

# UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO

## Facultad de Ciencias

Autores:

Fernanda Villafán Flores

Fernando Alvarado Palacios

Adrián Aguilera Moreno



Gráficas y Juegos

## Tarea 7

1. (a) Demuestre que si  $G$  tiene diámetro mayor que 3 (posiblemente infinito), entonces  $\overline{G}$  tiene diámetro menor que 3. Concluya que si  $G$  es inconexa, entonces  $\overline{G}$  es conexa.
- (b) Una gráfica  $G$  es autocomplementaria si  $G \cong \overline{G}$ . Demuestre que si  $G$  es autocomplementaria, entonces  $|V| \stackrel{4}{\equiv} 0$  o  $|V| \stackrel{4}{\equiv} 1$ .
2. Un *orden topológico* de una digráfica  $D$  es un orden lineal de sus vértices tal que para cada flecha  $a$  de  $D$ , la cola de  $a$  precede a su cabeza en el orden.
- (a) Demuestre que toda digráfica acíclica tiene al menos una fuente (vértice de ingrado 0) y un sumidero (vértice de exgrado 0).

**Demostración:** Procedamos por reducción al absurdo. Sea  $D$  una digráfica acíclica con  $\delta^+ > 0$  y  $\delta^- > 0$ , esto es que, para cada  $v \in V_D$  hay una flecha que le “pega”<sup>1</sup> a  $v$  y otra que “sale”<sup>2</sup> de  $v$ . Tomemos la trayectoria  $\vec{T}$  más larga en  $D$  y sea  $x \in V_D$  el último vértice de  $\vec{T}$ , luego en  $x$  sale una arista hacia algún otro vértice en  $\vec{T}$  [pues si saliera hacia algún otro vértice que no este en  $\vec{T}$ , llegaríamos a que  $\vec{T}$  no es de longitud máxima!!], así  $\vec{T}xy$  claramente contiene un ciclo, esto implica que  $D$  contiene un ciclo!!, he aquí una contradicción de suponer que  $D$  no contiene ciclos.

$\therefore$  Si  $D$  es acíclica tiene al menos una fuente y un sumidero.  $\square$

- (b) Deduzca que una digráfica admite un orden topológico si y sólo si es acíclica.

**Demostración:** Para este inciso analicemos 2 posibles casos:

$\Rightarrow$ ) Procedamos por reducción al absurdo. Sea  $D$  una digráfica tal que admite un orden topológico. Supongamos que  $D$  contiene al menos un ciclo  $C$ , entonces existe un  $x \in V_D$  tal que  $\{x\} \subset C$  y  $x$  es un vértice inicial y final en  $C$ , luego existe  $y \in V_D$  :  $\{y\} \subset C$  tal que  $\vec{y}x$  es una arista, por tanto  $y < x$  [esto es que  $y$  precede a  $x$  en el orden]. Nótese que hay una trayectoria  $\vec{T}$  que va de  $x$  a  $y$  en  $C$ , así  $x < y$ !! [esto es que  $x$  precede a  $y$  en el orden], he aquí una contradicción de suponer que  $D$  admite un orden topológico.

$\therefore$  Si  $D$  admite un orden topológico  $\Rightarrow D$  es acíclica.

$\Leftarrow$ ) Por el inciso (a) sabemos que  $D$  tiene al menos una *fuentes* y un *sumidero*, tomemos una componente conexa en  $D$  y veamos que si los vértices  $x$  es *fuentes* e  $y$  es *sumidero*, entonces la trayectoria de  $x$  a  $y$  es un orden topológico, si hay más de una *fuentes* o más de un *sumidero*, cada trayectoria entre una *fuentes* y un *sumidero* es un orden topológico [pues de no serlo, dos flechas distintas provenientes de una misma fuente incidirían en algún vértice en común, lo que implicaría que  $D$  contiene un ciclo!!], así la componente conexa admite un orden topológico y esto pasa para cualquier componente conexa en  $D$ .

$\therefore$  Si  $D$  es acíclica  $\Rightarrow D$  admite un orden topológico.

$\therefore$  Una digráfica admite un orden topológico si y sólo si es acíclica.  $\square$

- (c) Exhiba un algoritmo de tiempo a lo más cuadrático para encontrar un orden topológico en una digráfica acíclica.

<sup>1</sup>Una arista incide en  $v$  y  $v$  es la cabeza.

<sup>2</sup>Una arista que inicia en  $v$  con dirección a otro vértice.

A continuación se muestra el algoritmo<sup>3</sup> requerido:

---

**1:** TopologicalOrder( $D; D$ )

---

**Input:** Una digráfica  $D$  acíclica.  
**Output:** Un orden topológico admitido en  $D$  basado en números.

```

1 for  $v \in V_D$  and  $d^-(v) = 0$  do
2   |  $v \leftarrow 0$ ;
3 end
4 for  $v \in V_D$  do
5   | if  $v \neq 0$  then
6     |   temp  $\leftarrow 0$ ;
7     |   for  $u \in V_D : u$  es antecesor de  $v$  en  $D$  and  $u \neq \text{null}$  do
8       |     | if temp  $< u$  then
9         |       |   temp  $\leftarrow u$ 
10      |     | end
11     |   end
12     |    $v \leftarrow \text{temp} + 1$ ;
13     |   for  $u \in V_D : u$  es sucesor de  $v$  en  $D$  and  $u \neq \text{null}$  do
14       |     | if  $u < v$  then
15         |       |    $u \leftarrow v + 1$ 
16       |     | end
17     |   end
18   | end
19 end
20 return  $D$ 

