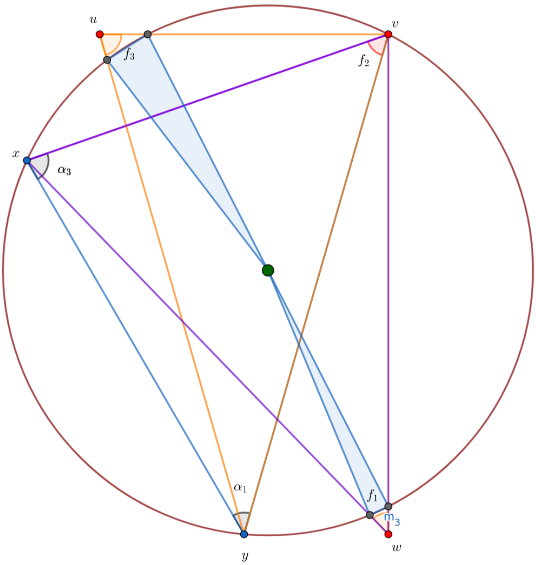
Luego, tenemos que

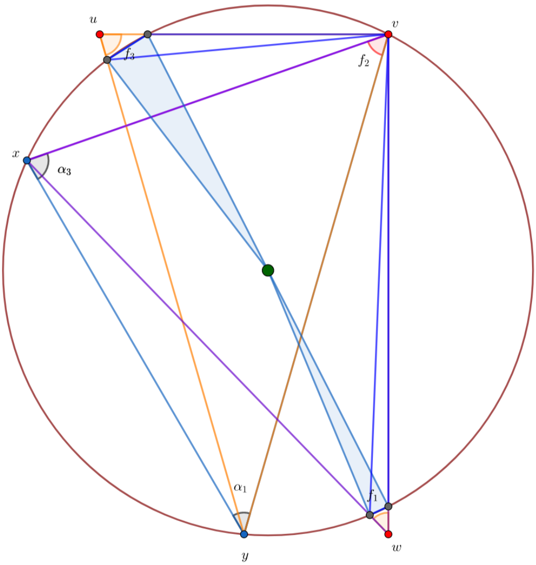
$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{2\alpha_1 - \sphericalangle x'}{2} \\ f_3 &= \frac{2\alpha_3 - \sphericalangle y'}{2} \end{aligned}$$

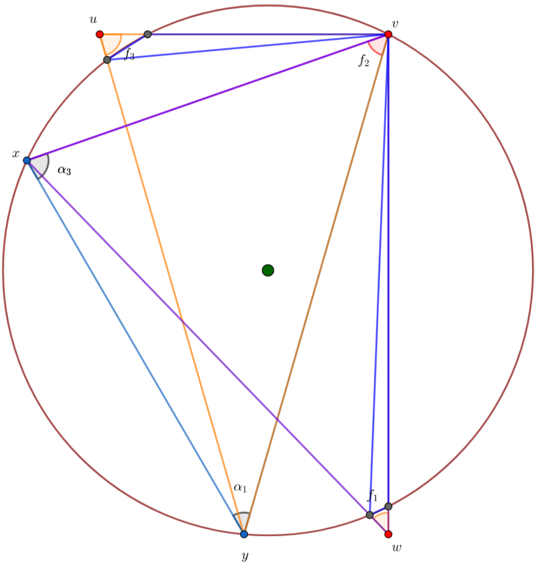
En partícular, se cumple que

$$\begin{aligned} f_1 + f_3 &= \frac{2\alpha_1 - \sphericalangle x'}{2} + \frac{2\alpha_3 - \sphericalangle y'}{2} \\ &= \alpha_1 + \alpha_3 - \frac{\sphericalangle x' + \sphericalangle y'}{2} \end{aligned}$$

