

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO

Facultad de Ciencias

Autores:

Fernanda Villafán Flores

Fernando Alvarado Palacios

Adrián Aguilera Moreno



Gráficas y Juegos

Tarea 3

1. Demuestre que si $e \in E$, entonces $c(G) \leq c(G - e) \leq c(G) + 1$.

Demostración: Dado que c corresponde a la función que devuelve la cantidad de componentes conexas, analicemos dos casos posibles:

- Si "e" no es un puente:

$$c(G - e) = c(G) \quad (1)$$

pues sabemos que si una arista no es puente, al borrarla, G no cambia en número de componentes conexas y así

$$c(G) \leq c(G - e) \quad (2)$$

pues de la dicotomía de \leq , cumple con la igualdad. Luego hacemos notar que

$$c(G) < c(G) + 1 \quad (3)$$

$$\Rightarrow c(G) \leq c(G) + 1 \quad (4)$$

de 1 y 4 se sigue

$$c(G - e) \leq c(G) + 1 \quad (5)$$

de 5 y 2 tenemos

$$c(G) \leq c(G - e) \leq c(G) + 1$$

- Si "e" es un puente:

$$c(G) < c(G - e) \quad (6)$$

por la definición de arista como puente. Así

$$c(G) \leq c(G - e) \quad (7)$$

pues de la dicotomía se cumple con $<$. Además sabemos que el número de componentes conexas aumenta exactamente en 1 (porque estamos trabajando con gráficas simples) en $G - e$, de lo anterior se sigue que

$$c(G - e) = c(G) + 1 \quad (8)$$

$$\Rightarrow c(G - e) \leq c(G) + 1 \quad (9)$$

de 7 y 9 se sigue

$$c(G) \leq c(G - e) \leq c(G) + 1$$

De lo anterior concluimos que $c(G) \leq c(G - e) \leq c(G) + 1$.

QED

2. Una gráfica es *escindible completa* si su conjunto de vértices admite una partición (S, K) de tal forma que S es un conjunto independiente, K es un clan, y cada vértice en S es adyacente a cada vértice en K . Demuestre que una gráfica es escindible completa si y sólo si no contiene a C_4 ni a $\overline{P_3}$ como subgráfica inducida.

Demostración: Sea $C_4 = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_0)$ y $\overline{P_3} = \{y_0, y_1, y_2\}$, tal que $y_0y_2 \in E_G$ e $y_0y_1, y_1y_2 \notin E_G$ ¹, con $x_i, y_j \in V_G$ ($0 \leq i \leq 3$, $0 \leq j \leq 2$). Nótese que los x_i 's e y_j 's no pueden estar contenidos en una misma parte, esto es, C_4 y $\overline{P_3}$ no están contenidos en S , pues ningún vértice en S es adyacente, y de igual manera no están contenidos en K , pues para cualesquiera 3 o 4 vértices en K se tiene a K_3 o K_4 .

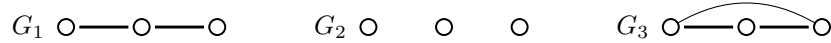
Para este ejercicio analizaremos dos posibles casos:

\Rightarrow) Procedamos por reducción al absurdo.

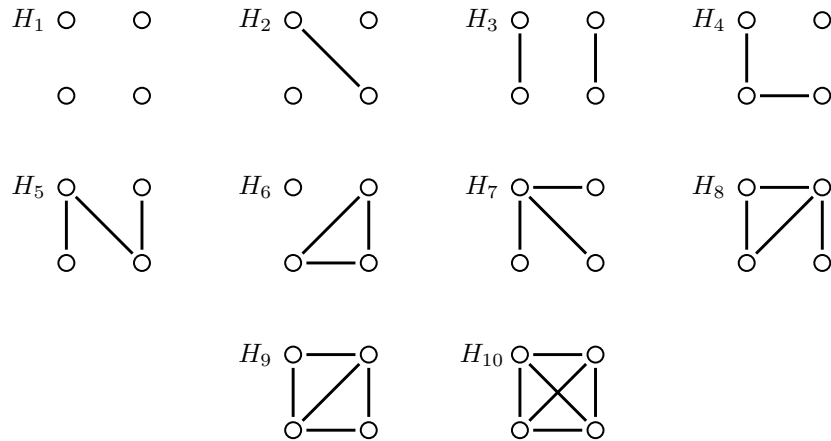
-) Si G es *escendible completa*, entonces C_4 es subgráfica inducida de G . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $x_0 \in S$ y $x_1 \in K$ (caso contrario, $x_1 \in S$ y x_0 no sería adyacente a x_1 !!), luego, si $x_2 \in S$ entonces $x_3 \in K$ (caso contrario, $x_3 \in S$ y x_2 no sería adyacente a x_3 !!), así $x_1x_3 \in E_G$!! (pues $x_1, x_3 \in K$) por definición de K (clan). Si $x_2 \in K$, entonces $x_3 \in S$ (caso contrario, $x_3 \in K$ y $x_1x_3 \in E_G$!!), pero x_0 no es adyacente a x_3 !! ($x_0, x_3 \in S$) y he aquí una contradicción de suponer a C_4 como subgráfica inducida de G . Por tanto, se concluye que C_4 no está contenida como subgráfica inducida en G .
-) Si G es *escendible completa*, entonces $\overline{P_3}$ es subgráfica inducida de G . Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $y_0 \in S$ entonces $y_1 \in S$ ($y_0y_1 \notin E_G$), luego $y_2 \in S$!! ($y_1y_2 \notin E_G$), pero no todos los y_i 's pueden estar en S . Si $y_0 \in K$, entonces $y_1 \in S$ o $y_1 \in K$ implican que y_0 es adyacente a y_1 !! pero $y_0y_1 \notin E_G$ y he aquí una contradicción de suponer a $\overline{P_3}$ como subgráfica inducida de G . Por tanto, se concluye que $\overline{P_3}$ no está contenida como subgráfica inducida en G .

