UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO

Facultad de Ciencias

Autores:
Fernanda Villafán Flores
Fernando Alvarado Palacios
Adrián Aguilera Moreno

Gráficas y Juegos

Tarea 2

1. Demuestre que toda flecha en un camino dirigido cerrado en una digráfica pertenece a algún ciclo dirigido.

   Demostración: Sea C un camino dirigido cerrado tal que $C = (v_0, v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_0)$.

   Procedamos por inducción sobre el número de veces que se repite un vértice distinto a v_0.

   - **Paso Base:** $i = 0$.

     En este caso tenemos que el vértice v_i no se repite ninguna vez, por lo que ya tenemos el ciclo dirigido buscado.

   - **Hipótesis de Inducción:** Supongamos que $i > 0$ tal que haya un ciclo dirigido.

   - **Paso Inductivo:** Demostraremos que si el vértice v_i se repite al menos una vez, hay un ciclo dirigido.

     Como el vértice v_i se repite, podemos dividir a C de la siguiente forma:
     Sea C' un camino dirigido cerrado de C.
     Tenemos que:
     $$C' = (v_i, \ldots, v_i)$$
     Entonces, si C' no repite vértices, ya tenemos el ciclo dirigido buscado.
     En caso contrario, aplicamos el mismo proceso:
     Sea C'' un camino dirigido cerrado de C'.
     Tenemos que:
     $$C'' = (v_0, \ldots, v_i, v_j, \ldots, v_0) \text{ , con } i < j$$
     , donde v_0 es un vértice particular cualquiera en el camino dirigido C, el cuál tomamos como vértice inicial para el camino C''.

     Luego, este proceso lo realizamos hasta obtener un camino dirigido cerrado sin vértices repetidos.

   Así, podemos concluir que toda flecha en un camino dirigido cerrado en una digráfica pertenece a algún ciclo dirigido. □

2. Demuestre que si G es simple y $\delta \geq 2$, entonces G contiene un ciclo de longitud al menos $\delta + 1$.

   Demostración: Procedemos por reducción a lo absurdo.

   Sea P una trayectoria de longitud máxima en G tal que $P = (v_0, \ldots, v_n)$. Por una **Proposición** anterior, sabemos que G contiene un ciclo (digamos C).
   Supongamos que C es de longitud máxima a lo más δ, es decir, no existe un ciclo C que sea de longitud $\delta + 1$.
   Si tomamos un vértice v_i en C, sabemos que tiene δ vecinos. Ahora, si v_i es adyacente a otro vértice w fuera del ciclo, tenemos dos casos:

   - El vértice v_{i-1} también es adyacente a w.

     En este caso, ya tendríamos un ciclo de grado $\delta + 1$!!! .

   - El vértice v_{i-1} no es adyacente a w.

     En este caso, v_{i-1} continuaría su adyacencia por otros vértices. Si tomamos a G una gráfica conexa, en algún vértice v_j, llegaríamos a que v_j es adyacentea w.
     Por lo tanto, ya tendríamos un ciclo de longitud mayor a δ (al menos $\delta + 1$)!!! .

La contradicción surge de suponer que la longitud máxima de un ciclo C es a lo más δ. Por lo tanto, su longitud máxima es de al menos $\delta + 1$. $\square$

3. Sea G una gráfica conexa. Demuestre que si G no es completa, entonces contiene a P_3 como subgráfica inducida.

Demostración: Procedamos por reducción al absurdo.

Sea G una gráfica completa, entonces P_3 es subgráfica de G. Para este ejercicio necesitamos de una condición, $V_G \geq 3$, para las gráficas que no cumplan esto se tendrá la demostración por vacuidad.

Tomemos a x_{i-1}, x_i, x_{i+1} en V_G $(2 \geq i \geq |V_G| - 1)$, como G es completa se tiene que la distancia entre cualesquiera 2 vértices es 1, luego tenemos que hay $\binom{3}{2}$ aristas!! y esto es claramente mayor que 2 $(|E_{P_3}|)$, como los vértices que tomamos son arbitrarios, podemos concluir que $P_3 \nsubseteq G$.

