UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO
Facultad de Ciencias

Autores:
Fernanda Villafán Flores
Fernando Alvarado Palacios
Adrián Aguilera Moreno

# Gráficas y Juegos

# Reposioción

1. [Ejercicio 3 de la Tarea 02] Sea $G$ una gráfica conexa. Demuestre que si $G$ no es completa, entonces contiene a $P_3$ como subgráfica inducida.

   ***Demostración:*** Para este ejercicio necesitamos que $|V_G| \geq 3$, para las gráficas que no cumplan esto se tendrá la demostración por vacuidad. Nótese que el hecho de que $G$ no sea completa implica que para al menos $x, y \in V_G$ se tiene que $xy \notin E_G$.

   > Previo a la demostración, provemos que en una gráfica conexa siempre podemos construir una trayectoria con exactamente 3 vértices:
   >
   > Sea $x \in V_G$, por definición de conexidad y como $|V_G| \geq 3$, tenemos ha $x, y \in V_G$ tales que $xy \in E_G$, luego $x$ es vecino a algún vértice distinto a $y$ (o $y$ es vecino de algún vértice distinto de $x$), pues en caso contrario $xy$ sería una componente conexa contenida en $G$ y $xy \neq G$!! lo que contradice la hipótesis de que $G$ es conexa. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $z$ es vecino de $x$ y $z \neq y$, luego $zxy$ es una trayectoria de orden exactamente 3. $\square$

   Para este ejercicio basta analizar 2 posibles casos[1]:

   Caso 1: Si $G + e$ es completa, donde $e = xy-$arista para $x, y \in V_G$. Por ***Prop.*** **1.64** y por hipótesis sabemos que existe un $xy$-camino en $G$, luego por ***Prop.*** **1.62** sabemos que hay, en particular, una $xy-$trayectoria en $G$, luego hay alguna $xy-$trayectoria de orden 3 (esto lo sabemos gracias al resultado mostrado previamente) y supongamos, sin pérdida de generalidad, que ésta es $T = (x, z, y)$, para $z \in V_G$, notemos que $T$ tiene tamaño igual a 2, pues existen las aristas $zx, zy$ pero no $xy$ (por como definimos este caso), luego $T$ es $P_3$ y concluimos que $P_3$ es subgráfica inducida de $G$.

   Caso 2: Si $G$ es un árbol, esto nos indica que $G$ es $1-$conexa, y es por eso que se considera este caso como el mínimo para el que se cumplirá la condición a demostrar. Sabemos por el teorema de caracterización de árboles que cada arista en $G$ será un puente, y por el resultado previamente mostrado sabemos que existe una trayectoria $T$ en $G$ de orden exactamente 3, así $T$ es claramente $P_3$ y concluimos $P_3$ es subgáfica inducida de $G$.

   De los casos anteriores concluimos que el enunciado es verdadero. QED

2. [Ejercicio 1 extra de la Tarea 02] Sea $G$ una gráfica. Demuestre que $G$ es $k$-partita completa si y sólo si no contiene a $K_{k+1}$ ni a $\overline{P_3}$ como subgráficas inducidas.

   ***Demostración:*** En este ejercicio analizaremos 2 casos posibles:

   $\Rightarrow$) Procedamos reducción al absurdo .

   ·) Supongamos que $\overline{P_3}$ es subgráfica inducida de $G$, por definición de $k$-partita completa $\overline{P_3}$ no está en la misma parte (pues, en caso de estarlo hay una adyacencia en 2 vértices de la misma parte). Luego $\overline{P_3}$ está en 2 o 3 partes distintas y habrá un $x \in \overline{P_3}$ que no se relacionará con al menos 1 vértice en algunas de las partes y por tanto, $G$ no es $k$-partita completa!! (lo que no cumple es ser completa bajo el supuesto tomado) y he aquí una contradicción de suponer que $\overline{P_3}$ es subgráfica inducida de $G$. Por lo tanto, concluimos que $\overline{P_3}$ no es subgráfica inducida de $G$.

[1] Se analizan los casos "extremos", pues los casos intermedios son combinaciones de estos.

·) Supongamos que $K_{k+1}$ es subgráfica inducida de $G$, entonces hay 1 vértice de $K_{k+1}$ en cada una de las partes (lo que suma $k$ vértices) y un $x \in K_{k+1}$ en alguna parte tal que se relaciona con exactamente un vértice en esa parte y por tanto, $G$ no es $k$-partita completa!! (no cumple el ser $k$-partita) y he aquí una contradicción de suponer que $K_{k+1}$ es subgráfica inducida de $G$. Por lo tanto, concluimos que $K_{k+1}$ no es subgráfica inducida de $G$.

$\Leftarrow$)

De los casos anterior concluimos que $G$ es $k$-partita completa si y sólo si no contiene a $K_{k+1}$ ni a $\overline{P_3}$ como subgráficas inducidas. QED

3.

4.

5.

6.

7.

8.

9.

10.