

# UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO

## Facultad de Ciencias

Autores: Fernanda Villafán Flores  
Fernando Alvarado  
Adrián Aguilera Moreno



Gráficas y Juegos

## Tarea 1

1. Sea  $n$  un entero,  $n \geq 3$ . Demuestre que existe un único  $n$ -ciclo, salvo isomorfismo.

**Demostración:** Sean  $G$  y  $H$  ciclos de orden  $n$ .

Tomamos  $V_G = (v_1, \dots, v_n, v_1)$  y  $V_H = (v_1, \dots, v_n, v_1)$ .

Como  $G$  y  $H$  son ciclos, sabemos que son 2-regular. Es decir, podemos suponer que un vértice  $v_i$  de  $G$  con  $i \in \{1, \dots, n\}$  es adyacente a dos vértices (digamos  $v_{i-1}$  y  $v_{i+1}$ ). Análogamente para  $H$ .

Ahora, como  $G$  y  $H$  son de orden  $n$ , definimos una función  $\phi : V_G \rightarrow V_H$  dada por  $\phi(v_i) = u_i$  para cada  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Claramente  $\phi$  es una biyección.

Demostraremos que  $\phi$  es un isomorfismo:

$\Rightarrow$ ) Si  $v_i v_j \in E_G$ , entonces podemos suponer, sin pérdida de generalidad, que  $j = i + 1$ .

Por definición de  $\phi$ , tenemos que  $\phi(v_i) = u_i$  y  $\phi(v_j) = u_j = u_{i+1}$ .

Como  $u_i u_j = u_i u_{i+1} \in E_H$ , concluimos que  $\phi(v_i) \phi(v_j) \in E_H$ .

$\Leftarrow$ ) Recíprocamente, si  $v_i v_j \notin E_G$ , entonces  $j \neq i + 1$ .

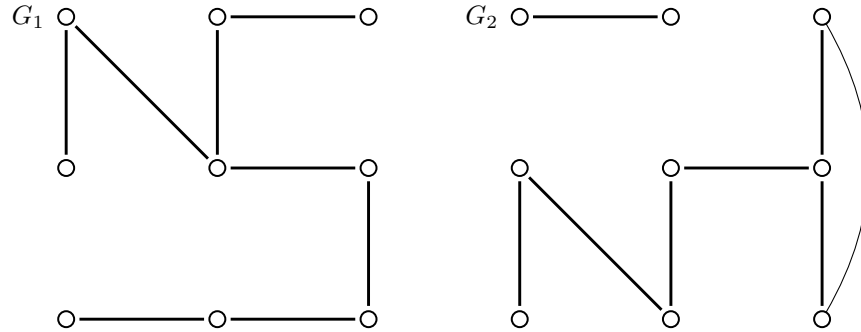
Se sigue que  $\phi(v_i) \phi(v_j) = u_i u_j \notin E_H$ .

Por lo tanto, demostramos que existe un único  $n$ -ciclo (salvo isomorfismo).

QED

2. De un ejemplo de tres gráficas del mismo orden, mismo tamaño y misma sucesión de grados tales que cualesquiera dos de dichas gráficas no sean isomorfas, al menos una de ellas sea conexa, y al menos una sea inconexa.

A continuación se muestran las gráficas:  $G_1, G_2$  y  $G_3$ :



con sucesiones orden 9, tamaño 8 y sucesión de grados  $(1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3)$ .

□

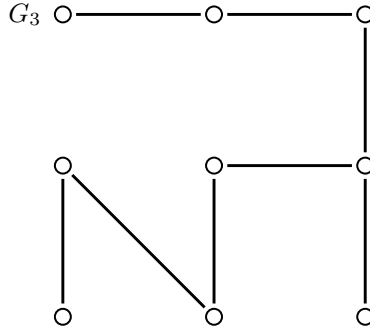
3. Sea  $D$  una digráfica. Demuestre que

$$\sum_{v \in V_D} d^+(v) = \sum_{v \in V_D} d^-(v) = |A_D|.$$

**Demostración:** La demostración se dividirá en dos incisos:

$$\cdot) \sum_{v \in V_D} d^+(v) = |A_D|$$

Sea  $M_1$  una matriz de incidencia de  $D$ , tal que:



$$M_1 = M_{ij}^+ = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ es la cola de } e_j \\ 0 & \text{si } v_i \text{ no es la cola de } e_j \end{cases}$$

Ahora, supongamos que  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  donde  $v_i$  corresponde al  $i$ -ésimo renglón de  $M_1$ .

Sabemos que las entradas de cada columna de  $M_1$  son igual a 1, que son las flechas  $e_j$  con un vértice llamado *cola de la flecha*. Por otro lado, las entradas del  $i$ -ésimo renglón de  $M_1$  suman  $d^+(v_i)$ , ya que las entradas corresponden a todas las flechas de las cuales  $v_i$  es cola de dicha flecha.

Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned} |A_D| &= \sum_{j=1}^{|A|} \sum_{i=1}^{|V|} M_{ij}^+ \\ &= \sum_{i=1}^{|V|} \sum_{j=1}^{|A|} M_{ij}^+ \\ &= \sum_{i=1}^{|V|} d^+(v_i) \\ &= \sum_{v \in V} d^+(v) \end{aligned}$$

De forma análoga se realiza el otro inciso.

$$\cdot\cdot) \sum_{v \in V_D} d^-(v) = |A_D|$$

Sea  $M_2$  una matriz de incidencia de  $D$ , tal que:

$$M_2 = M_{ij}^- = \begin{cases} 1 & \text{si } v_i \text{ es la cabeza de } e_j \\ 0 & \text{si } v_i \text{ no es la cabeza de } e_j \end{cases}$$

Ahora, supongamos que  $V = \{v_1, \dots, v_n\}$  donde  $v_i$  corresponde al  $i$ -ésimo renglón de  $M_1$ .

Sabemos que las entradas de cada columna de  $M_1$  son igual a 1, que son las flechas  $e_j$  con un vértice llamado *cabeza de la flecha*. Por otro lado, las entradas del  $i$ -ésimo renglón de  $M_1$  suman  $d^-(v_i)$ , ya que las entradas corresponden a todas las flechas de las cuales  $v_i$  es cabeza de dicha flecha.

Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned}
 |A_D| &= \sum_{j=1}^{|A|} \sum_{i=1}^{|V|} M_{ij}^- \\
 &= \sum_{i=1}^{|V|} \sum_{j=1}^{|A|} M_{ij}^- \\
 &= \sum_{i=1}^{|V|} d^-(v_i) \\
 &= \sum_{v \in V} d^-(v)
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, queda demostrado que:

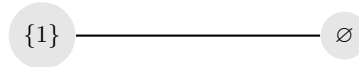
$$\sum_{v \in V_D} d^+(v) = \sum_{v \in V_D} d^-(v) = |A_D|$$

QED

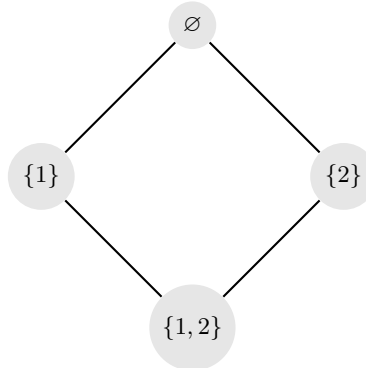
4. Sea  $n$  un entero positivo. Definimos a la *Retícula Booleana*,  $BL_n$ , como la gráfica cuyo conjunto de vértices es el conjunto de todos los posibles subconjuntos de  $\{1, \dots, n\}$ , donde dos subconjuntos  $X$  y  $Y$  son adyacentes si y sólo si su diferencia simétrica tiene exactamente un elemento.

- (a) Dibuje  $BL_1, BL_2, BL_3$  y  $BL_4$ .

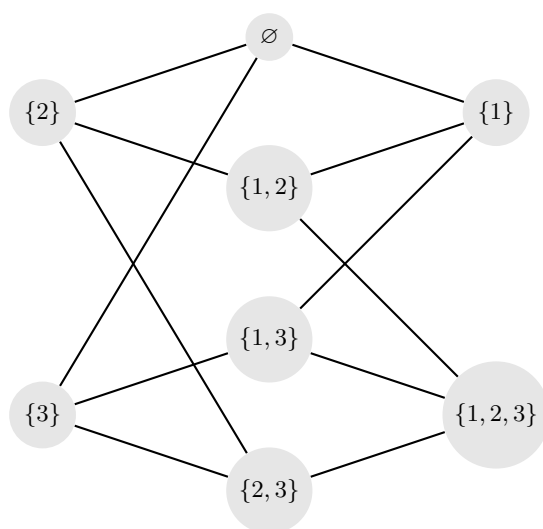
Gráfica representativa de  $BL_1$ :



