UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO
Facultad de Ciencias

Autores: Fernanda Villafán Flores
Fernando Alvarado
Adrián Aguilera Moreno

Gráficas y Juegos

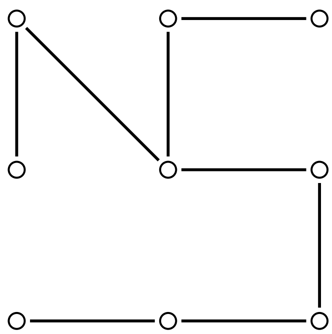
Tarea 1

1. Sea n un entero, $n \geq 3$. Demuestre que existe un único n-ciclo, salvo isomorfismo.

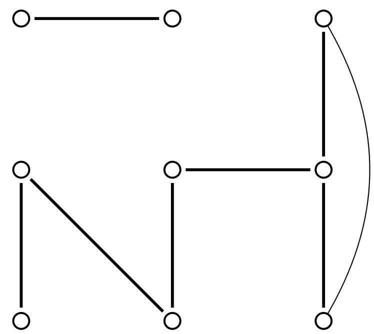
2. De un ejemplo de tres gráficas del mismo orden, mismo tamaño y misma sucesión de grados tales que cualesquiera dos de dichas gráficas no sean isomorfas, al menos una de ellas sea conexa, y al menos una sea inconexa.

   A continuación se muestran las gráficas: G_1, G_2 y G_3:

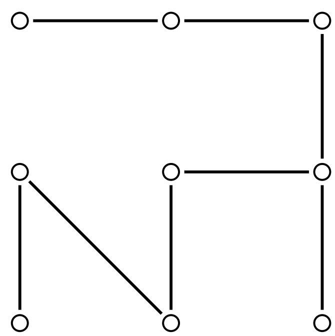
   G_1

   G_2

   G_3

   con sucesiones orden 9, tamaño 8 y sucesión de grados $(1, 1, 2, 2, 2, 2, 2, 3)$.

3. Sea D una digráfica. Demuestre que

$$\sum_{v \in V_D} d^+(v) = \sum_{v \in V_D} d^-(v) = |A_D|.$$

Demostración: La demostración se dividirá en dos incisos:

$\cdot$) $\displaystyle\sum_{v \in V_D} d^+(v) = |A_D|$

Sea M_1 una matriz de incidencia de D, tal que:

$$M_1 = M_{ij}^+ = \begin{cases} 1 & si \quad v_i \; es \; la \; cola \; de \; e_j \\ \\ 0 & si \quad v_i \; no \; es \; la \; cola \; de \; e_j \end{cases}$$

Ahora, supongamos que $V = \{v_1, \cdots, v_n\}$ donde v_i corresponde al *i-ésimo* renglón de M_1.

Sabemos que las entradas de cada columna de M_1 son igual a 1, que son las flechas e_j con un vértice llamado *cola de la flecha*. Por otro lado, las entradas del *i-ésimo* renglón de M_1 suman $d^+(v_i)$, ya que las entradas corresponden a todas las flechas de las cuales v_i es cola de dicha flecha.

Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned}|A_D| &= \sum_{j=1}^{|A|}\sum_{i=1}^{|V|} M_{ij}^+ \\ &= \sum_{i=1}^{|V|}\sum_{j=1}^{|A|} M_{ij}^+ \\ &= \sum_{i=1}^{|V|} d^+(v_i) \\ &= \sum_{v\in V} d^+(v)\end{aligned}$$

De forma análoga se realiza el otro inciso.

··) $\sum_{v\in V_D} d^-(v) = |A_D|$

Sea M_2 una matriz de incidencia de D, tal que:

$$M_2 = M_{ij}^- = \begin{cases} 1 & si \quad v_i \text{ } es \text{ } la \text{ } cabeza \text{ } de \text{ } e_j \\ \\ 0 & si \quad v_i \text{ } no \text{ } es \text{ } la \text{ } cabeza \text{ } de \text{ } e_j \end{cases}$$

Ahora, supongamos que $V = \{v_1, \cdots, v_n\}$ donde v_i corresponde al *i-ésimo* renglón de M_1.

Sabemos que las entradas de cada columna de M_1 son igual a 1, que son las flechas e_j con un vértice llamado *cabeza de la flecha*. Por otro lado, las entradas del *i-ésimo* renglón de M_1 suman $d^-(v_i)$, ya que las entradas corresponden a todas las flechas de las cuales v_i es cabeza de dicha flecha.

