

# UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO

## Facultad de Ciencias

Autores:

Fernanda Villafán Flores

Fernando Alvarado Palacios

Adrián Aguilera Moreno



Gráficas y Juegos

## Tarea 7

1. (a) Demuestre que si  $G$  tiene diámetro mayor que 3 (posiblemente infinito), entonces  $\overline{G}$  tiene diámetro menor que 3. Concluya que si  $G$  es inconexa, entonces  $\overline{G}$  es conexa.

**Demostración:** Sea  $G$  una gráfica.

Probaremos que  $\overline{G}$  tiene diámetro menor a 3.

Primero, sabemos que  $G$  tiene diámetro mayor a 3 entonces tomemos una trayectoria  $P$  de  $G$  tal que su longitud es  $n$  (con  $n > 3$ ).

La denotaremos como:

$$P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$$

Ahora, por definición de  $\overline{G}$  es tal que:

$$|E_{\overline{G}}| = \binom{|V| - 1}{2} - |E_G|$$

Por tanto, en  $\overline{G}$  la trayectoria  $P$  cambia de la siguiente manera:

- El vértice  $x_0$  es adyacente a los vértices  $x_2, x_3, \dots, x_n$ , donde esto equivale a  $n - 1$  vértices.
- El vértice  $x_1$  es adyacente a los vértices  $x_3, x_4, \dots, x_n$ , donde esto equivale a  $n - 2$  vértices.
- El vértice  $x_2$  es adyacente a los vértices  $x_0, x_4, \dots, x_n$ , donde esto equivale a  $n - 2$  vértices.

Siguiendo este procedimiento, tenemos lo siguiente:

- El vértice  $x_i$  es adyacente a los vértices  $x_{i-2}, x_{i+2}, x_{i+3}, \dots, x_n$ , con  $i > 1$ .

Así, notemos lo siguiente:

En  $\overline{G}$   $x_0$  **no es** adyacente a  $x_1$ , entonces necesitamos otro vértice  $x_3$  para llegar a  $x_1$ . Lo que implica que nos toma distancia igual a 2 llegar de  $x_0$  a  $x_1$ .

De la misma forma,  $x_1$  **no es** adyacente a  $x_0$  ni a  $x_2$ , entonces necesitamos otro vértice  $x_4$  para llegar a  $x_0$  o  $x_2$ . Lo que implica que nos toma distancia igual a 2 llegar de  $x_1$  a  $x_0$  o de  $x_1$  a  $x_2$ .

De lo anterior obtenemos que:

El vértice  $x_i$  **no es** adyacente al vértice  $x_{i-1}$  ni al vértice  $x_{i+1}$ , entonces necesitamos otro vértice  $x_{i+2}$  para llegar a  $x_{i-1}$  o  $x_{i+1}$ . Lo que implica que nos toma distancia igual a 2 llegar de  $x_i$  a  $x_{i-1}$  o de  $x_i$  a  $x_{i+1}$ .

Por lo tanto,  $\overline{G}$  tiene diámetro menor a 3.

Aún más, si  $G$  es inconexa entonces  $\overline{G}$  es conexa (ya que por definición, para cualesquiera dos vértices distintos  $u, v \in G$  se tiene que  $uv \in E_{\overline{G}}$  si y sólo si  $uv \notin E_G$ ). Es decir, en  $\overline{G}$  estarán todas las aristas que no estén en  $G$ .

□

- (b) Una gráfica  $G$  es autocomplementaria si  $G \cong \overline{G}$ . Demuestre que si  $G$  es autocomplementaria, entonces  $|V| \stackrel{4}{\equiv} 0$  o  $|V| \stackrel{4}{\equiv} 1$ .

**Demostración:** Primero, sabemos que si  $G \cong \overline{G}$  entonces  $V_G = V_{\overline{G}}$ .

Probaremos que  $|E_G| = |E_{\overline{G}}|$ .

