UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO
Facultad de Ciencias

Autores:
Fernanda Villafán Flores
Fernando Alvarado Palacios
Adrián Aguilera Moreno

Gráficas y Juegos

Tarea 9 y 10

Puntos Extra

1. (2 puntos) Sea G una gráfica conexa y e una arista de G que no sea un lazo. Exhiba una biyección entre el conjunto de árboles generadores de G que contienen a e y el conjunto de árboles generadores de G/e.

2. (2 puntos) Sea T un árbol de DFS de una gráfica conexa no trivial G, y sea v la raiz de un bloque B de G. Demuestre que el grado de v en $T \cap B$ es uno.

3. (2 puntos) Si f es la función de tiempo de entrada del algoritmo DFS, defina $f^*: V \to \mathbb{N}$ de la siguiente forma. Si algún ancestro propio de v puede ser alcanzado desde v mediante una trayectoria dirigida que consista de flechas del árbol (posiblemente ninguna) seguida de una flecha que no está en el árbol (que va hacia arriba), $f^*(v)$ se define como el menor valor de f de un ancestro de este tipo; si no, $f^*(v) = f(v)$. Observe que un vértice v es la raíz de un bloque si y sólo si tiene un hijo w tal que $f^*(w) \geq f(v)$. Modifique el algoritmo DFS para que regrese los vértices de corte y los bloques de una gráfica conexa.

4. (2 puntos) Sea T un árbol óptimo en una gráfica conexa ponderada (G, w) (con pesos positivos), y sean x y y vértices adyacentes en T. Demuestre que la trayectoria $xTy = xy$ es una xy-trayectoria de peso mínimo en G.

5. (2 puntos) Demuestre que si todos los pesos de una gráfica ponderada G son distintos, entonces G tiene un único árbol óptimo.

6. (2 puntos) Modifique el algoritmo de Borůvka-Kruskal para que en cada iteración vértices en la misma componente del bosque F reciban el mismo color y vértices en componentes distintas reciban colores distintos.

7. (2 puntos) Demuestre que el problema de encontrar un árbol generador de peso máximo en una gráfica conexa puede resolverse eligiendo iterativamente una arista de peso máximo, con la condición de que la subgráfica resultante siga siendo un bosque. (Proponga un algoritmo y demuestre que es correcto.)

8. (2 puntos) Escriba una versión del algoritmo BFS para digráficas. Utilice esta versión de BFS dirigida para describir un algoritmo que encuentre un ciclo dirigido de longitud mínima en una digráfica. Su versión dirigida de BFS debe de correr en tiempo $\mathcal{O}(|V| + |E|)$, y el algoritmo para encontrar el ciclo dirigido más corto debe correr en tiempo a lo más $\mathcal{O}(|V|^2 + |V||E|)$.