UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO

Facultad de Ciencias

Autores:
Fernanda Villafán Flores
Fernando Alvarado Palacios
Adrián Aguilera Moreno


# Gráficas y Juegos

# Tarea 7

1. (a) Demuestre que si $G$ tiene diámetro mayor que 3 (posiblemente infinito), entonces $\overline{G}$ tiene diámetro menor que 3. Concluya que si $G$ es inconexa, entonces $\overline{G}$ es conexa.

***Demostración:*** Sea $G$ una gráfica.

Probaremos que $\overline{G}$ tiene diámetro menor a 3.

Primero, sabemos que $G$ tiene diametro mayor a 3 entonces tomemos una trayectoria $P$ de $G$ tal que su longitud es $n$ (con $n > 3$).

La denotaremos como:

$$P = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$$

Ahora, por definición de $\overline{G}$ es tal que:

$$|E_{\overline{G}}| = \binom{|V| - 1}{2} - |E_G|$$

Por tanto, en $\overline{G}$ la trayectoria $P$ cambia de la siguiente manera:

- El vértice $x_0$ es adyacente a los vértices $x_2, x_3, \ldots, x_n$, donde esto equivale a $n - 1$ vértices.
- El vértice $x_1$ es adyacente a los vértices $x_3, x_4, \ldots, x_n$, donde esto equivale a $n - 2$ vértices.
- El vértice $x_2$ es adyacente a los vértices $x_0, x_4, \ldots, x_n$, donde esto equivale a $n - 2$ vértices.

Siguiendo este procedimiento, tenemos lo siguiente:

- El vértice $x_i$ es adyacente a los vértices $x_{i-2}, x_{i+2}, x_{i+3}, \ldots, x_n$, con $i > 1$.

Así, notemos lo siguiente:

En $\overline{G}$ $x_0$ **no es** adyacente a $x_1$, entonces necesitamos otro vértice $x_3$ para llegar a $x_1$. Lo que implica que nos toma distancia igual a 2 llegar de $x_0$ a $x_1$.

De la misma forma, $x_1$ **no es** adyacente a $x_0$ ni a $x_2$, entonces necesitamos otro vértice $x_4$ para llegar a $x_0$ o $x_2$. Lo que implica que nos toma distancia igual a 2 llegar de $x_1$ a $x_0$ o de $x_1$ a $x_2$.

De lo anterior obtenemos que:

El vértice $x_i$ **no es** adyacente al vértice $x_{i-1}$ ni al vértice $x_{i+1}$, entonces necesitamos otro vértice $x_{i+2}$ para llegar a $x_{i-1}$ o $x_{i+1}$. Lo que implica que nos toma distancia igual a 2 llegar de $x_i$ a $x_{i-1}$ o de $x_i$ a $x_{i+1}$.

Por lo tanto, $\overline{G}$ tiene diámetro menor a 3.

Aún más, si $G$ es inconexa entonces $\overline{G}$ es conexa (ya que por definición, para cualesquiera dos vértices distintos $u, v \in G$ se tiene que $uv \in E_{\overline{G}}$ si y sólo si $uv \notin E_G$). Es decir, en $\overline{G}$ estarán todas las aristas que no estén en $G$. □

(b) Una gráfica $G$ es autocomplementaria si $G \cong \overline{G}$. Demuestre que si $G$ es autocomplementaria, entonces $|V| \overset{4}{\equiv} 0$ o $|V| \overset{4}{\equiv} 1$.

***Demostración:*** Primero, sabemos que si $G \cong \overline{G}$ entonces $V_G = V_{\overline{G}}$.

Probaremos que $|E_G| = |E_{\overline{G}}|$.

Veamos lo siguiente:

$$|V| \overset{4}{\equiv} 1 \longrightarrow |V| \equiv 1 \mod 4$$

Recordando la definición de $\mod$, tenemos:

$$\begin{aligned} |V| \equiv 1 \mod 4 &\longrightarrow 4 \Big| |V| - 1 \\ &\longrightarrow |V| - 1 = 4 \cdot k, \text{ con } k \in \mathbb{N} \\ &\longrightarrow |V| = 4 \cdot k + 1 \end{aligned}$$