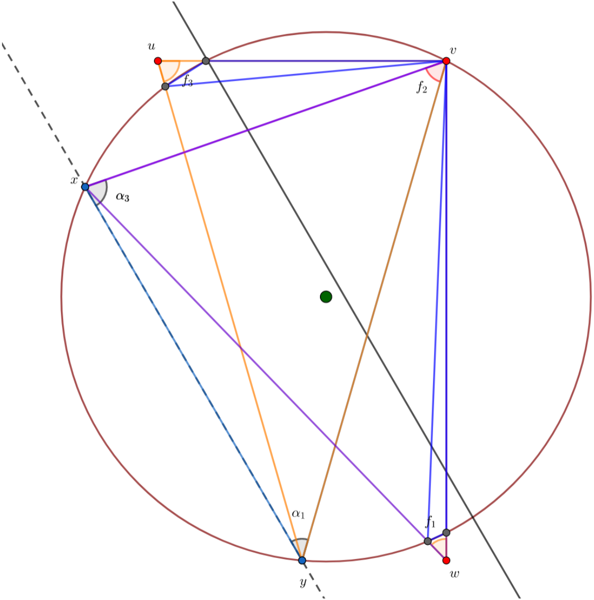
.

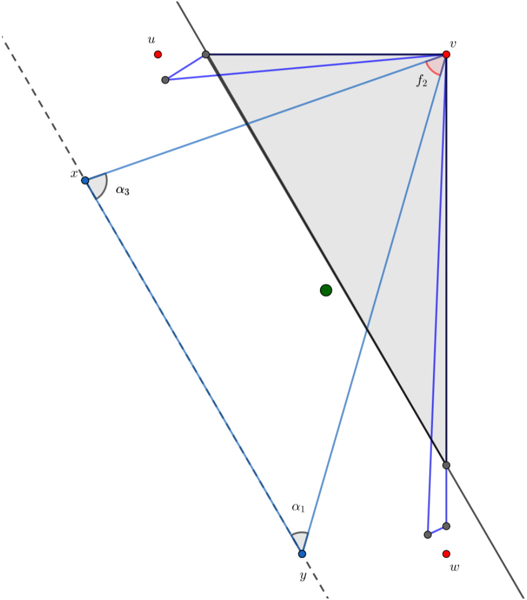

u
v
f_3
f_2
x
α_3
α_1
f_1
m3
y
w

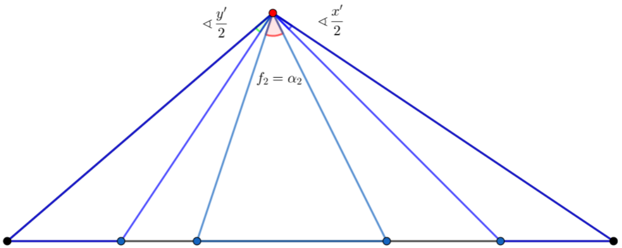

u
v
f_3
f_2
x
α_3
α_1
f_1
y
w

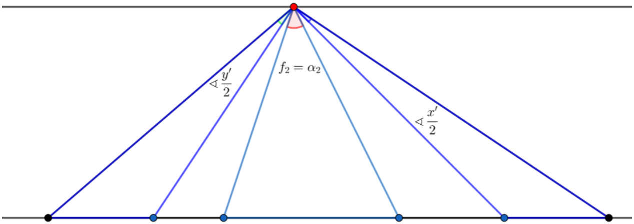


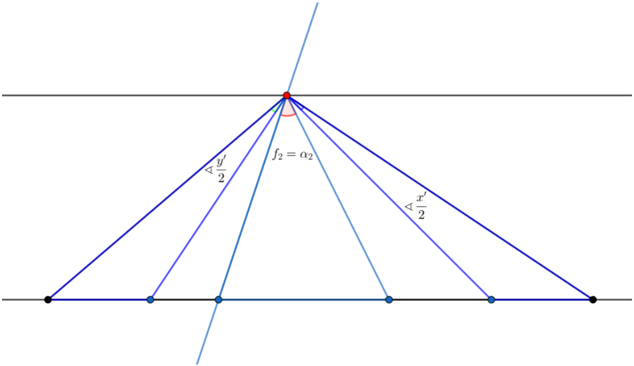
u
v
f_3
f_2
x
α_3
α_1
f_1
y
w

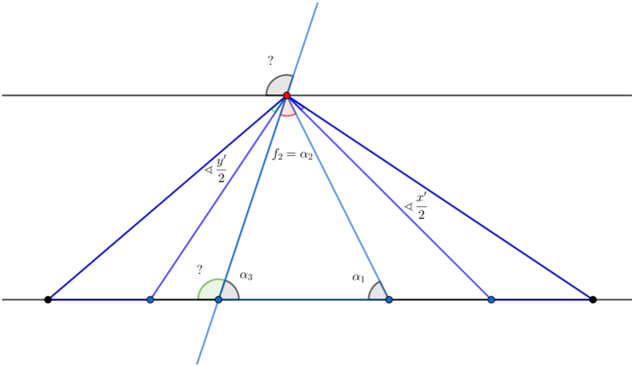

u
v
f_3
f_2
x
α_3
α_1
f_1
y
w

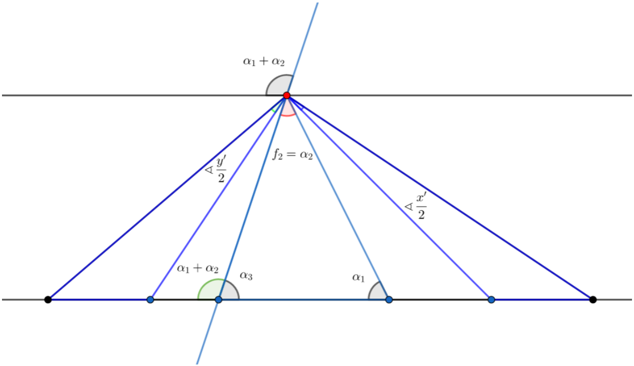

u
v
f_2
x
α_3
α_1
y
w


$\sphericalangle \frac{y'}{2}$
$\sphericalangle \frac{x'}{2}$
$f_2 = \alpha_2$


$\sphericalangle \frac{y'}{2}$
$f_2 = \alpha_2$
$\sphericalangle \frac{x'}{2}$


$\sphericalangle \frac{y'}{2}$
$f_2 = \alpha_2$
