UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO
Facultad de Ciencias

Autores:
Fernanda Villafán Flores
Fernando Alvarado Palacios
Adrián Aguilera Moreno

Gráficas y Juegos

Tarea 7

1. (a) Demuestre que si G tiene diámetro mayor que 3 (posiblemente infinito), entonces $\overline{G}$ tiene diámetro menor que 3. Concluya que si G es inconexa, entonces $\overline{G}$ es conexa.

   (b) Una gráfica G es autocomplementaria si $G \cong \overline{G}$. Demuestre que si G es autocomplementaria, entonces $|V| \stackrel{4}{\equiv} 0$ o $|V| \stackrel{4}{\equiv} 1$.

2. Un *orden topológico* de una digráfica D es un orden lineal de sus vértices tal que para cada flecha a de D, la cola de a precede a su cabeza en el orden.

   (a) Demuestre que toda digráfica acíclica tiene al menos una fuente (vértice de ingrado 0) y un sumidero (vértice de exgrado 0).

   Demostración: Procedamos por reducción al absurdo. Sea D una digráfica acíclica con $\delta^+ > 0$ y $\delta^- > 0$, esto es que, para cada $v \in V_D$ hay una flecha que le "*pega*"[1] a v y otra que "*sale*"[2] de v. Tomemos la trayectoria $\vec{T}$ más larga en D y sea $x \in V_D$ el último vértice de $\vec{T}$, luego en x *sale* una arista hacia algún otro vértice en $\vec{T}$ [pues si saliera hacia algún otro vértice que no este en $\vec{T}$, llegariamos a que $\vec{T}$ no es de longitud máxima!!], así $\vec{T}xy$ claramente contiene un ciclo, esto implica que D contiene un ciclo!!, he aquí una contradicción de suponer que D no contiene ciclos.

   $\therefore$ Si D es acíclica tiene al menos una fuente y un sumidero. $\square$

   (b) Deduzca que una digráfica admite un orden topológico si y sólo si es acíclica.

   Demostración: Para este inciso analicemos 2 posibles casos:

   $\Rightarrow$) Procedamos por reducción al absurdo. Sea D una digráfica tal que admite un orden topológico. Supongamos que D contiene al menos un ciclo C, entonces existe un $x \in V_D$ tal que $\{x\} \subset C$ y x es un vértice inicial y final en C, luego existe $y \in V_D$: $\{y\} \subset C$ tal que $\vec{yx}$ es una arista, por tanto $y < x$ [esto es que y precede a x en el orden]. Nótese que hay una trayectoria $\vec{T}$ que va de x a y en C, así $x < y$!! [esto es que x precede a y en el orden], he aquí una contradicción de suponer que D admite un orden topológico.

   $\therefore$ Si D admite un orden topológico $\Rightarrow$ D es acíclica.

   $\Leftarrow$) Por el inciso (a) sabemos que D tiene al menos una *fuente* y un *sumidero*, tomemos una componente conexa en D y veamos que si los vértices x es *fuente* e y es *sumidero*, entonces la trayectoria de x a y es un orden topológico, si hay más de una *fuente* o más de un *sumidero*, cada trayectoria entre una *fuente* y un *sumidero* es un orden topológico [pues de no serlo, dos flechas distintas provenientes de una misma fuente incidirían en algún vértice en común, lo que implicaría que D contiene un ciclo!!], así la componente conexa admite un orden topológico y esto pasa para cualquier componente conexa en D.

   $\therefore$ Si D es acíclica $\Rightarrow$ D admite un orden topológico.

   $\therefore$ Una digráfica admite un orden topológico si y sólo si es acíclica. $\square$

   (c) Exhiba un algoritmo de tiempo a lo más cuadrático para encontrar un orden topológico en una digráfica acíclica.

[1] Una arista incide en v y v es la cabeza.
[2] Una arista que inicia en v con dirección a otro vértice.

