

# UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO

Facultad de Ciencias

Autores:

Fernanda Villafán Flores

Fernando Alvarado Palacios

Adrián Aguilera Moreno



Gráficas y Juegos

## Tarea 5

1. Demuestre que si  $G$  es simple y 3-regular, entonces  $\kappa = \kappa'$ .
2. Demuestre que una gráfica es 2-conexa por aristas si y sólo si cualesquiera dos vértices están conectados por al menos dos trayectorias ajenas por aristas.
3. Demuestre que si  $G$  no tiene ciclos pares, entonces cada bloque de  $G$  es  $K_1$ ,  $K_2$  o un ciclo impar.
4. Sea  $G$  una gráfica 2-conexa y sean  $X$  y  $Y$  subconjuntos ajenos de  $V$ , cada uno con al menos dos vértices. Demuestre que  $G$  contiene trayectorias ajenas  $P$  y  $Q$  tales que
  - (a) Los vértices iniciales de  $P$  y  $Q$  pertenecen a  $X$ .
  - (b) Los vértices finales de  $P$  y  $Q$  pertenecen a  $Y$ .
  - (c) Ningún vértice interno de  $P$  o  $Q$  pertenece a  $X \cup Y$ .

**Demostración:** Sea  $G$  2-conexa y  $X, Y$  subconjuntos ajenos de  $V \Leftrightarrow$  sean  $x' \in X$  y  $y' \in Y \Leftrightarrow$  por el ejercicio 2 esta tarea, podemos asegurar que existen dos trayectorias internamente ajenas por aristas que conectan a  $x'$  y  $y'$ , nombremos a estas trayectorias  $P'$  y  $Q'$ .

Sea  $P' = (x' = a_0, a_1, a_2, \dots, a_n = y')$  para alguna  $n$  que pertenezca a los Naturales y sea  $Q' = (x' = b_0, b_1, b_2, \dots, b_k = y')$  para alguna  $k$  que pertenezca a los naturales.

$\Leftrightarrow$  Comparando los vértices, sea  $a_i$  para alguna  $i$  que pertenece a los naturales, tal que  $a_i \in X$ , pero  $a_{i+1} \notin X$  por lo que ahora  $P' = (x' = a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, \dots, a_n = y')$ .

De igual forma existirá algún  $b_r$  para alguna  $r$  que pertenece a los naturales, tal que  $b_r \in X$ , pero  $b_{r+1} \notin X$  por lo que ahora  $Q' = (x' = b_r, b_{r+1}, b_{r+2}, \dots, b_k = y')$ .

Ahora definamos  $P'^{-1}$  como  $(y' = a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \dots, a_i = x')$  y  $Q'^{-1}$  como  $(y' = b_k, b_{k-1}, b_{k-2}, \dots, b_r = x')$   $\Leftrightarrow$  aplicando el razonamiento anterior, existirá  $t$  que pertenezca a los naturales, tal que  $b_{k-t} \in Y$  y  $b_{k-(t+1)} \notin Y$  y de igual forma existirá  $s$  que pertenezca a los naturales tal que  $a_{n-s} \in Y$  y  $a_{n-(s+1)} \notin Y \Leftrightarrow$  definamos a  $P = (a_i, a_{i+1}, \dots, a_{n-s})$  y definimos a  $Q = (b_j, b_{j+1}, \dots, b_{k-t})$

Por lo tanto:

- a) se cumple ya que  $a_i$  y  $b_j$  pertenecen a  $X$  por construcción de nuestras trayectorias  $P$  y  $Q$ .
- b) se cumple ya que  $a_{n-s}$  y  $b_{k-t}$  pertenecen a  $Y$  por construcción de  $P$  y  $Q$ .
- c) se cumple de nuevo por construcción de  $P$  y  $Q$  y ya que  $X$  y  $Y$  son conjuntos disjuntos de  $V$

□

5. Sea  $G$  una gráfica conexa con al menos 3 vértices. Demuestre que los siguientes enunciados son equivalentes.
  - (a)  $G$  es un bloque.
  - (b) Entre cualesquiera dos vértices distintos existen dos trayectorias internamente ajenas.
  - (c) Para cualesquiera dos vértices de  $G$  existe un ciclo que los contiene.
  - (d) Para cualquier vértice y cualquier arista de  $G$  existe un ciclo que los contiene.

