

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO

Facultad de Ciencias

Autores:

Fernanda Villafán Flores

Fernando Alvarado Palacios

Adrián Aguilera Moreno



Gráficas y Juegos

Reposición

Ejercicio de la Tarea 2

1. [Ejercicio 3]

Sea G una gráfica conexa. Demuestre que si G no es completa, entonces contiene a P_3 como subgráfica inducida.

Demostración: Para este ejercicio necesitamos que $|V_G| \geq 3$, para las gráficas que no cumplan esto se tendrá la demostración por vacuidad. Nótese que el hecho de que G no sea completa implica que para al menos $x, y \in V_G$ se tiene que $xy \notin E_G$.

Previo a la demostración, provemos que en una gráfica conexa siempre podemos construir una trayectoria con exactamente 3 vértices:

Sea $x \in V_G$, por definición de conexidad y como $|V_G| \geq 3$, tenemos ha $x, y \in V_G$ tales que $xy \in E_G$, luego x es vecino a algún vértice distinto a y (o y es vecino de algún vértice distinto de x), pues en caso contrario xy sería una componente conexa contenida en G y $xy \neq G$!! lo que contradice la hipótesis de que G es conexa. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que z es vecino de x y $z \neq y$, luego zxy es una trayectoria de orden exactamente 3.

□

Para este ejercicio basta analizar 2 posibles casos¹:

Caso 1: Si $G + e$ es completa, donde $e = xy$ —arista para $x, y \in V_G$. Por **Prop. 1.64** y por hipótesis sabemos que existe un xy —camino en G , luego por **Prop. 1.62** sabemos que hay, en particular, una xy —trayectoria en G , luego hay alguna xy —trayectoria de orden 3 (esto lo sabemos gracias al resultado mostrado previamente) y supongamos, sin pérdida de generalidad, que ésta es $T = (x, z, y)$, para $z \in V_G$, notemos que T tiene tamaño igual a 3, pues existen las aristas zx, zy pero no xy (por como definimos este caso), luego T es P_3 y concluimos que P_3 es subgráfica inducida de G .

Caso 2: Si G es un árbol, esto nos indica que G es 1—conexa, y es por eso que se considera este caso como el mínimo para el que se cumplirá la condición a demostrar. Sabemos por el teorema de caracterización de árboles que cada arista en G será un puente, y por el resultado previamente mostrado sabemos que existe una trayectoria T en G de orden exactamente 3, así T es claramente P_3 y concluimos P_3 es subgráfica inducida de G .

De los casos anteriores concluimos que el enunciado es verdadero.

QED

2. [Ejercicio 1 extra]

Sea G una gráfica. Demuestre que G es k —partita completa si y sólo si no contiene a K_{k+1} ni a $\overline{P_3}$ como subgráficas inducidas.

Demostración: En este ejercicio analizaremos 2 casos posibles:

⇒) Procedamos reducción al absurdo .

¹Se analizan los casos “extremos”, pues los casos intermedios son combinaciones de estos.

-) Supongamos que $\overline{P_3}$ es subgráfica inducida de G , por definición de k -partita completa $\overline{P_3}$ no está en la misma parte (pues, en caso de estarlo hay una adyacencia en 2 vértices de la misma parte). Luego $\overline{P_3}$ está en 2 o 3 partes distintas y habrá un $x \in \overline{P_3}$ que no se relacionará con al menos 1 vértice en algunas de las partes y por tanto, G no es k -partita completa!! (lo que no cumple es ser completa bajo el supuesto tomado) y he aquí una contradicción de suponer que $\overline{P_3}$ es subgráfica inducida de G . Por lo tanto, concluimos que $\overline{P_3}$ no es subgráfica inducida de G .
-) Supongamos que K_{k+1} es subgráfica inducida de G , entonces hay 1 vértice de K_{k+1} en cada una de las partes (lo que suma k vértices) y un $x \in K_{k+1}$ en alguna parte tal que se relaciona con exactamente un vértice en esa parte y por tanto, G no es k -partita completa!! (no cumple el ser k -partita) y he aquí una contradicción de suponer que K_{k+1} es subgráfica inducida de G . Por lo tanto, concluimos que K_{k+1} no es subgráfica inducida de G .