Luego, por definición de $\overline{G}$, tenemos:

$$|E_{\overline{G}}| = \binom{|V| - 1}{2} - |E_G|$$

Sea $n = |V_G|$.
Así,

$$\begin{aligned} |E_G| &= |E_{\overline{G}}| \\ &= \binom{|V_G| - 1}{2} - |E_G| \\ &= \binom{n-1}{2} - (n-1), \text{ porque sabemos que } |E_G| = |V_G - 1| \text{ y } |V_G| = n \\ &= \frac{(n-1)!}{2! \cdot ((n-1)-2)!} - (n-1) \\ &= \frac{(n-1)!}{2! \cdot (n-1-2)!} - (n-1) \\ &= \frac{(n-1)!}{2! \cdot (n-3)!} - (n-1) \\ &= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)!}{2! \cdot (n-3)!} - (n-1), \text{ porque } n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)! \\ &= \frac{(n-1)(n-2)\cancel{(n-3)!}}{2! \cdot \cancel{(n-3)!}} - (n-1) \\ &= \frac{(n-1)(n-2)}{2!} - (n-1) \\ &= \frac{(n-1)(n-2)}{2} - (n-1), \text{ porque } 2! = 2 \cdot 1 = 2 \\ &= \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{2(n-1)}{2} \\ &= \frac{(n-1)(n-2) - 2(n-1)}{2} \\ &= \frac{n^2 - 3n + 2 - 2n + 2}{2} \\ &= \frac{n^2 - 5n + 4}{2} \end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}\frac{n^2-5n+4}{2} &= \frac{4\left[\frac{n^2}{4}-\frac{5n}{4}+1\right]}{2}\\ &= 4\cdot\frac{\left[\frac{n^2}{4}-\frac{5n}{4}+1\right]}{2}\\ &= 4\cdot\frac{\left[\frac{n^2-5n}{4}+1\right]}{2}\\ &= 4\cdot\frac{\left[\frac{n^2-5n+4}{4}\right]}{2}\\ &= 4\cdot\left[\frac{n^2-5n+4}{8}\right]\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos lo siguiente:

$$|E_G| = 4\cdot\left[\frac{n^2-5n+4}{8}\right] \longrightarrow |V_G|-1 = 4\cdot\left[\frac{n^2-5n+4}{8}\right]$$

Despejando $|V_G|$, obtenemos:

$$|V_G|-1 = 4\cdot\left[\frac{n^2-5n+4}{8}\right] \longrightarrow |V_G| = 4\cdot\left[\frac{n^2-5n+4}{8}\right]+1$$

Sea $k = \left[\frac{n^2-5n+4}{8}\right]$. Entonces:

$$|V_G| = 4\cdot k+1$$

Por lo tanto, llegamos a que $|E_G| = |E_{\overline{G}}|$ si $|V_G| = 4\cdot k+1$.

□

2. Un *orden topológico* de una digráfica $D$ es un orden lineal de sus vértices tal que para cada flecha $a$ de $D$, la cola de $a$ precede a su cabeza en el orden.

   (a) Demuestre que toda digráfica acíclica tiene al menos una fuente (vértice de ingrado 0) y un sumidero (vértice de exgrado 0).

   ***Demostración:*** Procedamos por reducción al absurdo. Sea $D$ una digráfica acíclica con $\delta^+ > 0$ y $\delta^- > 0$, esto es que, para cada $v \in V_D$ hay una flecha que le "*pega*"[1] a $v$ y otra que "*sale*"[2] de $v$. Tomemos la trayectoria $\vec{T}$ más larga en $D$ y sea $x \in V_D$ el último vértice de $\vec{T}$, luego en $x$ *sale* una arista hacia algún otro vértice en $\vec{T}$ [pues si saliera hacia algún otro vértice que no este en $\vec{T}$, llegariamos a que $\vec{T}$ no es de longitud máxima!!], así $\vec{T}xy$ claramente contiene un ciclo, esto implica que $D$ contiene un ciclo!!, he aquí una contradicción de suponer que $D$ no contiene ciclos.

   $\therefore$ Si $D$ es acíclica tiene al menos una fuente y un sumidero. □

   (b) Deduzca que una digráfica admite un orden topológico si y sólo si es acíclica.

[1] Una arista incide en $v$ y $v$ es la cabeza.
[2] Una arista que inicia en $v$ con dirección a otro vértice.