- (e) Para cualesquiera dos aristas de  $G$  existe un ciclo que los contiene.
- (f) Dados dos vértices  $u, v \in V(G)$  y una arista  $e \in E(G)$ , existe una  $uv$ -trayectoria que pasa por  $e$ .
- (g) Para cualesquiera tres vértices distintos de  $G$ , existe una trayectoria que une a cualesquiera dos de ellos y que pasa por el tercero.
- (h) Para cualesquiera tres vértices distintos de  $G$ , existe una trayectoria que une a cualesquiera dos de ellos que no pasa por el tercero.

**Demostración:** Las implicaciones;  $(a) \Rightarrow (b)$ ,  $(b) \Rightarrow (c)$  y  $(c) \Rightarrow (d)$ , se omiten por estar escritas en las notas de clase. Las implicaciones restantes se enumeran a continuación:

- ) Por mostrar  $(d) \Rightarrow (e)$ .

Por  $(d)$  sabemos que cualquier arista se encuentra contenida en un ciclo, por consecuencia directa, cualesquiera 2 aristas se encuentran contenidas en algún ciclo.

- ) Por mostrar  $(e) \Rightarrow (f)$ .

Nótese que como consecuencia de  $(e)$  (en particular cualquier arista esta contenida en un ciclo) cualquier vértice no aislado forma parte de un ciclo, como  $G$  es conexa, entonces todos sus vértices son parte de algún ciclo, esto nos lleva a que  $G$  es 2-conexa por aristas. Luego para  $u, v$  en  $V_G$  existen al menos dos  $uv$ -trayectoria ajenas por aristas. De lo anterior veamos como son  $v$  y  $u$ , esto es

- Si  $u, v$  forman parte de un mismo ciclo  $C$ . Sea  $e \in E_G$  tal que forme parte de  $C$ , entonces terminamos, pues existe una trayectoria que pasa por  $e$ . Ahora, supongamos que  $e$  no es parte de  $C$ , y sea  $e = xy$  ( $x, y$  en  $V_G$ ), así supongamos que los vértices  $y$  y  $v$  son los que se pueden "conectar" por la trayectoria de mayor longitud entre ellos y a la que llamaremos  $T$ , veamos que si  $x$  se encuentra en  $T$  terminamos, pues existe una  $xu$ -trayectoria que complementa a  $T$  para formar una  $uv$ -trayectoria con  $e$  contenida, luego si  $x$  no esta contenida en  $T$ , entonces  $Tx$  incluye a  $e$  por lo que si  $u$  no esta contenida en  $T$ , entonces existe una  $xu$ -trayectoria  $P$  tal que  $TxP$  es la trayectoria buscada<sup>1</sup>.
- $u, v$  forman parte de ciclos distintos. Si  $e$  forma parte de alguno de los ciclos que contiene a  $u$  y  $v$  como vértices, entonces hay una trayectoria  $Q$  que pasa por  $v$  (o  $u$ ) y por  $e$ , pues están en el mismo ciclo, luego existe una trayectoria  $P$  que inicia en  $e$  y llega hasta  $u$  (o  $v$ ) como consecuencia de que  $G$  sea conexa, además  $P$  ajena con  $Q$  por ser  $G$  2-conexa por aristas, luego  $PQ$  es la trayectoria que pasa por  $u$  y  $v$  que además contiene a la arista  $e$ . Para finalizar, si  $e$  no se encuentra contenida en los ciclos que contienen a  $u$  y  $v$  como vértices. Supongamos que  $e = xy$  ( $x, y$  en  $V_G$ ) y que de  $x$  se pueda obtener la trayectoria más larga con  $v$ , así, existe una  $xv$ -trayectoria  $T$  que ya contiene a  $e$  (porque  $T$  es la más larga, caso contrario sólo basta unir  $T = Ty$ ), como existe una  $vu$ -trayectoria  $P$ , entonces  $TP$  ( $TyP$ ) es la trayectoria buscada y terminamos.