\Leftarrow) Para este caso analicemos a todas las gráficas no isomorfas que no son $\overline{P_3}$ con 3 vértices y no son C_4 con 4 vértices.

Con 3 vértices:



Con 4 vértices:



Propongamos la partición (S, K) en G .

¹Esto sin perder generalidad.

Notar que H_2, H_3, H_4, H_5, H_6 , y H_8 contienen como subgráficas inducidas a $\overline{P_3}$, luego sólo H_1, H_7, H_9 , y H_{10} junto a G_1, G_2 , y G_3 son subgráficas inducidas de G y podemos hacer el siguiente análisis

- 1) G_2 y H_1 están contenidas como subgráficas inducidas en S .
- 2) G_1 tiene los 2 vértices de grado 1 en S y el único vértice de grado 2 está en K .
- 3) G_3 y H_{10} están en K .
- 4) H_7 tiene a su único vértice de grado 3 en K y el resto de sus vértices está en S .
- 5) H_9 tiene a sus 2 vértices de grado 2 en S y al resto en K .

Con base a lo anterior podemos sugerir que K es un clan y S es independiente, y ambos subconjuntos de V_G , con esto tenemos que G es *escindible*. Por (2), (4) y (5) vemos que es necesario que haya aristas entre vértices de S y K , como (1) y (3) no restringen la condición anterior, entonces se puede considerar a *escindible completa*.

De los casos anterior concluimos que una gráfica es escindible completa si y sólo si no contiene a C_4 ni a $\overline{P_3}$ como subgráfica inducida. QED

3. (a) Demuestre que si $|E| > \binom{|V|-1}{2}$, entonces G es conexa.

Demostración: Si $|E_G| = \binom{|V|-1}{2}$, entonces hay dos posibilidades:

- G es conexa, entonces $G + e$ con $e \in E_G$, cumple

$$\begin{aligned} |E_{G+e}| &= \binom{|V|-1}{2} + 1 \\ &> \binom{|V|-1}{2} \end{aligned}$$

Además e no es ni lazo ni arista multiple, pues sabemos de resultados vistos en clase que una gráfica es completa si $|E| = \binom{|V|}{2}$ y como

$$\binom{|V|}{2} \neq \binom{|V|-1}{2}$$

pues

$$\binom{|V|}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

y

$$\binom{|V|-1}{2} = \frac{(n-1) \cdot (n-2)}{2}$$

luego

$$\begin{aligned} \binom{|V|}{2} &\neq \binom{|V|-1}{2} \\ \frac{n \cdot (n-1)}{2} &\neq \frac{(n-1) \cdot (n-2)}{2} \\ n \cdot (n-1) &\neq (n-1) \cdot (n-2) \\ n &\neq n-2 \end{aligned}$$

y de hecho

$$\binom{|V|}{2} > \binom{|V|-1}{2}$$

así se justifica que e no sea ni lazo, ni arista múltiple. De lo anterior se sigue que $G + e$ es una gráfica simple que además es conexa, pues G ya es conexa.

- G no es conexa, entonces existe un vértice aislado x , pues

$$\begin{aligned} \binom{|V|-1}{2} &= \frac{|V_G|^2 - |V_G| - 2 \cdot |V| + 2}{2} \\ &= \frac{|V_G|^2 - |V_G|}{2} + \frac{2 - 2|V_G|}{2} \\ &= \frac{|V_G| \cdot (|V_G| - 1)}{2} - \frac{2 \cdot (|V_G| - 1)}{2} \\ &= \binom{|V_G|}{2} - (|V_G| - 1) \end{aligned}$$

y sabemos por resultados vistos en clases que hay $\binom{|V_G|}{2}$ aristas en una gráfica completa y un vértice puede relacionarse a lo más con $|V_G| - 1$ vértices (pues estamos trabajando con gráficas simples), nótese que de lo anterior se infiere que $G - x$ es conexa², así $G + e$ (con $e \in E_G$)

$$\begin{aligned} |E_{G+e}| &= \binom{|V|-1}{2} + 1 \\ &> \binom{|V|-1}{2} \end{aligned}$$

es conexa, pues como no hay lazos y no hay aristas múltiples en G , tenemos que la nueva arista está comprendida entre x y algún otro vértice en V_{G-x} por lo que habrá una xy -trayectoria para $y \in E_G$.

