

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO

Facultad de Ciencias

Autores: Fernanda Villafán Flores
Fernando Alvarado Palacios
Adrián Aguilera Moreno

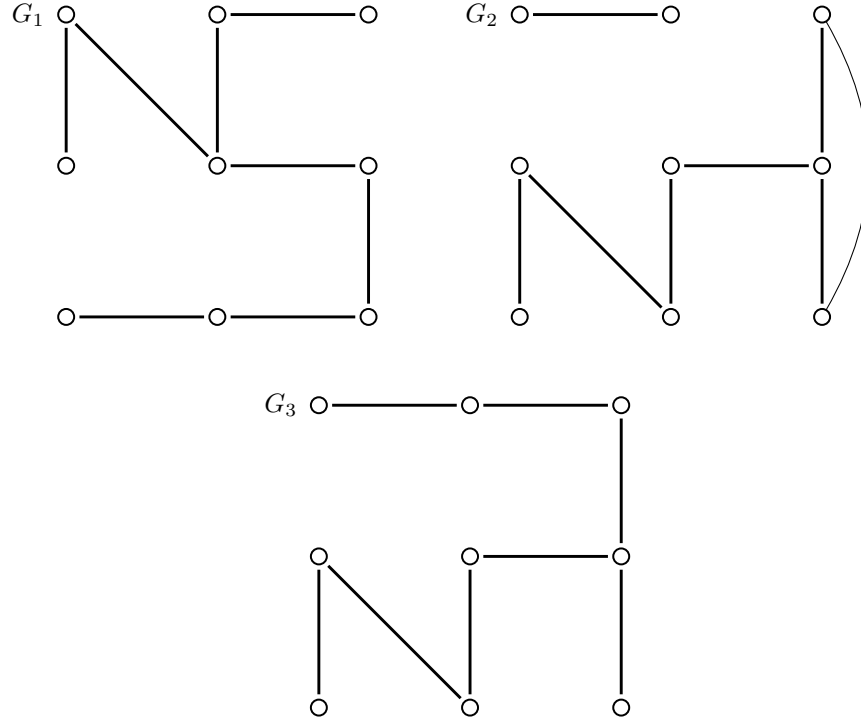


Gráficas y Juegos

Tarea 1

1. Sea n un entero, $n \geq 3$. Demuestre que existe un único n -ciclo, salvo isomorfismo.
2. De un ejemplo de tres gráficas del mismo orden, mismo tamaño y misma sucesión de grados tales que cualesquiera dos de dichas gráficas no sean isomorfas, al menos una de ellas sea conexa, y al menos una sea inconexa.

A continuación se muestran las gráficas: G_1, G_2 y G_3 :



con sucesiones orden 9, tamaño 8 y sucesión de grados $(1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3)$. □

3. Sea D una digráfica. Demuestre que

$$\sum_{v \in V_D} d^+(v) = \sum_{v \in V_D} d^-(v) = |A_D|.$$

Demostración: La demostración se dividirá en dos incisos:

$$\cdot) \sum_{v \in V_D} d^+(v) = |A_D|$$

Sea M_1 una matriz de incidencia de D , tal que:

$$M_1 = M_{ij}^+ = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ es la cola de } e_j \\ 0 & \text{si } v_i \text{ no es la cola de } e_j \end{cases}$$

Ahora, supongamos que $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ donde v_i corresponde al i -ésimo renglón de M_1 .

Sabemos que las entradas de cada columna de M_1 son igual a 1, que son las flechas e_j con un vértice llamado *cola de la flecha*. Por otro lado, las entradas del i -ésimo renglón de M_1 suman $d^+(v_i)$, ya que las entradas corresponden a todas las flechas de las cuales v_i es cola de dicha flecha.

Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} |A_D| &= \sum_{j=1}^{|A|} \sum_{i=1}^{|V|} M_{ij}^+ \\ &= \sum_{i=1}^{|V|} \sum_{j=1}^{|A|} M_{ij}^+ \\ &= \sum_{i=1}^{|V|} d^+(v_i) \\ &= \sum_{v \in V} d^+(v) \end{aligned}$$

De forma análoga se realiza el otro inciso.

$$\cdot\cdot) \sum_{v \in V_D} d^-(v) = |A_D|$$

Sea M_2 una matriz de incidencia de D , tal que:

$$M_2 = M_{ij}^- = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ es la cabeza de } e_j \\ 0 & \text{si } v_i \text{ no es la cabeza de } e_j \end{cases}$$

Ahora, supongamos que $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ donde v_i corresponde al i -ésimo renglón de M_1 .