$\sphericalangle \frac{x'}{2}$


?
$f_2 = \alpha_2$
$\sphericalangle \frac{y'}{2}$
$\sphericalangle \frac{x'}{2}$
?
α_3
α_1



$\alpha_1 + \alpha_2$
$\sphericalangle \frac{y'}{2}$
$f_2 = \alpha_2$
$\sphericalangle \frac{x'}{2}$
$\alpha_1 + \alpha_2$
α_3
α_1

Cuentas ...

Esto implica que

$$
\begin{aligned}
\sphericalangle \frac{x'}{2} &< \alpha_1 \\
\sphericalangle \frac{y'}{2} &< \alpha_3
\end{aligned}
$$

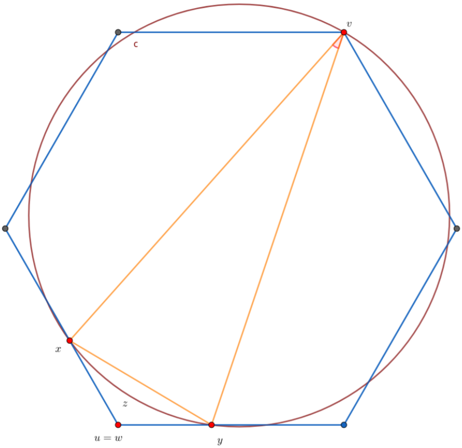
Luego, tenemos que

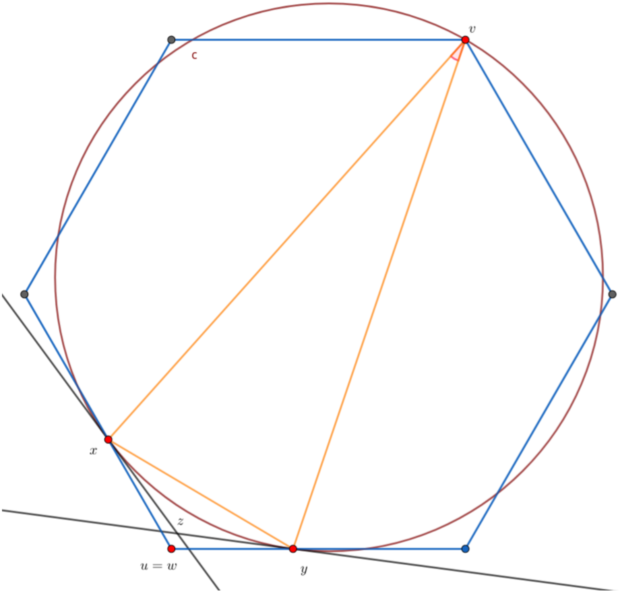
$$
\begin{aligned}
f_1 + f_3 &= \alpha_1 + \alpha_3 - \frac{\sphericalangle x' + \sphericalangle y'}{2} \\
&\leq \alpha_1 + \alpha_3
\end{aligned}
$$