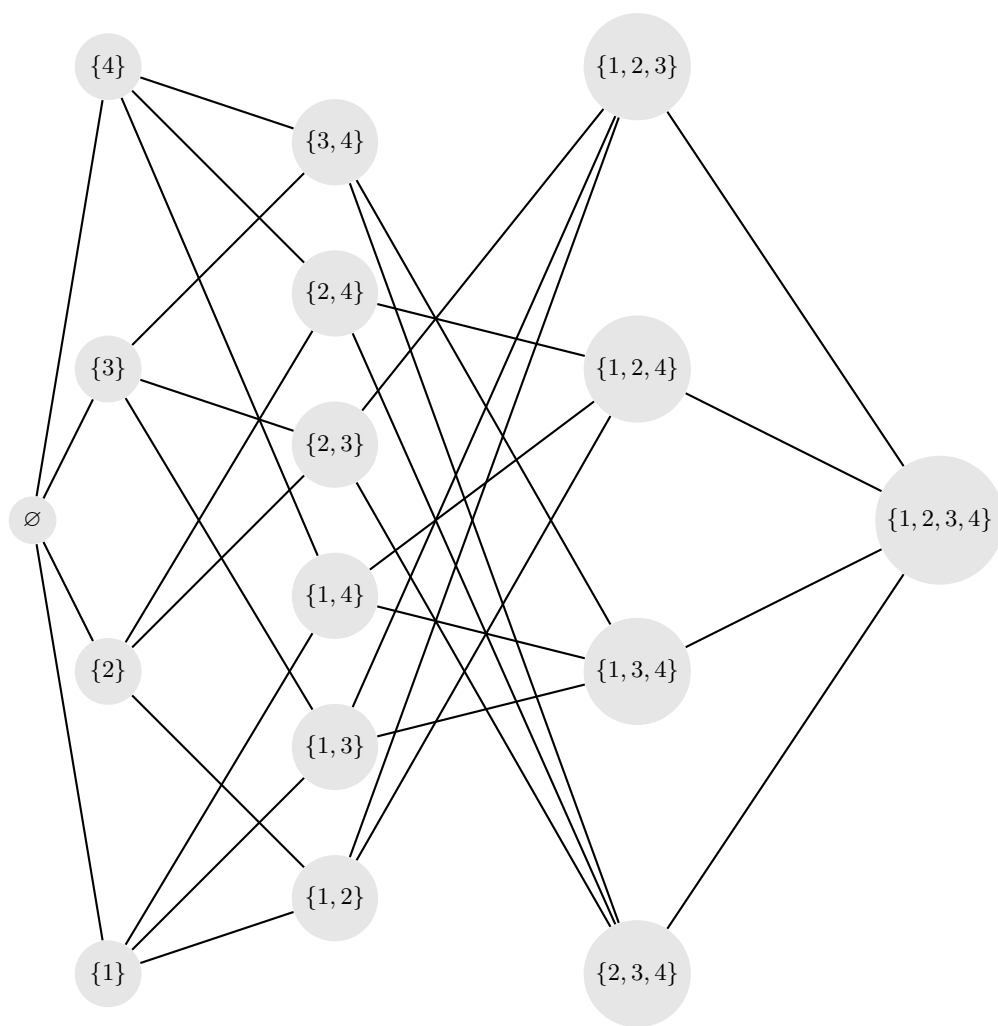
Gráfica representativa de  $BL_2$ :



Gráfica representativa de  $BL_3$ :



Gráfica representativa de  $BL_4$ :



□

- (b) Determine  $|V_{BL_n}|$  y  $|E_{BL_n}|$ . (Justifique su respuesta).

Veamos que la cantidad de vértices es igual a la cantidad de subconjuntos que se pueden formar de la retícula  $BL_n$ , esto es el conjunto potencia de  $\{1, \dots, n\}$ . Por lo que:

$$|V_{BL_n}| = |P(\{1, \dots, n\})| = 2^n$$

Mientras que es un tanto más empírica la forma en la que se obtiene la cardinalidad de  $E_{BL_n}$ , veamos la siguiente tabla con las primeras retículas:

Valor de $n$	# de aristas
$n = 1 \Rightarrow$	1 arista
$n = 2 \Rightarrow$	4 arista
$n = 3 \Rightarrow$	12 arista
$n = 4 \Rightarrow$	32 arista

Nótese que:

$$\begin{aligned} 1 \cdot 1 &= 1 \cdot 2^{1-1} = 1 \\ 2 \cdot 2 &= 2 \cdot 2^{2-1} = 4 \\ 3 \cdot 4 &= 3 \cdot 2^{3-1} = 12 \\ 4 \cdot 8 &= 4 \cdot 2^{4-1} = 32 \end{aligned}$$

Podemos deducir  $|E_{BL_n}| = n \cdot 2^{n-1}$ .

En general las retículas booleanas son  $n$ -regulares, pues para un  $x \in V_{BL_{n-1}}$  con  $BL_{n-1}$  siendo  $n$ -regular, el  $BL_n$  tendrá a  $x$  relacionado con al menos  $n-1$  elementos (son con los que ya se relacionaba en  $BL_{n-1}$ ) y  $x$  se relacionará con el conjunto de tamaño  $|x|+1$  (el cuál sólo es uno, pues este es  $x \cup \{n\}$ ) y concluimos que  $BL_n$  es  $n$ -regular, pues cada  $x$  se relaciona con  $(n-1)+1$  elemento.