\Leftarrow)

De los casos anterior concluimos que G es k -partita completa si y sólo si no contiene a K_{k+1} ni a $\overline{P_3}$ como subgráficas inducidas. QED

Ejercicio de la Tarea 4

3. [Ejercicio extra 3]

Sea \mathcal{T} una familia de subárboles de un árbol T . Deduzca, por inducción sobre $|\mathcal{T}|$, que si cualesquiera dos elementos de \mathcal{T} tienen un vértice en común, entonces hay un vértice de T que está en todos los elementos de \mathcal{T} .

Demostración: Demostración por induccion sobre el numero de subarboles

Paso base: $\mathcal{T} = 3$

Sean T_1, T_2, T_3 subarboles de T

Pd Existe un vértice x que pertenece a T tal que $T_1 \cap T_2 = x \rightarrow T_1 \cap T_2 \cap T_3 = x$

Dem (Reduccion al absurdo)

Supongamos que $T_1 \cap T_2 \cap T_3 = \emptyset$ (algo que no puede pasar es que $T_1 \cap T_2 = T_1 \cap T_3 = T_2 \cap T_3 = \emptyset$ por hipotesis T es conexa y tambien por hipotesis $T_1 \cap T_2$ diferente del vacio) \rightarrow existe x_1 tal que x_1 pertenece a $T_1 \cap T_2$ y x_1 no pertenece a T_3 , existe x_2 tal que x_2 pertenece a $T_1 \cap T_3$ y x_2 no pertenece a T_2 , existe x_3 tal que x_3 pertenece a $T_2 \cap T_3$ y x_3 no pertenece a $T_1 \rightarrow x_1, x_2, x_3$ son vértices diferentes \rightarrow por las intersecciones y gracias que T es conexo \rightarrow s.p.g. podemos formar un ciclo $(x_1, \dots, x_2, \dots, x_3, \dots, x_1)$ (Lo que es una contradicción, ya que los arboles son aciclicos)

Por lo tanto $T_1 \cap T_2 \cap T_3 \neq \emptyset \rightarrow$ existe un vértice compartido para los 3 subárboles

Hipótesis de inducción: supongamos para $\mathcal{T} = k$

Supongamos que si $\mathcal{T} = k$ tal que existen i, j tal que $i \neq j$ e i, j pertenecen a $\{1, \dots, k\}$ donde $T_i \cap T_j \neq \emptyset \rightarrow \bigcap_{r=1}^k T_r \neq \emptyset$

Paso inductivo: Pd para $\mathcal{T} = k + 1$

Pd si existen i, j tal que $i \neq j$ e i, j pertenecen a $\{1, \dots, k + 1\}$ donde $T_i \cap T_j \neq \emptyset \rightarrow \bigcap_{r=1}^{k+1} T_r \neq \emptyset$

Dem (Reducción al absurdo)

Supongamos $\bigcap_{r=1}^{k+1} T_r = \emptyset$ y existen i, j pertenecen a $\{1, \dots, k+1\}$ donde $T_i \cap T_j \neq \emptyset \rightarrow$ consideremos a T' como el subárbol formado por la unión de todos los subárboles de T_1, T_2, \dots, T_{k+1} menos los subárboles T_i y T_j . Es decir $T' = \bigcup_{r=1, r \neq i, r \neq j}^{k+1} T_r \rightarrow T' \cap T_i \cap T_j = \emptyset$, pero por paso base esto es una contradicción \rightarrow existe un x tal que x pertenece a $\bigcap_{r=1}^{k+1} T_r$.

Por lo tanto la proposición es verdadera.