Veamos lo siguiente:

$$|V| \equiv 1 \pmod{4} \longrightarrow |V| \equiv 1 \pmod{4}$$

Recordando la definición de  $\pmod{4}$ , tenemos:

$$\begin{aligned} |V| \equiv 1 \pmod{4} &\longrightarrow 4 \mid |V| - 1 \\ &\longrightarrow |V| - 1 = 4 \cdot k, \text{ con } k \in \mathbb{N} \\ &\longrightarrow |V| = 4 \cdot k + 1 \end{aligned}$$

Luego, por definición de  $\overline{G}$ , tenemos:

$$|E_{\overline{G}}| = \binom{|V| - 1}{2} - |E_G|$$

Sea  $n = |V_G|$ .

Así,

$$\begin{aligned} |E_G| &= |E_{\overline{G}}| \\ &= \binom{|V_G| - 1}{2} - |E_G| \\ &= \binom{n - 1}{2} - (n - 1), \text{ porque sabemos que } |E_G| = |V_G| - 1 \text{ y } |V_G| = n \\ &= \frac{(n - 1)!}{2! \cdot ((n - 1) - 2)!} - (n - 1) \\ &= \frac{(n - 1)!}{2! \cdot (n - 1 - 2)!} - (n - 1) \\ &= \frac{(n - 1)!}{2! \cdot (n - 3)!} - (n - 1) \\ &= \frac{(n - 1)(n - 2)(n - 3)!}{2! \cdot (n - 3)!} - (n - 1), \text{ porque } n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2)! \\ &= \frac{(n - 1)(n - 2)\cancel{(n - 3)!}}{2! \cdot \cancel{(n - 3)!}} - (n - 1) \\ &= \frac{(n - 1)(n - 2)}{2!} - (n - 1) \\ &= \frac{(n - 1)(n - 2)}{2} - (n - 1), \text{ porque } 2! = 2 \cdot 1 = 2 \\ &= \frac{(n - 1)(n - 2)}{2} - \frac{2(n - 1)}{2} \\ &= \frac{(n - 1)(n - 2) - 2(n - 1)}{2} \\ &= \frac{n^2 - 3n + 2 - 2n + 2}{2} \\ &= \frac{n^2 - 5n + 4}{2} \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
 \frac{n^2 - 5n + 4}{2} &= \frac{4 \left[ \frac{n^2}{4} - \frac{5n}{4} + 1 \right]}{2} \\
 &= 4 \cdot \frac{\left[ \frac{n^2}{4} - \frac{5n}{4} + 1 \right]}{2} \\
 &= 4 \cdot \frac{\left[ \frac{n^2 - 5n}{4} + 1 \right]}{2} \\
 &= 4 \cdot \frac{\left[ \frac{n^2 - 5n + 4}{4} \right]}{2} \\
 &= 4 \cdot \frac{n^2 - 5n + 4}{8}
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos lo siguiente:

$$|E_G| = 4 \cdot \left[ \frac{n^2 - 5n + 4}{8} \right] \longrightarrow |V_G| - 1 = 4 \cdot \left[ \frac{n^2 - 5n + 4}{8} \right]$$

Despejando  $|V_G|$ , obtenemos:

$$|V_G| - 1 = 4 \cdot \left[ \frac{n^2 - 5n + 4}{8} \right] \longrightarrow |V_G| = 4 \cdot \left[ \frac{n^2 - 5n + 4}{8} \right] + 1$$

Sea  $k = \left[ \frac{n^2 - 5n + 4}{8} \right]$ . Entonces:

$$|V_G| = 4 \cdot k + 1$$

Por lo tanto, llegamos a que  $|E_G| = |E_{\bar{G}}|$  si  $|V_G| = 4 \cdot k + 1$ .

□

2. Un *orden topológico* de una digráfica  $D$  es un orden lineal de sus vértices tal que para cada flecha  $a$  de  $D$ , la cola de  $a$  precede a su cabeza en el orden.

- (a) Demuestre que toda digráfica acíclica tiene al menos una fuente (vértice de ingrado 0) y un sumidero (vértice de exgrado 0).

