UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO
Facultad de Ciencias

Autores:
Fernanda Villafán Flores
Fernando Alvarado Palacios
Adrián Aguilera Moreno

Gráficas y Juegos

Tarea 1

1. Sea n un entero, $n \geq 3$. Demuestre que existe un único n-ciclo, salvo isomorfismo.

   Demostración: Sean G y H ciclos de orden n.

   Tomamos $V_G = (v_1, \cdots, v_n, v_1)$ y $V_H = (v_1, \cdots, v_n, v_1)$.

   Como G y H son ciclos, sabemos que son 2-regular.
   Es decir, podemos suponer que un vértice v_i de G con $i \in \{1, \cdots, n\}$ es adyacente a dos vértices (digamos v_{i-1} y v_{i+1}). Notemos que $v_1 = v_n$.
   Análogamente para H.

   Ahora, como G y H son de orden n, definimos una función $\phi : V_G \to V_H$ dada por $\phi(v_i) = u_i$ para cada $i \in \{1, \cdots, n\}$.

   Claramente ϕ es una biyección.

   Demostraremos que ϕ es un isomorfismo:

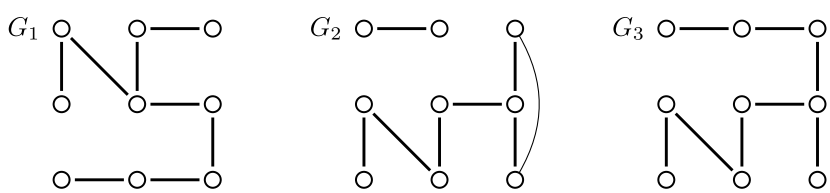
   $\Rightarrow$) Si $v_iv_j \in E_G$, entonces podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que $j = i+1$ o $j = i-1$.
   Por definición de ϕ, tenemos que $\phi(v_i) = u_i$ y $\phi(v_j) = u_j = u_{i+1}$ (análogamente cuando $j = i-1$).
   Como $u_iu_j = u_iu_{i+1} \in E_H$, concluimos que $\phi(v_i)\phi(v_j) \in E_H$.

   $\Leftarrow$) Reciprocamente, si $v_iv_j \notin E_G$, entonces $j \neq i+1$ y $j \neq i-1$.
   Se sigue que $\phi(v_i)\phi(v_j) = u_iu_j \notin E_H$.

   Por lo tanto, demostramos que existe un único n-ciclo (salvo isomorfismo). QED

2. De un ejemplo de tres gráficas del mismo orden, mismo tamaño y misma sucesión de grados tales que cualesquiera dos de dichas gráficas no sean isomorfas, al menos una de ellas sea conexa, y al menos una sea inconexa.

   A continuación se muestran las gráficas: G_1, G_2 y G_3:



   con sucesiones orden 9, tamaño 8 y sucesión de grados $(1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3)$. □

3. Sea D una digráfica. Demuestre que

$$\sum_{v \in V_D} d^+(v) = \sum_{v \in V_D} d^-(v) = |A_D|.$$

   Demostración: La demostración se dividirá en dos incisos:

   ·) $\displaystyle\sum_{v \in V_D} d^+(v) = |A_D|$
   Sea M_1 una matriz de incidencia de D, tal que:

$$M_1 = M_{ij}^+ = \begin{cases} 1 & si \quad\quad v_i \text{ } es \text{ } la \text{ } cola \text{ } de \text{ } e_j \\ \\ 0 & si \quad v_i \text{ } no \text{ } es \text{ } la \text{ } cola \text{ } de \text{ } e_j \end{cases}$$

Ahora, supongamos que $V = \{v_1, \cdots, v_n\}$ donde v_i corresponde al *i-ésimo* renglón de M_1.

Sabemos que las entradas de cada columna de M_1 son igual a 1, que son las flechas e_j con un vértice llamado *cola de la flecha*. Por otro lado, las entradas del *i-ésimo* renglón de M_1 suman $d^+(v_i)$, ya que las entradas corresponden a todas las flechas de las cuales v_i es cola de dicha flecha.

Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} |A_D| &= \sum_{j=1}^{|A|} \sum_{i=1}^{|V|} M_{ij}^+ \\ &= \sum_{i=1}^{|V|} \sum_{j=1}^{|A|} M_{ij}^+ \\ &= \sum_{i=1}^{|V|} d^+(v_i) \\ &= \sum_{v \in V} d^+(v) \end{aligned}$$

De forma análoga se realiza el otro inciso.

$\cdot\cdot)$ $\displaystyle\sum_{v \in V_D} d^-(v) = |A_D|$

Sea M_2 una matriz de incidencia de D, tal que:

$$M_2 = M_{ij}^- = \begin{cases} 1 & si \quad\quad v_i \text{ } es \text{ } la \text{ } cabeza \text{ } de \text{ } e_j \\ \\ 0 & si \quad v_i \text{ } no \text{ } es \text{ } la \text{ } cabeza \text{ } de \text{ } e_j \end{cases}$$

Ahora, supongamos que $V = \{v_1, \cdots, v_n\}$ donde v_i corresponde al *i-ésimo* renglón de M_1.

Sabemos que las entradas de cada columna de M_1 son igual a 1, que son las flechas e_j con un vértice llamado *cabeza de la flecha*. Por otro lado, las entradas del *i-ésimo* renglón de M_1 suman $d^-(v_i)$, ya que las entradas corresponden a todas las flechas de las cuales v_i es cabeza de dicha flecha.

Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} |A_D| &= \sum_{j=1}^{|A|} \sum_{i=1}^{|V|} M_{ij}^- \\ &= \sum_{i=1}^{|V|} \sum_{j=1}^{|A|} M_{ij}^- \\ &= \sum_{i=1}^{|V|} d^-(v_i) \\ &= \sum_{v \in V} d^-(v) \end{aligned}$$

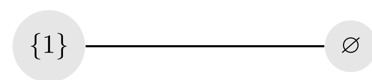
Por lo tanto, queda demostrado que:

$$\sum_{v \in V_D} d^+(v) = \sum_{v \in V_D} d^-(v) = |A_D|$$

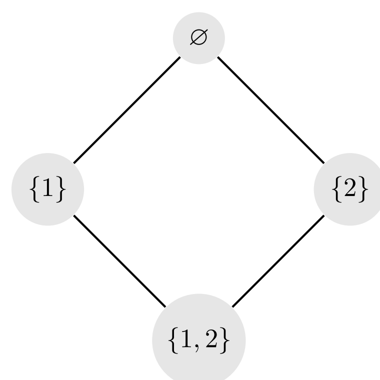
QED

4. Sea n un entero positivo. Definimos a la *Retícula Booleana*, BL_n, como la gráfica cuyo conjunto de vértices es el conjunto de todos los posibles subconjuntos de $\{1, \cdots, n\}$, donde dos subconjuntos X y Y son adyacentes si y sólo si su diferencia simétrica tiene exactamente un elemento.

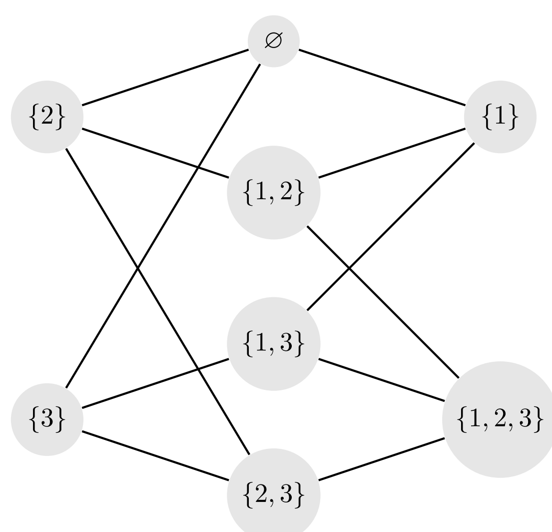
   (a) Dibuje BL_1, BL_2, BL_3 y BL_4.
   Gráfica representativa de BL_1:



