UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO

Facultad de Ciencias

Autores:
Fernanda Villafán Flores
Fernando Alvarado Palacios
Adrián Aguilera Moreno

Gráficas y Juegos

Tarea 4

1. Sea G una gráfica no trivial. Demuestre que G es una trayectoria si y sólo si G es un árbol con exactamente dos vértices de grado 1.

   Demostración: $\Longrightarrow$) Sea G una trayectoria.

   Entonces para cualesquiera dos vértices u, v que pertenecen a G, u, v son adyacentes, es decir, u, v son consecutivos.

   Sea v_t el vértice inicial y v_q el vértice final de la trayectoria.

   Así, v_t y v_q serán de grado 1 ya que no existe un vértice antes o uno después.

   Por lo tanto, existen únicamente 2 vértices en G con grado 1 ya que los demás son internos a la trayectoria.

   $\Longleftarrow$) Sea V_G el conjunto de vértices de G.

   Sean v_r, v_s cualesquiera vértices pertenecientes a V_G tales que v_r y v_s tienen grado 1.

   Como G es un árbol, entonces todos los vértices de G están relacionados y tampoco existe ningún ciclo en G. Así, G admite un orden lineal empezando la trayectoria (s.p.g.) por v_r y finalizando en v_s.

   Por tanto, si u, v son adyacentes entonces u, v son consecutivos y concluimos que G es una trayectoria.

   $\square$

2. (a) Demuestre que cada árbol con grado máximo $\Delta > 1$ tiene al menos Δ hojas.

   Demostración: Sea G un árbol y sea $x \in V_G$ tal que $d(x) = \Delta$ (notar que x no necesariamente es el único que cumple tener grado igual a Δ, por lo que se tomará alguno que cumpla esto), entonces x tiene exactamente Δ vecinos.

   Por la caracterización de árbol, sabemos que G es acíclico y por tanto, los caminos que parten desde x (tienen a x como vértice inicial) hacia algunos de sus Δ vecinos no tienen vértices en común que sean distintos de x. En caso contrario, habría 2 trayectorias que tienen inicio en x a las que llamaremos w_1 y w_2, y además tienen en común al menos un vértice v y por tanto, $w_1 w_2$ es un ciclo!! que está contenido en G.

   Luego, como x tiene Δ vecinos, entonces podemos tomar al menos Δ trayectorias distintas entre ellas tales que terminen en algún vértice u_i $(1 \leq i \leq \Delta)$.

   Así, cada u_i es una hoja de G y como hemos encontrado Δ hojas podemos concluir que el árbol G con grado máximo Δ tiene al menos Δ hojas.

   QED

(b) Construya, para cada elección de n y Δ, con $2 \leq \Delta < n$, un árbol de orden n con exactamente Δ hojas.

Solución:

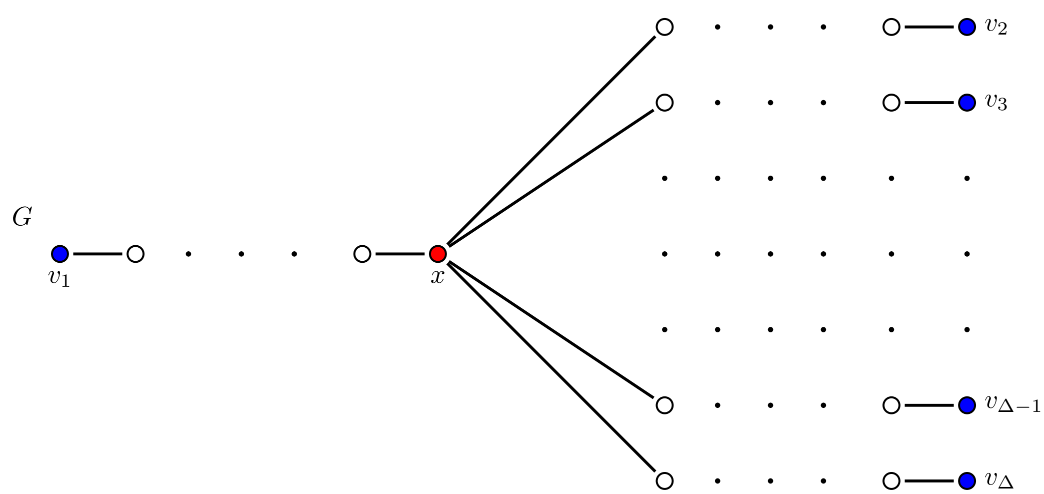
Sea G un árbol.

