UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO
Facultad de Ciencias

Autores:
Fernanda Villafán Flores
Fernando Alvarado Palacios
Adrián Aguilera Moreno

**Gráficas y Juegos**

# Tarea 3

1. Demuestre que si $e \in E$, entonces $c(G) \leq c(G-e) \leq c(G)+1$.

   ***Demostración:*** Dado que $c$ corresponde a la función que devuelve la cantidad de componentes conexas, analicemos dos casos posibles:

   - Si "e" no es un puente, entonces:

     $$c(G-e) = c(G) \tag{1}$$

     Esto pues sabemos que al borrarla una arista que no es puente, $G$ no cambia en número de componentes conexas y así:

     $$c(G) \leq c(G-e) \tag{2}$$

     De la dicotomia de $\leq$, sabemos que cumple con la igualdad.
     Luego, hacemos notar que:

     $$c(G) < c(G)+1 \tag{3}$$
     $$\Rightarrow c(G) \leq c(G)+1 \tag{4}$$

     De 1 y 4 se sigue que:

     $$c(G-e) \leq c(G)+1 \tag{5}$$

     De 2 y 5 tenemos que:

     $$c(G) \leq c(G-e) \leq c(G)+1$$

   - Si "e" es un puente, entonces:

     $$c(G) < c(G-e), \text{ por la definición de arista como puente} \tag{6}$$

     Así, tenemos que:

     $$c(G) \leq c(G-e), \text{ pues de la dicotomia se cumple con } < \tag{7}$$

     Además, sabemos que el número de componentes conexas aumenta exactamente en 1 en $G-e$ (porque estamos trabajando con gráficas simples).
     De esto, se sigue que:

     $$c(G-e) = c(G)+1 \tag{8}$$
     $$\Rightarrow c(G-e) \leq c(G)+1 \tag{9}$$

     De 7 y 9 se sigue que:

     $$c(G) \leq c(G-e) \leq c(G)+1$$

   De lo anterior, concluimos que $c(G) \leq c(G-e) \leq c(G)+1$. QED

2. Una gráfica es *escindible completa* si su conjunto de vértices admite una partición $(S, K)$ de tal forma que $S$ es un conjunto independiente, $K$ es un clan, y cada vértice en $S$ es adyacente a cada vértice en $K$. Demuestre que una gráfica es escindible completa si y sólo si no contiene a $C_4$ ni a $\overline{P_3}$ como subgráfica inducida.

***Demostración:*** Sea $C_4 = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_0)$ y $\overline{P_3} = \{y_0, y_1, y_2\}$ tal que $y_0y_2 \in E_G$, $y_0y_1, y_1y_2 \notin E_G$ [1] , con $x_i, y_j \in V_G$ $(0 \leq i \leq 3,\ 0 \leq j \leq 2)$. Nótese que los $x_i$'s, $y_j$'s no pueden estar contenidos en una misma parte. Es decir, $C_4$ y $\overline{P_3}$ no están contenidos en $S$ (ya que ningún vértice en $S$ es adyacente). De igual manera, no están contenidos en $K$ (ya que para cualesquiera 3 o 4 vértices en $K$ se tiene a $K_3$ o $K_4$).

Para este ejercicio analizaremos dos posibles casos:

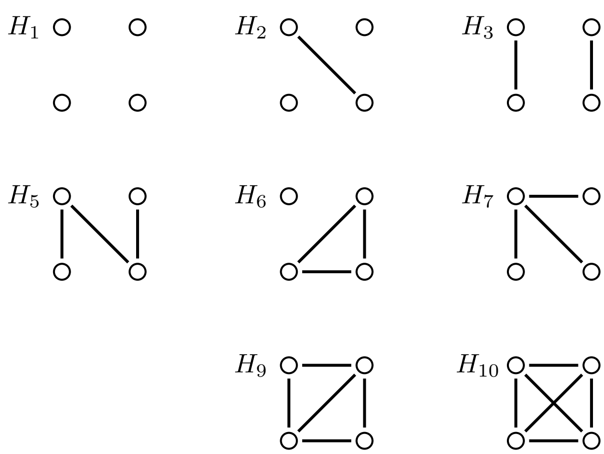
$\Rightarrow$) Procedamos por reducción al absurdo.

