UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO

Facultad de Ciencias

Autores:
Fernanda Villafán Flores
Fernando Alvarado Palacios
Adrián Aguilera Moreno

Gráficas y Juegos

Tarea 2

1. Demuestre que toda flecha en un camino dirigido cerrado en una digráfica pertenece a algún ciclo dirigido.

   Demostración: Sea C un camino dirigido cerrado tal que $C = (v_0, v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_0)$.

   Procedamos por inducción sobre el número de veces que se repite un vértice distinto a v_0.

   - **Paso Base:** $i = 0$.

     En este caso tenemos que el vértice v_i no se repite ninguna vez, por lo que ya tenemos el ciclo dirigido buscado.
   - **Hipótesis de Inducción:** Supongamos que $i > 0$.
   - **Paso Inductivo:** Demostraremos que si el vértice v_i se repite al menos una vez, hay un ciclo dirigido.

     Como el vértice v_i se repite, podemos dividir a C de la siguiente forma:
     Sea C' un camino dirigido cerrado de C.
     Tenemos que:
     $$C' = (v_i, \ldots, v_i)$$
     Entonces, si C' no repite vértices, ya tenemos el ciclo dirigido buscado.
     En caso contrario, aplicamos el mismo proceso:
     Sea C'' un camino dirigido cerrado de C'.
     Tenemos que:
     $$C'' = (v_0, \ldots, v_i, v_j, \ldots, v_0) \text{ , con } i < j$$
     Luego, este proceso lo realizamos hasta obtener un camino dirigido cerrado sin vértices repetidos.

   Así, podemos concluir que toda flecha en un camino dirigido cerradoen una digráfica pertenece a algún ciclo dirigido. QED

2. Demuestre que si G es simple y $\delta \geq 2$, entonces G contiene un ciclo de longitud al menos $\delta + 1$.

   Demostración: Sea P una trayectoria de longitud máxima en G.
   Si $P = (v_0, \ldots, v_n)$, notemos que v_n tiene un vecino distinto a v_{n-1}.
   Entonces, como P es de longitud máxima, el otro vértice de v_n debe ser un vértice en P (digamos v_i con $i < n - 1$).
   Entonces $v_i P v_n v_i$ es un ciclo. QED

3. Sea G una gráfica conexa. Demuestre que si G no es completa, entonces contiene a P_3 como subgráfica inducida.

   Demostración: Procedamos por reducción al absurdo.

   Sea G una gráfica completa, entonces P_3 es subgráfica de G. Para este ejercicio necesitamos de una condición, $V_G \geq 3$, para las gráficas que no cumplan esto se tendrá la demostración por vacuidad.

   Tomemos a x_{i-1}, x_i, x_{i+1} en V_G $(2 \geq i \geq |V_G| - 1)$, como G es completa se tiene que la distancia entre cualesquiera 2 vértices es 1, luego tenemos que hay $\binom{3}{2}$ aristas!! y esto es claramente mayor que 2 ($|E_{P_3}|$), como los vértices que tomamos son arbitrarios, podemos concluir que $P_3 \nsubseteq G$.

Como la anterior contradicción resulta de suponer a G completa, podemos asegurar que si G no es completa, entonces $P_3 \subseteq G$. QED

4. Demuestre que cualesquiera dos trayectorias de longitud máxima en una gráfica conexa tienen un vértice en común.

5. Caracterice a las gráficas k-regulares para $k \in \{0, 1, 2\}$.

Solución:

$k = 0$) Son todas las gráficas que no tienen aristas, a estas se les conoce como gáficas vacías.

$k = 1$) Estas son gráficas con una cantidad de vértices par y son tantas uniones de P_2 como $\frac{|V_G|}{2}$. Las gráficas con $|V_G|$ impar no entran aquí porque siempre habrá $(|V_G| - 1)P_2$ y algún vértice (aislado) será de grado igual a 0!! (o, pensando en lazos, de grado igual a 2), lo que contradice el ser $1-$regular.

$k = 2$) Son gráficas que contienen ciclos o son combinaciones de ciclos. Todos los ciclos son $2-$regulares, esto no implica que todas las gráficas $2-$regulares sean un ciclo pero si que los contengan o que sean combinaciones de estos.