Usando el resultado anterior, garantizamos que G tiene algún $x \in V_G : d(x) = \Delta$, entonces G tiene al menos Δ hojas.

Luego, partícularmente en los árboles de exactamente Δ hojas, cada camino W_i que tenga como vértice inicial a x no tendrá bifurcaciones. Esto es, xW_iv_i es la única manera de llegar de x a v_i y además W_i es una trayectoria (y por definición de trayectoria, no tendrá bifurcaciones).

Como x es vértice inicial de exactamente Δ trayectorias W_i, entonces hay exactamente Δ hojas en G.

En resumen, G tendrá exactamente Δ vértices de grado 1, a continuación se muestra un ejemplo que trata de ser lo más general posible:



donde los v_i's son las hojas, para $1 \leq i \leq \Delta$. □

3. Un *centro* en una gráfica es un vértice u tal que $\max_{v \in V} d(u, v)$ es mínima. Demuestre que un árbol tiene exactamente un centro o dos centros adyacentes.

Demostración: Sea G un árbol.

Procedemos por contradicción.

Supongamos que G tiene más de un centro tales que no son adyacentes.

Sean $u, v \in V_G$ tales que u y v no son adyacentes. Esto significa que hay al menos un vértice entre ellos (llamémoslo w).

Por definición de **centro**, sabemos que:

$$max_{y \in V} d(x, y) \text{ es mínima}$$

En nuestro caso, $d(u, v)$ es mínima.

Pero notemos que $d(w, v) < d(u, v)$!!!, lo que implica que w está más cerca del vértice v que el vértice u.

Como la contradicción yace de suponer que u y v no son adyacentes, podemos concluir que u y v son adyacentes.

Observación. Veamos que G no puede tener más de dos centros adyacentes.

Supongamos que G tiene tres centros adyacentes.

Sean $w, v, x \in V_G$ tales que w es adyacente a x y x es adyacente a v.

Como vimos anteriormente, tendríamos que $d(x, v) < d(w, v)$!!!.

Esto contradice que el vértice w sea un centro, ya que encontramos un vértice x tal que su distancia a otro vértice v es menor. La contradicción yace de suponer que G tiene más de dos centros adyacentes.

Por lo tanto, G tiene a lo más dos centros adyacentes.

QED

4. Demuestre o brinde un contraejemplo: Toda gráfica con menos aristas que vértices tiene una componente que es un árbol.

Demostración: **Procedemos por contradicción.**

Sea G una gráfica tal que $|V_G| > |E_G|$.

Supongamos que todas sus componentes conexas no son árboles.

Esto es, $G_1, G_2, \ldots, G_n$ componentes conexas de G de donde cada G_i con $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ no es un árbol.

Como cada componente conexa de G no es un árbol, entonces tienen ciclos.

Notemos que por hipótesis, $|V_G| > |E_G|$. Lo que implica que existe al menos una componente conexa de G, digamos G_j (con $j \in \{1, \ldots, n\}$) tal que $G_j \cong K_1$.

Por tanto, como $G_j \cong K_1$ y K_1 no tiene ciclos, la componente conexa G_j es un árbol !!!.

Lo anterior contradice el hecho de que toda componente conexa de G no sea un árbol, pues si tienen ciclos significa que $|V_G| = |E_G|$.

La contradicción yace de suponer que cada componente conexa de G no es un árbol.

Por lo tanto, podemos concluir que existe una componente conexa de G que es un árbol.

