UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO
Facultad de Ciencias

Autores:
Fernanda Villafán Flores
Fernando Alvarado Palacios
Adrián Aguilera Moreno

Gráficas y Juegos

Tarea 9 y 10

Puntos Extra

1. (2 puntos) Sea G una gráfica conexa y e una arista de G que no sea un lazo. Exhiba una biyección entre el conjunto de árboles generadores de G que contienen a e y el conjunto de árboles generadores de G/e.

   Demostración: Sea G un conjuntos de arbloes generadores y T⊂G tal que e∈T y T'⊂G tal que T'=G\e.

   Definamos la funcion f: T→T' tal que si g∈T $\implies$ f(g)=g\e.

   Observemos que como g∈T (g es un arbol generador) $\implies$ f(g) tambien será un arbol generador $\implies$ la función f preseva conexidad.

   Pd) f es inyectiva

   Sea g_1, g_2 $\implies$ si f(g_1)=f(g_2) $\implies$ el subconjunto A y A' de aristas en G que induce a f(g_1) y f(g_2) respectivamente son iguales $\implies g_1 = A \setminus e = A' \setminus e = g_2 \implies g_1 = g_2$.

   Por lo tanto f es inyectiva

   Pd) f es suprayectiva

   Sea b∈T' $\implies$ por definicion b=b\e $\implies$ sea w un vértice que une a las aristas a_1 y a_2 $\implies$ "Partimos a w en dos vértices u,v" y en medio de u y v colocamos a e y denostamos a este nuevo árbol como $g_3 \implies$ existe $g_3 \in T$ tal que f(g_3)=b.

   Por lo tanto f es sobreyectiva.

   Por lo tanto f es un biyección.

   □

2. (2 puntos) Sea T un árbol de DFS de una gráfica conexa no trivial G, y sea v la raiz de un bloque B de G. Demuestre que el grado de v en $T \cap B$ es uno.

   Demostración: Observemos el caso particualar para k_2, este caso siempre se cumple sin importar en que vértice se jecute DFS, nuestro árbol siempre será de tipo k_2, donde los dos vértices tendran grado 1.

   Sea G una gráfica conexa con al menos 3 vértices y v∈V $\implies$ ejecutando DFS en v y s.p.g supongamos v es la raiz de algun bloque T de G. $\implies$ si w es el primer vecino del mismo bloque de v que visitamos. $Apartirdeaquiyanoentendiynosecomoredactarlojajajjaja$ Como para cualesquiera tres vértices de un bloque de G existe una trayectoria que una a cualesquiera dos de ellos y que no pasa por el tercero, entonces siempre podemos garantizar que el siguiente vértice que visitemos después de w no saldrá de v. Además DFS ya no agrega a la pila los vértices previamente visitados. Así, en el árbol DFS de G, $G \bigcap T$ sólo tendrá los vértices de T y ahí la raíz tendrá $d(v) = 1$ por lo mencionado anteriormente.

   □

3. (2 puntos) Si f es la función de tiempo de entrada del algoritmo DFS, defina $f^* \colon V \to \mathbb{N}$ de la siguiente forma. Si algún ancestro propio de v puede ser alcanzado desde v mediante una trayectoria dirigida que consista de flechas del árbol (posiblemente ninguna) seguida de una flecha que no está en el árbol (que va hacia arriba), $f^*(v)$ se define como el menor valor de f de un ancestro de este tipo; si no, $f^*(v) = f(v)$. Observe que un vértice v es la raíz de un bloque si y sólo si tiene un hijo w tal que $f^*(w) \geq f(v)$. Modifique el algoritmo DFS para que regrese los vértices de corte y los bloques de una gráfica conexa.

4. (2 puntos) Sea T un árbol óptimo en una gráfica conexa ponderada (G, w) (con pesos positivos), y sean x y y vértices adyacentes en T. Demuestre que la trayectoria $xTy = xy$ es una xy-trayectoria de peso mínimo en G.

5. (2 puntos) Demuestre que si todos los pesos de una gráfica ponderada G son distintos, entonces G tiene un único árbol óptimo.

   Demostración: (Demostración por reduccion al absurdo)

   Sea (G,w) una gráfica conexa ponderada, T un árbol optimo y x,y $\in$V(G,W), supongamos que xTy no es una trayectoria optima en (G,w) $\Longrightarrow$ Existe t_0 tal que t_0 sea un árbol generador, t_0 sea diferente a T $\Longrightarrow$ y la trayectoria optima sea xt_0y $\Longrightarrow$ t_0 tiene mayor peso que T, ya que la trayectoria xTy es mas pesada $\Longrightarrow$ que T no es un arbol optimo (Lo que es una contradiccion a nuestra hipotesis).

   Por lo tanto xTy es una trayectoria optima.

   □

6. (2 puntos) Modifique el algoritmo de Borůvka-Kruskal para que en cada iteración vértices en la misma componente del bosque F reciban el mismo color y vértices en componentes distintas reciban colores distintos.

7. (2 puntos) Demuestre que el problema de encontrar un árbol generador de peso máximo en una gráfica conexa puede resolverse eligiendo iterativamente una arista de peso máximo, con la condición de que la subgráfica resultante siga siendo un bosque. (Proponga un algoritmo y demuestre que es correcto.)

8. (2 puntos) Escriba una versión del algoritmo BFS para digráficas. Utilice esta versión de BFS dirigida para describir un algoritmo que encuentre un ciclo dirigido de longitud mínima en una digráfica. Su versión dirigida de BFS debe de correr en tiempo $\mathcal{O}(|V| + |E|)$, y el algoritmo para encontrar el ciclo dirigido más corto debe correr en tiempo a lo más $\mathcal{O}(|V|^2 + |V||E|)$.