***Demostración:*** Para este inciso analicemos 2 posibles casos:

⇒) Procedamos por reducción al absurdo. Sea $D$ una digráfica tal que admite un orden topológico. Supongamos que $D$ contiene al menos un ciclo $C$, entonces existe un $x \in V_D$ tal que $\{x\} \subset C$ y $x$ es un vértice inicial y final en $C$, luego existe $y \in V_D$ : $\{y\} \subset C$ tal que $y\vec{x}$ es una arista, por tanto $y < x$ [esto es que $y$ precede a $x$ en el orden]. Nótese que hay una trayectoria $\vec{T}$ que va de $x$ a $y$ en $C$, así $x < y$!! [esto es que $x$ precede a $y$ en el orden], he aquí una contradicción de suponer que $D$ admite un orden topológico.

$\therefore$ Si $D$ admite un orden topológico $\Rightarrow$ $D$ es acíclica.

⇐) Por el inciso $(a)$ sabemos que $D$ tiene al menos una *fuente* y un *sumidero*, tomemos una componente conexa en $D$ y veamos que si los vértices $x$ es *fuente* e $y$ es *sumidero*, entonces la trayectoria de $x$ a $y$ es un orden topológico, si hay más de una *fuente* o más de un *sumidero*, cada trayectoria entre una *fuente* y un *sumidero* es un orden topológico [pues de no serlo, dos flechas distintas provenientes de una misma fuente incidirían en algún vértice en común, lo que implicaría que $D$ contiene un ciclo!!], así la componente conexa admite un orden topológico y esto pasa para cualquier componente conexa en $D$.

$\therefore$ Si $D$ es acíclica $\Rightarrow$ $D$ admite un orden topológico.

$\therefore$ Una digráfica admite un orden topológico si y sólo si es acíclica. □

(c) Exhiba un algoritmo de tiempo a lo más cuadrático para encontrar un orden topológico en una digráfica acíclica.

A continuación se muestra el algoritmo[3] requerido:

**1:** TopologicalOrder($D$; $D$)

**Input:** Una digráfica $D$ acíclica.
**Output:** Un orden topológico admitido en $D$ basado en números.

```
1  for v ∈ V_D do
2  |  if d⁻(v) = 0 then
3  |  |  v ← 0;
4  |  end
5  end
6  for v ∈ V_D do
7  |  if v ≠ 0 then
8  |  |  temp ← 0;
9  |  |  for u ∈ V_D : u es antecesor de v en D and u ≠ null do
10 |  |  |  if temp < u then
11 |  |  |  |  temp ← u
12 |  |  |  end
13 |  |  end
14 |  |  v ← temp + 1;
15 |  |  for u ∈ V_D : u es sucesor de v en D and u ≠ null do
16 |  |  |  if u < v then
17 |  |  |  |  u ← v + 1
18 |  |  |  end
19 |  |  end
20 |  end
21 end
22 return D
```

[3]Tome en cuenta que suponemos que $D$ se pasa como parámetro con valores nulos en sus vértices.

3. Demuestre que cada uno de los siguientes problemas está en la clase $NP$ exhibiendo un certificado y un algoritmo de tiempo polinomial para verificar el certificado (escriba el algoritmo utilizando pseudo código como el visto en clase; sólo está permitido el uso de las estructuras de control **if**, **while** y **for**). Demuestre que su algoritmo usa tiempo polinomial.

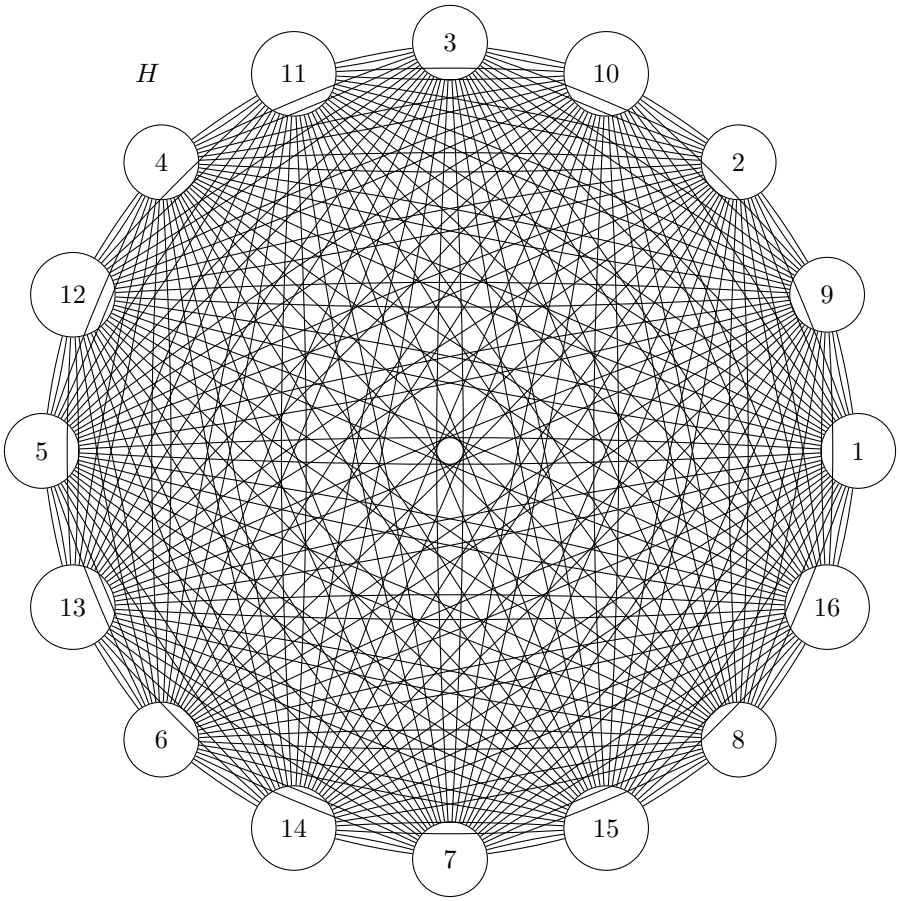
   (a) Hamilton Cycle.

