UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO

Facultad de Ciencias

Autores:

Fernanda Villafán Flores

Fernando Alvarado Palacios

Adrián Aguilera Moreno

Gráficas y Juegos

Tarea 6

1. Sea G una gráfica conexa no euleriana. Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

   (a) Hay un paseo euleriano en G.

   (b) Hay exactamente dos vértices de grado impar en G.

   (c) Existe una familia de ciclos ajenos por aristas dos a dos $\{C_i\}_{i=1}^{k}$ y un paseo P tal que $E_G = E_P \cup \bigcup_{i=1}^{k} E_{C_i}$.

   Demostración: Sea G una gráfica.

   Probaremos las siguientes implicaciones:

   - $(a) \implies (b)$.

     Sea P un paseo euleriano en G.

     Como G es conexa, podemos hacer adyacentes al vértice inicial y al vértice final de P. Esto implica que tenemos un **paseo cerrado** y por tanto, tenemos un **circuito euleriano**.

     Así, obtenemos que G es una gráfica euleriana.

     De aquí, notemos que todos los vértices de la gráfica euleriana tienen grado par (*por propiedades de gráficas eulerianas*) y, si borramos la arista que une al vértice inicial y al vértice final de P, obtenemos que el grado de dichos vértices disminuye en 1.

     Esto implica que ambos vértices ahora tienen grado impar (ya que *número par − número impar = número impar*).

     Por lo tanto, dichos vértices son los únicos dos vértices de grado impar en G.

   - $(b) \implies (c)$.

     Como ya probamos que G es una gráfica euleriana, *por propiedades* sabemos que G tiene una **descomposición en ciclos**, digamos $C_1, C_2, \cdots, C_k$. Y además por el inciso (a), sabemos que existe un paseo P en G el cuál (*por hipótesis*) tiene exactamente dos vértices de grado impar.

     Entonces tenemos que:

     $$\begin{aligned} E_G &= \bigcup_{i=1}^{k} E_{C_i} \cup E_P \\ &= E_P \cup \bigcup_{i=1}^{k} E_{C_i} \end{aligned}$$

   - $(c) \implies (a)$.

     Esto es inmediato ya que *por hipótesis*, existe un paseo P tal que:

     $$E_G = E_P \cup \bigcup_{i=1}^{k} E_{C_i}$$

En particular si G no tiene ciclos, es decir, $\bigcup_{i=1}^{k} E_{C_i} = \emptyset$ tenemos que:

$$\begin{aligned} E_G &= E_P \cup \bigcup_{i=1}^{k} E_{C_i} \\ &= E_P \cup \emptyset \\ &= E_P \end{aligned}$$

Así, si $E_G = E_P$ implica que hay un paseo euleriano en G (por definición de **paseo euleriano**).

Por lo tanto, queda demostrado que las afirmaciones son equivalentes.

□

2. Sea D una digráfica conexa. Demuestre que D es euleriana si y sólo si para cada $v \in V_D$, se tiene $d^+(v) = d^-(v)$.

Demostración: • $\Longrightarrow$.

Sea D una digráfica conexa e eucliriana $\to$ Por definición de gráfica eucliriana existe un circuito euclidiano que une a todos los vértices, llamémosle C a este circuito.

Entonces, sea x perteneciente a V_D el inicio de este circuito.

$\to C = (x, v_i, v_{i+1}, \cdots, v_{i+n}, u)$ con i y n pertenecientes a los naturales.

Como todos los vértices son consecutivos, notemos que cada vértice de C es cola y cabeza para dos flechas distintas en el circuito $\to$ para todo V_k que pertenece a C existe d^+ y d^- que une a V_k con sus vértices adyacentes V_{k-1} y V_{k+1}.

Así, cada vértice de la trayectoria C tendrá una "arista" d^+ y una d^- (ya que D es par y por construcción de C).

Por lo tanto, $d^+ = d^-$ ya que para todo vértice de D se pueden sumar el número de veces que aparecen en la trayectoria C y preservará la igualdad anterior.

• $\Longleftarrow$.

Sea D conexa y para toda v que pertenece a V_D se tiene que $d^+ = d^- \to$ para toda v que pertenece a V_D, existe al menos una d^+ y una d^-.

Por lo que para todo v que pertenece a V_D, v es mayor igual a 2. Pero el grado de v siempre debe ser par, ya que tenemos la igualdad $d^+ = d^- \to D$ es par.

Por lo tanto, por teorema visto en clase tenemos que D es una gráfica eucliriana.

□

3. La digráfica de *de Bruijn-Good* BG_n tiene como conjunto de vértices al conjunto de todas las sucesiones binarias de longitud n, y donde el vértice $a_1 a_2 \cdots a_n$ es adyacente al vértice $b_1 b_2 \cdots b_n$ si y sólo si $a_{i+1} = b_i$ para $1 \leq i \leq n-1$. Demuestre que BG_n es una digráfica euleriana de orden 2^n y diámetro dirigido n.

4. Demuestre que existe una forma de ordenar todas las fichas de dominó en un ciclo (respetando las reglas del juego). ¿Cómo generalizaría este resultado para dominós con n puntos? (el dominó estándar es el de 6 puntos).

5. Sean G una gráfica euleriana no trivial y $u \in V_G$. Demuestre que todo paseo en G que inicia en u se puede extender a un circuito euleriano si y sólo si $G - u$ es acíclica.

   Demostración: Sean G una gráfica euleriana no trivial y $u \in V_G$.

   Procedemos por doble implicación.

   - $\Longrightarrow$.

     Suponemos que todo paseo en G que inicia en u se puede extender a un circuito euleriano.

     Demostraremos que $G - u$ es acíclica.

     Procedemos por contradicción.

     Sea P un circuito euleriano de G.

     Supongamos que $G - u$ no es acíclica.

     Esto implica que existe un ciclo C en $G - u$

   - $\Longleftarrow$.

     Suponemos que $G - u$ es acíclica.

     Demostraremos que todo paseo en G que inicia en u se puede extender a un circuito euleriano.

   $\square$

Puntos Extra

1. Una digráfica D es *balanceada* si $|d^+(v) - d^-(v)| \leq 1$, para cada $v \in V$. Demuestre que toda gráfica tiene una orientación balanceada.

2. Una sucesión circular $s_1 s_2 \cdots s_{2^n}$ de ceros y unos es llamada una *sucesión de de Bruijn-Good* de orden n si las 2^n subsucesiones $s_i s_{i+1} \cdots s_{i+n-1}$, $1 \leq i \leq 2^n$ (con los subíndices tomados módulo 2^n son distintas, y por lo tanto constituyen todas las posibles sucesiones binarias de longitud n. Por ejemplo, la sucesión 00011101 es una una sucesión de de Bruijn-Good de orden tres. Muestre como encontrar un de estas sucesiones para cualquier orden n utilizando un circuito euleriano dirigido en la gráfica de de Bruijn-Good BG_{n-1}. Justifique su respuesta.

3. Sea G una gráfica conexa, y sea X el conjunto de vértices de G de grado impar. Suponga que $|X| = 2k$, con $k \geq 1$.

   (a) Demuestre que hay k paseos ajenos por aristas $Q_1, \ldots, Q_k$ en G tales que $E_G = \bigcup_{i=1}^{k} E_{Q_i}$.

   (b) Deduza que G contiene k paseos ajenos por aristas que conectan a los vértices de X en pares.