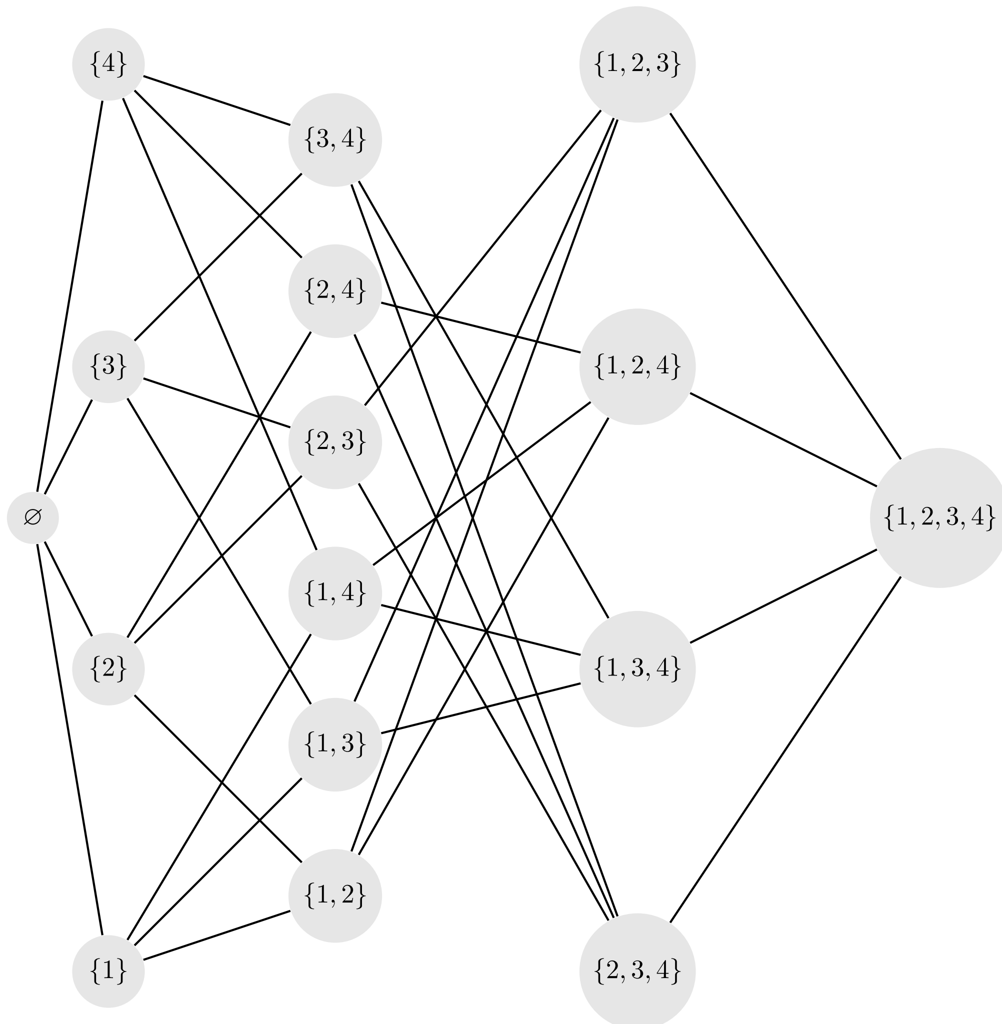
Gráfica representativa de BL_2:



Gráfica representativa de BL_3:



Gráfica representativa de BL_4:



□

(b) Determine $|V_{BL_n}|$ y $|E_{BL_n}|$. (Justifique su respuesta).

