UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO

Facultad de Ciencias

Autores:
Fernanda Villafán Flores
Fernando Alvarado Palacios
Adrián Aguilera Moreno

Gráficas y Juegos

Tarea 4

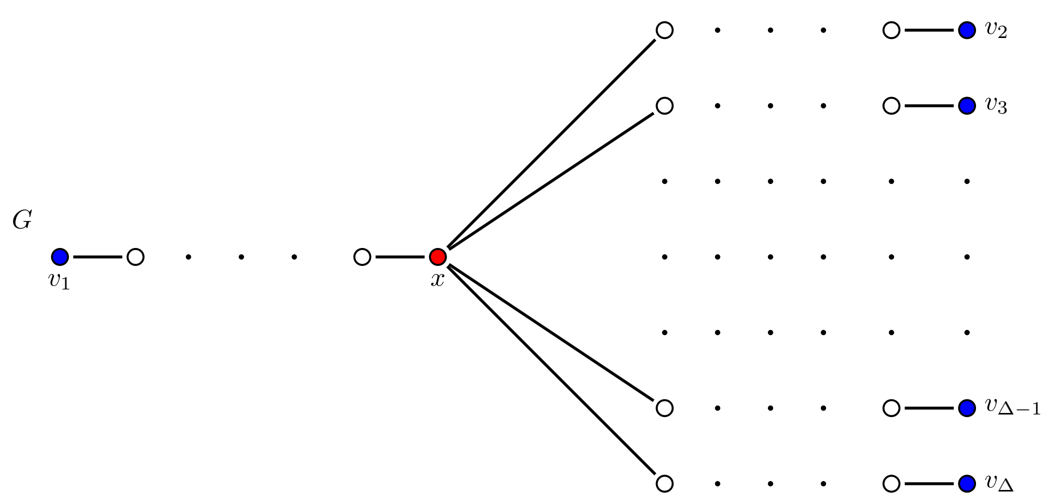
1. Sea G una gráfica no trivial. Demuestre que G es una trayectoria si y sólo si G es un árbol con exactamente dos vértices de grado 1.

2. (a) Demuestre que cada árbol con grado máximo $\Delta > 1$ tiene al menos Δ hojas.

   Demostración: Sea G un árbol y sea $x \in V_G$ tal que $d(x) = \Delta$ (notar que x no necesariamente es el único que cumple tener grado igual a Δ, por lo que se tomará alguno que cumpla esto), entonces x tiene exactamente Δ vecinos, por la caracterización de árbol, sabemos que G es acíclico y por tanto los caminos que parten desde x (tienen a x como vértice inicial) hacia algunos de sus Δ vecinos, no tienen vértices en común que sean distintos de x (caso contrario, habría 2 trayectorias que tienen inicio en x a las que llamaremos w_1 y w_2, y además tienen en común al menos un vértice v y por tanto w_1w_2 es un ciclo!! que está contenido en G), luego, como x tiene Δ vecinos, entonces podemos tomar al menos Δ trayectorias distintas entre ellas tales que terminen en algún vértice u_i $(1 \leq i \leq \Delta)$ y por tanto cada u_i es una hoja de G, como hemos encontrado Δ hojas podemos concluir que el árbol G con grado máximo Δ tiene al menos Δ hojas. QED

   (b) Construya, para cada elección de n y Δ, con $2 \leq \Delta < n$, un árbol de orden n con exactamente Δ hojas.

   Solución: Sea G un árbol, usemos el resultado anterior, y garantizamos que, como G tiene algún $x \in V_G : d(x) = \Delta$, entonces G tiene al menos Δ hojas. Luego, partícularmente en los árboles de exactamente Δ hojas, cada camino W_i que tenga como vértice inicial a x no tendrá bifurcaciones, esto es, xW_iv_i es la única manera de llegar de x a v_i y además W_i es una trayectoria (y por definición de trayectoria, no tendrá bifurcaciones), como x es vértice inicial de exactamente Δ trayectorias W_i, entonces hay exactamente Δ hojas en G. En resumen, G tendrá exactamente Δ vértices de grado 1, a continuación se muestra un ejemplo que trata de ser lo más general posible:



   donde los v_i's son las hojas, para $1 \leq i \leq \Delta$. □

3. Un *centro* en una gráfica es un vértice u tal que $\max_{v \in V} d(u, v)$ es mínima. Demuestre que un árbol tiene exactamente un centro o dos centros adyacentes.

4. Demuestre o brinde un contraejemplo: Toda gráfica con menos aristas que vértices tiene una componente que es un árbol.

5. Un *hidrocarburo saturado* es una molécula C_mH_n en la que cada átomo de carbono tiene cuatro enlaces, cada átomo de hidrógeno tiene un enlace, y ninguna sucesión de enlaces forma un ciclo. Demuestre que para cualquier entero positivo m, la molécula C_mH_n existe sólo si $n = 2m + 2$.

6. Demuestre que una sucesión $(d_1, \ldots, d_n)$ de enteros positivos es la sucesión de grados de un árbol si y sólo si $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$.

Puntos Extra

1. Para una gráfica conexa G definimos la gráfica de árboles de G, $\mathcal{T}_G$, como la gráfica que tiene por vértices a todos los árboles generadores de G, y tal que, si $S, T \in V_{\mathcal{T}_G}$, entonces ST es una arista de $\mathcal{T}_G$ si y sólo si existen aristas $e \in E_S - E_T$ y $f \in E_T - E_S$ tales que $(S - e) + f = T$. Demuestre que $\mathcal{T}_G$ es conexa.

2. Sea T un árbol arbitrario con $k + 1$ vértices. Demuestre que si G es simple y $\delta \geq k$, entonces G tiene una subgráfica isomorfa a T.

3. Sea $\mathcal{T}$ una familia de subárboles de un árbol T. Deduzca, por inducción sobre $|\mathcal{T}|$, que si cualesquiera dos elementos de $\mathcal{T}$ tienen un vértice en común, entonces hay un vértice de T que está en todos los elementos de $\mathcal{T}$.

4. (a) Determine todos los arboles T tales que $\overline{T}$ también es un árbol.

   (b) Determine todas las gráficas de orden al menos cuatro tales que la subgráfica inducida por cualesquiera tres de sus vértices es un árbol.

   Justifique detalladamente sus respuestas.