Entonces, tenemos que:

$$\begin{aligned}|A_D| &= \sum_{j=1}^{|A|}\sum_{i=1}^{|V|} M_{ij}^- \\ &= \sum_{i=1}^{|V|}\sum_{j=1}^{|A|} M_{ij}^- \\ &= \sum_{i=1}^{|V|} d^-(v_i) \\ &= \sum_{v\in V} d^-(v)\end{aligned}$$

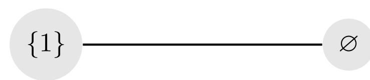
Por lo tanto, queda demostrado que:

$$\sum_{v\in V_D} d^+(v) = \sum_{v\in V_D} d^-(v) = |A_D|$$

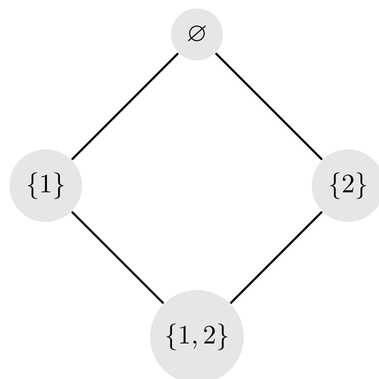
QED

4. Sea n un entero positivo. Definimos a la *Retícula Booleana*, BL_n, como la gráfica cuyo conjunto de vértices es el conjunto de todos los posibles subconjuntos de $\{1, \cdots, n\}$, donde dos subconjuntos X y Y son adyacentes si y sólo si su diferencia simétrica tiene exactamente un elemento.

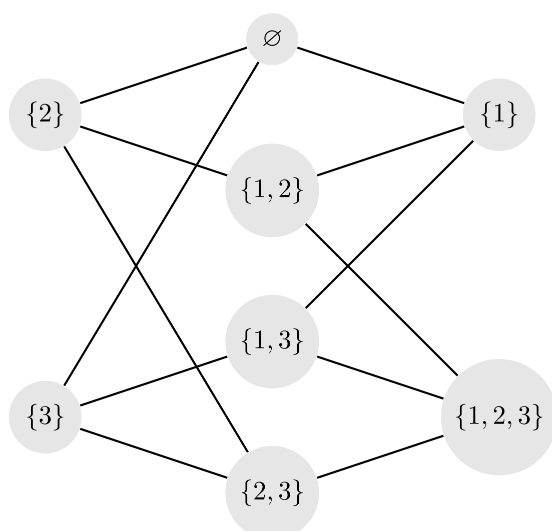
   (a) Dibuje BL_1, BL_2, BL_3 y BL_4.
   Gráfica representativa de BL_1:



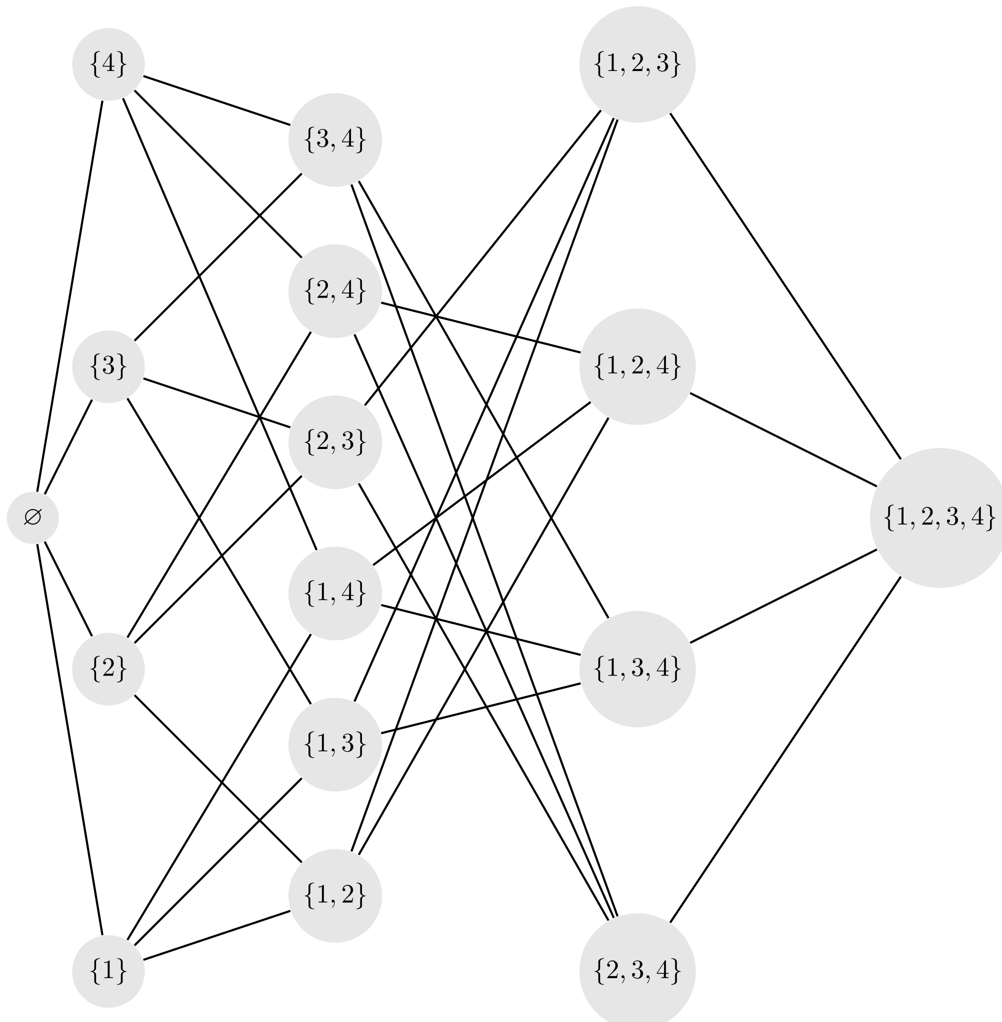
   Gráfica representativa de BL_2:



