UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO

Facultad de Ciencias

Autores:
Fernanda Villafán Flores
Fernando Alvarado Palacios
Adrián Aguilera Moreno

Gráficas y Juegos

Tarea 7

1. (a) Demuestre que si G tiene diámetro mayor que 3 (posiblemente infinito), entonces $\overline{G}$ tiene diámetro menor que 3. Concluya que si G es inconexa, entonces $\overline{G}$ es conexa.

Demostración: Sea G una gráfica.
Probaremos que $\overline{G}$ tiene diámetro menor a 3.
Primero, sabemos que G tiene diametro mayor a 3 entonces tomemos una trayectoria P de G tal que su longitud es n (con $n > 3$).
La denotaremos como:

$$P = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$$

Ahora, por definición de $\overline{G}$ es tal que:

$$|E_{\overline{G}}| = \binom{|V|-1}{2} - |E_G|$$

Por tanto, en $\overline{G}$ la trayectoria P cambia de la siguiente manera:

- El vértice x_0 es adyacente a los vértices $x_2, x_3, \ldots, x_n$, donde esto equivale a $n-1$ vértices.
- El vértice x_1 es adyacente a los vértices $x_3, x_4, \ldots, x_n$, donde esto equivale a $n-2$ vértices.
- El vértice x_2 es adyacente a los vértices $x_0, x_4, \ldots, x_n$, donde esto equivale a $n-2$ vértices.

Siguiendo este procedimiento, tenemos lo siguiente:

- El vértice x_i es adyacente a los vértices $x_{i-2}, x_{i+2}, x_{i+3}, \ldots, x_n$, con $i > 1$.

Así, notemos lo siguiente:
En $\overline{G}$ x_0 **no es** adyacente a x_1, entonces necesitamos otro vértice x_3 para llegar a x_1. Lo que implica que nos toma distancia igual a 2 llegar de x_0 a x_1.
De la misma forma, x_1 **no es** adyacente a x_0 ni a x_2, entonces necesitamos otro vértice x_4 para llegar a x_0 o x_2. Lo que implica que nos toma distancia igual a 2 llegar de x_1 a x_0 o de x_1 a x_2.
De lo anterior obtenemos que:
El vértice x_i **no es** adyacente al vértice x_{i-1} ni al vértice x_{i+1}, entonces necesitamos otro vértice x_{i+2} para llegar a x_{i-1} o x_{i+1}. Lo que implica que nos toma distancia igual a 2 llegar de x_i a x_{i-1} o de x_i a x_{i+1}.
Por lo tanto, $\overline{G}$ tiene diámetro menor a 3.
Aún más, si G es inconexa entonces $\overline{G}$ es conexa (ya que por definición, para cualesquiera dos vértices distintos $u, v \in G$ se tiene que $uv \in E_{\overline{G}}$ si y sólo si $uv \notin E_G$). Es decir, en $\overline{G}$ estarán todas las aristas que no estén en G. □

(b) Una gráfica G es autocomplementaria si $G \cong \overline{G}$. Demuestre que si G es autocomplementaria, entonces $|V| \overset{4}{\equiv} 0$ o $|V| \overset{4}{\equiv} 1$.

Demostración: Primero, sabemos que si $G \cong \overline{G}$ entonces $V_G = V_{\overline{G}}$.
Probaremos que $|E_G| = |E_{\overline{G}}|$.
Veamos lo siguiente:

$$|V| \overset{4}{\equiv} 1 \longrightarrow |V| \equiv 1 \mod 4$$

Recordando la definición de $\mod$, tenemos:

$$\begin{aligned}|V| \equiv 1 \mod 4 &\longrightarrow 4 \,\Big|\, |V| - 1\\ &\longrightarrow |V| - 1 = 4 \cdot k, \text{ con } k \in \mathbb{N}\\ &\longrightarrow |V| = 4 \cdot k + 1\end{aligned}$$