- $\cdot$) Si $G$ es *escendible completa*, entonces $C_4$ es subgráfica inducida de $G$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $x_0 \in S$ y $x_1 \in K$ (caso contrario, $x_1 \in S$ y $x_0$ no sería adyacente a $x_1$!!). Luego, si $x_2 \in S$ entonces $x_3 \in K$ (caso contrario, $x_3 \in S$ y $x_2$ no sería adyacente a $x_3$!!). Así por definición de $K$ (clan), $x_1x_3 \in E_G$!! (ya que $x_1, x_3 \in K$). Si $x_2 \in K$, entonces $x_3 \in S$ (caso contrario, $x_3 \in K$ y $x_1x_3 \in E_G$!!). Pero $x_0$ no es adyacente a $x_3$!! $(x_0, x_3 \in S)$. He aquí una contradicción de suponer a $C_4$ como subgráfica inducida de $G$. Por tanto, se concluye que $C_4$ no está contenida como subgráfica inducida en $G$.
- $\cdot\cdot$) Si $G$ es *escendible completa*, entonces $\overline{P_3}$ es subgráfica inducida de $G$. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $y_0 \in S$. Entonces: $y_1 \in S$ (pues $y_0y_1 \notin E_G$). Luego, $y_2 \in S$!! (pues $y_1y_2 \notin E_G$). Pero no todos los $y_i$'s pueden estar en $S$. Si $y_0 \in K$, entonces $y_1 \in S$ o $y_1 \in K$ implican que $y_0$ es adyacente a $y_1$!! Pero $y_0y_1 \notin E_G$ y he aquí una contradicción de suponer a $\overline{P_3}$ como subgráfica inducida de $G$. Por tanto, se concluye que $\overline{P_3}$ no está contenida como subgráfica inducida en $G$.

$\Leftarrow$) Para este caso, analicemos a todas las gráficas no isomorfas que no son $\overline{P_3}$ con 3 vértices y no son $C_4$ con 4 vértices.

**Con 3 vértices:**


**Con 4 vértices:**




Propongamos la partición $(S, K)$ en $G$.

[1] Sin pérdida de generalidad.

Notemos que $H_2, H_3, H_4, H_5, H_6$, y $H_8$ contienen como subgráficas inducidas a $\overline{P_3}$. Luego, sólo $H_1, H_7, H_9$, y $H_{10}$ junto a $G_1, G_2$, y $G_3$ son subgráficas inducidas de $G$ y podemos hacer el siguiente análisis:

1) $G_2$ y $H_1$ están contenidas como subgráficas inducidas en $S$.
2) $G_1$ tiene los 2 vértices de grado 1 en $S$ y el único vértice de grado 2 está en $K$.
3) $G_3$ y $H_{10}$ están en $K$.
4) $H_7$ tiene a su único vértice de grado 3 en $K$ y el resto de sus vértices está en $S$.
5) $H_9$ tiene a sus 2 vértices de grado 2 en $S$ y al resto en $K$.

Con base a lo anterior, podemos sugerir que $K$ es un clan y $S$ es independiente y ambos subconjuntos de $V_G$. Con esto tenemos que $G$ es *escindible*.

Por (2), (4) y (5), vemos que es necesario que haya aristas entre vértices de $S$ y $K$. Como (1) y (3) no restringen la condición anterior, entonces se puede considerar a *escindible completa*.

De los casos anteriores, concluimos que una gráfica es escindible completa si y sólo si no contiene a $C_4$ ni a $\overline{P_3}$ como subgráfica inducida. QED

3. (a) Demuestre que si $|E| > \binom{|V|-1}{2}$, entonces $G$ es conexa.

***Demostración:*** Si $|E_G| = \binom{|V|-1}{2}$, entonces hay dos posibilidades:

- Si $G$ es conexa, entonces $G + e$ (con $e \in E_G$) cumple que:

$$\begin{aligned} |E_{G+e}| &= \binom{|V|-1}{2} + 1 \\ &> \binom{|V|-1}{2} \end{aligned}$$

Además, $e$ no es ni lazo ni arista multiple, pues sabemos de resultados vistos en clase que una gráfica es completa si $|E| = \binom{|V|}{2}$ y como

$$\binom{|V|}{2} \neq \binom{|V|-1}{2}$$

ya que

$$\binom{|V|}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

y

$$\binom{|V|-1}{2} = \frac{(n-1) \cdot (n-2)}{2}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \binom{|V|}{2} &\neq \binom{|V|-1}{2} \\ \frac{n \cdot (n-1)}{2} &\neq \frac{(n-1) \cdot (n-2)}{2} \\ n \cdot (n-1) &\neq (n-1) \cdot (n-2) \\ n &\neq n-2 \end{aligned}$$

y de hecho

$$\binom{|V|}{2} > \binom{|V|-1}{2}$$

Así, se justifica que $e$ no sea ni lazo ni arista multiple.
De lo anterior, se sigue que $G+e$ es una gráfica simple que además es conexa, pues $G$ ya es conexa.