   Gráfica representativa de BL_3:



   Gráfica representativa de BL_4:



□

(b) Determine $|V_{BL_n}|$ y $|E_{BL_n}|$. (Justifique su respuesta).

Veamos que la cantidad de vértices es igual a la cantidad de subconjuntos que se pueden formar de la retícula BL_n, esto es el conjunto potencia de $\{1, \cdots, n\}$. Por lo que:

$$|V_{BL_n}| = |P(\{1, \cdots, n\})| = 2^n$$

Mientras que es un tanto más empírica la forma en la que se obtiene la cardinalidad de E_{BL_n}, veamos la siguiente tabla con las primeras retículas:

Valor de n	# de aristas
$n = 1 \Rightarrow$	1 arista
$n = 2 \Rightarrow$	4 arista
$n = 3 \Rightarrow$	12 arista
$n = 4 \Rightarrow$	32 arista

Nótese que:

$$\begin{array}{lll} 1 \cdot 1 & = 1 \cdot 2^{1-1} = & 1 \\ 2 \cdot 2 & = 2 \cdot 2^{2-1} = & 4 \\ 3 \cdot 4 & = 3 \cdot 2^{3-1} = & 12 \\ 4 \cdot 8 & = 4 \cdot 2^{4-1} = & 32 \end{array}$$

Podemos deducir $|E_{BL_n}| = n \cdot 2^{n-1}$. Ahora mostramos que esto funciona para $n \in \mathbb{Z}^+$. En la tabla anterior, se tendrían los casos base para mostrar esta propiedad. Supongamos que esto funciona para $n = k-1$, *i.e.*, cuando $n = k-1$ el número de aristas en la gráfica será:

$$(k-1) \cdot 2^{k-2}$$

Ahora veamos que sucede con $n = k$, tendríamos:

$$\begin{aligned} (k-1) \cdot 2^{k-2} + (k+1) \cdot 2^{k-2} &= 2^{n-2} \cdot [(k-1) + (k+1)] \\ &= 2^{k-2} \cdot [2k - 1 + 1] \\ &= 2k \cdot 2^{k-2} \\ &= k \cdot 2^{k-2+1} \\ &= k \cdot 2^{k-1} \end{aligned}$$

Luego, como $n = k$ tenemos:

$$(k-1) \cdot 2^{k-2} + (k+1) \cdot 2^{k-2} = k \cdot 2^{k-1} = n \cdot 2^{n-1}$$

$$\therefore \quad |V_{BL_n}| = 2^n \text{ y } |E_{BL_n}| = n \cdot 2^{n-1}$$ □

(c) Demuestre que BL_n es bipartita para cualquier $n \in \mathbb{Z}^+$.

Demostración: Sea $A = \{1, \cdots, n\}$ conjunto con $n \in \mathbb{Z}^+$. Veamos que podemos particionar nuestra BL_n en los conjuntos X y Y de tal forma que X contenga los subconjuntos de BL_n tales que su cardinalidad es $2k$, donde $2k \in A$ y Y tal que contenga los subconjuntos de BL_n de cardinalidad $2k-1$, donde $2k-1 \in A$.

