

# UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO

Facultad de Ciencias

Autores:

Fernanda Villafán Flores

Fernando Alvarado Palacios

Adrián Aguilera Moreno



Gráficas y Juegos

## Tarea 1

1. Sea  $n$  un entero,  $n \geq 3$ . Demuestre que existe un único  $n$ -ciclo, salvo isomorfismo.

**Demostración:** Sean  $G$  y  $H$  ciclos de orden  $n$ .

Tomamos  $V_G = (v_1, \dots, v_n, v_1)$  y  $V_H = (v_1, \dots, v_n, v_1)$ .

Como  $G$  y  $H$  son ciclos, sabemos que son 2-regular.

Es decir, podemos suponer que un vértice  $v_i$  de  $G$  con  $i \in \{1, \dots, n\}$  es adyacente a dos vértices (digamos  $v_{i-1}$  y  $v_{i+1}$ ). Notemos que  $v_1 = v_n$ .

Análogamente para  $H$ .

Ahora, como  $G$  y  $H$  son de orden  $n$ , definimos una función  $\phi : V_G \rightarrow V_H$  dada por  $\phi(v_i) = u_i$  para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Claramente  $\phi$  es una biyección.

Demostremos que  $\phi$  es un isomorfismo:

$\Rightarrow$ ) Si  $v_i v_j \in E_G$ , entonces podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $j = i + 1$  o  $j = i - 1$ .

Por definición de  $\phi$ , tenemos que  $\phi(v_i) = u_i$  y  $\phi(v_j) = u_j = u_{i+1}$  (análogamente cuando  $j = i - 1$ ).

Como  $u_i u_{i+1} \in E_H$ , concluimos que  $\phi(v_i) \phi(v_j) \in E_H$ .

$\Leftarrow$ ) Recíprocamente, si  $v_i v_j \notin E_G$ , entonces  $j \neq i + 1$  y  $j \neq i - 1$ .

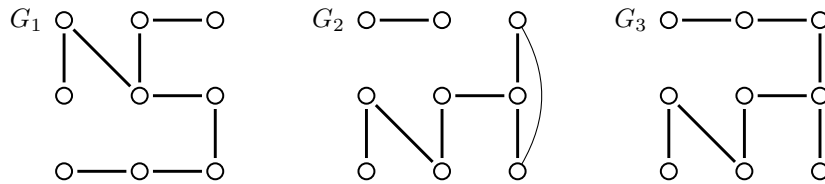
Se sigue que  $\phi(v_i) \phi(v_j) = u_i u_j \notin E_H$ .

Por lo tanto, demostramos que existe un único  $n$ -ciclo (salvo isomorfismo).

QED

2. De un ejemplo de tres gráficas del mismo orden, mismo tamaño y misma sucesión de grados tales que cualesquiera dos de dichas gráficas no sean isomorfas, al menos una de ellas sea conexa, y al menos una sea inconexa.

A continuación se muestran las gráficas:  $G_1, G_2$  y  $G_3$ :



con sucesiones orden 9, tamaño 8 y sucesión de grados  $(1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3)$ .

□

3. Sea  $D$  una digráfica. Demuestre que

$$\sum_{v \in V_D} d^+(v) = \sum_{v \in V_D} d^-(v) = |A_D|.$$

**Demostración:** La demostración se dividirá en dos incisos:

$$\cdot) \sum_{v \in V_D} d^+(v) = |A_D|$$

Sea  $M_1$  una matriz de incidencia de  $D$ , tal que:

$$M_1 = M_{ij}^+ = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ es la cola de } e_j \\ 0 & \text{si } v_i \text{ no es la cola de } e_j \end{cases}$$

Ahora, supongamos que  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  donde  $v_i$  corresponde al  $i$ -ésimo renglón de  $M_1$ .

Sabemos que las entradas de cada columna de  $M_1$  son igual a 1, que son las flechas  $e_j$  con un vértice llamado *cola de la flecha*. Por otro lado, las entradas del  $i$ -ésimo renglón de  $M_1$  suman  $d^+(v_i)$ , ya que las entradas corresponden a todas las flechas de las cuales  $v_i$  es cola de dicha flecha.

Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} |A_D| &= \sum_{j=1}^{|A|} \sum_{i=1}^{|V|} M_{ij}^+ \\ &= \sum_{i=1}^{|V|} \sum_{j=1}^{|A|} M_{ij}^+ \\ &= \sum_{i=1}^{|V|} d^+(v_i) \\ &= \sum_{v \in V} d^+(v) \end{aligned}$$

De forma análoga se realiza el otro inciso.

$$\cdot) \sum_{v \in V_D} d^-(v) = |A_D|$$

Sea  $M_2$  una matriz de incidencia de  $D$ , tal que:

$$M_2 = M_{ij}^- = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ es la cabeza de } e_j \\ 0 & \text{si } v_i \text{ no es la cabeza de } e_j \end{cases}$$

Ahora, supongamos que  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  donde  $v_i$  corresponde al  $i$ -ésimo renglón de  $M_1$ .

Sabemos que las entradas de cada columna de  $M_1$  son igual a 1, que son las flechas  $e_j$  con un vértice llamado *cabeza de la flecha*. Por otro lado, las entradas del  $i$ -ésimo renglón de  $M_1$  suman  $d^-(v_i)$ , ya que las entradas corresponden a todas las flechas de las cuales  $v_i$  es cabeza de dicha flecha.

Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} |A_D| &= \sum_{j=1}^{|A|} \sum_{i=1}^{|V|} M_{ij}^- \\ &= \sum_{i=1}^{|V|} \sum_{j=1}^{|A|} M_{ij}^- \\ &= \sum_{i=1}^{|V|} d^-(v_i) \\ &= \sum_{v \in V} d^-(v) \end{aligned}$$

Por lo tanto, queda demostrado que:

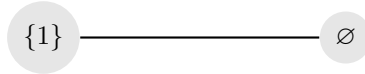
$$\sum_{v \in V_D} d^+(v) = \sum_{v \in V_D} d^-(v) = |A_D|$$

QED

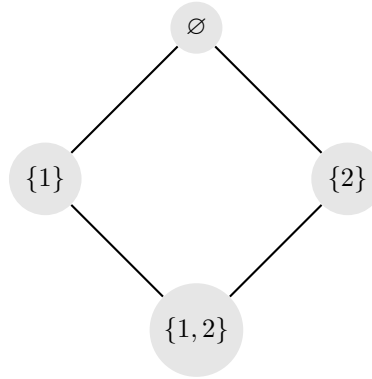
4. Sea  $n$  un entero positivo. Definimos a la *Retícula Booleana*,  $BL_n$ , como la gráfica cuyo conjunto de vértices es el conjunto de todos los posibles subconjuntos de  $\{1, \dots, n\}$ , donde dos subconjuntos  $X$  y  $Y$  son adyacentes si y sólo si su diferencia simétrica tiene exactamente un elemento.

- (a) Dibuje  $BL_1, BL_2, BL_3$  y  $BL_4$ .

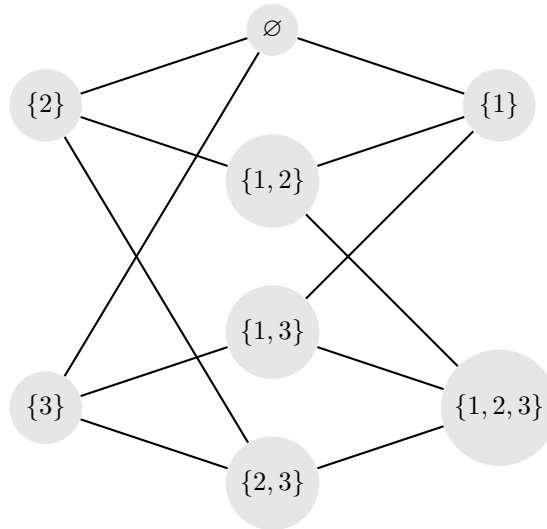
Gráfica representativa de  $BL_1$ :