Con los 3 puntos anteriores concluimos la caracterización. □

6. Demuestre que si $|E| \geq |V|$, entonces G contiene un ciclo.

Demostración: (Por contradicción)

Supongamos que G es una gráfica tal que $|E| \geq |V|$ y G no contiene ningun ciclo $\Longrightarrow$ el número máximo de vétices de este tipo de gráficas será igual a $|V| - 1$ (Ya que todo vértice se podria relacionar con algun otro vertice sin repetir con los vértices anteriores, pero el último no se podra relacionar con algun otro vertice ya que si lo hiciera formaría un ciclo) $\Longrightarrow |E| \leq |V| - 1 < |V|$ (!lo que es una contradiccón ya que contradice nuestra hipótesis de que $|E| \geq |V|$). Por lo tanto la gráfica G debe tener al menos un ciclo.

QED

Puntos extra

1. Sea G una gráfica. Demuestre que G es k-partita completa si y sólo si no contiene a K_{k+1} ni a $\overline{P_3}$ como subgráficas inducidas.

Demostración: En este ejercicio analizaremos 2 casos posibles:

$\Rightarrow$) Procedamos por contrapositiva.

$\cdot$) Si $\overline{P_3} \subseteq G$, por definición de k-partita completa $\overline{P_3}$ no esta en la misma parte (pues, en caso de estarlo hay una adyacencia en 2 vértices de la misma parte), luego $\overline{P_3}$ esta en 2 o 3 partes distintas y habrá un $x \in \overline{P_3}$ que no se relacionará con al menos 1 vértice en algunas de las partes y por tanto G no es k-partita completa (lo que no cumple es ser completa bajo el supuesto tomado).

- ·) Si $K_{k+1} \subseteq G$, entonces hay 1 vértice de K_{k+1} en cada una de las partes (lo que suma k vértices) y un $x \in K_{k+1}$ en alguna parte tal que se relaciona con exactamente un vértice en esa parte y por tanto G no es k-partita completa (no cumple el ser k-partita).

$\Leftarrow$) Procedamos reducción al absurdo .

- ·) Supongamos que $\overline{P_3} \subseteq G$, por definición de k-partita completa $\overline{P_3}$ no esta en la misma parte (pues, en caso de estarlo hay una adyacencia en 2 vértices de la misma parte), luego $\overline{P_3}$ esta en 2 o 3 partes distintas y habrá un $x \in \overline{P_3}$ que no se relacionará con al menos 1 vértice en algunas de las partes y por tanto G no es k-partita completa !!(lo que no cumple es ser completa bajo el supuesto tomado) y he aquí una contradicción de suponer que $\overline{P_3} \subseteq G$. Por tanto concluimos que $\overline{P_3} \nsubseteq G$.
- ·) Supongamos que $K_{k+1} \subseteq G$, entonces hay 1 vértice de K_{k+1} en cada una de las partes (lo que suma k vértices) y un $x \in K_{k+1}$ en alguna parte tal que se relaciona con exactamente un vértice en esa parte y por tanto G no es k-partita completa!! (no cumple el ser k-partita) y he aquí una contradicción de suponer $K_{k+1} \subseteq G$. Por tanto concluimos que $K_{k+1} \nsubseteq G$

De los casos anterior concluimos que G es k-partita completa si y sólo si no contiene a K_{k+1} ni a $\overline{P_3}$ como subgráficas inducidas. QED

2. Demuestre que si G es una gráfica con $|V| \geq 4$ y $|E| > n^2/4$, entonces G contiene un ciclo impar.

3. Sea $d = (d_1, \ldots, d_n)$ una sucesión no creciente de enteros no negativos. Sea $d' = (d_2 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n)$.

   (a) Demuestre que d es gráfica si y sólo si d' es gráfica.

   (b) Usando el primer inciso, describa un algoritmo que acepte como entrada una sucesión no creciente de enteros no negativos d y devuelva una gráfica simple con sucesión de grados d, un certificado de que d no es gráfica.