UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO

Facultad de Ciencias

Autores:
Fernanda Villafán Flores
Fernando Alvarado Palacios
Adrián Aguilera Moreno

Gráficas y Juegos

Tarea 8

1. Sean G una gráfica conexa y $e \in E$. Demuestre que

   (a) e está en cada árbol generador de G si y sólo si e es un puente de G;

   (b) e no está en árbol generador alguno de G si y sólo si e es un lazo.

2. Modifique el algoritmo BFS para que regrese una bipartición de la gráfica (si la gráfica es bipartita) o un ciclo impar (si la gráfica no es bipartita).

   Solución:

1: OddCycleOrBipartition($< G, r >; L/C$)

Input: Una gráfica conexa G con un vértice distingido r.
Output: Una lista que contenga un ciclo impar o un conjunto que contenga una bipartición entre los vértices.

```
Q ← []; i ← 0;
L ← []; C ← ∅;
X ← ∅; Y ← ∅;
i ← i + 1; X ← r;
colorear a r de negro;
añadir a r al final de Q;
t(r) ← i, 𝒫(r) ← ∅, ℓ(r) ← 0;
while Q ≠ [] do
    elegir a la cabeza x de Q;
    if x tiene un vecino y sin colorear then
        i ← i + 1;
        if x es color negro then
            colorear a y de blanco;
            Y ← y;
        else
            colorear a y de negro;
            X ← y;
        end
        añadir y al final de Q;
        t(r) ← i, 𝒫(y) ← x, ℓ(y) ← ℓ(x) + 1;
    else
        if x tiene un vecino y coloreado & ℓ(x) = ℓ(y) then
            L ← [x,y,x];
            temp ← [];
            while 𝒫(x) ≠ 𝒫(y) do
                x ← 𝒫(x); y ← 𝒫(y);
                temp ← [x, y];
                insertar temp entre la primer x y y en L;
            end
            insertar 𝒫(x) entre la primer x y y en L;
            return L;
        end
        eliminar x de Q;
    end
end
C ← [X, Y];
return C;
```

□

3. Describa un algoritmo basado en BFS para encontrar el ciclo impar más corto en una gráfica.

4. Sea G una gráfica con conjunto de bloques B y conjunto de vértices de corte C. La *gráfica de bloques y cortes* de G, denotada por $B_C(G)$, esta definida por $V_{B_C(G)} = B \cup C$ y si $u, v \in V_{B_C(G)}$, entonces $uv \in E_{B_C(G)}$ si y sólo si $u \in B$, $v \in C$ y v es un vértice de u. Demuestre que $B_C(G)$ es un árbol.

5. Describa un algoritmo para encontrar un bosque generador en una gráfica arbitraria (no necesariamente conexa).

6. Una *gráfica de Moore de diámetro* d es una gráfica regular de diámetro d y cuello $2d + 1$. Demuestre que si G es una gráfica de Moore, entonces todos los árboles de BFS de G son isomorfos.

Puntos Extra

1. Sea G una gráfica conexa en la que todo árbol de DFS es una trayectoria hamiltoniana (con la raíz en uno de los extremos). Demuestre que G es un ciclo, una gráfica completa, o una gráfica bipartita completa en la que ambas partes tienen el mismo número de vértices.

2. Modifique BFS para que sea recursivo en lugar de iterativo.

3. Modifique DFS para que sea recursivo en lugar de iterativo.

4. Modifique al algoritmo BFS para que:

   (a) Reciba una gráfica no necesariamente conexa con dos vértices distinguidos r y t.

   (b) El algoritmo empiece en r, y termine cuando encuentre al vértice t, en cuyo caso lo regresa, junto con una trayectoria de longitud mínima de r a t, o cuando decida que el vértice t no puede ser alcanzado desde r, en cuyo caso regresa el valor `false`.

   (c) El primer paso dentro del loop de `while` sea **eliminar** la cabeza de la cola.