Sabemos que las entradas de cada columna de M_1 son igual a 1, que son las flechas e_j con un vértice llamado *cabeza de la flecha*. Por otro lado, las entradas del i -ésimo renglón de M_1 suman $d^-(v_i)$, ya que las entradas corresponden a todas las flechas de las cuales v_i es cabeza de dicha flecha.

Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} |A_D| &= \sum_{j=1}^{|A|} \sum_{i=1}^{|V|} M_{ij}^- \\ &= \sum_{i=1}^{|V|} \sum_{j=1}^{|A|} M_{ij}^- \\ &= \sum_{i=1}^{|V|} d^-(v_i) \\ &= \sum_{v \in V} d^-(v) \end{aligned}$$

Por lo tanto, queda demostrado que:

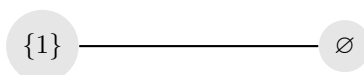
$$\sum_{v \in V_D} d^+(v) = \sum_{v \in V_D} d^-(v) = |A_D|$$

QED

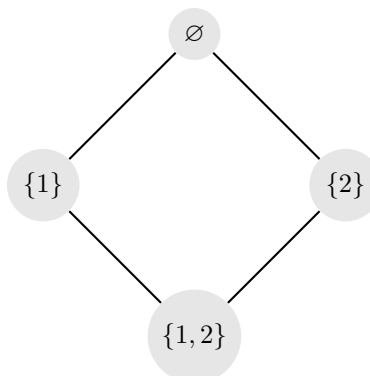
4. Sea n un entero positivo. Definimos a la *Retícula Booleana*, BL_n , como la gráfica cuyo conjunto de vértices es el conjunto de todos los posibles subconjuntos de $\{1, \dots, n\}$, donde dos subconjuntos X y Y son adyacentes si y sólo si su diferencia simétrica tiene exactamente un elemento.

(a) Dibuje BL_1, BL_2, BL_3 y BL_4 .

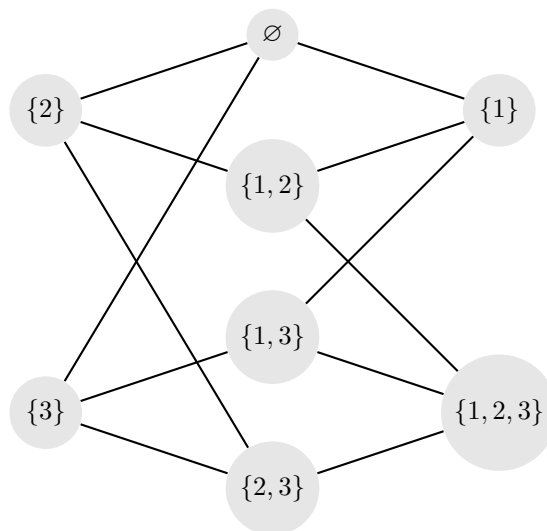
Gráfica representativa de BL_1 :



