

# UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO

Facultad de Ciencias

Autores:

Fernanda Villafán Flores

Fernando Alvarado Palacios

Adrián Aguilera Moreno



Gráficas y Juegos

## Tarea 3

1. Demuestre que si  $e \in E$ , entonces  $c(G) \leq c(G - e) \leq c(G) + 1$ .

**Demostración:** Dado que  $c$  corresponde a la función que devuelve la cantidad de componentes conexas, analicemos dos casos posibles:

- Si “e” no es un puente, entonces:

$$c(G - e) = c(G) \quad (1)$$

Esto pues sabemos que al borrarla una arista que no es puente,  $G$  no cambia en número de componentes conexas y así:

$$c(G) \leq c(G - e) \quad (2)$$

De la dicotomía de  $\leq$ , sabemos que cumple con la igualdad.  
Luego, hacemos notar que:

$$c(G) < c(G) + 1 \quad (3)$$

$$\Rightarrow c(G) \leq c(G) + 1 \quad (4)$$

De 1 y 4 se sigue que:

$$c(G - e) \leq c(G) + 1 \quad (5)$$

De 2 y 5 tenemos que:

$$c(G) \leq c(G - e) \leq c(G) + 1$$

- Si “e” es un puente, entonces:

$$c(G) < c(G - e), \text{ por la definición de arista como puente} \quad (6)$$

Así, tenemos que:

$$c(G) \leq c(G - e), \text{ pues de la dicotomía se cumple con } < \quad (7)$$

Además, sabemos que el número de componentes conexas aumenta exactamente en 1 en  $G - e$  (porque estamos trabajando con gráficas simples).

De esto, se sigue que:

$$c(G - e) = c(G) + 1 \quad (8)$$

$$\Rightarrow c(G - e) \leq c(G) + 1 \quad (9)$$

De 7 y 9 se sigue que:

$$c(G) \leq c(G - e) \leq c(G) + 1$$

De lo anterior, concluimos que  $c(G) \leq c(G - e) \leq c(G) + 1$ .

QED

2. Una gráfica es *escindible completa* si su conjunto de vértices admite una partición  $(S, K)$  de tal forma que  $S$  es un conjunto independiente,  $K$  es un clan, y cada vértice en  $S$  es adyacente a cada vértice en  $K$ . Demuestre que una gráfica es escindible completa si y sólo si no contiene a  $C_4$  ni a  $\overline{P_3}$  como subgráfica inducida.

**Demostración:** Sea  $C_4 = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_0)$  y  $\overline{P}_3 = \{y_0, y_1, y_2\}$  tal que  $y_0 y_2 \in E_G$ ,  $y_0 y_1, y_1 y_2 \notin E_G$ <sup>1</sup>, con  $x_i, y_j \in V_G$  ( $0 \leq i \leq 3, 0 \leq j \leq 2$ ).

Nótese que los  $x_i$ 's,  $y_j$ 's no pueden estar contenidos en una misma parte.

Es decir,  $C_4$  y  $\overline{P}_3$  no están contenidos en  $S$  (ya que ningún vértice en  $S$  es adyacente).

De igual manera, no están contenidos en  $K$  (ya que para cualesquiera 3 o 4 vértices en  $K$  se tiene a  $K_3$  o  $K_4$ ).

Para este ejercicio analizaremos dos posibles casos:

$\Rightarrow$ ) Procedamos por reducción al absurdo.

·) Si  $G$  es *escendible completa*, entonces  $C_4$  es subgráfica inducida de  $G$ .

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $x_0 \in S$  y  $x_1 \in K$  (caso contrario,  $x_1 \in S$  y  $x_0$  no sería adyacente a  $x_1$ !!).

Luego, si  $x_2 \in S$  entonces  $x_3 \in K$  (caso contrario,  $x_3 \in S$  y  $x_2$  no sería adyacente a  $x_3$ !!).

Así por definición de  $K$  (clan),  $x_1 x_3 \in E_G$ !! (ya que  $x_1, x_3 \in K$ ).

Si  $x_2 \in K$ , entonces  $x_3 \in S$  (caso contrario,  $x_3 \in K$  y  $x_1 x_3 \in E_G$ !!). Pero  $x_0$  no es adyacente a  $x_3$ !! ( $x_0, x_3 \in S$ ). He aquí una contradicción de suponer a  $C_4$  como subgráfica inducida de  $G$ .

Por tanto, se concluye que  $C_4$  no está contenida como subgráfica inducida en  $G$ .

··) Si  $G$  es *escendible completa*, entonces  $\overline{P}_3$  es subgráfica inducida de  $G$ .

Supongamos, sin pérdida de generalidad, que  $y_0 \in S$ .

