UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO

Facultad de Ciencias

Autores:
Fernanda Villafán Flores
Fernando Alvarado Palacios
Adrián Aguilera Moreno

Gráficas y Juegos

Reposición

Ejercicio de la Tarea 2

1. [Ejercicio 3]

   Sea G una gráfica conexa. Demuestre que si G no es completa, entonces contiene a P_3 como subgráfica inducida.

   Demostración: Para este ejercicio necesitamos que $|V_G| \geq 3$, para las gráficas que no cumplan esto se tendrá la demostración por vacuidad. Nótese que el hecho de que G no sea completa implica que para al menos $x, y \in V_G$ se tiene que $xy \notin E_G$.

   > Previo a la demostración, provemos que en una gráfica conexa siempre podemos construir una trayectoria con exactamente 3 vértices:
   >
   > Sea $x \in V_G$, por definición de conexidad y como $|V_G| \geq 3$, tenemos ha $x, y \in V_G$ tales que $xy \in E_G$, luego x es vecino a algún vértice distinto a y (o y es vecino de algún vértice distinto de x), pues en caso contrario xy sería una componente conexa contenida en G y $xy \neq G$!! lo que contradice la hipótesis de que G es conexa. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que z es vecino de x y $z \neq y$, luego zxy es una trayectoria de orden exactamente 3.
   >
   > $\square$

   Para este ejercicio basta analizar 2 posibles casos[1]:

   Caso 1: Si $G + e$ es completa, donde $e = xy-$arista para $x, y \in V_G$. Por ***Prop.* 1.64** y por hipótesis sabemos que existe un xy-camino en G, luego por ***Prop.* 1.62** sabemos que hay, en particular, una $xy-$trayectoria en G, luego hay alguna $xy-$trayectoria de orden 3 (esto lo sabemos gracias al resultado mostrado previamente) y supongamos, sin pérdida de generalidad, que ésta es $T = (x, z, y)$, para $z \in V_G$, notemos que T tiene tamaño igual a 2, pues existen las aristas zx, zy pero no xy (por como definimos este caso), luego T es P_3 y concluimos que P_3 es subgráfica inducida de G.

   Caso 2: Si G es un árbol, esto nos indica que G es $1-$conexa, y es por eso que se considera este caso como el mínimo para el que se cumplirá la condición a demostrar. Sabemos por el teorema de caracterización de árboles que cada arista en G será un puente, y por el resultado previamente mostrado sabemos que existe una trayectoria T en G de orden exactamente 3, así T es claramente P_3 y concluimos P_3 es subgáfica inducida de G.

   De los casos anteriores concluimos que el enunciado es verdadero. QED

2. [Ejercicio 1 extra]

   Sea G una gráfica. Demuestre que G es k-partita completa si y sólo si no contiene a K_{k+1} ni a $\overline{P_3}$ como subgráficas inducidas.

   Demostración: En este ejercicio analizaremos 2 casos posibles:

   $\Rightarrow$) Procedamos reducción al absurdo .

[1] Se analizan los casos “extremos”, pues los casos intermedios son combinaciones de estos.

·) Supongamos que $\overline{P_3}$ es subgráfica inducida de G, por definición de k-partita completa $\overline{P_3}$ no está en la misma parte (pues, en caso de estarlo hay una adyacencia en 2 vértices de la misma parte). Luego $\overline{P_3}$ está en 2 o 3 partes distintas y habrá un $x \in \overline{P_3}$ que no se relacionará con al menos 1 vértice en algunas de las partes y por tanto, G no es k-partita completa!! (lo que no cumple es ser completa bajo el supuesto tomado) y he aquí una contradicción de suponer que $\overline{P_3}$ es subgráfica inducida de G. Por lo tanto, concluimos que $\overline{P_3}$ no es subgráfica inducida de G.

·) Supongamos que K_{k+1} es subgráfica inducida de G, entonces hay 1 vértice de K_{k+1} en cada una de las partes (lo que suma k vértices) y un $x \in K_{k+1}$ en alguna parte tal que se relaciona con exactamente un vértice en esa parte y por tanto, G no es k-partita completa!! (no cumple el ser k-partita) y he aquí una contradicción de suponer que K_{k+1} es subgráfica inducida de G. Por lo tanto, concluimos que K_{k+1} no es subgráfica inducida de G.