   (b) Vertex Cover.

   (c) Colouring.

   (d) Dominating Set.

**Solución de (a):** A continuación se da un certificado para una gráfica que contiene un ciclo hamiltoniano:




y $S = (v_0, v_1, \cdots, v_n, v_0) = (3, 10, 2, 9, 1, 16, 8, 15, 7, 14, 6, 13, 5, 12, 4, 11, 3)$ una `colección` que contiene los vértices en sucesión tal que está sucesión forma un ciclo hamiltoniano en $H$. Así, nuestro algoritmo es el siguiente:

**2:** HamiltonCycle($\langle H, S\rangle$; `true/false`)

**Input:** Una gráfica $H$ y una colección $S$ que contiene a la sucesión de vértices que representará el ciclo hamiltoniano en $H$.

**Output:** `TRUE` o `FALSE` dependiendo si $S$ es un ciclo hamiltoniano en $H$.

```
1  if |V_G| ≠ |S| then
2  |  return false;
3  end
4  for v ∈ S do
5  |  siguiente= 0;
6  |  while siguiente < |V_H| do
7  |  |  u ← S(siguiente);
8  |  |  siguiente ← siguiente + 1;
9  |  |  if vu ∉ E_H then
10 |  |  |  return false;
11 |  |  end
12 |  end
13 end
14 if S(0) ≠S(|V_H| − 1) then
15 |  return false;
16 end
17 for v ∈ S do
18 |  decision ← false;
19 |  for u ∈ V_G do
20 |  |  if u = v then
21 |  |  |  decision ← true;
22 |  |  end
23 |  end
24 |  if decision = false then
25 |  |  return decision;
26 |  end
27 end
28 return true;
```

Este algoritmo verifica si la entrada (`input`) es un sí-certificado o no.

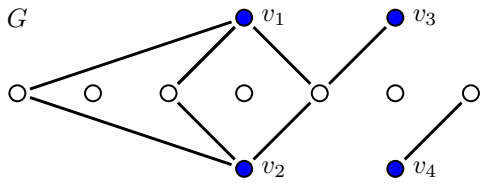
> Obs. Tomar a `S` como una colección da flexibilidad en su implementación, es por eso que `S(int siguiente)` está entre paréntesis.

Ahora, analicemos la complejidad del algoritmo `HamiltonCycle`, veamos que en la línea `1` tenemos una instrucción iterativa que por definición de $S$ tenemos que se iterará $|V_G| - 1$ veces, luego en la línea `6` hay otro ciclo tal que se itera $|V_G|$ veces, así por la regla de la multiplicación de complejidades tenemos una complejidad, hasta el momento, contenida en $\mathcal{O}(|V_G|^2)$. Luego, por la línea `17` sabemos que hay una instrucción iterativa no anidada en las instrucciones anteriores que se iterará $|V_G|$ veces, y por la línea `19` sabemos que hay un ciclo que se itera $|V_G|$ veces y además está anidada en el ciclo de la línea `17`, luego la complejidad de `HamiltonCycle` esta contenida en $\mathcal{O}(|V_G|^2 + |V_G|^2)$ y por la regla de suma de complejidades tenemos que

$$\mathcal{O}(|V_G|^2 + |V_G|^2) = \mathcal{O}(|V_G|^2)$$

Como la complejidad de `HamiltonCycle` está en un tiempo cuadrático y por la definición de problemas en la clase $NP$, tenemos que `HamiltonCycle` está en la clase $NP$. □