QED

Ejercicio de la Tarea 5

4. [Pregunta 1]

Demuestre que si G es simple y 3-regular, entonces $\kappa = \kappa'$.

Demostración: Sea G 3-regular $\rightarrow d(v) = 3$ para todo v que pertenece a $V \rightarrow$ sea v' un vertice de $G \rightarrow$ para desconectar a v' de G , solo basta con "cortar" las 3 aristas de $v' \rightarrow k'=3$.
Por lo tanto $k = k'$.

QED

5. [Pregunta 2]

Demuestre que una gráfica es 2-conexa por aristas si y sólo si cualesquiera dos vértices están conectados por al menos dos trayectorias ajenas por aristas.

Demostración: \Rightarrow) Sea G una gráfica 2-conexa \rightarrow por teorema visto en clase en G existe un ciclo C que contendrá 2 vértices v y u donde u y v pertenecen a $G \rightarrow$ podemos tener la trayectoria $P = (v, C, u)$ pero como C es un ciclo \rightarrow también existirá la trayectoria $P' = (u, V, v)$

Por lo tanto existen 2 trayectorias ajenas por aristas en una gráfica 2-conexa

\Leftarrow) Sean u y v cualesquiera vértices de una gráfica G y si u y v están conectados por dos trayectorias ajenas por aristas P y P' \rightarrow si unimos uPv y $vP'u$ obtendremos un ciclo C que ira de $uPvP'u \rightarrow$ sea G' una gráfica igual al ciclo C , si borramos una arista a $G' \rightarrow G'$ seguirá siendo conexa $\rightarrow G'$ es 2-conexa $\rightarrow G$ será 2-conexa ya que para todo v y u que pertenecen a G existen 2 trayectorias ajenas por aristas

QED

Ejercicio de la Tarea 7

6. [Ejercicio 1]

- (a) Demuestre que si G tiene diámetro mayor que 3 (posiblemente infinito), entonces \overline{G} tiene diámetro menor que 3. Concluya que si G es inconexa, entonces \overline{G} es conexa.

Demostración: Sea G una gráfica.

Probaremos que \overline{G} tiene diámetro menor a 3.

Primero, sabemos que G tiene diámetro mayor a 3 entonces tomemos una trayectoria P de G tal que su longitud es n (con $n > 3$).

La denotaremos como:

$$P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$$

Ahora, por definición de \overline{G} es tal que:

$$|E_{\overline{G}}| = \binom{|V| - 1}{2} - |E_G|$$

Por tanto, en \overline{G} la trayectoria P cambia de la siguiente manera:

- El vértice x_0 es adyacente a los vértices x_2, x_3, \dots, x_n , donde esto equivale a $n - 1$ vértices.
- El vértice x_1 es adyacente a los vértices x_3, x_4, \dots, x_n , donde esto equivale a $n - 2$ vértices.
- El vértice x_2 es adyacente a los vértices x_0, x_4, \dots, x_n , donde esto equivale a $n - 2$ vértices.

Siguiendo este procedimiento, tenemos lo siguiente:

- El vértice x_i es adyacente a los vértices $x_{i-2}, x_{i+2}, x_{i+3}, \dots, x_n$, con $i > 1$.

Así, notemos lo siguiente:

En \overline{G} x_0 **no es** adyacente a x_1 , entonces necesitamos otro vértice x_3 para llegar a x_1 . Lo que implica que nos toma distancia igual a 2 llegar de x_0 a x_1 .

De la misma forma, x_1 **no es** adyacente a x_0 ni a x_2 , entonces necesitamos otro vértice x_4 para llegar a x_0 o x_2 . Lo que implica que nos toma distancia igual a 2 llegar de x_1 a x_0 o de x_1 a x_2 .

De lo anterior obtenemos que:

El vértice x_i **no es** adyacente al vértice x_{i-1} ni al vértice x_{i+1} , entonces necesitamos otro vértice x_{i+2} para llegar a x_{i-1} o x_{i+1} . Lo que implica que nos toma distancia igual a 2 llegar de x_i a x_{i-1} o de x_i a x_{i+1} .