**Demostración:** Procedamos por reducción al absurdo. Sea  $D$  una digráfica acíclica con  $\delta^+ > 0$  y  $\delta^- > 0$ , esto es que, para cada  $v \in V_D$  hay una flecha que le “pega”<sup>1</sup> a  $v$  y otra que “sale”<sup>2</sup> de  $v$ . Tomemos la trayectoria  $\vec{T}$  más larga en  $D$  y sea  $x \in V_D$  el último vértice de  $\vec{T}$ , luego en  $x$  sale una arista hacia algún otro vértice en  $\vec{T}$  [pues si saliera hacia algún otro vértice que no este en  $\vec{T}$ , llegaríamos a que  $\vec{T}$  no es de longitud máxima!!], así  $\vec{T}xy$  claramente contiene un ciclo, esto implica que  $D$  contiene un ciclo!!, he aquí una contradicción de suponer que  $D$  no contiene ciclos.

∴ Si  $D$  es acíclica tiene al menos una fuente y un sumidero.

□

- (b) Deduzca que una digráfica admite un orden topológico si y sólo si es acíclica.

<sup>1</sup>Una arista incide en  $v$  y  $v$  es la cabeza.

<sup>2</sup>Una arista que inicia en  $v$  con dirección a otro vértice.

**Demostración:** Para este inciso analicemos 2 posibles casos:

$\Rightarrow$ ) Procedamos por reducción al absurdo. Sea  $D$  una digráfica tal que admite un orden topológico. Supongamos que  $D$  contiene al menos un ciclo  $C$ , entonces existe un  $x \in V_D$  tal que  $\{x\} \subset C$  y  $x$  es un vértice inicial y final en  $C$ , luego existe  $y \in V_D : \{y\} \subset C$  tal que  $y\bar{x}$  es una arista, por tanto  $y < x$  [esto es que  $y$  precede a  $x$  en el orden]. Nótese que hay una trayectoria  $\vec{T}$  que va de  $x$  a  $y$  en  $C$ , así  $x < y$ !! [esto es que  $x$  precede a  $y$  en el orden], he aquí una contradicción de suponer que  $D$  admite un orden topológico.

$\therefore$  Si  $D$  admite un orden topológico  $\Rightarrow D$  es acíclica.

$\Leftarrow$ ) Por el inciso (a) sabemos que  $D$  tiene al menos una *fuentes* y un *sumidero*, tomemos una componente conexa en  $D$  y veamos que si los vértices  $x$  es *fuentes* e  $y$  es *sumidero*, entonces la trayectoria de  $x$  a  $y$  es un orden topológico, si hay más de una *fuentes* o más de un *sumidero*, cada trayectoria entre una *fuentes* y un *sumidero* es un orden topológico [pues de no serlo, dos flechas distintas provenientes de una misma fuente incidirían en algún vértice en común, lo que implicaría que  $D$  contiene un ciclo!!], así la componente conexa admite un orden topológico y esto pasa para cualquier componente conexa en  $D$ .

$\therefore$  Si  $D$  es acíclica  $\Rightarrow D$  admite un orden topológico.

$\therefore$  Una digráfica admite un orden topológico si y sólo si es acíclica.  $\square$

- (c) Exhiba un algoritmo de tiempo a lo más cuadrático para encontrar un orden topológico en una digráfica acíclica.

A continuación se muestra el algoritmo<sup>3</sup> requerido:

---

**1: TopologicalOrder( $D; D$ )**

---

**Input:** Una digráfica  $D$  acíclica.  
**Output:** Un orden topológico admitido en  $D$  basado en números.

```

1 for  $v \in V_D$  and  $d^-(v) = 0$  do
2   |  $v \leftarrow 0$ ;
3 end
4 for  $v \in V_D$  do
5   | if  $v \neq 0$  then
6     |  $temp \leftarrow 0$ ;
7     | for  $u \in V_D : u$  es antecesor de  $v$  en  $D$  and  $u \neq \text{null}$  do
8       |   if  $temp < u$  then
9         |     |  $temp \leftarrow u$ 
10      |   end
11     | end
12     |  $v \leftarrow temp + 1$ ;
13     | for  $u \in V_D : u$  es sucesor de  $v$  en  $D$  and  $u \neq \text{null}$  do
14       |   if  $u < v$  then
15         |     |  $u \leftarrow v + 1$ 
16       |   end
17     | end
18   | end
19 end
20 return  $D$ 