- ) Por mostrar  $(f) \Rightarrow (g)$ .

Por  $(f)$  tenemos que cualesquiera 2 vértices  $u, v$  y para toda arista  $e$ , existe una  $uv$ -trayectoria que contiene a  $e$ . Como  $G$  es conexa, entonces, cualquier vértice es

<sup>1</sup>Con esto debería bastar, pues estamos mostrando la equivalencia a un bloque propiamente, sin embargo el caso restante también lo analizo, pues no veo como descartarlo sin usar lo que estoy mostrando.

parte de alguna arista, así, para cualesquiera  $x, y, z$  en  $V_G$  existe una  $xz$ -trayectoria  $T$  que contiene a  $e \in E_G$ , tal que  $e = yw (w \in E_G)$  y por tanto  $T$  pasa por  $y$ .

·) Por mostrar  $(g) \Rightarrow (h)$ .

Como  $G$  es conexa, sabemos que existe una  $xy$ -trayectoria  $T$ , una  $xz$ -trayectoria  $P$ , y una  $yz$ -trayectoria  $Q$ , todas ellas de longitud mínima. Así

- Si todas las longitudes son iguales, *i.e.*,  $\mathcal{L}(T) = \mathcal{L}(P) = \mathcal{L}(Q)$ . Por hipótesis  $x, y, z$  no son iguales, así, cualquier trayectoria no contiene al tercer vértice y hemos encontrado al menos 2 trayectoias que cumplen con  $h$ .
- Si dos de las trayectorias tienen una longitud mínima igual y menor a la que es desigual, *i.e.*,  $\mathcal{L}(T) = \mathcal{L}(P) < \mathcal{L}(Q)$  o  $\mathcal{L}(T) > \mathcal{L}(P) = \mathcal{L}(Q)$  o  $\mathcal{L}(T) = \mathcal{L}(Q) < \mathcal{L}(P)$ . En este caso, analicemos las dos trayectorias que resulten tener menor longitud entre  $P, Q, T$ . Si las trayectorias son  $T$  y  $P$ , entonces cualquiera de estas no contiene al tercer vértice, pues  $x, y, z$  son distintos y las trayectorias elegidas son las de menor longitud. Si se tiene que las trayectorias mínimas son  $T$  y  $Q$ , o  $P$  y  $Q$ , se cumple que un tercer vértice no está en alguna de las dos trayectorias, pues en caso contrario y por saber que  $x, y, z$  son distintos, se tendría que hay una trayectoria menor con 2 de los vértices que estamos trabajando!!!, pero esto es absurdo, ya que, nuestras trayectorias eran mínimas, por lo cual se cumple  $h$ .
- Si una de las longitudes mínimas es menor a las restantes, *i.e.*,  $\mathcal{L}(T) = \mathcal{L}(P) > \mathcal{L}(Q)$  o  $\mathcal{L}(T) < \mathcal{L}(P) = \mathcal{L}(Q)$  o  $\mathcal{L}(T) = \mathcal{L}(Q) > \mathcal{L}(P)$ . Para este caso, elegimos la trayectoria con menor longitud y esta no contendrá al tercer vértice, pues para que pasará por el se necesitaría recorrer más aristas. En este caso tenemos una trayectoria que cumple con  $h$ .

·) Por mostrar  $(h) \Rightarrow (a)$ .

Sean  $x, y, z$  en  $V_G$  tales que  $P$  es una  $xy$ -trayectoria que no pasa por  $z$ . Como  $G$  es conexa, entonces existe una  $xy$ -trayectoria  $R$  y una  $yz$ -trayectoria  $S$ , tales que,  $T = RS$ , luego hemos encontrado dos  $xy$ -trayectorias distintas que en particular forman un ciclo, además este ciclo es único porque esto pasa con cualquier vértice y entre ellos, *i.e.*, si seguimos escogiendo vértices de  $V_G$  veremos que todos están en un ciclo y que están relacionados de esta manera con todos los vértices, de lo anterior  $G$  es un único ciclo y concluimos que  $G$  es un bloque.

De lo anterior y por silogismo hipotético en los incisos anteriores se concluye que la caracterización se cumple. QED