UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO
Facultad de Ciencias

Autores:
Fernanda Villafán Flores
Fernando Alvarado Palacios
Adrián Aguilera Moreno

Gráficas y Juegos

Tarea 5

1. Demuestre que si G es simple y 3-regular, entonces $\kappa = \kappa'$.

2. Demuestre que una gráfica es 2-conexa por aristas si y sólo si cualesquiera dos vértices están conectados por al menos dos trayectorias ajenas por aristas.

   Demostración: Procedemos por doble implicación.

   Sea G una gráfica y sean $u, v \in V_G$.

   - $\Longrightarrow$.
     Demostraremos que cualesquiera dos vértices están conectados por al menos dos trayectorias ajenas por aristas.
     Tenemos que G es 2-conexa por aristas, entonces existe una uv-trayectoria P tal que:
     $$P = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$$
     Ahora, si borramos a la arista e de P que conecta a los vértices p_i y p_{i+1}, entonces existe una uv-trayectoria Q tal que:
     $$Q = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$$
     , donde Q no pasa por la arista e (esto ya que G es 2-conexa por aristas).
     Luego, G sigue siendo conexa y por tanto, pudimos encontrar al menos dos uv-trayectorias ajenas por aristas que conectan a los vértices u y v.
   - $\Longleftarrow$.
     Demostraremos que G es una gráfica 2-conexa por aristas.
     Tenemos que u y v están conectados por al menos dos uv-trayectorias ajenas por aristas P y Q. Esto implica que si queremos desconectar a la gráfica G, debemos borrar dos aristas (una arista en P y otra en Q). Entonces, G sigue siendo conexa si tenemos subconjuntos S en G con $|S| < 2$.
     Por lo tanto, tenemos que G es 2-conexa.

   De lo anterior, concluimos que G es 2-conexa por aristas si y sólo si cualesquiera dos vértices están conectados por al menos dos trayectorias ajenas por aristas. QED

3. Demuestre que si G no tiene ciclos pares, entonces cada bloque de G es K_1, K_2 o un ciclo impar.

   Demostración: Procedemos por contrapositiva.

   Demostraremos que si ningún bloque de G es K_1, K_2 ni un ciclo impar, entonces G tiene ciclos pares.

   Sea G una gráfica y G_1 un bloque de G con al menos 3 vértices.

   El inciso c) del **Ejercicio** 5 nos dice que:

   Para cualesquiera dos vértices de G, existe un ciclo que los contiene

   Por lo anterior, entonces G_1 contiene un ciclo y además, por hipótesis, tenemos que G_1 no tiene ciclos impares.

   Por lo tanto, G_1 tiene ciclos pares. QED

4. Sea G una gráfica 2-conexa y sean X y Y subconjuntos ajenos de V, cada un con al menos dos vértices. Demuestre que G contiene trayectorias ajenas P y Q tales que

   (a) Los vértices iniciales de P y Q pertenecen a X.

   (b) Los vértices finales de P y Q pertenecen a Y.

   (c) Ningún vértice interno de P o Q pertenece a $X \cup Y$.

   Demostración: Sea G 2-conexa y X, Y subconjuntos ajenos de V $\Leftrightarrow$ sean x'$\in$ X y y'$\in$ Y $\Leftrightarrow$ por el ejercicio 2 esta tarea, podemos asegurar que existen dos trayectorias internamente ajenas por aristas que conectan a x' y y', nombremos a estas trayectorias P' y Q'.

   Sea P'= $(x' = a_0, a_1, a_2, ..., a_n = y')$ para alguna n que pertenezca a los Naturales y sea Q'= $(x' = b_0, b_1, b_2, ..., b_k = y')$ para alguna k que pertenezca a los naturales.

   $\Leftrightarrow$ Comparando los vertices, sea a_i para alguna i que pertenece a los naturales, tal que $a_i \in$ X, pero $a_{i+1} \notin$ X por lo que ahora P'= $(x' = a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, ..., a_n = y')$.

   De igual forma existira algun b_r para alguna r que pertenece a los naturales, tal que $b_r \in$ X, pero $b_{r+1} \notin$ X por lo que ahora Q'= $(x' = b_r, b_{r+1}, b_{r+2}, ..., b_k = y')$.