Luego, por definición de $\overline{G}$, tenemos:

$$|E_{\overline{G}}| = \binom{|V| - 1}{2} - |E_G|$$

Sea $n = |V_G|$.
Así,

$$\begin{aligned}
|E_G| &= |E_{\overline{G}}|\\
&= \binom{|V_G| - 1}{2} - |E_G|\\
&= \binom{n-1}{2} - (n-1), \text{ porque sabemos que } |E_G| = |V_G - 1| \text{ y } |V_G| = n\\
&= \frac{(n-1)!}{2! \cdot ((n-1)-2)!} - (n-1)\\
&= \frac{(n-1)!}{2! \cdot (n-1-2)!} - (n-1)\\
&= \frac{(n-1)!}{2! \cdot (n-3)!} - (n-1)\\
&= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)!}{2! \cdot (n-3)!} - (n-1), \text{ porque } n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!\\
&= \frac{(n-1)(n-2)\cancel{(n-3)!}}{2! \cdot \cancel{(n-3)!}} - (n-1)\\
&= \frac{(n-1)(n-2)}{2!} - (n-1)\\
&= \frac{(n-1)(n-2)}{2} - (n-1), \text{ porque } 2! = 2 \cdot 1 = 2\\
&= \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{2(n-1)}{2}\\
&= \frac{(n-1)(n-2) - 2(n-1)}{2}\\
&= \frac{n^2 - 3n + 2 - 2n + 2}{2}\\
&= \frac{n^2 - 5n + 4}{2}
\end{aligned}$$

Ahora,

$$
\begin{aligned}
\frac{n^2-5n+4}{2} &= \frac{4\left[\frac{n^2}{4}-\frac{5n}{4}+1\right]}{2} \\
&= 4\cdot\frac{\left[\frac{n^2}{4}-\frac{5n}{4}+1\right]}{2} \\
&= 4\cdot\frac{\left[\frac{n^2-5n}{4}+1\right]}{2} \\
&= 4\cdot\frac{\left[\frac{n^2-5n+4}{4}\right]}{2} \\
&= 4\cdot\left[\frac{n^2-5n+4}{8}\right]
\end{aligned}
$$

Por lo tanto, tenemos lo siguiente:

$$|E_G| = 4\cdot\left[\frac{n^2-5n+4}{8}\right] \longrightarrow |V_G|-1 = 4\cdot\left[\frac{n^2-5n+4}{8}\right]$$

Despejando $|V_G|$, obtenemos:

$$|V_G|-1 = 4\cdot\left[\frac{n^2-5n+4}{8}\right] \longrightarrow |V_G| = 4\cdot\left[\frac{n^2-5n+4}{8}\right]+1$$

Sea $k = \left[\frac{n^2-5n+4}{8}\right]$. Entonces:

$$|V_G| = 4\cdot k+1$$

Por lo tanto, llegamos a que $|E_G| = |E_{\overline{G}}|$ si $|V_G| = 4\cdot k+1$.

$\square$

2. Un *orden topológico* de una digráfica D es un orden lineal de sus vértices tal que para cada flecha a de D, la cola de a precede a su cabeza en el orden.

   (a) Demuestre que toda digráfica acíclica tiene al menos una fuente (vértice de ingrado 0) y un sumidero (vértice de exgrado 0).

   Demostración: Procedamos por reducción al absurdo. Sea D una digráfica acíclica con $\delta^+ > 0$ y $\delta^- > 0$, esto es que, para cada $v \in V_D$ hay una flecha que le "*pega*"[1] a v y otra que "*sale*"[2] de v. Tomemos la trayectoria $\vec{T}$ más larga en D y sea $x \in V_D$ el último vértice de $\vec{T}$, luego en x *sale* una arista hacia algún otro vértice en $\vec{T}$ [pues si saliera hacia algún otro vértice que no este en $\vec{T}$, llegariamos a que $\vec{T}$ no es de longitud máxima!!], así $\vec{T}xy$ claramente contiene un ciclo, esto implica que D contiene un ciclo!!, he aquí una contradicción de suponer que D no contiene ciclos.

   $\therefore$ Si D es acíclica tiene al menos una fuente y un sumidero. $\square$

   (b) Deduzca que una digráfica admite un orden topológico si y sólo si es acíclica.

[1] Una arista incide en v y v es la cabeza.
[2] Una arista que inicia en v con dirección a otro vértice.