Como la anterior contradicción resulta de suponer a G completa, podemos asegurar que si G no es completa, entonces $P_3 \subseteq G$. QED

4. Demuestre que cualesquiera dos trayectorias de longitud máxima en una gráfica conexa tienen un vértice en común.

Demostración: Veamos los siguientes casos:

- Si G no tiene vértices de corte.
  Como $c(G) = 1$, entonces hay una trayectoria que pasa por todos los vértices y a su vez es de longitud máxima.
  Por tanto, ya terminamos.
- Si G tiene vértices de corte.
  Analicemos el caso extremo, que engloba a todos los posibles casos con al menos un vértice de corte.
  Sean $T_1 = uv$-trayectoria y $T_2 = xy$-trayectoria, ambas de longitud máxima y a su vez, ajenas por aristas entre sí. Luego, como G es conexa existe un ux-camino C $(uy, vx, vy$ caminos) y como parte de él hay un vértice a tal que es el vértice más próximo a x que esta en T_1 (y es el único con esta propiedad).
  Si a forma parte de T_2, ya terminamos.
  En caso contrario, entonces a puede ser de corte o no. Así:
  - Si a es de corte, entonces de xCa será el mínimo camino donde b es el vértice más cercano a u que se encuentra en T_2 y es el único con esta propiedad.
    Por lo que hay una bx-trayectoria y by-trayectoria que si las comparamos y tomamos la más longeva (llamémosla T_3), de tener la misma longitud es indiferente cuál tomemos.
    Así, tomamos un ab-camino sin ciclos, *i.e.* ab-trayectoria.
    Luego, llamamos T_4 a la trayectoria que resulte de mayor longitud entre au-trayectoria y av-trayectoria. Si son iguales, nuevamente es indiferente cuál tomemos.
    De lo anterior, nótese que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}(T_3) &\geq \frac{\mathcal{L}(T_1)}{2} = \frac{\mathcal{L}(T_2)}{2} \\
\mathcal{L}(T_4) &\geq \frac{\mathcal{L}(T_2)}{2} = \frac{\mathcal{L}(T_1)}{2} \\
\mathcal{L}(ab) &\geq 1
\end{aligned}$$

Así, hay una trayectoria $T_5 = T_3abT_4 : \mathcal{L}(T_5) > \mathcal{L}(T_1)$.
Por lo que se contradice que T_1 y T_2 fueran de longitud máxima. La contradicción surge de suponer que a es de corte y si esta en T_1 no esta en T_2.
Por lo tanto, concluimos que a no es de corte y no forma parte de T_2.

- Si a no es de corte, entonces es parte de un extremo de T_1.
Como a esta en C, tenemos que T_1 más la arista que tiene como vértice a y no es parte de T_1 es una trayectoria más larga que T_1 y T_2. De aquí una tenemos una contradicción al suponer que a no es de corte y además no está en T_2.

Después del análisis anterior, observemos que llegamos a contradicciones que son resultado de suponer que:
Si a está en T_1, entonces no esta en T_2.

Por lo tanto, se sigue que si a esta en T_1 entonces está en T_2. QED

5. Caracterice a las gráficas k-regulares para $k \in \{0, 1, 2\}$.

Solución:

$k = 0)$ Son todas las gráficas que no tienen aristas, a estas se les conoce como gáficas vacías.

$k = 1)$ Estas son gráficas con una cantidad de vértices par y son tantas uniones de P_2 como $\frac{|V_G|}{2}$. Las gráficas con $|V_G|$ impar no entran aquí porque siempre habrá $(|V_G| - 1)P_2$ y algún vértice (aislado) será de grado igual a 0!! (o, pensando en lazos, de grado igual a 2), lo que contradice el ser $1-$regular.

$k = 2)$ Son gráficas que contienen ciclos o son combinaciones de ciclos. Todos los ciclos son $2-$regulares, esto no implica que todas las gráficas $2-$regulares sean un ciclo pero si que los contengan o que sean combinaciones de estos.