```

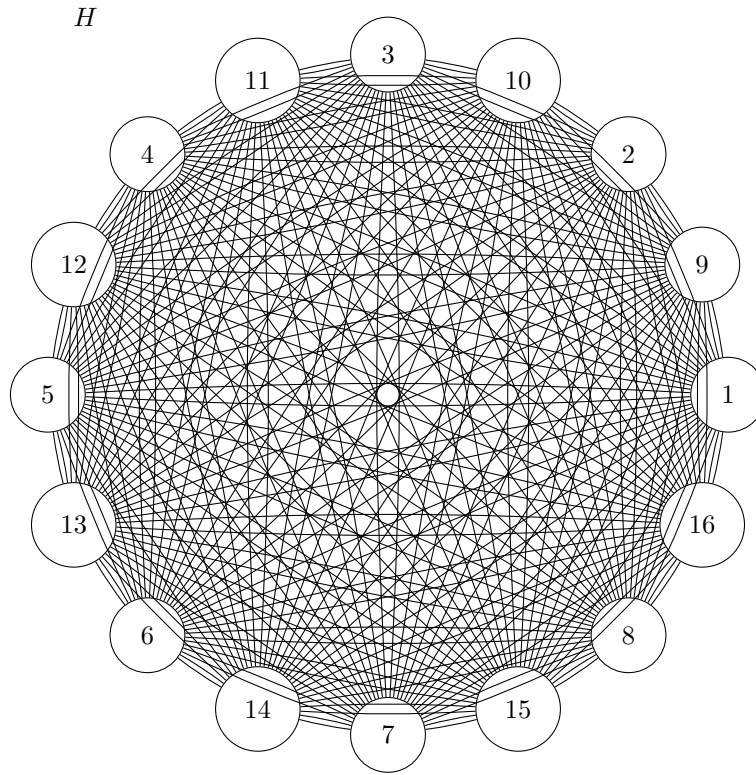
---

<sup>3</sup>Tome en cuenta que suponemos que  $D$  se pasa como parámetro con valores nulos en sus vértices.

3. Demuestre que cada uno de los siguientes problemas está en la clase  $NP$  exhibiendo un certificado y un algoritmo de tiempo polinomial para verificar el certificado (escriba el algoritmo utilizando pseudo código como el visto en clase; sólo está permitido el uso de las estructuras de control **if**, **while** y **for**). Demuestre que su algoritmo usa tiempo polinomial.

- (a) HAMILTON CYCLE.
- (b) VERTEX COVER.
- (c) COLOURING.
- (d) DOMINATING SET.

**Solución de (a):** A continuación se da un certificado para una gráfica que contiene un ciclo hamiltoniano:



y  $S = (v_0, v_1, \dots, v_n, v_0) = (3, 10, 2, 9, 1, 16, 8, 15, 7, 14, 6, 13, 5, 12, 4, 11, 3)$  una colección que contiene los vértices en sucesión tal que está sucesión forma un ciclo hamiltoniano en  $H$ . Así, nuestro algoritmo es el siguiente:

---

**2:** HamiltonCycle( $\langle H, S \rangle$ ; true/false)

---

**Input:** Una gráfica  $H$  y una colección  $S$  que contiene a la sucesión de vértices que representará el ciclo hamiltoniano en  $H$ .

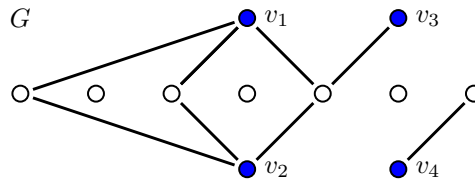
**Output:** TRUE o FALSE dependiendo si  $S$  es un ciclo hamiltoniano en  $H$ .

```

1 for  $v \in S$  do
2   siguiente= 0;
3   while siguiente <  $|V_H|$  do
4      $u \leftarrow S(\text{siguiente})$ ;
5     siguiente  $\leftarrow$  siguiente + 1;
6     if  $vu \notin E_H$  then
7       return false;
8     end
9   end
10 end
11 if  $S(0) \neq S(|V_H| - 1)$  then
12   return false;
13 end
14 for  $v \in S$  do
15   if  $v \notin V_H$  then
16     return false;
17   end
18 end
19 return true;
```

---

**Solución de (b):** A continuación se da un certificado para una gráfica que contiene un cobertura de vértices:



con  $S = (v_1, v_2, v_3, v_4)$  una cubierta de vértices en  $G$ . Así nuestro algoritmo sería el que a continuación se muestra:

---

**3: VertexCover**( $\langle G, S \rangle$ ; true/false)

---

**Input:** Una gráfica  $G$  y una colección  $S$  que contiene a la sucesión que conforma la cobertura de vértices en  $G$ .