De lo anterior concluimos que $|E_G| > \binom{|V|-1}{2} \Rightarrow G$ es conexa.

QED

(b) Para $|V| > 1$ encuentre una gráfica inconexa con $|E| = \binom{|V|-1}{2}$.

Solución: Si $|V_G| = 2$, como $2 > 1 \Rightarrow |V_G| > 1$, luego la gráfica que tiene como vértices a u y v , y además

$$\begin{aligned} |E_G| &= \binom{2-1}{2} \\ &= \frac{(2-1) \cdot (2-2)}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

A continuación se muestra la gráfica mencionada:

G_1

u
○

v
○

Así observemos que la gráfica anterior es inconexa.

□

²pues $|E_{G-x}| = \binom{|V_G|}{2}$

4. (a) Demuestre que si $\delta > \lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor - 1$, entonces G es conexa.

Demostración: Para este inciso procedemos por inducción sobre V_G . Sea G una gráfica con $|V_G| = 1$, así $\delta = \lfloor \frac{1}{2} \rfloor = 0$, *i.e.*



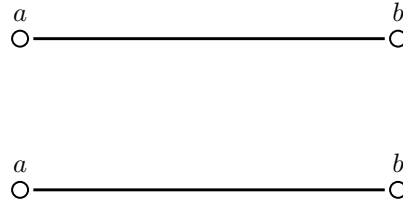
donde $E_G = \emptyset$. Luego supongamos como hipótesis inductiva que para una cantidad n de vértices, el que se cumpla $\delta = \lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor$ implica que G es conexa. A continuación veamos que pasa con $G+x$, con $x \in V_{G+x}$, así G cumple con $\delta = \lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor$, de lo anterior se sigue que x es vecino de al menos $\lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor$ vértices en G (notar que G es, de hecho, una subgráfica inducida por vértices de $G+x$), como G era conexa por hipótesis inductiva se sigue que $G+x$ es conexa. QED

- (b) Para $|V|$ par encuentre una gráfica $(\lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor - 1)$ -regular e inconexa.

Solución: Con $|V| = 4$ tenemos

$$\begin{aligned} \lfloor \frac{4}{2} \rfloor - 1 &= 2 - 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

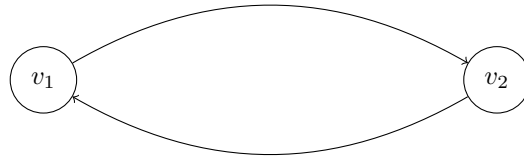
G



Así la gráfica es 1-regular e inconexa. \square

5. Demuestre que si D no tiene lazos y $\delta^+ \geq 1$, entonces D contiene un ciclo dirigido de longitud al menos $\delta^+ + 1$.

Demostración: Para este ejercicio procedamos por inducción en V , así cuando $\delta^+ = 1$ y $|V| = 2$, tendremos



Ahora supongamos que hay un ciclo C de al menos longitud $\delta^+ + 1$, con $\delta^+ > 1$, para $n(n > 1)$ vértices en D y además D no tiene lazos. Luego para $|V_D| = n + 1$, donde llamaremos x al vértice extra, analicemos dos casos extremos:

- Si x tiene una sólo incidencia, entonces $\delta^+ = 1$ y como $\mathcal{L}(C) > 1$, tenemos que existe un ciclo de al menos $\delta^+ + 1$ y en este caso es estrictamente mayor. De lo anterior terminamos.
- Si para cada vértice $u_i (1 < i \leq |V_D| - 1)$ en G hay una arista que "salga" de u_i e incida en x , tenemos que δ^+ no se modifica. Ahora notemos que en particular hay al menos u_i, u_{i+1} tales que existe una $u_i u_{i+1}$ -trayectoria en C (notar que u_i y u_{i+1} son vecinos), luego como existe $e_1 = u_i x$ y $e_2 = u_{i+1} x$, con e_1 y e_2 en E_D , entonces tenemos un nuevo ciclo que es de al menos $\mathcal{L}(C) + 1$ de longitud, así como $\mathcal{L}(C) \geq \delta^+ + 1$, tenemos que el nuevo ciclo es de al menos longitud $\delta^+ + 1$.

Del análisis anterior concluimos que el enunciado se cumple.

QED

Puntos Extra

1. Demuestre que el número de $v_i v_j$ -camino de longitud k en G es $(A^k)_{ij}$ donde A es la matriz de adyacencia de G .
2. Sea G una gráfica bipartita de grado máximo k . Demuestre que existe una gráfica bipartita k -regular, H , que contiene a G como subgráfica inducida.