Luego hay  $n$  aristas por cada vértice (los cuáles son  $2^n$ , como ya vimos) y por el inciso (c) tenemos que  $BL_n$  es bipartita, esto aunado al hecho de que es  $n$ -regular, nos da partes en  $BL_n$  de igual cardinalidad. De lo anterior hay una cantidad de aristas igual a  $n$  por cada una de las partes, *i.e.*,

$$\begin{aligned} |E_{BL_n}| &= n \cdot \frac{2^n}{2} \\ &= n \cdot 2^{n-1} \end{aligned}$$

$$\therefore |V_{BL_n}| = 2^n \text{ y } |E_{BL_n}| = n \cdot 2^{n-1}$$

□

- (c) Demuestre que  $BL_n$  es bipartita para cualquier  $n \in \mathbb{Z}^+$ .

**Demostración:** Sea  $A = \{1, \dots, n\}$  conjunto con  $n \in \mathbb{Z}^+$ . Veamos que podemos particionar nuestra  $BL_n$  en los conjuntos  $X$  y  $Y$  de tal forma que  $X$  contenga los subconjuntos de  $BL_n$  tales que su cardinalidad es  $2k$ , donde  $2k \in A$  y  $Y$  tal que contenga los subconjuntos de  $BL_n$  de cardinalidad  $2k-1$ , donde  $2k-1 \in A$ .

Veamos que pasa cuando dos subconjuntos en  $BL_n$  se relacionan, es decir, son adyacentes en  $BL_n$ .

- Su diferencia simétrica es 1.

Dados dos subconjuntos en  $BL_n$ , uno de ellos debe tener cardinalidad  $n+1$  o  $n-1$  y el otro de cardinalidad  $n$  tal que se cumple que uno de ellos es subconjunto del otro.

Notemos que en  $X$  están todos los subconjuntos de cardinalidad par. Por tanto, la diferencia simétrica entre cualesquiera 2 subconjuntos distintos en  $X$  es:

- A lo menos un conjunto de cardinalidad 2.

De lo anterior, tenemos que ningún subconjunto en  $X$  cumple ser adyacente mediante la definición de  $BL_n$ .

Ahora notemos que, en  $Y$  están todos los subconjuntos de  $BL_n$  que tienen cardinalidad impar. Por lo tanto, la diferencia simétrica en cualesquiera dos subconjuntos distintos en  $Y$  es:

- Al menos un conjunto de cardinalidad 2.

Entonces tenemos que:  $2k+1 - (2k-1) = 2$  y como  $Y$  es un conjunto, no se tiene dos conjuntos iguales a los cuales relacionar. Por lo anterior y por la definición de diferencia simétrica, no existen dos conjuntos adyacentes en  $Y$ .

$$\therefore BL_n \text{ es bipartita en } X \text{ y } Y, \text{ i.e. } BL_n[X, Y] \quad \text{QED}$$

5. Sea  $G[X, Y]$  una gráfica bipartita.

- (a) Demuestre que  $\sum_{v \in X} d(v) = \sum_{v \in Y} d(v)$ .

**Demostración:**

QED

- (b) Demuestre que si  $G$  es  $k$ -regular, con  $k \geq 1$ , entonces  $|X| = |Y|$ .

**Demostración:** Dada  $G$  una gráfica  $k$ -regular  $G[X, Y]$  bipartita. Sabemos que por ser bipartita y  $k$ -regular, se cumple que:

- Al menos  $|V_G| = 2$ , pues una gráfica tiene como mínimo un elemento y por ser bipartita está debe relacionarse con al menos un elemento en la partición ajena a ella misma.
- Todos los vértices tienen grado  $k$ .

Tenemos que en el caso mínimo,  $|V_G| = 2$  hay una relación entre dos vértices (cada uno de ellos pertenecientes a su respectiva partición). Por lo tanto, al ser  $k$ -regular, tenemos que el grado de estos vértices es al menos 1. Entonces,  $k \geq 1$ .

Ahora usemos un resultado ya conocido. Sabemos que:

$$\sum_{v \in X} d(v) = \sum_{v \in Y} d(v)$$

Como cada vértice tiene grado  $k$ , podemos decir que:

$$|X| = \frac{\sum_{v \in X} d(v)}{k} \quad \text{y} \quad |Y| = \frac{\sum_{v \in Y} d(v)}{k}$$

De lo anterior, se deduce que:

$$\therefore |X| = |Y| \quad \text{QED}$$

## Puntos Extra

1. Sea  $G = [X, Y]$  una gráfica bipartita con  $|X| = r$  y  $|Y| = s$ .

- (a) Demuestre que  $|E| \leq rs$ .
- (b) Deduzca que  $|E| \leq \frac{|V|^2}{4}$ .
- (c) Describa a las gráficas bipartitas que cumplen la igualdad en el inciso anterior. Justifique su respuesta.