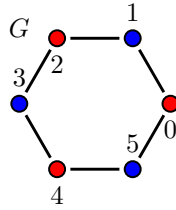
**Output:** TRUE o FALSE dependiendo si  $S$  es una cobertura de vértices en  $G$ .

```

1 contador  $\leftarrow$  0;
2 for  $v \in S$  do
3   if  $v \notin V_G$  then
4     return false;
5   end
6   for  $u \in V_G$  do
7     if  $vu \in E_G$  then
8       contador  $\leftarrow$  contador + 1;
9     end
10  end
11 end
12 if contador  $\neq$   $|V_G|$  then
13   return false;
14 end
15 return true;
```

---

**Solución de (c):** A continuación se muestra un certificado para una gráfica que admite una coloración:



con  $S = (1R, 3R, 5R, 0A, 2A, 4A)$  una coloración de vértices en  $G$ . Luego, nuestro algoritmo sería el que a continuación se muestra:



---

**4: Colouring**( $\langle G, S \rangle$ ; true/false)

---

**Input:** Una gráfica  $G$  y una colección  $S$  que contiene a la sucesión que conforma la coloración de vértices en  $G$ .

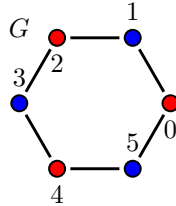
**Output:** TRUE o FALSE dependiendo si  $S$  es una coloración de vértices en  $G$ .

```

1 if  $|S| = |V_G|$  then
2   | return false;
3 end
4 for  $v \in S$  do
5   | if  $v \notin V_G$  then
6   |   | return false;
7   | end
8   | for  $u \in S$  do
9   |   | if  $v$  tiene el mismo color que  $u$  then
10  |   |   | if  $uv \in E_G$  then
11  |   |   |   | return false;
12  |   |   | end
13  |   | end
14  | end
15 end
16 return true;
```

---

**Solución de (d):** A continuación se muestra un certificado para una gráfica que admite una coloración:



con  $S = (1R, 3R, 5R, 0A, 2A, 4A)$  una coloración de vértices en  $G$ . Luego, nuestro algoritmo sería el que a continuación se muestra:

### Puntos extra

1. Demuestre que toda digráfica sin lazos admite una descomposición en dos digráficas acíclicas, es decir, que existen  $D_1$  y  $D_2$  subdigráficas de  $D$ , acíclicas y tales que  $D_1 \cup D_2 = D$  y  $A_{D_1} \cap A_{D_2} = \emptyset$ .
2. Un torneo es una digráfica en la que entre cualesquiera dos vértices existe una única flecha. Demuestre que todo torneo es fuertemente conexo o puede transformarse en un torneo fuertemente conexo al reorientar exactamente una flecha.
3. Demuestre que una digráfica es fuertemente conexa si y sólo si contiene un camino cerrado generador.
4. Demuestre que si  $l, m$  y  $n$  son enteros con  $0 < l \leq m \leq n$ , entonces existe una gráfica simple  $G$  con  $\kappa = l$ ,  $\kappa' = m$  y  $\delta = n$ .

**Demostración:** Sean  $l, m, n$  perteneciente a los Enteros y  $G$  una gráfica con  $\kappa=l$ ,  $\kappa'=m$  y  $\delta=n$ , tenemos que  $0 < k$  ya que una gráfica no puede tener conexidad menor que  $0 \rightarrow$

por proposición demostrada en clase esta gráfica tendrá la desigualdad  $0 < k \leq k' \leq \delta$  sustituyendo los valores  $0 < l \leq m \leq n$

Por lo tanto existe la gráfica (ya que la proposición demostrada en clase era un para todo y el paratodo implica el existe)  $\square$