Demostración: Para este inciso analicemos 2 posibles casos:

$\Rightarrow$) Procedamos por reducción al absurdo. Sea D una digráfica tal que admite un orden topológico. Supongamos que D contiene al menos un ciclo C, entonces existe un $x \in V_D$ tal que $\{x\} \subset C$ y x es un vértice inicial y final en C, luego existe $y \in V_D$: $\{y\} \subset C$ tal que $\vec{yx}$ es una arista, por tanto $y < x$ [esto es que y precede a x en el orden]. Nótese que hay una trayectoria $\vec{T}$ que va de x a y en C, así $x < y$!! [esto es que x precede a y en el orden], he aquí una contradicción de suponer que D admite un orden topológico.

$$\therefore \text{ Si } D \text{ admite un orden topológico} \Rightarrow D \text{ es acíclica.}$$

$\Leftarrow$) Por el inciso (a) sabemos que D tiene al menos una *fuente* y un *sumidero*, tomemos una componente conexa en D y veamos que si los vértices x es *fuente* e y es *sumidero*, entonces la trayectoria de x a y es un orden topológico, si hay más de una *fuente* o más de un *sumidero*, cada trayectoria entre una *fuente* y un *sumidero* es un orden topológico [pues de no serlo, dos flechas distintas provenientes de una misma fuente incidirían en algún vértice en común, lo que implicaría que D contiene un ciclo!!], así la componente conexa admite un orden topológico y esto pasa para cualquier componente conexa en D.

$$\therefore \text{ Si } D \text{ es acíclica} \Rightarrow D \text{ admite un orden topológico.}$$

$$\therefore \text{ Una digráfica admite un orden topológico si y sólo si es acíclica.} \qquad \square$$

(c) Exhiba un algoritmo de tiempo a lo más cuadrático para encontrar un orden topológico en una digráfica acíclica.

A continuación se muestra el algoritmo[3] requerido:

1: TopologicalOrder(D; D)

Input: Una digráfica D acíclica.

Output: Un orden topológico admitido en D basado en números.

```
for v ∈ V_D do
    if d⁻(v) = 0 then
        v ← 0;
    end
end
for v ∈ V_D do
    if v ≠ 0 then
        temp ← 0;
        for u ∈ V_D : u es antecesor de v en D and u ≠ null do
            if temp < u then
                temp ← u
            end
        end
        v ← temp + 1;
        for u ∈ V_D : u es sucesor de v en D and u ≠ null do
            if u < v then
                u ← v + 1
            end
        end
    end
end
return D
```

[3] Tome en cuenta que suponemos que D se pasa como parámetro con valores nulos en sus vértices.

3. Demuestre que cada uno de los siguientes problemas está en la clase NP exhibiendo un certificado y un algoritmo de tiempo polinomial para verificar el certificado (escriba el algoritmo utilizando pseudo código como el visto en clase; sólo está permitido el uso de las estructuras de control **if**, **while** y **for**). Demuestre que su algoritmo usa tiempo polinomial.

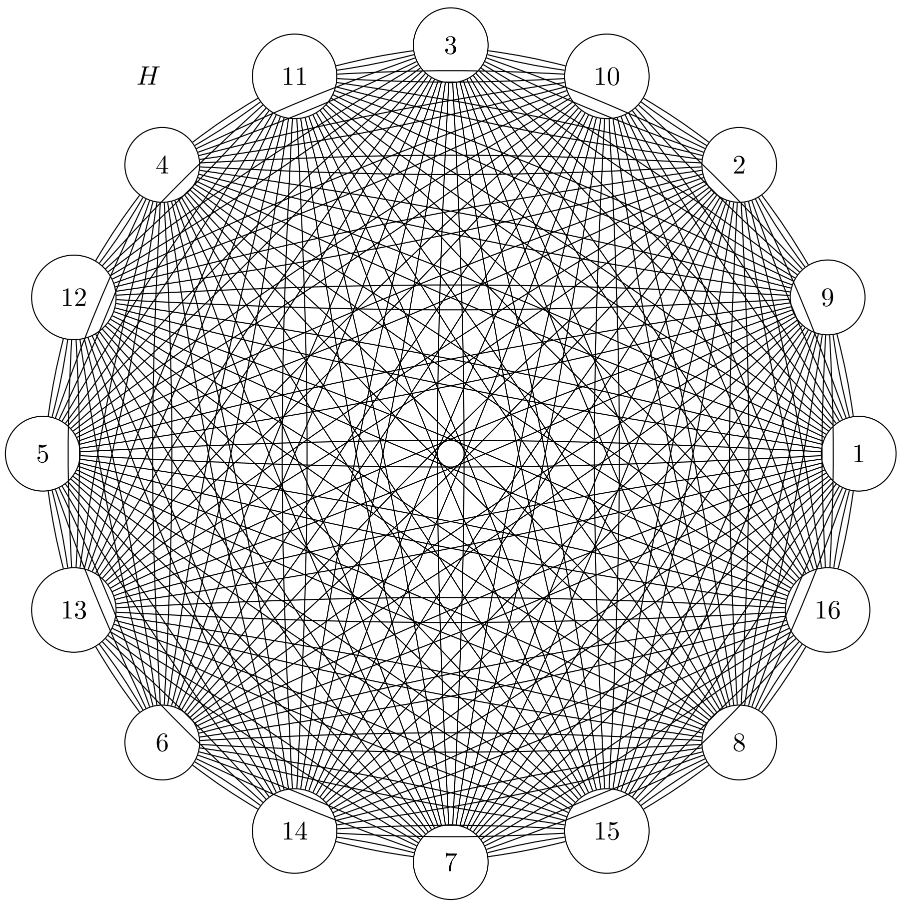
   (a) Hamilton Cycle.

