UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO
Facultad de Ciencias

Autores:
Fernanda Villafán Flores
Fernando Alvarado Palacios
Adrián Aguilera Moreno

Gráficas y Juegos

Tarea 7

1. (a) Demuestre que si G tiene diámetro mayor que 3 (posiblemente infinito), entonces $\overline{G}$ tiene diámetro menor que 3. Concluya que si G es inconexa, entonces $\overline{G}$ es conexa.

   (b) Una gráfica G es autocomplementaria si $G \cong \overline{G}$. Demuestre que si G es autocomplementaria, entonces $|V| \overset{4}{\equiv} 0$ o $|V| \overset{4}{\equiv} 1$.

2. Un *orden topológico* de una digráfica D es un orden lineal de sus vértices tal que para cada flecha a de D, la cola de a precede a su cabeza en el orden.

   (a) Demuestre que toda digráfica acíclica tiene al menos una fuente (vértice de ingrado 0) y un sumidero (vértice de exgrado 0).

   Demostración: Procedamos por reducción al absurdo. Sea D una digráfica acíclica con $\delta^+ > 0$ y $\delta^- > 0$, esto es que, para cada $v \in V_D$ hay una flecha que le "*pega*"[1] a v y otra que "*sale*"[2] de v. Tomemos la trayectoria $\vec{T}$ más larga en D y sea $x \in V_D$ el último vértice de $\vec{T}$, luego en x *sale* una arista hacia algún otro vértice en $\vec{T}$ [pues si saliera hacia algún otro vértice que no este en $\vec{T}$, llegariamos a que $\vec{T}$ no es de longitud máxima!!], así $\vec{T}xy$ claramente contiene un ciclo, esto implica que D contiene un ciclo!!, he aquí una contradicción de suponer que D no contiene ciclos.

   $\therefore$ Si D es acíclica tiene al menos una fuente y un sumidero. □

   (b) Deduzca que una digráfica admite un orden topológico si y sólo si es acíclica.

   Demostración: Para este inciso analicemos 2 posibles casos:

   $\Rightarrow$)

   $\Leftarrow$)

   □

   (c) Exhiba un algoritmo de tiempo a lo más cuadrático para encontrar un orden topológico en una digráfica acíclica.

3. Demuestre que cada uno de los siguientes problemas está en la clase NP exhibiendo un certificado y un algoritmo de tiempo polinomial para verificar el certificado (escriba el algoritmo utilizando pseudo código como el visto en clase; sólo está permitido el uso de las estructuras de control **if**, **while** y **for**). Demuestre que su algoritmo usa tiempo polinomial.

   (a) Hamilton Cycle.

   (b) Vertex Cover.

   (c) Colouring.

   (d) Dominating Set.

Puntos extra

1. Demuestre que toda digráfica sin lazos admite una descomposición en dos digráficas acíclicas, es decir, que existen D_1 y D_2 subdigráficas de D, acíclicas y tales que $D_1 \cup D_2 = D$ y $A_{D_1} \cap A_{D_2} = \varnothing$.

2. Un torneo es una digráfica en la que entre cualesquiera dos vértices existe una única flecha. Demuestre que todo torneo es fuertemente conexo o puede transformarse en un torneo fuertemente conexo al reorientar exactamente una flecha.

[1] Una arista incide en v y v es la cabeza.
[2] Una arista que inicia en v con dirección a otro vértice.

3. Demuestre que una digráfica es fuertemente conexa si y sólo si contiene un camino cerrado generador.

4. Demuestre que si l, m y n son enteros con $0 < l \leq m \leq n$, entonces existe una gráfica simple G con $\kappa = l$, $\kappa' = m$ y $\delta = n$.

   Demostración: Sean l, m, n perteneciente a los Enteros y G una gráfica con K=l, k'=m y δ=n, tenemos que $0 < k$ ya que una gráfica no puede tener conexidad menor que $0 \rightarrow$ por proposición demostrada en clase esta gráfica tendra la desigualdad $0 < k \leqslant k' \leqslant \delta$ sustituyendo los valores $0 < l \leqslant m \leqslant n$

   Por lo tanto existe la grafica (ya que la proposicion demostrada en clase era un para todo y el paratodo implica el existe)

   $\square$