Entonces:  $y_1 \in S$  (pues  $y_0 y_1 \notin E_G$ ).

Luego,  $y_2 \in S$ !! (pues  $y_1 y_2 \notin E_G$ ). Pero no todos los  $y_i$ 's pueden estar en  $S$ .

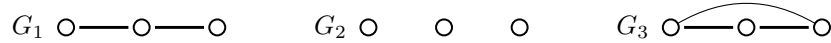
Si  $y_0 \in K$ , entonces  $y_1 \in S$  o  $y_1 \in K$  implican que  $y_0$  es adyacente a  $y_1$ !!

Pero  $y_0 y_1 \notin E_G$  y he aquí una contradicción de suponer a  $\overline{P}_3$  como subgráfica inducida de  $G$ .

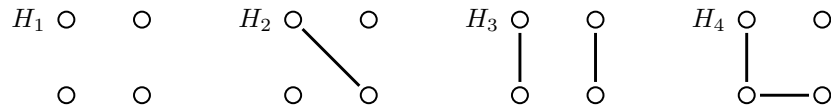
Por tanto, se concluye que  $\overline{P}_3$  no está contenida como subgráfica inducida en  $G$ .

$\Leftarrow$ ) Para este caso, analicemos a todas las gráficas no isomorfas que no son  $\overline{P}_3$  con 3 vértices y no son  $C_4$  con 4 vértices.

**Con 3 vértices:**



**Con 4 vértices:**

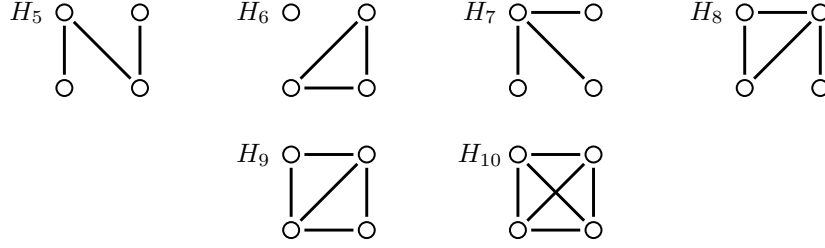


Propongamos la partición  $(S, K)$  en  $G$ .

Notemos que  $H_2, H_3, H_4, H_5, H_6$ , y  $H_8$  contienen como subgráficas inducidas a  $\overline{P}_3$ .

Luego, sólo  $H_1, H_7, H_9$ , y  $H_{10}$  junto a  $G_1, G_2$ , y  $G_3$  son subgráficas inducidas de  $G$  y podemos hacer el siguiente análisis:

<sup>1</sup>Sin pérdida de generalidad.



- 1)  $G_2$  y  $H_1$  están contenidas como subgráficas inducidas en  $S$ .
- 2)  $G_1$  tiene los 2 vértices de grado 1 en  $S$  y el único vértice de grado 2 está en  $K$ .
- 3)  $G_3$  y  $H_{10}$  están en  $K$ .
- 4)  $H_7$  tiene a su único vértice de grado 3 en  $K$  y el resto de sus vértices está en  $S$ .
- 5)  $H_9$  tiene a sus 2 vértices de grado 2 en  $S$  y al resto en  $K$ .

Con base a lo anterior, podemos sugerir que  $K$  es un clan y  $S$  es independiente y ambos subconjuntos de  $V_G$ . Con esto tenemos que  $G$  es *escindible*.

Por (2), (4) y (5), vemos que es necesario que haya aristas entre vértices de  $S$  y  $K$ . Como (1) y (3) no restringen la condición anterior, entonces se puede considerar a *escindible completa*.

De los casos anteriores, concluimos que una gráfica es escindible completa si y sólo si no contiene a  $C_4$  ni a  $\overline{P}_3$  como subgráfica inducida.

QED

3. (a) Demuestre que si  $|E| > \binom{|V|-1}{2}$ , entonces  $G$  es conexa.

**Demostración:** Si  $|E_G| = \binom{|V|-1}{2}$ , entonces hay dos posibilidades:

- Si  $G$  es conexa, entonces  $G + e$  (con  $e \in E_G$ ) cumple que:

$$\begin{aligned} |E_{G+e}| &= \binom{|V|-1}{2} + 1 \\ &> \binom{|V|-1}{2} \end{aligned}$$

Además,  $e$  no es ni lazo ni arista múltiple, pues sabemos de resultados vistos en clase que una gráfica es completa si  $|E| = \binom{|V|}{2}$  y como

$$\binom{|V|}{2} \neq \binom{|V|-1}{2}$$

ya que

$$\binom{|V|}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

y

$$\binom{|V|-1}{2} = \frac{(n-1) \cdot (n-2)}{2}$$

Luego,

$$\begin{aligned} \binom{|V|}{2} &\neq \binom{|V|-1}{2} \\ \frac{n \cdot (n-1)}{2} &\neq \frac{(n-1) \cdot (n-2)}{2} \\ n \cdot (n-1) &\neq (n-1) \cdot (n-2) \\ n &\neq n-2 \end{aligned}$$

y de hecho

$$\binom{|V|}{2} > \binom{|V|-1}{2}$$

Así, se justifica que  $e$  no sea ni lazo ni arista múltiple.