   (b) Vertex Cover.

   (c) Colouring.

   (d) Dominating Set.

Solución de (a): A continuación se da un certificado para una gráfica que contiene un ciclo hamiltoniano:



y $S = (v_0, v_1, \cdots, v_n, v_0) = (3, 10, 2, 9, 1, 16, 8, 15, 7, 14, 6, 13, 5, 12, 4, 11, 3)$ una `colección` que contiene los vértices en sucesión tal que está sucesión forma un ciclo hamiltoniano en H. Así, nuestro algoritmo es el siguiente:

2: HamiltonCycle($\langle H, S\rangle$; `true/false`)

Input: Una gráfica H y una colección S que contiene a la sucesión de vértices que representará el ciclo hamiltoniano en H.

Output: `TRUE` o `FALSE` dependiendo si S es un ciclo hamiltoniano en H.

```
1  if |V_G| ≠ |S| then
2  |  return false;
3  end
4  for v ∈ S do
5  |  siguiente= 0;
6  |  while siguiente < |V_H| do
7  |  |  u ← S(siguiente);
8  |  |  siguiente ← siguiente + 1;
9  |  |  if vu ∉ E_H then
10 |  |  |  return false;
11 |  |  end
12 |  end
13 end
14 if S(0) ≠S(|V_H| − 1) then
15 |  return false;
16 end
17 for v ∈ S do
18 |  decision ← false;
19 |  for u ∈ V_G do
20 |  |  if u = v then
21 |  |  |  desicion ← true;
22 |  |  end
23 |  end
24 |  if decision = false then
25 |  |  return false;
26 |  end
27 end
28 return true;
```

Este algoritmo verifica si la entrada (`input`) es un sí-certificado o no.

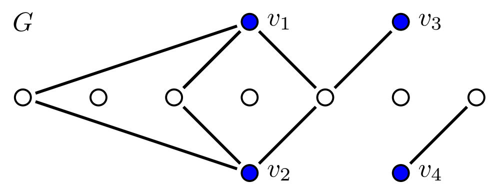
> Obs. Tomar a `S` como una colección da flexibilidad en su implementación, es por eso que `S(int siguiente)` está entre paréntesis.

Ahora, analicemos la complejidad del algoritmo `HamiltonCycle`, veamos que en la línea `1` tenemos una instrucción iterativa que por definición de S tenemos que se iterará $|V_G| - 1$ veces, luego en la línea `6` hay otro ciclo tal que se itera $|V_G|$ veces, así por la regla de la multiplicación de complejidades tenemos una complejidad, hasta el momento, contenida en $\mathcal{O}(|V_G|^2)$. Luego, por la línea `17` sabemos que hay una instrucción iterativa no anidada en las instrucciones anteriores que se iterará $|V_G|$ veces, y por la línea `19` sabemos que hay un ciclo que se itera $|V_G|$ veces y además está anidada en el ciclo de la línea `17`, luego la complejidad de `HamiltonCycle` esta contenida en $\mathcal{O}(|V_G|^2 + |V_G|^2)$ y por la regla de suma de complejidades tenemos que

$$\mathcal{O}(|V_G|^2 + |V_G|^2) = \mathcal{O}(|V_G|^2)$$

Como la complejidad de `HamiltonCycle` está en un tiempo cuadrático y por la definición de problemas en la clase NP, tenemos que `HamiltonCycle` está en la clase NP. $\square$

Solución de (b): A continuación se da un certificado para una gráfica que contiene un covertura de vértices:



con $S = (v_1, v_2 v_3, v_4)$ una cubierta de vértices en G. Así nuestro algoritmo sería el que a continuación se muestra:

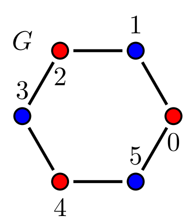
3: VertexCover($\langle G, S\rangle$; `true/false`)

Input: Una gráfica G y una `colección` S que contiene a la sucesión que conforma la covertura de vértices en G.