Veamos que pasa cuando dos subconjuntos en BL_n se relacionan, es decir, son adyacentes en BL_n.

- Su diferencia simétrica es 1.

Dados dos subconjuntos en BL_n, uno de ellos debe tener cardinalidad $n+1$ o $n-1$ y el otro de cardinalidad n tal que se cumple que uno de ellos es subconjunto del otro.

Notemos que en X están todos los subconjuntos de cardinalidad par. Por tanto, la diferencia simétrica entre cualesquiera 2 subconjuntos distintos en X es:

- A lo menos un conjunto de cardinalidad 2.

De lo anterior, tenemos que ningún subconjunto en X cumple ser adyacente mediante la definición de BL_n.

Ahora notemos que, en Y están todos los subconjuntos de BL_n que tienen cardinalidad impar. Por lo tanto, la diferencia simétrica en cualesquiera dos subconjuntos distintos en Y es:

- Al menos un conjunto de cardinalidad 2.

Entonces tenemos que: $2k+1-(2k-1) = 2$ y como Y es un conjunto, no se tiene dos conjuntos iguales a los cuales relacionar. Por lo anterior y por la definición de diferencia simétrica, no existen dos conjuntos adyacentes en Y.

$$\therefore \quad BL_n \text{ es bipartita en } X \text{ y } Y,\ i.e.\ BL_n[X, Y]$$ QED

5. Sea $G[X, Y]$ una gráfica bipartita.

   (a) Demuestre que $\sum_{v\in X} d(v) = \sum_{v\in Y} d(v)$.

   Demostración: (Inducción sobre $|Y|$)
   Sea G una gráfica tal que $G[X, Y]$ y sea r cualquier Entero tal que $|X| = r$
   Paso base (n=1): Sea G[X,Y_1] donde $|X| = r$ y $|Y| = 1 \implies$ como G es bipartita, todo vértice de X se relaciona con el único elmento de Y, por lo que $\sum_{v\in X} d(v) = r$ y el grado del único vertice en Y, será igual a r, por lo tanto $\sum_{v\in X} d(v) = r = \sum_{v\in Y_1} d(v)$
   Hipótesis de Inducción (n=k): Supongamos que G$[X, Y_k]$ es una gráfica bipartita y que $\sum_{v\in X} d(v) = \sum_{v\in Y_k} d(v)$
   Paso inductivo (n=k+1): Sea G[X,Y_{k+1}] función bipartita Pd) $\sum_{v\in X} d(v) = \sum_{v\in Y_{k+1}} d(v)$
   Demostración: Por hipotesis de inducción si G[X,Y_k] $\implies \sum_{v\in X} d(v) = \sum_{v\in Y_k} d(v) \implies$ si agregamos un vértice a Y_k, donde $|Y_{k+1}| = |Y_k|+1 \implies$ por defición de gráfica bipartica existirán vértices de X que serán adyacentes con el nuevo vértice en Y $\implies$ sea q el número de nuevas relaciones entre X y el nuevo vértice en Y, vemos que el grado del nuevo vértice en Y será igual a q $\implies \sum_{v\in X} d(v) = \sum_{v\in Y_k} d(v) + q = \sum_{v\in Y_{k+1}} d(v)$
   Por lo tanto para toda g tenemos que $\sum_{v\in X} d(v) = \sum_{v\in Y} d(v)$ QED

   (b) Demuestre que si G es k-regular, con $k \geq 1$, entonces $|X| = |Y|$.

   Demostración: Dada G una gráfica k-regular $G[X, Y]$ bipartita. Sabemos que por ser bipartita y k-regular, se cumple que:

   - Al menos $|V_G| = 2$, pues una gráfica tiene como mínimo un elemento y por ser bipartita está debe relacionarse con al menos un elemento en la partición ajena a ella misma.
   - Todos los vértices tienen grado k.

   Tenemos que en el caso mínimo, $|V_G| = 2$ hay una relación entre dos vértices (cada uno de ellos pertenecientes a su respectiva partición). Por lo tanto, al ser k-regular, tenemos que el grado de estos vértices es al menos 1. Entonces, $k \geq 1$.
   Ahora usemos un resultado ya conocido. Sabemos que:

$$\sum_{v\in X} d(v) = \sum_{v\in Y} d(v)$$

   Como cada vértice tiene grado k. podemos decir que:

$$|X| = \frac{\sum\limits_{v\in X} d(v)}{k} \quad \text{y} \quad |Y| = \frac{\sum\limits_{v\in Y} d(v)}{k}$$

   De lo anterior, se deduce que:

$$\therefore \quad |X| = |Y|$$ QED

Puntos Extra

1. Sea $G = [X, Y]$ una gráfica bipartita con $|X| = r$ y $|Y| = s$.

   (a) Demuestre que $|E| \leq rs$.