QED

5. Un *hidrocarburo saturado* es una molécula C_mH_n en la que cada átomo de carbono tiene cuatro enlaces, cada átomo de hidrógeno tiene un enlace, y ninguna sucesión de enlaces forma un ciclo. Demuestre que para cualquier entero positivo m, la molécula C_mH_n existe sólo si $n = 2m + 2$.

Demostración: **Demostración por inducción sobre m.**

- **Paso base:** $m = 1$
  Por definición de hidrocarburo saturado $C_1k_4 \Longrightarrow 4 = 2(1) + 2$.
  Por lo tanto, para $m = 1$ se cumple que $n = 2m + 2$.
- **Hipótesis de Inducción:** $m = k$
  Si C_kH_n, entonces supongamos $n = 2k + 2$.
- **Paso Inductivo:**
  Demostraremos para $m = k + 1$.
  Por **Hipótesis de Inducción**, tenemos que $C_kH_n \Longrightarrow n = 2k + 2$ y por **Paso Base**, $C_1K_4 \Longrightarrow 4 = 2(1) + 2$.

Sean r que pertenece a los Naturales sin el 0 y C_r, C_1 donde C_r pertenece a C_kH_n y C_1 pertenece a C_1k_4 tal que r pertenece a $\{1, 2, 3, ..., k\}$.
Si eliminemos 1 hidrógeno a C_r y $C_1 \Longrightarrow C_kH_{n-1}$ y C_1k_3 son iguales a:

$$n - 1 = 2k + 1 \text{ ...(1)}$$

y

$$3 = 2(1) + 1 \text{ ...(2)}$$

Así, uniendo C_kH_{n-1} y C_1k_3 mediante los vértices C_r y C_1, tenemos que $C_{k+1}H_r$ sería igual a la suma de (1) y (2). Esto es:

$$n + 2 = 2(k) + 2(1) + 2 \Longrightarrow n + 2 = 2(k + 1) + 2 \Longrightarrow r = n + 2 \Longrightarrow r = 2(k + 1) + 2$$

Por lo tanto, para $C_{k+1}H_r$ $r = 2(k + 1) + 2$.
Por lo anterior, podemos concluir que para todo m que pertenece a Naturales sin el cero, C_mH_n tal que $n = 2m + 2$.

QED

6. Demuestre que una sucesión $(d_1, \ldots, d_n)$ de enteros positivos es la sucesión de grados de un árbol si y sólo si $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n - 1)$.

Demostración: Para este ejercicio veamos las dos implicaciones:

$\Rightarrow$) Dada la sucesión de grados $(d_1, \ldots, d_n)$ de un árbol, entonces $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n - 1)$.

Sabemos que para cualquier gráfica:

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2|E|$$

Como en un árbol se cumple que $|E| = |V| - 1$, entonces $|E| = n - 1$. [1]
Por tanto,

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n - 1)$$

$\Leftarrow$) Dada una gráfica G donde se cumple que

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n - 1)$$

, entonces $(d_1, \ldots, d_n)$ es la sucesión de grados en un árbol.
Veamos que G no tiene vértices aislados.
En el caso de tenerlos, supongamos sin pérdida de generalidad que $x \in V_G$ es un vértice aislado. Entonces, $G - \{x\}$ no contiene vértices aislados y $|E_{G-\{x\}}| = 2|V_{G-\{x\}}|$!!
Lo que implica que G contiene como subgráfica inducida a algún ciclo (pues la cantidad de vértices sería de al menos la cantidad de vértices) y se deja de cumplir que

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n - 1)$$

[1]Prop. 2.2.5 en las notas de clase

De la misma manera, podemos observar que todos los vértices de G no pueden tener al menos grado 2, pues suponer esto nos genera al menos un ciclo e implicaría que

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n)!!!$$

, y claramente $2n \neq 2(n-1)$.
Luego, hay exactamente 2 vértices de grado 1 en G, para esto llamemos $x, y \in V_G$ a los vértices de grado 1. Entonces, en $G - \{x, y\}$ se cumple que $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-2)$ y al anexarle exactamente $\{x, y\}$ tendremos que

$$\begin{aligned} x\sum_{i=1}^{n} d_i &= 2(n-2)+2 \\ &= 4n-4+2 \\ &= 4n-2 \\ &= 2(n-1) \end{aligned}$$

En caso contrario, se deja de cumplir lo anterior y por esto se puede garantizar que estos son únicos.
Como G es acíclica (por el argumento dado anteriormente), podemos deducir que G es conexa. De no serlo, habría más de 2 vértices con grado 1 y ya observamos que este no es un caso posible.
Luego, G es un árbol y por el ejercicio 1 de esta tarea tenemos que G es, partícularmente, una trayectoria.