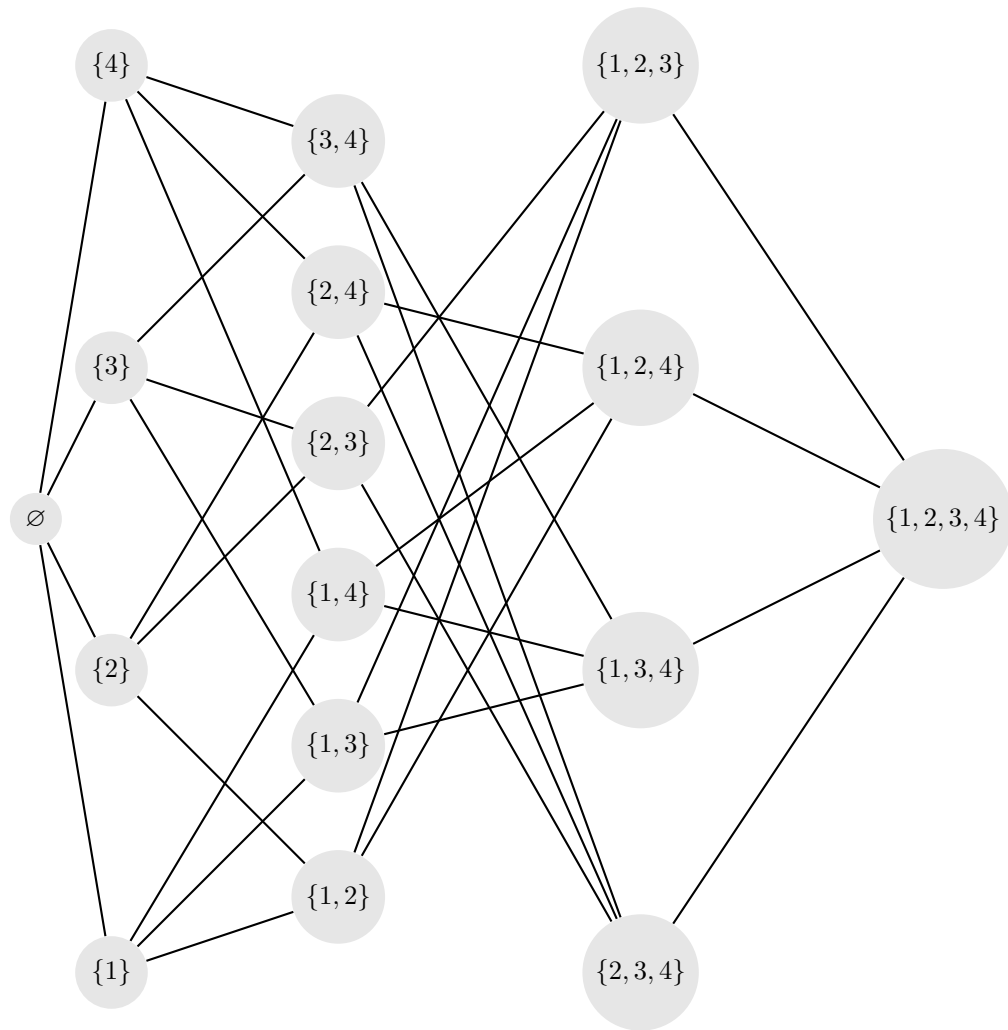
Gráfica representativa de BL_2 :



Gráfica representativa de BL_3 :



Gráfica representativa de BL_4 :



□

- (b) Determine $|V_{BL_n}|$ y $|E_{BL_n}|$. (Justifique su respuesta).

Veamos que la cantidad de vértices es igual a la cantidad de subconjuntos que se pueden formar de la retícula BL_n , esto es el conjunto potencia de $\{1, \dots, n\}$. Por lo que:

$$|V_{BL_n}| = |P(\{1, \dots, n\})| = 2^n$$

Mientras que es un tanto más empírica la forma en la que se obtiene la cardinalidad de E_{BL_n} , veamos la siguiente tabla con las primeras retículas:

Valor de n	# de aristas
$n = 1 \Rightarrow$	1 arista
$n = 2 \Rightarrow$	4 arista
$n = 3 \Rightarrow$	12 arista
$n = 4 \Rightarrow$	32 arista

Nótese que:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1 &= 1 \cdot 2^{1-1} = 1 \\ 2 \cdot 2 &= 2 \cdot 2^{2-1} = 4 \\ 3 \cdot 4 &= 3 \cdot 2^{3-1} = 12 \\ 4 \cdot 8 &= 4 \cdot 2^{4-1} = 32 \end{aligned}$$

Podemos deducir $|E_{BL_n}| = n \cdot 2^{n-1}$.

En general las retículas booleanas son n -regulares, pues para un $x \in V_{BL_{n-1}}$ con BL_{n-1} siendo n -regular, el BL_n tendrá a x relacionado con al menos $n-1$ elementos (son con los que ya se relacionaba en BL_{n-1}) y x se relacionará con el conjunto de tamaño $|x| + 1$ (el cuál sólo es uno, pues este es $x \cup \{n\}$) y concluimos que BL_n es n -regular, pues cada x se relaciona con $(n-1) + 1$ elemento.