Por lo tanto, \overline{G} tiene diámetro menor a 3.

Por último, probemos que si G es inconexa entonces \overline{G} es conexa.

Demostración: Sean $u, v \in G$ cualesquiera.

Supongamos que G es inconexa.

Sabemos que si $uv \notin E_G$, entonces $uv \in E_{\overline{G}}$.

Por lo antes visto, tenemos que:

Si u es adyacente a v , como el diámetro de \overline{G} es menor a 3, entonces existe otro vértice $w \in G$ tal que $uv, vw \in E_{\overline{G}}$.

Es decir, podemos llegar desde un vértice u a cualquier otro vértice w usando al vértice v .

Por lo tanto, ya que u, v fueron arbitrarios, podemos concluir que \overline{G} es conexa. QED

Así, concluimos que si G es inconexa, entonces \overline{G} es conexa. QED

- (b) Una gráfica G es autocomplementaria si $G \cong \overline{G}$. Demuestre que si G es autocomplementaria, entonces $|V| \stackrel{4}{\equiv} 0$ o $|V| \stackrel{4}{\equiv} 1$.

Demostración: Notemos lo siguiente:

$$|V| \stackrel{4}{\equiv} 1 \longrightarrow |V| \equiv 1 \pmod{4} \quad \text{y} \quad |V| \stackrel{4}{\equiv} 0 \longrightarrow |V| \equiv 0 \pmod{4}$$

Recordando la definición de $\pmod{4}$, tenemos:

$$\begin{aligned} |V| \equiv 1 \pmod{4} &\longrightarrow 4 \mid |V| - 1 \\ &\longrightarrow |V| - 1 = 4 \cdot k, \text{ con } k \in \mathbb{N} \\ &\longrightarrow |V| = 4 \cdot k + 1 \end{aligned}$$

De la misma forma, tenemos:

$$\begin{aligned} |V| \equiv 0 \pmod{4} &\longrightarrow 4 \mid |V| - 0 \\ &\longrightarrow |V| = 4 \cdot k, \text{ con } k \in \mathbb{N} \\ &\longrightarrow |V| = 4 \cdot k \end{aligned}$$

Sea G una gráfica cualquiera.

Como $G \cong \overline{G}$, entonces $|V_G| = |V_{\overline{G}}|$ y $|E_G| = |E_{\overline{G}}|$.

Sea $n = |V_G|$. Tenemos que:

$$\begin{aligned} |E_G| = |E_{\overline{G}}| &= \frac{|E(K_n)|}{2} \\ &, \text{ donde } K_n \text{ es la gráfica completa de } n \text{ vértices.} \end{aligned}$$

Ahora, recordemos que:

$$\text{Una gráfica es completa si su conjunto de aristas es igual a } \binom{V}{2}.$$

Así,

$$\begin{aligned} \binom{V}{2} &= \binom{n}{2} \\ &= \frac{n!}{2! \cdot (n-2)!} \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2)!}{2 \cdot (n-2)!} \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

Como $|E_G| = |E_{\overline{G}}|$, entonces sabemos que:

$$\begin{aligned} \frac{|E(K_n)|}{2} &= \frac{1}{2} (|E(K_n)|) \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{n(n-1)}{2} \right] \\ &= \frac{n(n-1)}{4} \end{aligned}$$

Por tanto, como n y $(n-1)$ son número enteros consecutivos, el máximo común divisor de ambos números es 1.

Luego, 4 es divisor de n o de $(n-1)$. Es decir, $n = 4k$ o $n-1 = 4k \longrightarrow n = 4k+1$ (con $k \in \mathbb{N}$).

Por lo tanto, podemos concluir que si G es autocomplementaria, entonces $|V| \stackrel{4}{\equiv} 0$ o $|V| \stackrel{4}{\equiv} 1$.

QED