

# UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO

## Facultad de Ciencias

Autores:

Fernanda Villafán Flores

Fernando Alvarado Palacios

Adrián Aguilera Moreno



Gráficas y Juegos

## Reposición

1. [Ejercicio 3 de la Tarea 02] Sea  $G$  una gráfica conexa. Demuestre que si  $G$  no es completa, entonces contiene a  $P_3$  como subgráfica inducida.

**Demostración:** Para este ejercicio necesitamos que  $|V_G| \geq 3$ , para las gráficas que no cumplan esto se tendrá la demostración por vacuidad. Nótese que el hecho de que  $G$  no sea completa implica que para al menos  $x, y \in V_G$  se tiene que  $xy \notin E_G$ .

Previo a la demostración, provemos que en una gráfica conexa siempre podemos construir una trayectoria con exactamente 3 vértices:

Sea  $x \in V_G$ , por definición de conexidad y como  $|V_G| \geq 3$ , tenemos ha  $x, y \in V_G$  tales que  $xy \in E_G$ , luego  $x$  es vecino a algún vértice distinto a  $y$  (o  $y$  es vecino de algún vértice distinto de  $x$ ), pues en caso contrario  $xy$  sería una componente conexa contenida en  $G$  y  $xy \neq G$ !! lo que contradice la hipótesis de que  $G$  es conexa. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $z$  es vecino de  $x$  y  $z \neq y$ , luego  $zxy$  es una trayectoria de orden exactamente 3.  $\square$

Para este ejercicio basta analizar 2 posibles casos<sup>1</sup>:

**Caso 1:** Si  $G + e$  es completa, donde  $e = xy$ -arista para  $x, y \in V_G$ . Por **Prop. 1.64** y por hipótesis sabemos que existe un  $xy$ -camino en  $G$ , luego por **Prop. 1.62** sabemos que hay, en particular, una  $xy$ -trayectoria en  $G$ , luego hay alguna  $xy$ -trayectoria de orden 3 (esto lo sabemos gracias al resultado mostrado previamente) y supongamos, sin pérdida de generalidad, que ésta es  $T = (x, z, y)$ , para  $z \in V_G$ , notemos que  $T$  tiene tamaño igual a 2, pues existen las aristas  $zx, zy$  pero no  $xy$  (por como definimos este caso), luego  $T$  es  $P_3$  y concluimos que  $P_3$  es subgráfica inducida de  $G$ .

**Caso 2:** Si  $G$  es un árbol, esto nos indica que  $G$  es 1-conexa, y es por eso que se considera este caso como el mínimo para el que se cumplirá la condición a demostrar. Sabemos por el teorema de caracterización de árboles que cada arista en  $G$  será un puente, y por el resultado previamente mostrado sabemos que existe una trayectoria  $T$  en  $G$  de orden exactamente 3, así  $T$  es claramente  $P_3$  y concluimos  $P_3$  es subgráfica inducida de  $G$ .

De los casos anteriores concluimos que el enunciado es verdadero.

QED

2. [Ejercicio 1 extra de la Tarea 02] Sea  $G$  una gráfica. Demuestre que  $G$  es  $k$ -partita completa si y sólo si no contiene a  $K_{k+1}$  ni a  $\overline{P_3}$  como subgráficas inducidas.

- 3.
- 4.
- 5.
- 6.
- 7.
- 8.
- 9.
- 10.

<sup>1</sup>Se analizan los casos "extremos", pues los casos intermedios son combinaciones de estos.