- Si $G$ no es conexa, entonces existe un vértice aislado $x$, ya que:

$$\begin{aligned}\binom{|V|-1}{2} &= \frac{|V_G|^2 - |V_G| - 2\cdot|V| + 2}{2} \\ &= \frac{|V_G|^2 - |V_G|}{2} + \frac{2 - 2|V_G|}{2} \\ &= \frac{|V_G|\cdot(|V_G|-1)}{2} - \frac{\cancel{2}\cdot(|V_G|-1)}{\cancel{2}} \\ &= \binom{|V_G|}{2} - (|V_G|-1)\end{aligned}$$

Sabemos por resultados vistos en clases que hay $\binom{|V_G|}{2}$ aristas en una gráfica completa y un vértice puede relacionarse a lo más con $|V_G|-1$ vértices (pues estamos trabajando con gráficas simples).
Nótese que de lo anterior se infiere que $G-\{x\}$ es conexa [2] y así $G+e$ (con $e \in E_G$)

$$\begin{aligned}|E_{G+e}| &= \binom{|V|-1}{2} + 1 \\ &> \binom{|V|-1}{2}\end{aligned}$$

es conexa, pues no hay lazos y no hay aristas múltiples en $G$.
Entonces, tenemos que la nueva arista está comprendida entre $x$ y algún otro vértice en $V_{G-\{x\}}$. Por lo que habrá una $xy$-trayectoria para $y \in E_G$.

De lo anterior, concluimos que $|E_G| > \binom{|V|-1}{2} \Rightarrow G$ es conexa. QED

(b) Para $|V| > 1$ encuentre una gráfica inconexa con $|E| = \binom{|V|-1}{2}$.
***Solución:***
Si $|V_G| = 2$, como $2 > 1 \Rightarrow |V_G| > 1$.
Luego la gráfica que tiene como vértices a $u$ y $v$ y además:

$$\begin{aligned}|E_G| &= \binom{2-1}{2} \\ &= \frac{(2-1)\cdot(2-2)}{2} \\ &= 0\end{aligned}$$

A continuación se muestra la gráfica mencionada:
Así, observemos que la gráfica anterior es inconexa.

$\square$

[2]Esto ya que $|E_{G-\{x\}}| = \binom{|V_G|}{2}$.

$G_1$


4. (a) Demuestre que si $\delta > \lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor - 1$, entonces $G$ es conexa.

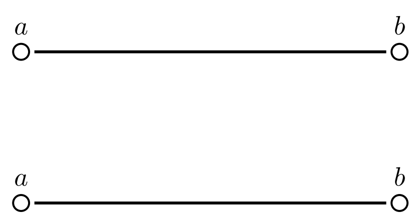
***Demostración:*** Para este inciso procedemos por inducción sobre $V_G$.
Sea $G$ una gráfica con $|V_G| = 1$.
Así, $\delta = \lfloor \frac{1}{2} \rfloor = 0$, *i.e.*,


donde $E_G = \varnothing$.
Luego, supongamos como hipótesis inductiva que para una cantidad $n$ de vértices, el que se cumpla $\delta = \lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor$ implica que $G$ es conexa.
A continuación veamos qué pasa con $G + \{x\}$, donde $x \in V_{G+\{x\}}$. Así, $G$ cumple con $\delta = \lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor$.
De lo anterior, se sigue que $x$ es vecino de al menos $\lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor$ vértices en $G$ (notemos que $G$ es, de hecho, una subgráfica inducida por vértices de $G + \{x\}$). Como $G$ es conexa, por hipótesis inductiva se sigue que $G + \{x\}$ es conexa. QED

(b) Para $|V|$ par encuentre una gráfica $(\lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor - 1)$-regular e inconexa.
***Solución:***
Con $|V| = 4$, tenemos que:

$$\begin{aligned} \lfloor \frac{4}{2} \rfloor - 1 &= 2 - 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

$G$

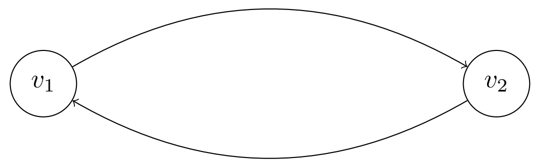



Así, la gráfica es 1-regular e inconexa.

$\square$

5. Demuestre que si $D$ no tiene lazos y $\delta^+ \geq 1$, entonces $D$ contiene un ciclo dirigido de longitud al menos $\delta^+ + 1$.