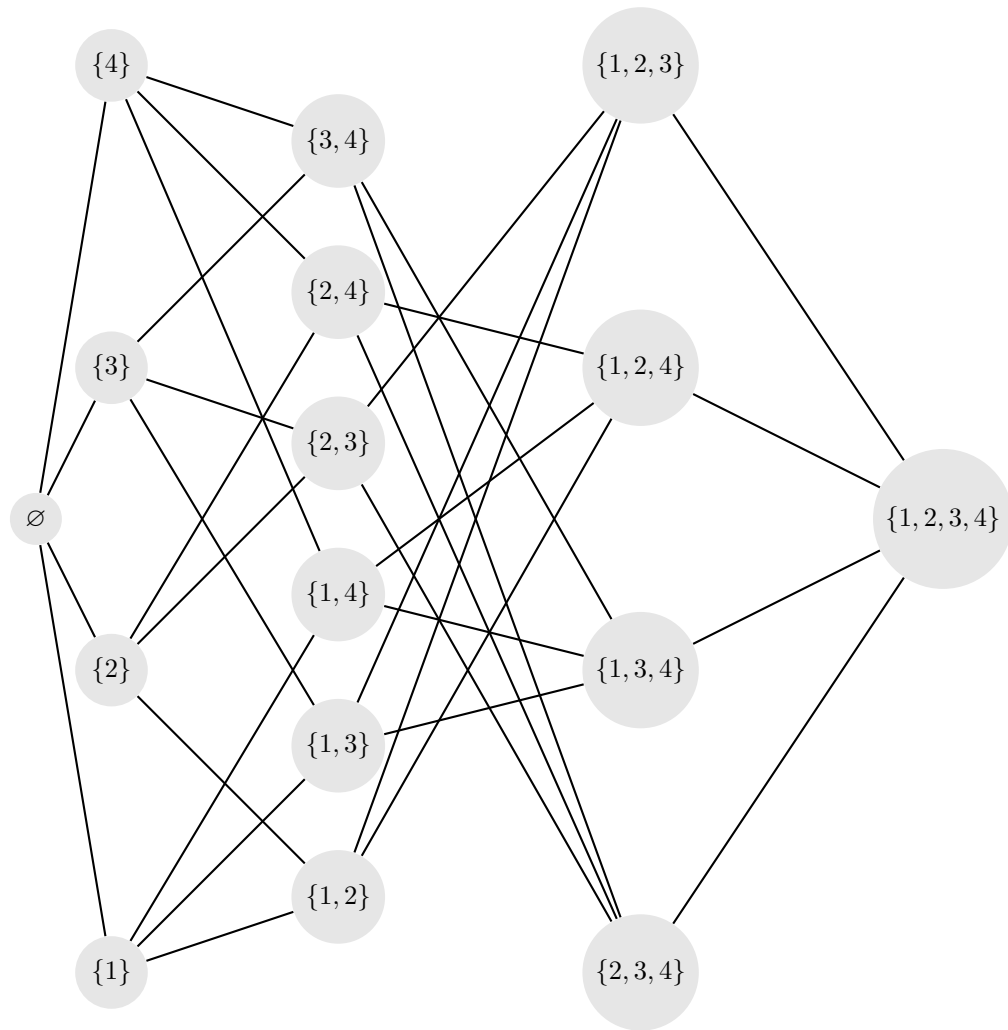
Gráfica representativa de  $BL_2$ :



Gráfica representativa de  $BL_3$ :



Gráfica representativa de  $BL_4$ :



□

- (b) Determine  $|V_{BL_n}|$  y  $|E_{BL_n}|$ . (Justifique su respuesta).