Por lo anterior, tenemos que

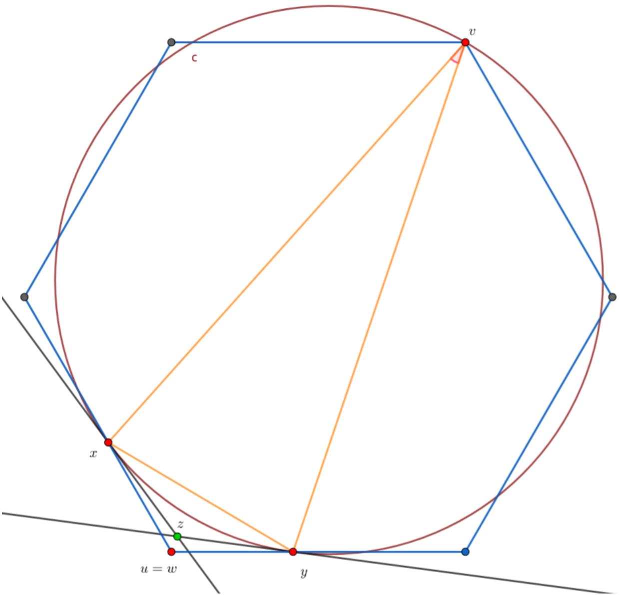
$$f_1 + f_2 + f_3 \leq \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3.$$

Caso 2.

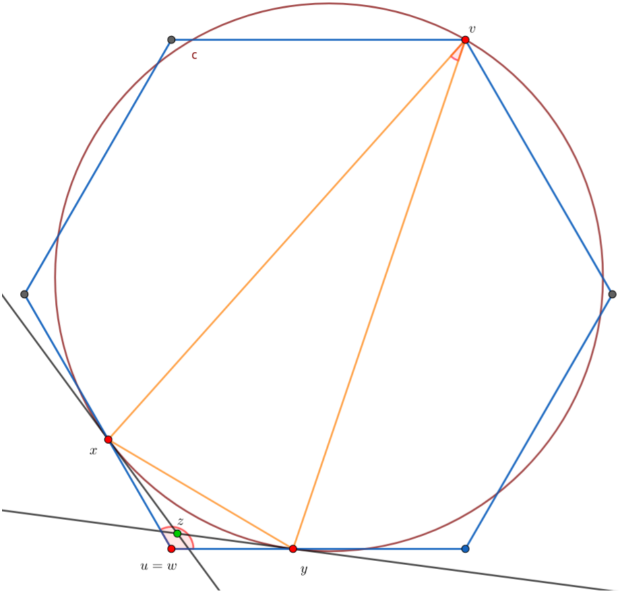




v
c
x
z
u = w
y



v
c
x
z
$u = w$
y



v
c
x
z
$u = w$
y

Cuentas ...

De lo anterior tenemos que

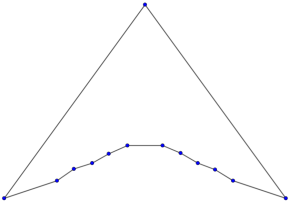
$$\begin{aligned}
\sphericalangle z &= \frac{(2\pi - 2\alpha_2) - 2\alpha_2}{2} \\
&= \frac{2\pi - 4\alpha_2}{2} \\
&= \pi - 2\alpha_2 \\
\Rightarrow \sphericalangle w = \alpha_3 &< \pi - 2\alpha_2 \\
\Rightarrow \alpha_2 + \alpha_3 &< \pi - \alpha_2 \\
\Rightarrow \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 &< \pi - (\alpha_2 + \alpha_1) \leq \pi.
\end{aligned}$$

$\square$

Antecedentes I.