   Ahora definamos P'^{-1} como $(y' = a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_i = x')$ y Q'^{-1} como $(y' = b_k, b_{k-1}, b_{k-2}, ..., b_r = x')$ $\Leftrightarrow$ aplicando el razonamiento anterior, existira t que pertenzca los naturales, tal que $b_{k-t} \in Y$ y $b_{k-(t+1)} \notin Y$ y de igual forma existiara s que pertenezca a los naturales tal que $a_{n-s} \in Y$ y $a_{n-(s+1)} \notin Y$ $\Leftrightarrow$ definamos a $P = (a_i, a_{i+1}, ..., a_{n-s})$ y definimos a $Q = (b_j, b_{j+1}, ..., b_{k-t})$

   Por lo tanto:

   a) se cumple ya que a_i y b_j pertenencen a X por construccion de nuetras trayectorias P y Q.

   b) se cumple ya que a_{n-r} y b_{k-t} pertenencen a Y por construccion de P y Q.

   c) se cumple de nuevo por construccion de P y Q y ya que X y Y son conjuntos disjuntos de V QED

5. Sea G una gráfica conexa con al menos 3 vértices. Demuestre que los siguientes enunciados son equivalentes.

   (a) G es un bloque.

   (b) Entre cualesquiera dos vértices distintos existen dos trayectorias internamente ajenas.

   (c) Para cualesquiera dos vértices de G existe un ciclo que los contiene.

   (d) Para cualquier vértice y cualquier arista de G existe un ciclo que los contiene.

   (e) Para cualesquiera dos aristas de G existe un ciclo que los contiene.

   (f) Dados dos vértices $u, v \in V(G)$ y una arista $e \in E(G)$, existe una uv-trayectoria que pasa por e.

   (g) Para cualesquiera tres vértices distintos de G, existe una trayectoria que une a cualesquiera dos de ellos y que pasa por el tercero.

   (h) Para cualesquiera tres vértices distintos de G, existe una trayectoria que une a cualesquiera dos de ellos que no pasa por el tercero.

Demostración: Las implicaciones; $(a) \Rightarrow (b)$, $(b) \Rightarrow (c)$ y $(c) \Rightarrow (d)$, se omiten por estar escritas en las notas de clase. Las implicaciones restantes se enumeran a continuación:

·) Por mostrar $(d) \Rightarrow (e)$.

Por (d) sabemos que cualquier arista se encuentra contenida en un ciclo, por consecuencia directa, cualesquiera 2 aristas se encuentran contenidas en algún ciclo.

·) Por mostrar $(e) \Rightarrow (f)$.

Nótese que como consecuencia de (e)(en partícular cualquier arista esta contenida en un ciclo) cualquier vértice no aislado forma parte de un ciclo, como G es conexa, entonces todos sus vértices son parte de algún ciclo, esto nos lleva a que G es 2-conexa por aristas. Luego para u, v en V_G existen al menos dos uv-trayectoria ajenas por aristas. De lo anterior veamos como son v y u, esto es

- Si u, v forman parte de un mismo ciclo C. Sea $e \in E_G$ tal que forme parte de C, entonces terminamos, pues existe una trayectoria que pasa por e. Ahora, supongamos que e no es parte de C, y sea $e = xy(x, y$ en $V_G)$, así supongamos que los vértices y y v son los que se pueden "conectar" por la trayectoria de mayor longitud entre ellos y a la que llamaremos T, veamos que si x se encuentra en T terminamos, pues existe una xu-trayectoria que complementa a T para formar una uv-trayectoria con e contenida, luego si x no esta contenida en T, entonces Tx incluye a e por lo que si u no esta contenida en T, entonces existe una xu-trayectoria P tal que TxP es la trayectoria buscada[1].
- u, v forman parte de ciclos distintos. Si e forma parte de alguno de los ciclos que contiene a u y v como vértices, entonces hay una trayectoria Q que pasa por v (o u) y por e, pues están en el mismo ciclo, luego existe una trayectoria P que inicia en e y llega hasta u (o v) como consecuencia de que G sea conexa, además P ajena con Q por ser G 2-conexa por aristas, luego PQ es la trayectoria que pasa por u y v que además contiene a la arista e. Para finalizar, si e no se encuentra contenida en los ciclos que contienen a u y v como vértices. Supongamos que $e = xy(x, y$ en $V_G)$ y que de x se pueda obtener la trayectoria más larga con v, así, existe una xv-trayectoria T que ya contiene a e (porque T es la más larga, caso contrario sólo basta unir $T = Ty$), como existe una vu-trayectoria P, entonces TP (TyP) es la trayectoria buscada y terminamos.