De lo anterior, se sigue que  $G + e$  es una gráfica simple que además es conexa, pues  $G$  ya es conexa.

- Si  $G$  no es conexa, entonces existe un vértice aislado  $x$ , ya que:

$$\begin{aligned} \binom{|V|-1}{2} &= \frac{|V_G|^2 - |V_G| - 2 \cdot |V| + 2}{2} \\ &= \frac{|V_G|^2 - |V_G|}{2} + \frac{2 - 2|V_G|}{2} \\ &= \frac{|V_G| \cdot (|V_G| - 1)}{2} - \frac{2 \cdot (|V_G| - 1)}{2} \\ &= \binom{|V_G|}{2} - (|V_G| - 1) \end{aligned}$$

Sabemos por resultados vistos en clases que hay  $\binom{|V_G|}{2}$  aristas en una gráfica completa y un vértice puede relacionarse a lo más con  $|V_G| - 1$  vértices (pues estamos trabajando con gráficas simples).

Nótese que de lo anterior se infiere que  $G - x$  es conexa<sup>2</sup> y así  $G + e$  (con  $e \in E_G$ )

$$\begin{aligned} |E_{G+e}| &= \binom{|V|-1}{2} + 1 \\ &> \binom{|V|-1}{2} \end{aligned}$$

es conexa, pues no hay lazos y no hay aristas múltiples en  $G$ .

Entonces, tenemos que la nueva arista está comprendida entre  $x$  y algún otro vértice en  $V_{G-x}$ . Por lo que habrá una  $xy$ -trayectoria para  $y \in E_G$ .

De lo anterior, concluimos que  $|E_G| > \binom{|V|-1}{2} \Rightarrow G$  es conexa.

QED

(b) Para  $|V| > 1$  encuentre una gráfica inconexa con  $|E| = \binom{|V|-1}{2}$ .

<sup>2</sup>Esto ya que  $|E_{G-x}| = \binom{|V_G|}{2}$ .

**Solución:**

Si  $|V_G| = 2$ , como  $2 > 1 \Rightarrow |V_G| > 1$ .

Luego la gráfica que tiene como vértices a  $u$  y  $v$  y además:

$$\begin{aligned} |E_G| &= \binom{2-1}{2} \\ &= \frac{(2-1) \cdot (2-2)}{2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

A continuación se muestra la gráfica mencionada:



Así, observemos que la gráfica anterior es inconexa.

□

4. (a) Demuestre que si  $\delta > \lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor - 1$ , entonces  $G$  es conexa.

**Demostración:** Para este inciso procedemos por inducción sobre  $V_G$ .

Sea  $G$  una gráfica con  $|V_G| = 1$ .

Así,  $\delta = \lfloor \frac{1}{2} \rfloor = 0$ , i.e.,



donde  $E_G = \emptyset$ .

Luego, supongamos como hipótesis inductiva que para una cantidad  $n$  de vértices, el que se cumpla  $\delta = \lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor$  implica que  $G$  es conexa.

A continuación veamos qué pasa con  $G + x$ , donde  $x \in V_{G+x}$ . Así,  $G$  cumple con  $\delta = \lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor$ .

De lo anterior, se sigue que  $x$  es vecino de al menos  $\lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor$  vértices en  $G$  (notemos que  $G$  es, de hecho, una subgráfica inducida por vértices de  $G + x$ ). Como  $G$  es conexa, por hipótesis inductiva se sigue que  $G + x$  es conexa.

QED

- (b) Para  $|V|$  par encuentre una gráfica  $(\lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor - 1)$ -regular e inconexa.

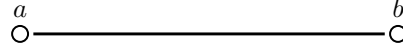
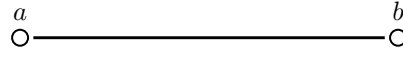
**Solución:**

Con  $|V| = 4$ , tenemos que:

$$\begin{aligned} \lfloor \frac{4}{2} \rfloor - 1 &= 2 - 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

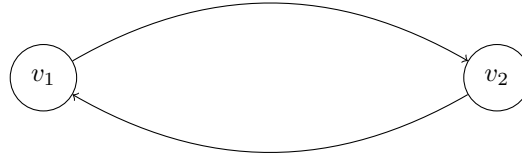
Así, la gráfica es 1-regular e inconexa.