Con los 3 puntos anteriores concluimos la caracterización. □

6. Demuestre que si $|E| \geq |V|$, entonces G contiene un ciclo.

Demostración: (Por contradicción)

Supongamos que G es una gráfica tal que $|E| \geq |V|$ y G no contiene ningun ciclo $\Longrightarrow$ el número máximo de vétices de este tipo de gráficas será igual a $|V| - 1$ (Ya que todo vértice se podria relacionar con algun otro vertice sin repetir con los vértices anteriores, pero el último no se podra relacionar con algun otro vertice ya que si lo hiciera formaría un ciclo) $\Longrightarrow |E| \leq |V| - 1 < |V|$ (!lo que es una contradiccón ya que contradice nuestra hipótesis de que $|E| \geq |V|$). Por lo tanto la gráfica G debe tener al menos un ciclo.

QED

Puntos extra

1. Sea G una gráfica. Demuestre que G es k-partita completa si y sólo si no contiene a K_{k+1} ni a $\overline{P_3}$ como subgráficas inducidas.

Demostración: En este ejercicio analizaremos 2 casos posibles:

$\Rightarrow)$ Procedamos por contrapositiva.

·) Si $\overline{P_3} \subseteq G$, por definición de k-partita completa $\overline{P_3}$ no esta en la misma parte (pues, en caso de estarlo hay una adyacencia en 2 vértices de la misma parte), luego $\overline{P_3}$ esta en 2 o 3 partes distintas y habrá un $x \in \overline{P_3}$ que no se relacionará con al menos 1 vértice en algunas de las partes y por tanto G no es k-partita completa (lo que no cumple es ser completa bajo el supuesto tomado).

·) Si $K_{k+1} \subseteq G$, entonces hay 1 vértice de K_{k+1} en cada una de las partes (lo que suma k vértices) y un $x \in K_{k+1}$ en alguna parte tal que se relaciona con exactamente un vértice en esa parte y por tanto G no es k-partita completa (no cumple el ser k-partita).

$\Leftarrow$) Procedamos reducción al absurdo .

·) Supongamos que $\overline{P_3} \subseteq G$, por definición de k-partita completa $\overline{P_3}$ no esta en la misma parte (pues, en caso de estarlo hay una adyacencia en 2 vértices de la misma parte), luego $\overline{P_3}$ esta en 2 o 3 partes distintas y habrá un $x \in \overline{P_3}$ que no se relacionará con al menos 1 vértice en algunas de las partes y por tanto G no es k-partita completa !!(lo que no cumple es ser completa bajo el supuesto tomado) y he aquí una contradicción de suponer que $\overline{P_3} \subseteq G$. Por tanto concluimos que $\overline{P_3} \nsubseteq G$.

·) Supongamos que $K_{k+1} \subseteq G$, entonces hay 1 vértice de K_{k+1} en cada una de las partes (lo que suma k vértices) y un $x \in K_{k+1}$ en alguna parte tal que se relaciona con exactamente un vértice en esa parte y por tanto G no es k-partita completa!! (no cumple el ser k-partita) y he aquí una contradicción de suponer $K_{k+1} \subseteq G$. Por tanto concluimos que $K_{k+1} \nsubseteq G$

De los casos anterior concluimos que G es k-partita completa si y sólo si no contiene a K_{k+1} ni a $\overline{P_3}$ como subgráficas inducidas. QED

2. Demuestre que si G es una gráfica con $|V| \geq 4$ y $|E| > n^2/4$, entonces G contiene un ciclo impar.

3. Sea $d = (d_1, \ldots, d_n)$ una sucesión no creciente de enteros no negativos. Sea $d' = (d_2 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n)$.

   (a) Demuestre que d es gráfica si y sólo si d' es gráfica.

   (b) Usando el primer inciso, describa un algoritmo que acepte como entrada una sucesión no creciente de enteros no negativos d y devuelva una gráfica simple con sucesión de grados d, un certificado de que d no es gráfica.