$\Leftarrow$)

De los casos anterior concluimos que G es k-partita completa si y sólo si no contiene a K_{k+1} ni a $\overline{P_3}$ como subgráficas inducidas. QED

Ejercicio de la Tarea 4

3. [Ejercicio extra 3]

Sea $\mathcal{T}$ una familia de subárboles de un árbol T. Deduzca, por inducción sobre $|\mathcal{T}|$, que si cualesquiera dos elementos de $\mathcal{T}$ tienen un vértice en común, entonces hay un vértice de T que está en todos los elementos de $\mathcal{T}$.

Demostración: Demostración por induccion sobre el numero de subarboles

Paso base: $\mathcal{T} = 3$

Sean T_1, T_2, T_3 subarboles de T

Pd Existe un vértice x que pertenece a T tal que $T_1 \cap T_2 = x \to T_1 \cap T_2 \cap T_3 = x$

Dem (Reduccion al absurdo)

Supongamos que $T_1 \cap T_2 \cap T_3 = \emptyset$ (algo que no puede pasar es que $T_1 \cap T_2 = T_1 \cap T_3 = T_2 \cap T_3 = \emptyset$ por hipotesis T es conexa y tambien por hipotesis $T_1 \cap T_2$ diferente del vacio) $\to$ existe x_1 tal que x_1 pertenece a $T_1 \cap T_2$ y x_1 no pertenece a T_3, existe x_2 tal que x_2 pertenece a $T_1 \cap T_3$ y x_2 no pertenece a T_2, existe x_3 tal que x_3 pertenece a $T_2 \cap T_3$ y x_3 no pertenece a $T_1 \to x_1, x_2, x_3$ son vértices diferentes $\to$ por las intersecciones y gracias que T es conexo $\to$ s.p.g. podemos formar un ciclo $(x_1, ..., x_2, ..., x_3, ..., x_1)$ (Lo que es una contradicción, ya que los arboles son aciclicos)

Por lo tanto $T_1 \cap T_2 \cap T_3 \neq \emptyset \to$ existe un vértice compartido para los 3 subárboles

Hipótesis de inducción: supongamos para $\mathcal{T} = k$

Supongamos que si $\mathcal{T} = k$ tal que existen i,j tal que $i \neq j$ e i,j pertenezen a $\{1, ..., k\}$ donde $T_i \cap T_j \neq \emptyset \to \bigcap_{r=1}^{k} T_r \neq \emptyset$

Paso inductivo: Pd para $\mathcal{T} = k + 1$

Pd si existen i,j tal que $i \neq j$ e i,j pertenezen a $\{1, ..., k+1\}$ donde $T_i \cap T_j \neq \emptyset \to \bigcap_{r=1}^{k+1} T_r \neq \emptyset$

Dem (Reducción al absurdo)

Supongamos $\bigcap_{r=1}^{k+1} T_r = \emptyset$ y existen i,j pertenezen a $\{1, ..., k+1\}$ donde $T_i \cap T_j \neq \emptyset \rightarrow$ consideremos a T' como el subárbol formado por la unión de todos los subárboles de $T_1, T_2, ...; T_{k+1}$ menos los subárboles T_i y T_j. Es decir T'= $\bigcup_{r=1, r\neq i, r\neq j}^{k+1} T_r \rightarrow T' \cap T_i \cap T_j = \emptyset$, pero por paso base esto es una contradicción $\rightarrow$ existe un x tal que x pertenece a $\bigcap_{r=1}^{k+1} T_r$

Por lo tanto la porposición es verdadera. QED

Ejercicio de la Tarea 5

4. [Pregunta 1]

   Demuestre que si G es simple y 3-regular, entonces $\kappa = \kappa'$.

   Demostración: Sea G 3-regular $\rightarrow d(v) = 3$ para todo v que pertenece a V $\rightarrow$ sea v' un vertice de G $\rightarrow$ para desconectar a v' de G, solo basta con "cortar" las 3 aristas de v' $\rightarrow$ k'=3.

   Por lo tanto $k = k'$. QED

5. [Pregunta 2]

   Demuestre que una gráfica es 2-conexa por aristas si y sólo si cualesquiera dos vértices están conectados por al menos dos trayectorias ajenas por aristas.