□

$G$ 

5. Demuestre que si  $D$  no tiene lazos y  $\delta^+ \geq 1$ , entonces  $D$  contiene un ciclo dirigido de longitud al menos  $\delta^+ + 1$ .

**Demostración:** Para este ejercicio procedamos por inducción en  $V$ .  
Así, cuando  $\delta^+ = 1$  y  $|V| = 2$  tendremos que:



Ahora, supongamos que hay un ciclo  $C$  de al menos longitud  $\delta^+ + 1$  con  $\delta^+ > 1$ , para  $n(n > 1)$  vértices en  $D$  y además  $D$  no tiene lazos.  
Luego, para  $|V_D| = n + 1$  donde llamaremos  $x$  al vértice extra.  
Analicemos dos casos extremos:

- Si  $x$  tiene una sola incidencia, entonces  $\delta^+ = 1$  y como  $\mathcal{L}(C) > 1$ , tenemos que existe un ciclo de al menos  $\delta^+ + 1$ .  
En este caso, tenemos que es estrictamente mayor.  
De lo anterior, terminamos.
- Si para cada vértice  $u_i (1 < i \leq |V_D| - 1)$  en  $G$  hay una arista que “salga” de  $u_i$  e incida en  $x$ , tenemos que  $\delta^+$  no se modifica.  
Ahora notemos que, en particular, hay al menos  $u_i, u_{i+1}$  tales que existe una  $u_i u_{i+1}$ -trayectoria en  $C$  (notemos que  $u_i$  y  $u_{i+1}$  son vecinos).  
Luego, como existe  $e_1 = u_i x$  y  $e_2 = u_{i+1} x$ , con  $e_1$  y  $e_2$  en  $E_D$ , tenemos un nuevo ciclo que es de al menos  $\mathcal{L}(C) + 1$  de longitud.  
Así, como  $\mathcal{L}(C) \geq \delta^+ + 1$ , tenemos que el nuevo ciclo es de al menos longitud  $\delta^+ + 1$ .

Del análisis anterior, concluimos que el enunciado se cumple.

QED

## Puntos Extra

1. Demuestre que el número de  $v_i v_j$ -camino de longitud  $k$  en  $G$  es  $(A^k)_{ij}$  donde  $A$  es la matriz de adyacencia de  $G$ .

**Demostración:** Inducción

Paso base ( $n = 1$ )

Sea  $V_i V_j$  adyacentes  $\implies A_{ij} = 1$  y en caso de que no sean adyacentes  $A_{ij} = 0 \implies$  lo que implica que el numero de caminos de longitud 1 entre  $V_i V_j = A_{ij} = A_{ij}^1$

Hipótesis de inducción ( $n = k$ )

Supongamos que el número de  $V_i V_j$ -caminos de longitud  $k$  en  $G$  es  $(A^k)_{ij}$

Paso inductivo ( $n = k + 1$ )

*Pd)* El número de  $V_i V_j$ -caminos de longitud  $k + 1$  en  $G$  es  $(A^{(k+1)})_{ij}$

*Dem*

Sea  $A^{(k+1)} = A^k * A \implies$  por definición de multiplicación de matrices sean "t" los elementos de la matriz  $A^k$  y "a" los elementos de la matriz  $A \implies A^k * A = \sum_{r=1} t_{ir} a_{rj}$  para toda  $A_{ij}$  que pertenece a  $A^{(k+1)} \implies (A^{(k+1)})_{ij} = (A^k * A)_{ij} = \sum_{r=1} t_{ir} a_{rj}$  (Esta suma en específico es la multiplicación de un renglón de  $A^k$  y una columna de  $A$ )

$\implies$  si  $a_{rj} = 0 \implies V_r$  y  $V_j$  no son adyacentes y por hipótesis de inducción  $t_{ir}$  son el número de caminos que existen de longitud  $k$  de  $V_i$  a  $V_r$

Caso 1)  $a_{rj} = 0 \implies (t_{ir} * a_{rj} = 0) \implies$  existen 0 caminos de longitud  $n + 1$

Caso 2)  $a_{rj} = 1 \implies (t_{ir} * a_{rj} = t_{ir}) \implies$  existe 1 camino de longitud  $n + 1$  que recorre de  $V_i V_j$

$\implies \sum_{r=1} t_{ir} a_{rj}$  independientemente de si  $a_{rj} = 0$  o  $a_{rj} = 1$  nos dará el número de caminos de longitud  $n + 1$  que existen entre  $V_i V_j$

□

2. Sea  $G$  una gráfica bipartita de grado máximo  $k$ . Demuestre que existe una gráfica bipartita  $k$ -regular,  $H$ , que contiene a  $G$  como subgráfica inducida.