Veamos que la cantidad de vértices es igual a la cantidad de subconjuntos que se pueden formar de la retícula  $BL_n$ , esto es el conjunto potencia de  $\{1, \dots, n\}$ . Por lo que:

$$|V_{BL_n}| = |P(\{1, \dots, n\})| = 2^n$$

Mientras que es un tanto más empírica la forma en la que se obtiene la cardinalidad de  $E_{BL_n}$ , veamos la siguiente tabla con las primeras retículas:

Valor de $n$	# de aristas
$n = 1 \Rightarrow$	1 arista
$n = 2 \Rightarrow$	4 arista
$n = 3 \Rightarrow$	12 arista
$n = 4 \Rightarrow$	32 arista

Nótese que:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1 &= 1 \cdot 2^{1-1} = 1 \\ 2 \cdot 2 &= 2 \cdot 2^{2-1} = 2 \\ 3 \cdot 4 &= 3 \cdot 2^{3-1} = 6 \\ 4 \cdot 8 &= 4 \cdot 2^{4-1} = 8 \end{aligned}$$

Podemos deducir que  $|E_{BL_n}| = n \cdot 2^{n-1}$ .

En general, las retículas booleanas son  $n$ -regulares, pues para un  $x \in V_{BL_{n-1}}$  con  $BL_{n-1}$  siendo  $n$ -regular, el  $BL_n$  tendrá a  $x$  relacionado con al menos  $n-1$  elementos (son con los que ya se relacionaba en  $BL_{n-1}$ ) y  $x$  se relacionará con el conjunto de tamaño  $|x| + 1$  (el cuál sólo es uno, pues este es  $x \cup \{n\}$ ) y concluimos que  $BL_n$  es  $n$ -regular, pues cada  $x$  se relaciona con  $(n-1) + 1$  elemento.

Luego hay  $n$  aristas por cada vértice (los cuáles son  $2^n$ , como ya vimos) y por el inciso (c) tenemos que  $BL_n$  es bipartita. Esto aunado al hecho de que es  $n$ -regular, nos da partes en  $BL_n$  de igual cardinalidad. De lo anterior hay una cantidad de aristas igual a  $n$  por cada una de las partes. Es decir:

$$\begin{aligned} |E_{BL_n}| &= n \cdot \frac{2^n}{2} \\ &= n \cdot 2^{n-1} \end{aligned}$$

$$\therefore |V_{BL_n}| = 2^n \text{ y } |E_{BL_n}| = n \cdot 2^{n-1} \quad \square$$

(c) Demuestre que  $BL_n$  es bipartita para cualquier  $n \in \mathbb{Z}^+$ .

**Demostración:** Sea  $A = \{1, \dots, n\}$  conjunto con  $n \in \mathbb{Z}^+$ .

Veamos que podemos particionar nuestra  $BL_n$  en los conjuntos  $X$  y  $Y$  de tal forma que  $X$  contenga los subconjuntos de  $BL_n$  tales que su cardinalidad es  $2k$ , donde  $2k \in A$  y  $Y$  tal que contenga los subconjuntos de  $BL_n$  de cardinalidad  $2k-1$ , donde  $2k-1 \in A$ .

Veamos qué pasa cuando dos subconjuntos en  $BL_n$  se relacionan, es decir, son adyacentes en  $BL_n$ .

- Su diferencia simétrica es 1.

Dados dos subconjuntos en  $BL_n$ , uno de ellos debe tener cardinalidad  $n+1$  o  $n-1$  y el otro de cardinalidad  $n$  tal que se cumple que uno de ellos es subconjunto del otro.

Notemos que en  $X$  están todos los subconjuntos de cardinalidad par.

Por tanto, la diferencia simétrica entre cualesquiera 2 subconjuntos distintos en  $X$  es:

- A lo menos un conjunto de cardinalidad 2.

De lo anterior, tenemos que ningún subconjunto en  $X$  cumple ser adyacente mediante la definición de  $BL_n$ .

Ahora notemos que, en  $Y$  están todos los subconjuntos de  $BL_n$  que tienen cardinalidad impar.

Por lo tanto, la diferencia simétrica en cualesquiera dos subconjuntos distintos en  $Y$  es:

- Al menos un conjunto de cardinalidad 2.

Entonces tenemos que:  $2k+1 - (2k-1) = 2$  y como  $Y$  es un conjunto, no se tiene dos conjuntos iguales a los cuales relacionar.