Veamos que la cantidad de vértices es igual a la cantidad de subconjuntos que se pueden formar de la retícula BL_n, esto es el conjunto potencia de $\{1, \cdots, n\}$. Por lo que:

$$|V_{BL_n}| = |P(\{1, \cdots, n\})| = 2^n$$

Mientras que es un tanto más empírica la forma en la que se obtiene la cardinalidad de E_{BL_n}, veamos la siguiente tabla con las primeras retículas:

Valor de n	# de aristas
$n = 1 \Rightarrow$	1 arista
$n = 2 \Rightarrow$	4 arista
$n = 3 \Rightarrow$	12 arista
$n = 4 \Rightarrow$	32 arista

Nótese que:

$$\begin{array}{lcr} 1 \cdot 1 & = 1 \cdot 2^{1-1} = & 1 \\ 2 \cdot 2 & = 2 \cdot 2^{2-1} = & 4 \\ 3 \cdot 4 & = 3 \cdot 2^{3-1} = & 12 \\ 4 \cdot 8 & = 4 \cdot 2^{4-1} = & 32 \end{array}$$

Podemos deducir que $|E_{BL_n}| = n \cdot 2^{n-1}$.

En general, las retículas booleanas son n-regulares, pues para un $x \in V_{BL_{n-1}}$ con BL_{n-1} siendo n-regular, el BL_n tendrá a x relacionado con al menos $n-1$ elementos (son con los que ya se relacionaba en BL_{n-1}) y x se relacionará con el conjunto de tamaño $|x|+1$ (el cuál sólo es uno, pues este es $x \cup \{n\}$) y concluimos que BL_n es n-regular, pues cada x se relaciona con $(n-1)+1$ elemento.

Luego hay n aristas por cada vértice (los cuáles son 2^n, como ya vimos) y por el inciso (c) tenemos que BL_n es bipartita. Esto aunado al hecho de que es n-regular, nos da partes en BL_n de igual cardinalidad. De lo anterior hay una cantidad de aristas igual a n por cada una de las partes. Es decir:

$$\begin{aligned} |E_{BL_n}| &= n \cdot \frac{2^n}{2} \\ &= n \cdot 2^{n-1} \end{aligned}$$

$$\therefore \quad |V_{BL_n}| = 2^n \text{ y } |E_{BL_n}| = n \cdot 2^{n-1}$$ □

(c) Demuestre que BL_n es bipartita para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$.

Demostración: Sea $A = \{1, \cdots, n\}$ conjunto con $n \in \mathbb{Z}^+$.
Veamos que podemos particionar nuestra BL_n en los conjuntos X y Y de tal forma que X contenga los subconjuntos de BL_n tales que su cardinalidad es $2k$, donde $2k \in A$ y Y tal que contenga los subconjuntos de BL_n de cardinalidad $2k-1$, donde $2k-1 \in A$.

Veamos qué pasa cuando dos subconjuntos en BL_n se relacionan, es decir, son adyacentes en BL_n.

- Su diferencia simétrica es 1.

Dados dos subconjuntos en BL_n, uno de ellos debe tener cardinalidad $n+1$ o $n-1$ y el otro de cardinalidad n tal que se cumple que uno de ellos es subconjunto del otro.

Notemos que en X están todos los subconjuntos de cardinalidad par.
Por tanto, la diferencia simétrica entre cualesquiera 2 subconjuntos distintos en X es:

- A lo menos un conjunto de cardinalidad 2.

De lo anterior, tenemos que ningún subconjunto en X cumple ser adyacente mediante la definición de BL_n.
Ahora notemos que, en Y están todos los subconjuntos de BL_n que tienen cardinalidad impar.
Por lo tanto, la diferencia simétrica en cualesquiera dos subconjuntos distintos en Y es:

- Al menos un conjunto de cardinalidad 2.