Por lo tanto, podemos concluir que una sucesión $(d_1, \ldots, d_n)$ de enteros positivos es la sucesión de grados de un árbol si y sólo si $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$.

QED

Puntos Extra

1. Para una gráfica conexa G definimos la gráfica de árboles de G, $\mathcal{T}_G$, como la gráfica que tiene por vértices a todos los árboles generadores de G, y tal que, si $S, T \in V_{\mathcal{T}_G}$, entonces ST es una arista de $\mathcal{T}_G$ si y sólo si existen aristas $e \in E_S - E_T$ y $f \in E_T - E_S$ tales que $(S-e)+f = T$. Demuestre que $\mathcal{T}_G$ es conexa.

2. Sea T un árbol arbitrario con $k+1$ vértices. Demuestre que si G es simple y $\delta \geq k$, entonces G tiene una subgráfica isomorfa a T.

3. Sea $\mathcal{T}$ una familia de subárboles de un árbol T. Deduzca, por inducción sobre $|\mathcal{T}|$, que si cualesquiera dos elementos de $\mathcal{T}$ tienen un vértice en común, entonces hay un vértice de T que está en todos los elementos de $\mathcal{T}$.

4. (a) Determine todos los arboles T tales que $\overline{T}$ también es un árbol.
   Solución:
   ·) Si $|V_T| = 1$, entonces por vacuidad se cumple el enunciado y terminamos.
   ··) Si $|V_T| > 1$, entonces sabemos existen $|V_T| - 1$ aristas para T y que a lo más $\binom{|V_T|}{2}$ si T fuera completa.

Notemos que $E_{\overline{T}} = \binom{|V_T|}{2} - (|V_T| - 1)$ y como queremos que $\overline{T}$ sea un árbol, entonces se debe cumplir la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} |V_T| - 1 &= \binom{|V_T|}{2} - (|V_T| - 1) \\ \Leftrightarrow 2 \cdot (|V_T| - 1) &= \binom{|V_T|}{2} \\ \Leftrightarrow 2 \cdot (|V_T| - 1) &= \frac{|V_T| \cdot (|V_T| - 1)}{2} \\ \Leftrightarrow 4 \cdot \cancel{(|V_T| - 1)} &= |V_T| \cdot \cancel{(|V_T| - 1)} \\ \Rightarrow |V_T| &= 4 \end{aligned}$$

y del **Ejercicio** 2 **de la Tarea** 3, sabemos que hay 11 gráficas de orden 4 no isomorfas entre sí y sólo 2 de esas son árboles.
De éstas dos últimas, tenemos una es P_4 y la otra es el árbol tal que uno de sus vértices es de grado 3. Pero en este último su complemento no es un árbol.
Luego, $T = P_4$ y este es la único salvo isomorfismo. $\square$

(b) Determine todas las gráficas de orden al menos cuatro tales que la subgráfica inducida por cualesquiera tres de sus vértices es un árbol.

Solución:

Veamos que si $|V| > 4$, se cumple cualquiera de las siguientes condiciones:

·) Si la gráfica es incompleta, existen al menos dos vértices que no se conectan mediante una arista y si no existe trayectoria entre estos, entonces existe una "elección" de 3 vértices tales que son inducidos de la gráfica original y no son un árbol.

··) Si la gráfica es completa, entonces hay 3 vértices que al inducirlos en la gráfica original forman un 3-ciclo y por tanto, no son un árbol.

De lo anterior la única gráfica que cumple con el enunciado es un 4-ciclo que no tenga como gráfica inducida un 3-ciclo. $\square$