

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO

Facultad de Ciencias

Autores:

Fernanda Villafán Flores

Fernando Alvarado Palacios

Adrián Aguilera Moreno



Gráficas y Juegos

Tarea 6

- Sea G una gráfica conexa no euleriana. Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes.
 - Hay un paseo euleriano en G .
 - Hay exactamente dos vértices de grado impar en G .
 - Existe una familia de ciclos ajenos por aristas dos a dos $\{C_i\}_{i=1}^k$ y un paseo P tal que $E_G = E_P \cup \bigcup_{i=1}^k E_{C_i}$.
- Sea D una digráfica conexa. Demuestre que D es euleriana si y sólo si para cada $v \in V_D$, se tiene $d^+(v) = d^-(v)$.
- La digráfica de *de Bruijn-Good* BG_n tiene como conjunto de vértices al conjunto de todas las sucesiones binarias de longitud n , y donde el vértice $a_1a_2 \cdots a_n$ es adyacente al vértice $b_1b_2 \cdots b_n$ si y sólo si $a_{i+1} = b_i$ para $1 \leq i \leq n-1$. Demuestre que BG_n es una digráfica euleriana de orden 2^n y diámetro dirigido n .
- Demuestre que existe una forma de ordenar todas las fichas de dominó en un ciclo (respetando las reglas del juego). ¿Cómo generalizaría este resultado para dominós con n puntos? (el dominó estándar es el de 6 puntos).
- Sean G una gráfica euleriana no trivial y $u \in V_G$. Demuestre que todo paseo en G que inicia en u se puede extender a un circuito euleriano si y sólo si $G - u$ es acíclica.

Puntos Extra

- Una digráfica D es *balanceada* si $|d^+(v) - d^-(v)| \leq 1$, para cada $v \in V$. Demuestre que toda gráfica tiene una orientación balanceada.
- Una sucesión circular $s_1s_2 \cdots s_{2^n}$ de ceros y unos es llamada una *sucesión de de Bruijn-Good* de orden n si las 2^n subsucesiones $s_i s_{i+1} \cdots s_{i+n-1}$, $1 \leq i \leq 2^n$ (con los subíndices tomados módulo 2^n son distintas, y por lo tanto constituyen todas las posibles sucesiones binarias de longitud n . Por ejemplo, la sucesión 00011101 es una sucesión de de Bruijn-Good de orden tres. Muestre como encontrar un de estas sucesiones para cualquier orden n utilizando un circuito euleriano dirigido en la gráfica de de Bruijn-Good BG_{n-1} . Justifique su respuesta.
- Sea G una gráfica conexa, y sea X el conjunto de vértices de G de grado impar. Suponga que $|X| = 2k$, con $k \geq 1$.
 - Demuestre que hay k paseos ajenos por aristas Q_1, \dots, Q_k en G tales que $E_G = \bigcup_{i=1}^k E_{Q_i}$.
 - Deduzca que G contiene k paseos ajenos por aristas que conectan a los vértices de X en pares.