Luego hay n aristas por cada vértice (los cuáles son 2^n , como ya vimos) y por el inciso (c) tenemos que BL_n es bipartita, esto aunado al hecho de que es n -regular, nos da partes en BL_n de igual cardinalidad. De lo anterior hay una cantidad de aristas igual a n por cada una de las partes, *i.e.*,

$$\begin{aligned} |E_{BL_n}| &= n \cdot \frac{2^n}{2} \\ &= n \cdot 2^{n-1} \end{aligned}$$

$$\therefore |V_{BL_n}| = 2^n \text{ y } |E_{BL_n}| = n \cdot 2^{n-1} \quad \square$$

(c) Demuestre que BL_n es bipartita para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$.

Demostración: Sea $A = \{1, \dots, n\}$ conjunto con $n \in \mathbb{Z}^+$. Veamos que podemos particionar nuestra BL_n en los conjuntos X y Y de tal forma que X contenga los subconjuntos de BL_n tales que su cardinalidad es $2k$, donde $2k \in A$ y Y tal que contenga los subconjuntos de BL_n de cardinalidad $2k-1$, donde $2k-1 \in A$.

Veamos que pasa cuando dos subconjuntos en BL_n se relacionan, es decir, son adyacentes en BL_n .

- Su diferencia simétrica es 1.

Dados dos subconjuntos en BL_n , uno de ellos debe tener cardinalidad $n+1$ o $n-1$ y el otro de cardinalidad n tal que se cumple que uno de ellos es subconjunto del otro.

Notemos que en X están todos los subconjuntos de cardinalidad par. Por tanto, la diferencia simétrica entre cualesquiera 2 subconjuntos distintos en X es:

- A lo menos un conjunto de cardinalidad 2.

De lo anterior, tenemos que ningún subconjunto en X cumple ser adyacente mediante la definición de BL_n .

Ahora notemos que, en Y están todos los subconjuntos de BL_n que tienen cardinalidad impar. Por lo tanto, la diferencia simétrica en cualesquiera dos subconjuntos distintos en Y es:

- Al menos un conjunto de cardinalidad 2.

Entonces tenemos que: $2k+1 - (2k-1) = 2$ y como Y es un conjunto, no se tiene dos conjuntos iguales a los cuales relacionar. Por lo anterior y por la definición de diferencia simétrica, no existen dos conjuntos adyacentes en Y .

$$\therefore BL_n \text{ es bipartita en } X \text{ y } Y, \text{ i.e. } BL_n[X, Y] \quad \text{QED}$$

5. Sea $G[X, Y]$ una gráfica bipartita.

(a) Demuestre que $\sum_{v \in X} d(v) = \sum_{v \in Y} d(v)$.

Demostración:

QED

(b) Demuestre que si G es k -regular, con $k \geq 1$, entonces $|X| = |Y|$.

Demostración: Dada G una gráfica k -regular $G[X, Y]$ bipartita. Sabemos que por ser bipartita y k -regular, se cumple que:

- Al menos $|V_G| = 2$, pues una gráfica tiene como mínimo un elemento y por ser bipartita está debe relacionarse con al menos un elemento en la partición ajena a ella misma.
- Todos los vértices tienen grado k .

Tenemos que en el caso mínimo, $|V_G| = 2$ hay una relación entre dos vértices (cada uno de ellos pertenecientes a su respectiva parte). Por lo tanto, al ser k -regular, tenemos que el grado de estos vértices es al menos 1. Entonces, $k \geq 1$.

Ahora usemos el resultado de 5 (a). Sabemos que:

$$\sum_{v \in X} d(v) = \sum_{v \in Y} d(v)$$

Como cada vértice tiene grado k , podemos decir que:

$$|X| = \frac{\sum_{v \in X} d(v)}{k} \quad \text{y} \quad |Y| = \frac{\sum_{v \in Y} d(v)}{k}$$

De lo anterior, se deduce que:

$$\therefore |X| = |Y|$$

QED

Puntos Extra

1. Sea $G = [X, Y]$ una gráfica bipartita con $|X| = r$ y $|Y| = s$.

- (a) Demuestre que $|E| \leq rs$.
- (b) Deduzca que $|E| \leq \frac{|V|^2}{4}$.
- (c) Describa a las gráficas bipartitas que cumplen la igualdad en el inciso anterior. Justifique su respuesta.