Sea P un polígono simple con n vértices. Definimos

- $int(P) \longrightarrow \#$ aristas estrictamente internas.
- $ext(P) \longrightarrow \#$ aristas estrictamente externas.
- Vértice interno de P si pertenece al interior de $Conv(P)$.

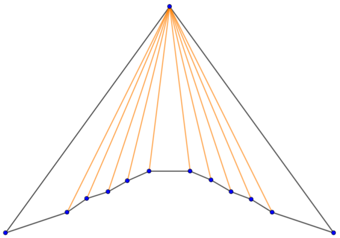


Polígono.

Antecedentes I.

Sea P un polígono simple con n vértices. Definimos

- $int(P) \longrightarrow \#$ aristas estrictamente internas.
- $ext(P) \longrightarrow \#$ aristas estrictamente externas.

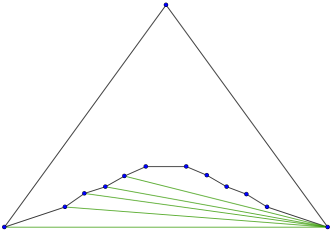


Algunas aristas extrictamente internas.

Antecedentes I.

Sea P un polígono simple con n vértices. Definimos

- $int(P) \longrightarrow \#$ aristas estrictamente internas.
- $ext(P) \longrightarrow \#$ aristas estrictamente externas.



Algunas aristas extrictamente externas.

Antecedentes II.

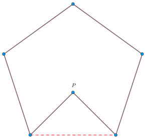
Lema

Sea P un polígono de n vértices, con k vértices internos. Entonces

$$ext(P) \geq k.$$

Dem. Analicemos dos posibles casos:

Caso 1. $p \in V_P$ tal que es interno y sus vecinos son parte de $V_{Conv(P)}$.
Entonces existe una $e \in E_{Conv(P)}$ que es estrictamente externa.



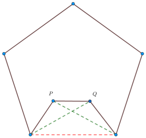
Antecedentes II.

Lema

Sea P un polígono de n vértices, con k vértices internos. Entonces

$$ext(P) \geq k.$$

Dem. Analicemos dos posibles casos:
Caso 2. Hay al menos 2 vértices vecinos internos. Entonces hay una arista extrictamente externa y al menos tantas extrictamente externas cómo vértices internos en esta sección.



$\square$

Antecedentes III.

Lema

Si P tiene k vértices internos, entonces

$$int(P) + ext(P) \geq (n+3) + k.$$

Dem. $int(P) = n - 3$. Entonces

$$\begin{aligned} int(P) &\geq n-3 \\ ext(P) &\geq k \\ \Rightarrow int(P) + ext(P) &\geq (n+3) + k. \end{aligned}$$

De lo anterior terminamos. $\square$

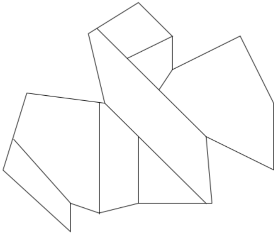
Antecedentes IV.

Lema

Todo polígono con k vértices internos puede descomponerse en $k+1$ polígonos convexos $P_1, \cdots, P_{k+1}$. Esta descomposición puede obtenerse de tal forma que si P_i tiene n_i vértices $i \in [1, \cdots, k+1]$ entonces $n_1 + \cdots + n_{k+1} = n + 3k$.

Dem. Para cada uno de los vértices internos v de P, dibújese un segmento de lıínea que bisecte el ángulo interno de P en v, y que se extiende hasta intersectar una arista de P o un bisector previamente dibujado.

Antecedentes IV.



División de un polígono.

Observemos que cada vértice interno de P aparece en exactamente dos subpoliígonos convexos de P , y que los extremos finales de nuestros bisectores también aparecen dos veces en esos poliígonos. $\square$

Antecedentes V.

Lema

Sea P_i' el polígno formado por vértices reales para cada P_i y sea m_i el número de vértices de P_i'. Entonces si $m_i \geq 4$, entonces cualquier arista extrictamente interna de P_i es intersectada por, al menos, $m_i - 3$ aristas estrictamente internas de P_i'.