A continuación se muestra el algoritmo[3] requerido:

1: TopologicalOrder(D; D)

Input: Una digráfica D acíclica.
Output: Un orden topológico admitido en D basado en números.

```
for v ∈ V_D and d⁻(v) = 0 do
    v ← 0;
end
for v ∈ V_D do
    if v ≠ 0 then
        temp ← 0;
        for u ∈ V_D : u es antecesor de v en D and u ≠ null do
            if temp < u then
                temp ← u
            end
        end
        v ← temp + 1;
        for u ∈ V_D : u es sucesor de v en D and u ≠ null do
            if u < v then
                u ← v + 1
            end
        end
    end
end
return D
```

3. Demuestre que cada uno de los siguientes problemas está en la clase NP exhibiendo un certificado y un algoritmo de tiempo polinomial para verificar el certificado (escriba el algoritmo utilizando pseudo código como el visto en clase; sólo está permitido el uso de las estructuras de control **if**, **while** y **for**). Demuestre que su algoritmo usa tiempo polinomial.

   (a) Hamilton Cycle.

   (b) Vertex Cover.

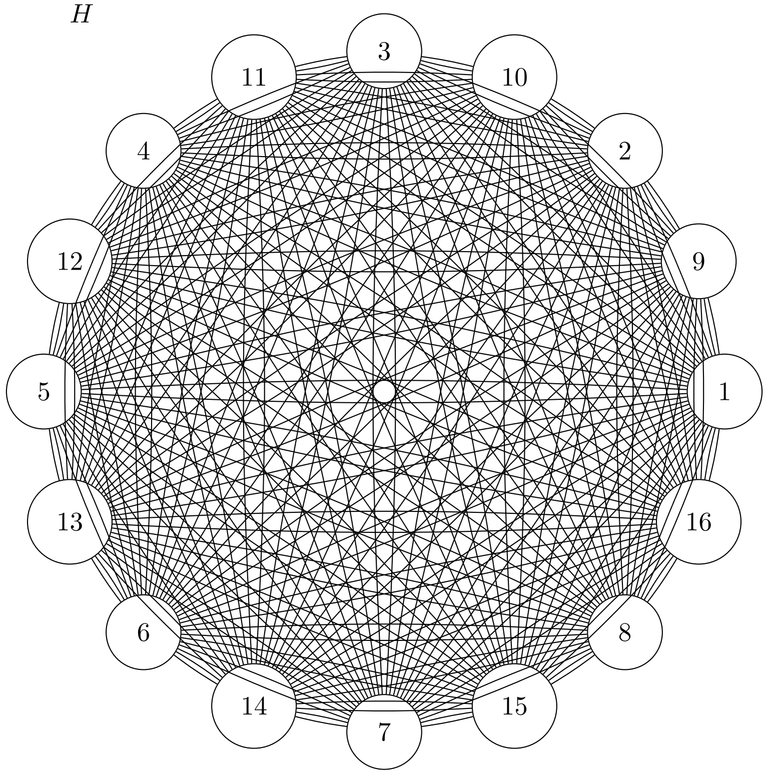
   (c) Colouring.

   (d) Dominating Set.

Solución de (a): A continuación se da un certificado para una gráfica que contiene un ciclo hamiltoniano:

[3] Tome en cuenta que suponemos que D se pasa como parámetro con valores nulos en sus vértices.

H



y $S = (v_0, v_1, \cdots, v_n, v_0) = (3, 10, 2, 9, 1, 16, 8, 15, 7, 14, 6, 13, 5, 12, 4, 11, 3)$ una `colección` que contiene los vértices en sucesión tal que está sucesión forma un ciclo hamiltoniano en H. Así, nuestro algoritmo es el siguiente:

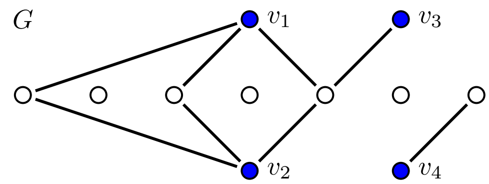
2: HamiltonCycle($\langle H, S \rangle$; `true/false`)

Input: Una gráfica H y una colección S que contiene a la sucesión de vértices que representará el ciclo hamiltoniano en H.