Entonces tenemos que: $2k + 1 - (2k - 1) = 2$ y como Y es un conjunto, no se tiene dos conjuntos iguales a los cuales relacionar.
Por lo anterior y por la definición de diferencia simétrica, no existen dos conjuntos adyacentes en Y.

$$\therefore \quad BL_n \text{ es bipartita en } X \text{ y } Y, \textit{ i.e. } BL_n[X, Y] \qquad \text{QED}$$

5. Sea $G[X, Y]$ una gráfica bipartita.

   (a) Demuestre que $\sum_{v \in X} d(v) = \sum_{v \in Y} d(v)$.

   Demostración: (Inducción sobre $|Y|$)
   Sea G una gráfica bipartita $G[X, Y]$ y sea r cualquier Entero tal que $|X| = r$.

   - PASO BASE: $(n = 1)$
     Así, tenemos $G[X, Y_1]$ donde $|X| = r$ y $|Y| = 1$.
     Como G es bipartita, todo vértice de X se relaciona con el único elemento de Y.
     Por lo que $\sum_{v \in X} d(v) = r$ y el grado del único vértice en Y es igual a r.
     Por lo tanto, $\sum_{v \in X} d(v) = r = \sum_{v \in Y_1} d(v)$.

   - Hipótesis de Inducción: $(n = k)$
     Supongamos que $G[X, Y_k]$ es una gráfica bipartita y $\sum_{v \in X} d(v) = \sum_{v \in Y_k} d(v)$.

   - PASO INDUCTIVO: $(n = k + 1)$
     Sea $G[X, Y_{k+1}]$ función bipartita.
     Demostraremos que $\sum_{v \in X} d(v) = \sum_{v \in Y_{k+1}} d(v)$.
     Por hipótesis de inducción, tenemos que $\sum_{v \in X} d(v) = \sum_{v \in Y_k} d(v)$. Luego, si agregamos un vértice a Y_k, tenemos que $|Y_k| + 1 = |Y_{k+1}|$.
     Por defición de gráfica bipartita, existirán vértices de X que son adyacentes con el nuevo vértice en Y.
     Sea q el número de nuevas relaciones entre X y el nuevo vértice en Y.
     Vemos que el grado del nuevo vértice en Y es igual a q.
     Entonces:
     $$\sum_{v \in X} d(v) = \sum_{v \in Y_k} d(v) + q = \sum_{v \in Y_{k+1}} d(v)$$

   Por lo tanto, para toda G tenemos que $\sum_{v \in X} d(v) = \sum_{v \in Y} d(v)$. QED

   (b) Demuestre que si G es k-regular, con $k \geq 1$, entonces $|X| = |Y|$.

   Demostración: Dada G una gráfica k-regular $G[X, Y]$ bipartita.
   Sabemos que por ser bipartita y k-regular, se cumple que:

   - Al menos $|V_G| = 2$, pues una gráfica tiene como mínimo un elemento. Además, por ser bipartita debe relacionarse con al menos un elemento en la partición ajena a ella misma.
   - Todos los vértices tienen grado k.

   En el caso mínimo $|V_G| = 2$, hay una relación entre dos vértices (cada uno de ellos pertenecientes a su respectiva parte).
   Entonces, al ser k-regular, tenemos que el grado de estos vértices es al menos 1.
   Por lo tanto, $k \geq 1$.

Ahora usando el resultado de $5(a)$, sabemos que:

$$\sum_{v\in X} d(v) = \sum_{v\in Y} d(v)$$

Como cada vértice tiene grado k, podemos hacer lo siguiente:

$$|X| = \frac{\sum\limits_{v\in X} d(v)}{k} \quad \text{y} \quad |Y| = \frac{\sum\limits_{v\in Y} d(v)}{k}$$

Así, concluimos que:

$$|X| = |Y|$$

QED

Puntos Extra

1. Sea $G = [X, Y]$ una gráfica bipartita con $|X| = r$ y $|Y| = s$.

   (a) Demuestre que $|E| \leq rs$.

   Demostración: (Inducción sobre $|Y|$)
   Sea r cualquier Entero tal que $|X| = r$.