***Demostración:*** Para este ejercicio procedamos por inducción en $V$. Así, cuando $\delta^+ = 1$ y $|V| = 2$ tendremos que:




Ahora, supongamos que hay un ciclo $C$ de al menos longitud $\delta^+ + 1$ con $\delta^+ > 1$, para $n(n > 1)$ vértices en $D$ y además $D$ no tiene lazos.

Luego, para $|V_D| = n + 1$ donde llamaremos $x$ al vértice extra.

Analicemos dos casos extremos:

- Si $x$ tiene una sóla incidencia, entonces $\delta^+ = 1$ y como $\mathcal{L}(C) > 1$, tenemos que existe un ciclo de al menos $\delta^+ + 1$. En este caso, tenemos que es estrictamente mayor. De lo anterior, terminamos.
- Si para cada vértice $u_i(1 < i \geq |V_D| - 1)$ en $G$ hay una arista que "salga" de $u_i$ e incida en $x$, tenemos que $\delta^+$ no se modifica.

  Ahora notemos que, en partícular, hay al menos $u_i, u_{i+1}$ tales que existe una $u_i u_{i+1}$-trayectoria en $C$ (notemos que $u_i$ y $u_{i+1}$ son vecinos). Luego, como existe $e_1 = u_i x$ y $e_2 = u_{i+1} x$, con $e_1$ y $e_2$ en $E_D$, tenemos un nuevo ciclo que es de al menos $\mathcal{L}(C) + 1$ de longitud. Así, como $\mathcal{L}(C) \geq \delta^+ + 1$, tenemos que el nuevo ciclo es de al menos longitud $\delta^+ + 1$.

Del análisis anterior, concluimos que el enunciado se cumple. QED

# Puntos Extra

1. Demuestre que el número de $v_i v_j$-caminos de longitud $k$ en $G$ es $(A^k)_{ij}$ donde $A$ es la matriz de adyacencia de $G$.

***Demostración:*** Procedemos por Inducción.

**Paso base:** $(n = 1)$.

Si $v_i v_j$ son adyacentes, entonces $A_{ij} = 1$ y en caso de que no sean adyacentes, $A_{ij} = 0$. Lo que implica que el número de caminos de longitud 1 entre $v_i v_j = A_{ij} = A^1_{ij}$.

**Hipótesis de Inducción:** $(n = k)$.

Supongamos que el número de $v_i v_j$-caminos de longitud $k$ en $G$ es:

$$(A^k)_{ij}$$

**Paso inductivo:** $(n = k + 1)$.

Demostraremos que el número de $v_i v_j$-caminos de longitud $k + 1$ en $G$ es:

$$(A^{(k+1)})_{ij}$$

Sabemos que $A^{(k+1)} = A^k \cdot A$ (por definición de multiplicación de matrices).

Sean "t" los elementos de la matriz $A^k$ y "a" lo elementos de la matriz A.

Entonces: $A^k \cdot A = \sum_{r=1} t_{ir} a_{rj}$, para toda $A_{ij}$ que pertenece a $A^{(k+1)}$.

Así, $(A^{(k+1)})_{ij} = (A^k \cdot A)_{ij} = \sum_{r=1} t_{ir} a_{rj}$.

Notemos que esta suma en específico, es la multiplicación de un renglón de $A^k$ y una columna de $A$.

Si $a_{rj} = 0$, entonces $v_r$ y $v_j$ no son adyacentes y, por **Hipótesis de Inducción**, $t_{ir}$ es el número de caminos que existen de longitud $k$ de $v_i$ a $v_r$.

- **Caso 1)** $a_{rj} = 0$.
  Si $a_{rj} = 0$, entonces $(t_{ir} \cdot a_{rj} = 0)$ y por tanto, existen 0 caminos de longitud $n+1$.
- **Caso 2)** $a_{rj} = 1$.
  Si $a_{rj} = 1$, entonces $(t_{ir} \cdot a_{rj} = t_{ir})$ y por tanto, existe 1 camino de longitud $n+1$ que recorre de $v_i v_j$.
  De lo anterior se sigue que (independientemente de si $a_{rj} = 0$ o $a_{rj} = 1$) $\sum_{r=1} t_{ir} a_{rj}$ nos dará el número de caminos de longitud $n+1$ que existen entre $v_i v_j$.

QED

2. Sea $G$ una gráfica bipartita de grado máximo $k$. Demuestre que existe una gráfica bipartita $k$-regular, $H$, que contiene a $G$ como subgráfica inducida.