Output: `TRUE` o `FALSE` dependiendo si S es una covertura de vértices en G.

```
contador ← 0;
for v ∈ S do
    if v ∉ V_G then
        return false;
    end
    for u ∈ V_G do
        if vu ∈ E_G then
            contador ← contador + 1;
        end
    end
end
if contador≠ |V_G| then
    return false;
end
return true;
```

Solución de (c): A continuación se muestra un certificado para una gráfica que admite una coloración:



con $S = (1R, 3R, 5R, 0A, 2A, 4A)$ una coloración de vértices en G. Luego, nuestro algoritmo sería el que a continuación se muestra:

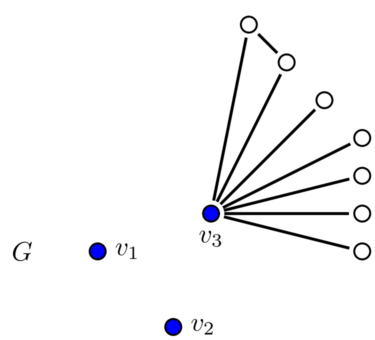
4: Colouring($\langle G, S\rangle$; `true/false`)

Input: Una gráfica G y una `colección` S que contiene a la sucesión que conforma la coloración de vértices en G.

Output: `TRUE` o `FALSE` dependiendo si S es una coloración de vértices en G.

if $|S| = |V_G|$ **then**
  return false;
end
for $v \in S$ **do**
  if $v \notin V_G$ **then**
    return `false`;
  end
  for $u \in S$ **do**
    if v tiene el mismo color que u **then**
      if $uv \in E_G$ **then**
        return `false`;
      end
    end
  end
end
return `true`;

Solución de (d): A continuación se muestra un conjunto dominante como certificado para una gráfica G:



con $S = (v_1, v_2, v_3)$ un conjunto dominante de vértices en G. Luego, nuestro algoritmo sería el que a continuación se muestra:

5: DominatingSet($\langle G, S\rangle$; `true/false`)

Input: Una gráfica G y una `colección` S que contiene a la sucesión que conforma un conjunto dominante de vértices en G.

Output: `TRUE` o `FALSE` dependiendo si S es un conjunto dominante de vértices en G.

```
C ← ∅;
for v ∈ S do
    decision ← false;
    for u ∈ V_G do
        if v = u then
            decision ← true;
        end
    end
    if decision = false then
        return false;
    end
    C ← v;
    for u ∈ V_G do
        if uv ∈ E_G then
            C ← u;
        end
    end
end
for v ∈ V_G do
    decision ← false;
    for u ∈ C do
        if v = u then
            decision ← true;
        end
    end
end
return decision;
```

Puntos extra

1. Demuestre que toda digráfica sin lazos admite una descomposición en dos digráficas acíclicas, es decir, que existen D_1 y D_2 subdigráficas de D, acíclicas y tales que $D_1 \cup D_2 = D$ y $A_{D_1} \cap A_{D_2} = \varnothing$.

2. Un torneo es una digráfica en la que entre cualesquiera dos vértices existe una única flecha. Demuestre que todo torneo es fuertemente conexo o puede transformarse en un torneo fuertemente conexo al reorientar exactamente una flecha.

3. Demuestre que una digráfica es fuertemente conexa si y sólo si contiene un camino cerrado generador.

4. Demuestre que si l, m y n son enteros con $0 < l \leq m \leq n$, entonces existe una gráfica simple G con $\kappa = l$, $\kappa' = m$ y $\delta = n$.

   Demostración: Sean l, m, n perteneciente a los Enteros y G una gráfica con K=l, k'=m y δ=n, tenemos que $0 < k$ ya que una gráfica no puede tener conexidad menor que $0 \rightarrow$ por proposición demostrada en clase esta gráfica tendra la desigualdad $0 < k \leqslant k' \leqslant \delta$ sustituyendo los valores $0 < l \leqslant m \leqslant n$

Por lo tanto existe la grafica (ya que la proposicion demostrada en clase era un para todo y el paratodo implica el existe) $\square$