**Solución de (b):** A continuación se da un certificado para una gráfica que contiene un covertura de vértices:




con $S = (v_1, v_2v_3, v_4)$ una cubierta de vértices en $G$. Así nuestro algoritmo sería el que a continuación se muestra:

**3:** VertexCover($\langle G, S \rangle$; `true/false`)

**Input:** Una gráfica $G$ y una `colección` $S$ que contiene a la sucesión que conforma la covertura de vértices en $G$.
**Output:** `TRUE` o `FALSE` dependiendo si $S$ es una covertura de vértices en $G$.

```
1  contador ← 0;
2  for v ∈ S do
3  |  decision ← false;
4  |  for u ∈ V_G do
5  |  |  if u = v then
6  |  |  |  decision ← true;
7  |  |  end
8  |  end
9  |  if decision = false then
10 |  |  return decision;
11 |  end
12 |  for u ∈ V_G do
13 |  |  if vu ∈ E_G then
14 |  |  |  contador ← contador + 1;
15 |  |  end
16 |  end
17 end
18 if contador≠ |E_G| then
19 |  return false;
20 end
21 return true;
```

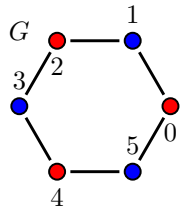
Este algoritmo verifica que la entrada (`input`) sea un sí-certificado, *i.e.*, que `S` sea una cobertura de vértices sobre $G$. Esto es, que la unión de todas las aristas incidentes en los vértices de `S` contengan todas las aristas de $G$.

Ahora analicemos la complejidad del algoritmo `VertexCover`, veamos que en la línea `2` hay una instrucción iterativa de complejidad en $\mathcal{O}(|V_G|)$, en la cual están anidadas las instrucciones de las líneas `4` y `12`, por regla de la suma de complejidades y como estas instrucciones[4] tienen las misma complejidad (contenida en $\mathcal{O}(|V_G|)$), es indistinto con cual nos quedemos, así por la regla del producto tenemos que la complejidad de `VertexCover` es $\mathcal{O}(|V|^2)$.

Como la complejidad del algoritmo `VertexCover` es $\mathcal{O}(|V|^2)$, podemos concluir que se ejecuta en tiempo polinomial, luego por la definición de problemas en la clase $NP$, tenemos que `VertexCover` está contenido en esta misma. □

[4]Línea `4` y línea12.

**Solución de (c):** A continuación se muestra un certificado para una gráfica que admite una coloración:




con $S = (1R, 3R, 5R, 0A, 2A, 4A)$ una coloración de vértices en $G$. Luego, nuestro algoritmo sería el que a continuación se muestra:

**4:** Colouring($\langle G, S \rangle$; `true/false`)

**Input:** Una gráfica $G$ y una `colección` $S$ que contiene a la sucesión que conforma la coloración de vértices en $G$.
**Output:** `TRUE` o `FALSE` dependiendo si $S$ es una coloración de vértices en $G$.

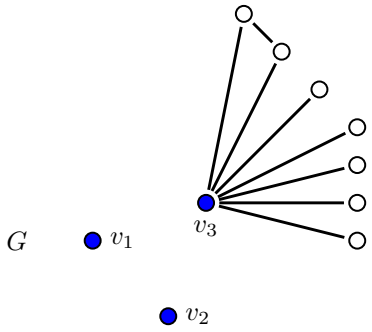
```
1  if |S| ≠ |V_G| then
2  |  return false;
3  end
4  for v ∈ S do
5  |  decision ← false;
6  |  for u ∈ V_G do
7  |  |  if v = u then
8  |  |  |  decision ← true;
9  |  |  end
10 |  end
11 |  if decision = false then
12 |  |  return decision;
13 |  end
14 |  for u ∈ S do
15 |  |  if v tiene el mismo color que u then
16 |  |  |  if uv ∈ E_G then
17 |  |  |  |  return false;
18 |  |  |  end
19 |  |  end
20 |  end
21 end
22 return true;
```

Este algoritmo verifica si la entrada (`input`) es un sí-certificado o no, *i.e.*, si `S` es una coloración para $G$. Esto es, que a cada vértice de la gráfica le asigne un color de tal manera que dos vértices vecinos no tienen el mismo color.