Output: `TRUE` o `FALSE` dependiendo si S es un ciclo hamiltoniano en H.

for $v \in S$ **do**
    `siguiente`$= 0$;
    while `siguiente` $< |V_H|$ **do**
        $u \leftarrow$ S(`siguiente`);
        `siguiente` $\leftarrow$ `siguiente` $+ 1$;
        if $vu \notin E_H$ **then**
            return `false`;
        end
    end
end
if $S(0) \neq S(|V_H - 1|)$ **then**
    return `false`;
end
for $v \in S$ **do**
    if $v \notin V_H$ **then**
        return false;
    end
end
return `true`;

Solución de (b): A continuación se da un certificado para una gráfica que contiene un covertura de vértices:



con $S = (v_1, v_2 v_3, v_4)$ una cubierta de vértices en G. Así nuestro algoritmo sería el que a continuación se muestra:

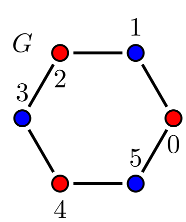
3: VertexCover($\langle G, S\rangle$; `true/false`)

Input: Una gráfica G y una `colección` S que contiene a la sucesión que conforma la covertura de vértices en G.

Output: `TRUE` o `FALSE` dependiendo si S es una covertura de vértices en G.

```
contador ← 0;
for v ∈ S do
    if v ∉ V_G then
        return false;
    end
    for u ∈ V_G do
        if vu ∈ E_G then
            contador ← contador + 1;
        end
    end
end
if contador≠ |V_G| then
    return false;
end
return true;
```

Solución de (c): A continuación se muestra un certificado para una gráfica que admite una coloración:



con $S = (1R, 3R, 5R, 0A, 2A, 4A)$ una coloración de vértices en G. Luego, nuestro algoritmo sería el que a continuación se muestra:

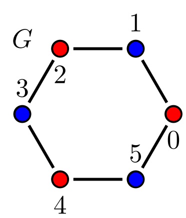
4: Colouring($\langle G, S\rangle$; `true/false`)

Input: Una gráfica G y una `colección` S que contiene a la sucesión que conforma la coloración de vértices en G.

Output: `TRUE` o `FALSE` dependiendo si S es una coloración de vértices en G.

```
if |S| = |V_G| then
    return false;
end
for v ∈ S do
    if v ∉ V_G then
        return false;
    end
    for u ∈ S do
        if v tiene el mismo color que u then
            if uv ∈ E_G then
                return false;
            end
        end
    end
end
return true;
```

Solución de (d): A continuación se muestra un certificado para una gráfica que admite una coloración:



con $S = (1R, 3R, 5R, 0A, 2A, 4A)$ una coloración de vértices en G. Luego, nuestro algoritmo sería el que a continuación se muestra:

Puntos extra

1. Demuestre que toda digráfica sin lazos admite una descomposición en dos digráficas acíclicas, es decir, que existen D_1 y D_2 subdigráficas de D, acíclicas y tales que $D_1 \cup D_2 = D$ y $A_{D_1} \cap A_{D_2} = \varnothing$.

2. Un torneo es una digráfica en la que entre cualesquiera dos vértices existe una única flecha. Demuestre que todo torneo es fuertemente conexo o puede transformarse en un torneo fuertemente conexo al reorientar exactamente una flecha.

3. Demuestre que una digráfica es fuertemente conexa si y sólo si contiene un camino cerrado generador.

4. Demuestre que si l, m y n son enteros con $0 < l \leq m \leq n$, entonces existe una gráfica simple G con $\kappa = l$, $\kappa' = m$ y $\delta = n$.

   Demostración: Sean l, m, n perteneciente a los Enteros y G una gráfica con K=l, k'=m y δ=n, tenemos que $0 < k$ ya que una gráfica no puede tener conexidad menor que $0 \rightarrow$

por proposición demostrada en clase esta gráfica tendra la desigualdad $0 < k \leqslant k' \leqslant \delta$ sustituyendo los valores $0 < l \leqslant m \leqslant n$

Por lo tanto existe la grafica (ya que la proposicion demostrada en clase era un para todo y el paratodo implica el existe)

$\square$