   - PASO BASE: $(n = 1)$
     Sea $G(V_1, E_1)$ tal que $G[X, Y]$, con $|Y| = 1$.
     Se sigue por vacuidad que, $\text{MAX}\{|E_1|\} = r$ (pues todo elemento de X solo se puede relacionar al único vértice en Y).

   - Hipótesis de inducción: $(n = k)$
     Supongamos que existe $G(V_k, E_k)$ tal que $G[X, Y]$, con $|X| = r$ y $|Y| = k$.
     Entonces: $MAX\{|E_k|\} = rk$.

   - PASO INDUCTIVO: $(n = k + 1)$
     Sea $G(V_{(k+1)}, E_{(k+1)})$ tal que $G[X, Y]$, con $|X| = r$ y $|Y| = k + 1$.
     Entonces: $\text{MAX}\{|E_{(k+1)}|\} = r(k + 1)$.

     Por Hipótesis de inducción, $G(V_k, E_k)$ tal que $G[X, Y]$, con $|X| = r$ y $|Y| = k$, por lo que $\text{MAX}\{|Ek|\} = rk$. Agregando un vértice a Y, tenemos que $|V(k + 1)| = 1 + |Vk|$. Así, se tiene que $\text{MAX}\{|E(k+1)|\} = \text{MAX}\{|Ek|\} + k$ (donde k son las nuevas relaciones entre el vértice que se agregó y todos los vértices de X).
     Entonces:

     $$\text{MAX}\{|Ek|\} + k = rk + r = r(k + 1)$$

     Por lo anterior, tenemos que $\text{MAX}\{|E(k + 1)|\} = r(k + 1)$.

   Por lo tanto, para toda $G(V, E)$ si $G[X, Y]$ con $|X| = r$ y $|Y| = s$, $\text{MAX}\{|E|\} = rs$. $\square$

   (b) Deduzca que $|E| \leq \frac{|V|^2}{4}$.

Demostración: Demostraremos que $rs \leqslant (|V|^2)/4$.

Sabemos que para toda gráfica $G[X,Y]$, $|X| = r$ y $|Y| = s$ con r, s que pertenecen a los Enteros.
Por un Teorema de Cálculo ($x^2 > 0$), $0 \leqslant (r-s)^2 \implies 0 \leqslant r^2 + s^2 - 2rs \implies 2rs \leqslant r^2 + s^2 \implies 4rs \leqslant r^2 + s^2 + 2rs \implies 4rs \leqslant (r+s)^2 \implies rs \leqslant ((r+s)^2)/4$ y $r+s = |X|+|Y|$ por lo que por definición de particion $|X|+|Y| = |V| \implies (|V|^2)/4$ por inciso (a) tenemos que: $|E| \leqslant rs \leqslant (|V|^2)/4$ por lo tanto $|E| \leqslant (|V|^2)/4$

□

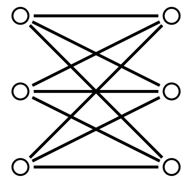
(c) Describa a las gráficas bipartitas que cumplen la igualdad en el inciso anterior. Justifique su respuesta. SOLUCION

Debemos ver donde se cumple la igualdad $|E| = (|V|^2)/4$

Sea $|V| = |X|+|Y| = r+s \implies$ por la demostración del inciso del inciso (b) y (a) tenemos que si $0 \leqslant (r-s)^2 \implies |E| \leqslant rs \leqslant (|V|^2)/4 \implies$ si $0 = (r-s)^2 \implies 0 = r-s \implies s = r \implies rs = (|V|^2)/4$ y si G es una gráfica bipartita completa $\implies |E| = rs = (|V|^2)/4$ por lo tanto, si las particiones de la gráfica tienen el mismo número de elementos y tambien la gráfica es bipartita completa se cumple la desigualdad $|E| = (|V|^2)/4$

Ejemplo: $rs = 9$

G_1



$|E| = 9$
$|V| = 9 \Longrightarrow |V|^2/4 = 36/4 = 9$