·) Por mostrar $(f) \Rightarrow (g)$.

Por (f) tenemos que cualesquiera 2 vértices u, v y para toda arista e, existe una uv-trayectoria que contiene a e. Como G es conexa, entonces, cualquier vértice es parte de alguna arista, así, para cualesquiera x, y, z en V_G existe una xz-trayectoria T que contiene a $e \in E_G$, tal que $e = yw(w \in E_G)$ y por tanto T pasa por y.

·) Por mostrar $(g) \Rightarrow (h)$.

Como G es conexa, sabemos que existe una xy-trayectoria T, una xz-trayectoria P, y una yz-trayectoria Q, todas ellas de longitud mínima. Así

- Si todas las longitudes son iguales, *i.e.*, $\mathcal{L}(T) = \mathcal{L}(P) = \mathcal{L}(Q)$. Por hipótesis x, y, z no son iguales, así, cualquier trayectoria no contiene al tercer vértice y hemos encontrado al menos 2 trayectoias que cumplen con h.

[1] Con esto debería bastar, pues estamos mostrando la equivalencia a un bloque propiamente, sin embargo el caso restante también lo analizo, pues no veo como descartalo sin usar lo que estoy mostrando.

- Si dos de las trayectorias tienen una longitud mínima igual y menor a la que es desigual, *i.e.*, $\mathcal{L}(T) = \mathcal{L}(P) < \mathcal{L}(Q)$ o $\mathcal{L}(T) > \mathcal{L}(P) = \mathcal{L}(Q)$ o $\mathcal{L}(T) = \mathcal{L}(Q) < \mathcal{L}(P)$. En este caso, analicemos las dos trayectorias que resulten tener menor longitud entre P, Q, T. Si las trayectorias son T y P, entonces cualquiera de estas no contiene al tercer vértice, pues x, y, z son distintos y las trayectorias elegidas son las de menor longitud. Si se tiene que las trayectorias mínimas son T y Q, o P y Q, se cumple que un tercer vértice no esta en alguna de las dos trayectorias, pues en caso contrario y por saber que x, y, z son distintos, se tendría que hay una trayectoria menor con 2 de los vértices que estamos trabajando!!!, pero esto es absurdo, ya que, nuestras trayectorias eran mínimas, por lo cual se cumple h.
- Si una de las longitudes mínimas es menor a las restantes, *i.e.*, $\mathcal{L}(T) = \mathcal{L}(P) > \mathcal{L}(Q)$ o $\mathcal{L}(T) < \mathcal{L}(P) = \mathcal{L}(Q)$ o $\mathcal{L}(T) = \mathcal{L}(Q) > \mathcal{L}(P)$. Para este caso, elegimos la trayectoria con menor longitud y esta no contendrá al tercer vértice, pues para que pasará por el se necesitaría recorrer más aristas. En este caso tenemos una trayectoria que cumple con h.

·) Por mostrar $(h) \Rightarrow (a)$.

Sean x, y, z en V_G tales que P es una xy-trayectoria que no pasa por z. Como G es conexa, entonces existe una xy-trayectoria R y una yz-trayectoria S, tales que, $T = RS$, luego hemos encontrado dos xy-trayectorias distintas que en partícular forman un ciclo, además este ciclo es único porque esto pasa con cualquier vértice y entre ellos, *i.e.*, si seguimos escogiendo vértices de V_G veremos que todos están en un ciclo y que están relacionados de esta manera con todos los vértices, de lo anterior G es un único ciclo y concluimos que G es un bloque.

De lo anterior y por silogismo hipotético en los incisos anteriores se concluye que la caracterización se cumple. QED