Por lo anterior y por la definición de diferencia simétrica, no existen dos conjuntos adyacentes en  $Y$ .

$$\therefore BL_n \text{ es bipartita en } X \text{ y } Y, \text{ i.e. } BL_n[X, Y] \quad \text{QED}$$

5. Sea  $G[X, Y]$  una gráfica bipartita.

(a) Demuestre que  $\sum_{v \in X} d(v) = \sum_{v \in Y} d(v)$ .

**Demostración:** (Inducción sobre  $|Y|$ )

Sea  $G$  una gráfica bipartita  $G[X, Y]$  y sea  $r$  cualquier Entero tal que  $|X| = r$ .

• PASO BASE: ( $n = 1$ )

Así, tenemos  $G[X, Y_1]$  donde  $|X| = r$  y  $|Y| = 1$ .

Como  $G$  es bipartita, todo vértice de  $X$  se relaciona con el único elemento de  $Y$ .

Por lo que  $\sum_{v \in X} d(v) = r$  y el grado del único vértice en  $Y$  es igual a  $r$ .

Por lo tanto,  $\sum_{v \in X} d(v) = r = \sum_{v \in Y_1} d(v)$ .

• Hipótesis de Inducción: ( $n = k$ )

Supongamos que  $G[X, Y_k]$  es una gráfica bipartita y  $\sum_{v \in X} d(v) = \sum_{v \in Y_k} d(v)$ .

• PASO INDUCTIVO: ( $n = k + 1$ )

Sea  $G[X, Y_{k+1}]$  función bipartita.

Demostremos que  $\sum_{v \in X} d(v) = \sum_{v \in Y_{k+1}} d(v)$ .

Por hipótesis de inducción, tenemos que  $\sum_{v \in X} d(v) = \sum_{v \in Y_k} d(v)$ . Luego, si agregamos un vértice a  $Y_k$ , tenemos que  $|Y_k| + 1 = |Y_{k+1}|$ .

Por definición de gráfica bipartita, existirán vértices de  $X$  que son adyacentes con el nuevo vértice en  $Y$ .

Sea  $q$  el número de nuevas relaciones entre  $X$  y el nuevo vértice en  $Y$ .

Vemos que el grado del nuevo vértice en  $Y$  es igual a  $q$ .

Entonces:

$$\sum_{v \in X} d(v) = \sum_{v \in Y_k} d(v) + q = \sum_{v \in Y_{k+1}} d(v)$$

Por lo tanto, para toda  $G$  tenemos que  $\sum_{v \in X} d(v) = \sum_{v \in Y} d(v)$ .

QED

(b) Demuestre que si  $G$  es  $k$ -regular, con  $k \geq 1$ , entonces  $|X| = |Y|$ .

**Demostración:** Dada  $G$  una gráfica  $k$ -regular  $G[X, Y]$  bipartita.

Sabemos que por ser bipartita y  $k$ -regular, se cumple que:

- Al menos  $|V_G| = 2$ , pues una gráfica tiene como mínimo un elemento. Además, por ser bipartita debe relacionarse con al menos un elemento en la partición ajena a ella misma.
- Todos los vértices tienen grado  $k$ .

En el caso mínimo  $|V_G| = 2$ , hay una relación entre dos vértices (cada uno de ellos pertenecientes a su respectiva parte).

Entonces, al ser  $k$ -regular, tenemos que el grado de estos vértices es al menos 1.

Por lo tanto,  $k \geq 1$ .

Ahora usando el resultado de 5(a), sabemos que:

$$\sum_{v \in X} d(v) = \sum_{v \in Y} d(v)$$

Como cada vértice tiene grado  $k$ , podemos hacer lo siguiente:

$$|X| = \frac{\sum_{v \in X} d(v)}{k} \quad \text{y} \quad |Y| = \frac{\sum_{v \in Y} d(v)}{k}$$

Así, concluimos que:

$$|X| = |Y|$$

QED

## Puntos Extra

1. Sea  $G = [X, Y]$  una gráfica bipartita con  $|X| = r$  y  $|Y| = s$ .

- (a) Demuestre que  $|E| \leq rs$ .