Demostración: (Inducción sobre $|Y|$)

Sea r cualquier Entero tal que $|X| = r$

Paso base ($n = 1$): Sea G(V_1,E_1): $G[X, Y]$ donde $|Y| = 1 \Longrightarrow$ se sigue por vacuidad que MAX{$|E_1|$}=r (ya que todo elemento de X solo se puede relacionar al unico vértice en Y).

Hipótesis de inducción($n = k$): Supongamos que existe G(V$_k$, E$_k$): G[X,Y] tal que $|X| = r$ y $|Y| = k \Longrightarrow$ MAX$\{|E_k|\} = rk$

Pd) (para n=k+1): G(V$_{(k+1)}$,E$_{(k+1)}$): G[X,Y] tal que $|X| = r$ y $|Y| = k + 1 \Longrightarrow$ MAX$\{|E_{(k+1)}|\} = r(k + 1)$

Dem

Por Hipótesis de inducción si G(V$_k$,E$_k$): G(X,Y) tal que $|X| = r$ y $|Y| = k$ por lo que el MAX$\{|Ek|\} = rk$ agregando un vertice a Y $\Longrightarrow$ definimos $|V(k + 1)| = 1 + |Vk|$ por lo que el MAX$\{|E(k + 1)|\}$ = MAX$\{|Ek|\}$+ k (donde k son las nuevas relaciones entre el vertice que se agrego y todos los vertices de X) $\Longrightarrow$ MAX$\{|Ek|\}$+ k $= rk + r = r(k + 1)$ por lo tanto el MAX$\{|E(k + 1)|\} = r(k + 1)$.

Por lo tanto, para toda G(V,E) si G[X,Y]: $|X| = r$ y $|Y| = s \Longrightarrow$ MAX$\{|E|\}$ = rs □

(b) Deduzca que $|E| \leq \frac{|V|^2}{4}$.

Demostración: PD. rs $\leqslant (|V|^2)/4$

Sabemos que para toda gráfica G= $[X, Y]$: $|X| = r$ y $|Y| = s \Longrightarrow$ (por teo. cálculo $x^2 > 0$) sean cualesquiera r,s que pertenecen a los Enteros $\Longrightarrow 0 \leqslant (r - s)^2 \Longrightarrow 0 \leqslant r^2 + s^2 - 2rs \Longrightarrow 2rs \leqslant r^2 + s^2 \Longrightarrow 4rs \leqslant r^2 + s^2 + 2rs \Longrightarrow 4rs \leqslant (r+s)^2 \Longrightarrow rs \leqslant ((r+s)^2)/4$ y $r + s = |X| + |Y|$ por lo que por definición de particion $|X| + |Y| = |V| \Longrightarrow (|V|^2)/4$ por inciso (a) tenemos que: $|E| \leqslant rs \leqslant (|V|^2)/4$ por lo tanto $|E| \leqslant (|V|^2)/4$

□

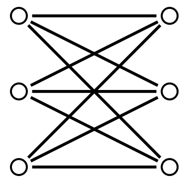
(c) Describa a las gráficas bipartitas que cumplen la igualdad en el inciso anterior. Justifique su respuesta. SOLUCION

Debemos ver donde se cumple la igualdad $|E| = (|V|^2)/4$

Sea $|V| = |X|+|Y| = r+s \Longrightarrow$ por la demostración del inciso del inciso (b) y (a) tenemos que si $0 \leqslant (r - s)^2 \Longrightarrow |E| \leqslant rs \leqslant (|V|^2)/4 \Longrightarrow$ si $0 = (r - s)^2 \Longrightarrow 0 = r - s \Longrightarrow s = r \Longrightarrow rs = (|V|^2)/4$ y si G es una gráfica bipartita completa $\Longrightarrow |E| = rs = (|V|^2)/4$ por lo tanto, si las particiones de la gráfica tienen el mismo número de elementos y tambien la gráfica es bipartita completa se cumple la desigualdad $|E| = (|V|^2)/4$

Ejemplo: $rs = 9$

G_1



$|E| = 9$
$|V| = 9 \Longrightarrow |V|^2/4 = 36/4 = 9$