Analizando la complejidad del algoritmo `Colouring` tenemos que por la línea `4` hay una instrucción iterativa que tiene complejidad en $\mathcal{O}(|V|)$, luego los ciclos de las líneas `6` y `14` están anidados en el de la línea `4`, usando la regla de la suma (y como ambos tienen la misma complejidad) tenemos que la complejidad de `Colouring` es $\mathcal{O}(|V_G|^2)$.

Como `Colouring` tiene complejidad polinomial, se sigue que `Colouring` esta en la clase $NP$. □

**Solución de (d):** A continuación se muestra un conjunto dominante como certificado para una gráfica $G$:




con $S = (v_1, v_2, v_3)$ un conjunto dominante de vértices en $G$. Luego, nuestro algoritmo sería el que a continuación se muestra:

**5:** DominatingSet($\langle G, S \rangle$; `true`/`false`)

**Input:** Una gráfica $G$ y una `colección` $S$ que contiene a la sucesión que conforma un conjunto dominante de vértices en $G$.
**Output:** `TRUE` o `FALSE` dependiendo si $S$ es un conjunto dominante de vértices en $G$.

```
1  C ← ∅;
2  for v ∈ S do
3  |  decision ← false;
4  |  for u ∈ V_G do
5  |  |  if v = u then
6  |  |  |  decision ← true;
7  |  |  end
8  |  end
9  |  if decision = false then
10 |  |  return false;
11 |  end
12 |  C ← v;
13 |  for u ∈ V_G do
14 |  |  if uv ∈ E_G then
15 |  |  |  C ← u;
16 |  |  end
17 |  end
18 end
19 for v ∈ V_G do
20 |  decision ← false;
21 |  for u ∈ C do
22 |  |  if v = u then
23 |  |  |  decision ← true;
24 |  |  end
25 |  end
26 end
27 return decision;
```

Este algoritmo verifica si la entrada (`input`) es un sí-certificado o no, *i.e.*, si `S` es un conjunto dominante para $G$. Esto es, que la unión de los vecinos de los vértices de `S`, más los vértices que están en `S`, son todos los vértices en $G$.
Por la línea 2 sabemos que hay una instrucción iterativa que contiene anidadas a los ciclos de las

líneas `4` y `13`, en el peor de los casos el ciclo de la línea `2` se iterará $|V_G|$ veces y esto producto con $|V_G|$ que son las veces que se iteran los ciclos de las líneas `4` y `13`, esto nos da una complejidad en $\mathcal{O}(|V_G|)$. Luego las los ciclos anidados de las líneas `19` y `21` nos dan una complejidad en $\mathcal{O}(|V_G|^2)$, así concluimos que `DominatingSet` tiene una complejidad en $\mathcal{O}(|V_G|^2)$.
Como `DominatingSet` tiene comlejidad cuadrática, entonces tiene complejidad polinomial y por tanto `DominatingSet` se encuentra en la clase de problemas $NP$.

## Puntos extra

1. Demuestre que toda digráfica sin lazos admite una descomposición en dos digráficas acíclicas, es decir, que existen $D_1$ y $D_2$ subdigráficas de $D$, acíclicas y tales que $D_1 \cup D_2 = D$ y $A_{D_1} \cap A_{D_2} = \varnothing$.

2. Un torneo es una digráfica en la que entre cualesquiera dos vértices existe una única flecha. Demuestre que todo torneo es fuertemente conexo o puede transformarse en un torneo fuertemente conexo al reorientar exactamente una flecha.

3. Demuestre que una digráfica es fuertemente conexa si y sólo si contiene un camino cerrado generador.

4. Demuestre que si $l, m$ y $n$ son enteros con $0 < l \leq m \leq n$, entonces existe una gráfica simple $G$ con $\kappa = l$, $\kappa' = m$ y $\delta = n$.

   ***Demostración:*** Sean l, m, n perteneciente a los Enteros y G una gráfica con K=l, k'=m y $\delta$=n, tenemos que $0 < k$ ya que una gráfica no puede tener conexidad menor que $0 \rightarrow$ por proposición demostrada en clase esta gráfica tendra la desigualdad $0 < k \leqslant k' \leqslant \delta$ sustituyendo los valores $0 < l \leqslant m \leqslant n$

   Por lo tanto existe la grafica (ya que la proposicion demostrada en clase era un para todo y el paratodo implica el existe) □