```

---

□

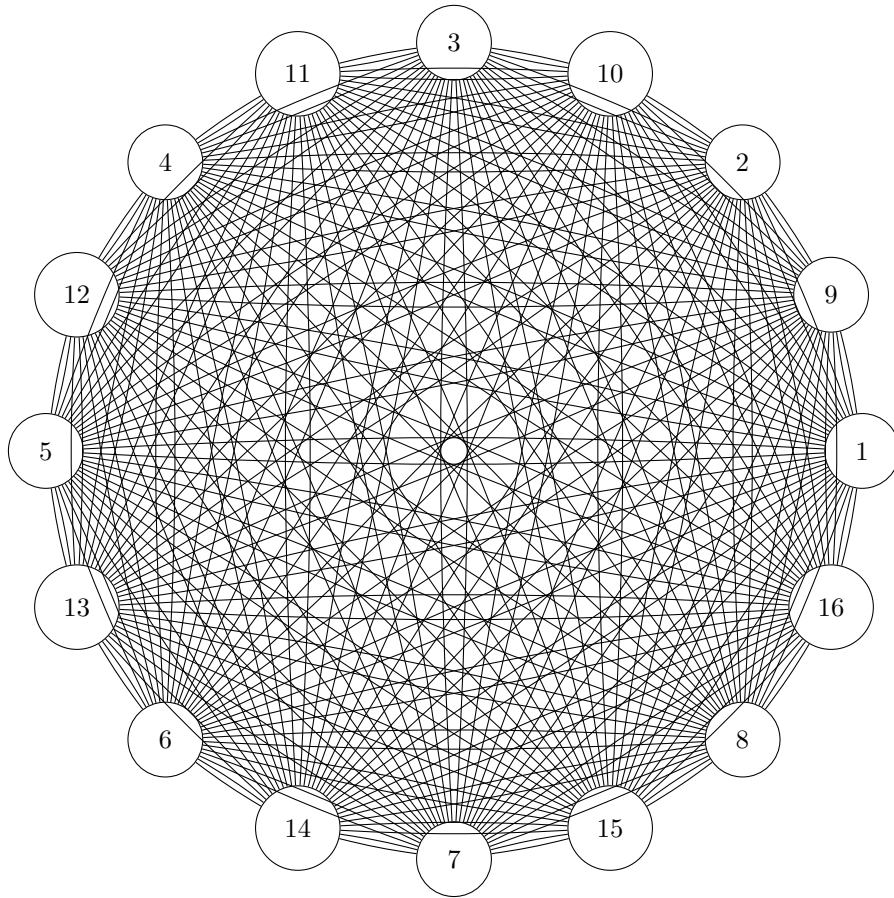
---

<sup>3</sup>Tome en cuenta que suponemos que  $D$  se pasa como parámetro con valores nulos en sus vértices.

3. Demuestre que cada uno de los siguientes problemas está en la clase  $NP$  exhibiendo un certificado y un algoritmo de tiempo polinomial para verificar el certificado (escriba el algoritmo utilizando pseudo código como el visto en clase; sólo está permitido el uso de las estructuras de control **if**, **while** y **for**). Demuestre que su algoritmo usa tiempo polinomial.

- (a) HAMILTON CYCLE.
- (b) VERTEX COVER.
- (c) COLOURING.
- (d) DOMINATING SET.

**Solución de (a):** A continuación se da un certificado para una gráfica que contiene un ciclo hamiltoniano:



Así, nuestro algoritmo es el siguiente:

---

**Algorithm 2:**  $\text{HamiltonCycle}(H; \text{true/false})$

---

**Input:** Una gráfica  $H$ .

**Output:** TRUE o FALSE dependiendo si la entrada contiene un ciclo hamiltoniano.

---

**Solución de (b):**

**Solución de (c):**

**Solución de (d):**

### Puntos extra

1. Demuestre que toda digráfica sin lazos admite una descomposición en dos digráficas acíclicas, es decir, que existen  $D_1$  y  $D_2$  subdigráficas de  $D$ , acíclicas y tales que  $D_1 \cup D_2 = D$  y  $A_{D_1} \cap A_{D_2} = \emptyset$ .
2. Un torneo es una digráfica en la que entre cualesquiera dos vértices existe una única flecha. Demuestre que todo torneo es fuertemente conexo o puede transformarse en un torneo fuertemente conexo al reorientar exactamente una flecha.
3. Demuestre que una digráfica es fuertemente conexa si y sólo si contiene un camino cerrado generador.
4. Demuestre que si  $l, m$  y  $n$  son enteros con  $0 < l \leq m \leq n$ , entonces existe una gráfica simple  $G$  con  $\kappa = l$ ,  $\kappa' = m$  y  $\delta = n$ .

**Demostración:** Sean  $l, m, n$  perteneciente a los Enteros y  $G$  una gráfica con  $\kappa=l$ ,  $\kappa'=m$  y  $\delta=n$ , tenemos que  $0 < l$  ya que una gráfica no puede tener conexidad menor que 0  $\rightarrow$  por proposición demostrada en clase esta gráfica tendrá la desigualdad  $0 < l \leq m \leq n$  sustituyendo los valores  $0 < l \leq m \leq n$

Por lo tanto existe la gráfica (ya que la proposición demostrada en clase era un para todo y el paratodo implica el existe)

□