**Demostración:** (Inducción sobre  $|Y|$ )

Sea  $r$  cualquier Entero tal que  $|X| = r$

Paso base ( $n = 1$ ): Sea  $G(V_1, E_1)$ :  $G[X, Y]$  donde  $|Y| = 1 \implies$  se sigue por vacuidad que  $\text{MAX}\{|E_1|\} = r$  (ya que todo elemento de  $X$  solo se puede relacionar al unico vértice en  $Y$ ).

Hipótesis de inducción ( $n = k$ ): Supongamos que existe  $G(V_k, E_k)$ :  $G[X, Y]$  tal que  $|X| = r$  y  $|Y| = k \implies \text{MAX}\{|E_k|\} = rk$

Pd) (para  $n = k+1$ ):  $G(V_{(k+1)}, E_{(k+1)})$ :  $G[X, Y]$  tal que  $|X| = r$  y  $|Y| = k + 1 \implies \text{MAX}\{|E_{(k+1)}|\} = r(k + 1)$

Dem

Por Hipótesis de inducción si  $G(V_k, E_k)$ :  $G[X, Y]$  tal que  $|X| = r$  y  $|Y| = k$  por lo que el  $\text{MAX}\{|E_k|\} = rk$  agregando un vertice a  $Y \implies$  definimos  $|V(k + 1)| = 1 + |V_k|$  por lo que el  $\text{MAX}\{|E(k + 1)|\} = \text{MAX}\{|E_k|\} + k$  (donde  $k$  son las nuevas relaciones entre el vertice que se agrego y todos los vertices de  $X$ )  $\implies \text{MAX}\{|E_k|\} + k = rk + r = r(k + 1)$  por lo tanto el  $\text{MAX}\{|E(k + 1)|\} = r(k + 1)$ .

Por lo tanto, para toda  $G(V, E)$  si  $G[X, Y]$ :  $|X| = r$  y  $|Y| = s \implies \text{MAX}\{|E|\} = rs \quad \square$

- (b) Deduzca que  $|E| \leq \frac{|V|^2}{4}$ .

**Demostración:** PD.  $rs \leq (|V|^2)/4$

Sabemos que para toda gráfica  $G = [X, Y]$  :  $|X| = r$  y  $|Y| = s \implies$  (por teo. cálculo  $x^2 > 0$ ) sean cualesquiera  $r, s$  que pertenecen a los Enteros  $\implies 0 \leq (r - s)^2 \implies 0 \leq r^2 + s^2 - 2rs \implies 2rs \leq r^2 + s^2 \implies 4rs \leq r^2 + s^2 + 2rs \implies 4rs \leq (r + s)^2 \implies rs \leq ((r + s)^2)/4$  y  $r + s = |X| + |Y|$  por lo que por definición de particion  $|X| + |Y| = |V| \implies (|V|^2)/4$  por inciso (a) tenemos que:  $|E| \leq rs \leq (|V|^2)/4$  por lo tanto  $|E| \leq (|V|^2)/4$

$\square$

- (c) Describa a las gráficas bipartitas que cumplen la igualdad en el inciso anterior. Justifique su respuesta. SOLUCION

Debemos ver donde se cumple la igualdad  $|E| = \frac{(|V|^2)}{4}$

Sea  $|V| = |X| + |Y| = r + s$  y por la demostración del inciso del (b) y (a) tenemos que si

$$0 \leq (r - s)^2 \implies |E| \leq rs \leq (|V|^2)/4$$

si  $0 = (r - s)^2$ , entonces  $0 = r - s$  y  $s = r$ , luego  $rs = \frac{(|V|^2)}{4}$ , y si  $G$  es una gráfica bipartita completa entonces

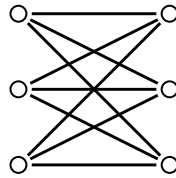
$$|E| = rs = \frac{(|V|^2)}{4}$$

y por lo tanto, si las particiones de la gráfica tienen el mismo número de elementos y también la gráfica es bipartita completa cumple la desigualdad

$$|E| = (|V|^2)/4$$

Ejemplo:



$G_1$ 

Obsérvese que  $rs = 9$ ,  $|E| = 9$ , y  $|V| = 9$  implica que  $|V|^2/4 = 36/4 = 9$ .