Dem. Por el hecho de triangular. P_i es el polígono resultante del lema anterior y P_i' es formado a partir de los vértices reales de este, entonces $m_i = |V_{P_i'}|$. $\square$

El problema.

Teorema

Para cualquier polígono simple con n vértices

$$int(P) + ext(P) \geq \left\lceil \frac{3n-1}{2} \right\rceil - 4.$$

Dem. Supongamos que P tiene k vértices internos. Obtengamos una partición en $k+1$ polígonos convexos. Para cada $m_i \geq 4$ tómese una arista de visibilidad estrictamente interna e_i de P_i'.

*Es fácil ver que siempre existe una triangulación T de P que contiene a todas las aristas estrictamente internas de P_i'.

El problema.

Ahora, probemos que $int(P) \geq 2n - 2k - 6$. Para cada $m_i \geq 4$, se tiene que e_i se intersecta por lo menos con $m_i - 3$ aristas estrictamente internas de P'_i. *Si $e_i \in T_P$ entonces las aristas anteriores no pertenecen a T (las triangulaciones son planas y simples). Como estas aristas son estrictamente internas de P, tenemos que

$$int(P) \geq (n-3) + \sum_{m_i \geq 4} (m_i - 3) \geq (n-3) + \sum_{i \in [1, \cdots, k+1]} (m_i - 3)$$

Observemos que

$$\sum_{i \in [1, \cdots, k+1]} (m_i - 3) = n + k - 3(k+1) = n - 2k - 3.$$

El problema.

Así

$$int(P) \geq (n-3) + \sum_{i \in [1,\cdots,k+1]} (m_i - 3) = n - 2k - 6.$$

Además, sabemos que $ext(P) \geq k$. Entonces

$$int(P) + ext(P) \geq (n - 2k - 3) + k = n - k - 6.$$

El problema.

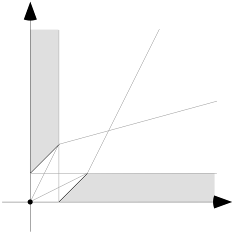
Antes habíamos probado que $int(P) + ext(P) \geq (n-3) + k$. Por lo que, al sumar ambos resultados tenemos que

$$\begin{aligned}
2 \cdot int(P) + 2 \cdot ext(P) &\geq (n-k-6) + (n-3) + k \\
&\geq 2n - k - 9 + k \\
&\geq 2n - 9 \\
\Longrightarrow int(P) + ext(P) &\geq \left\lceil \frac{2n-9}{2} \right\rceil \\
&\geq \left\lceil \frac{2n-8-1}{2} \right\rceil \\
&\geq \left\lceil \frac{2n-1}{2} - 4 \right\rceil \\
&\geq \left\lceil \frac{2n-1}{2} \right\rceil - 4.
\end{aligned}$$

$\square$

Conjetura de los espejos.

Supongamos que tenemos una colección F de segmentos de lineas cerrados y ajenos que representan una colección de espejos que reflejan luz en ambos lados, y sea p un punto en el plano.

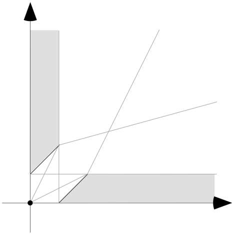


Supongamos que tenemos una lámpara colocada en p que emite luz a su alrededor. Un región S del plano con interior no vacio será llamada la sombra de F, si todo punto en el interior de S no es iluminado por al menos un rayo de luz que llege a él ya sea directamente de p, o despues de reflejarse varias veces en algunos espejos de F.

Conjetura de los espejos.

Conjetura

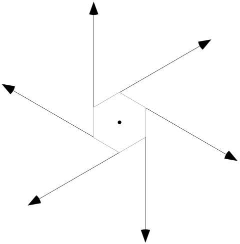
Sea F una familia de n espejos finitos y p un punto que no está en la recta generada por alguno de los espejos en F. Entonces siempre se genera una sombra de área infinita en el plano.



Conjetura de los espejos.

Conjetura

Sea F una familia de n espejos finitos y p un punto que no está en la recta generada por alguno de los espejos en F. Entonces siempre se genera una sombra de área infinita en el plano.



Gracias