   Demostración: $\Longrightarrow$) Sea G una gráfica 2-conexa $\rightarrow$ por teorema visto en clase en G existe un cliclo C que contendra 2 vertices v y u donde u y v pertenecen a G $\rightarrow$ podemos tener la trayectoria $P = (v, C, u)$ pero como C es un ciclo $\rightarrow$ tambien existira la trayectoria $P' = (u, V, v)$

   Por lo tanto existen 2 trayectorias ajenas por aristas en una gráfica 2-conexa

   $\Longleftarrow$) Sean u y v cualesquiera vértices de una gráfica G y si u y v están conectados por dos trayectorias ajenas por aristas P y P' $\rightarrow$ si unimos uPv y vP'v obtendremos un ciclo C que ira de uPvP'u $\rightarrow$ sea G' una gráfica igual al ciclo C, si borramos una arista a G' $\rightarrow$ G' seguira siendo conexa $\rightarrow$ G' es 2-conexa $\rightarrow$ G será 2-conexa ya que para todo v y u que pertenecen G existen 2 trayectorias ajenas por vertices QED

Ejercicio de la Tarea 7

6. [Ejercicio 1]

   (a) Demuestre que si G tiene diámetro mayor que 3 (posiblemente infinito), entonces $\overline{G}$ tiene diámetro menor que 3. Concluya que si G es inconexa, entonces $\overline{G}$ es conexa.

   Demostración: Sea G una gráfica.

   Probaremos que $\overline{G}$ tiene diámetro menor a 3.

   Primero, sabemos que G tiene diametro mayor a 3 entonces tomemos una trayectoria P de G tal que su longitud es n (con $n > 3$).

   La denotaremos como:

   $$P = (x_0, x_1, \ldots, x_n)$$

   Ahora, por definición de $\overline{G}$ es tal que:

   $$|E_{\overline{G}}| = \binom{|V| - 1}{2} - |E_G|$$

   Por tanto, en $\overline{G}$ la trayectoria P cambia de la siguiente manera:

- El vértice x_0 es adyacente a los vértices $x_2, x_3, \ldots, x_n$, donde esto equivale a $n-1$ vértices.
- El vértice x_1 es adyacente a los vértices $x_3, x_4, \ldots, x_n$, donde esto equivale a $n-2$ vértices.
- El vértice x_2 es adyacente a los vértices $x_0, x_4, \ldots, x_n$, donde esto equivale a $n-2$ vértices.

Siguiendo este procedimiento, tenemos lo siguiente:

- El vértice x_i es adyacente a los vértices $x_{i-2}, x_{i+2}, x_{i+3}, \ldots, x_n$, con $i > 1$.

Así, notemos lo siguiente:

En $\overline{G}$ x_0 **no es** adyacente a x_1, entonces necesitamos otro vértice x_3 para llegar a x_1. Lo que implica que nos toma distancia igual a 2 llegar de x_0 a x_1.

De la misma forma, x_1 **no es** adyacente a x_0 ni a x_2, entonces necesitamos otro vértice x_4 para llegar a x_0 o x_2. Lo que implica que nos toma distancia igual a 2 llegar de x_1 a x_0 o de x_1 a x_2.

De lo anterior obtenemos que:

El vértice x_i **no es** adyacente al vértice x_{i-1} ni al vértice x_{i+1}, entonces necesitamos otro vértice x_{i+2} para llegar a x_{i-1} o x_{i+1}. Lo que implica que nos toma distancia igual a 2 llegar de x_i a x_{i-1} o de x_i a x_{i+1}.

Por lo tanto, $\overline{G}$ tiene diámetro menor a 3.

Por último, probemos que si G es inconexa entonces $\overline{G}$ es conexa.

Demostración: Sean $u, v \in G$ cualesquiera.

Supongamos que G es inconexa.

Sabemos que si $uv \notin E_G$, entonces $uv \in E_{\overline{G}}$.

Por lo antes visto, tenemos que:

Si u es adyacente a v, como el diámetro de $\overline{G}$ es menor a 3, entonecs existe otro vértice $w \in G$ tal que $uv, vw \in E_{\overline{G}}$.

Es decir, podemos llegar desde un vértice u a cualquier otro vértice w usando al vértice v.

Por lo tanto, ya que u, v fueron arbitrarios, podemos concluir que $\overline{G}$ es conexa. QED

Así, concluímos que si G es inconexa, entonces $\overline{G}$ es conexa. QED

(b) Una gráfica G es autocomplementaria si $G \cong \overline{G}$. Demuestre que si G es autocomplementaria, entonces $|V| \overset{4}{\equiv} 0$ o $|V| \overset{4}{\equiv} 1$.

Demostración: Primero, sabemos que si $G \cong \overline{G}$ entonces $V_G = V_{\overline{G}}$.

Probaremos que $|E_G| = |E_{\overline{G}}|$.

Veamos lo siguiente:

$$|V| \overset{4}{\equiv} 1 \longrightarrow |V| \equiv 1 \mod 4$$

Recordando la definición de $\mod$, tenemos:

$$\begin{aligned} |V| \equiv 1 \mod 4 &\longrightarrow 4 \,\Big|\, |V| - 1 \\ &\longrightarrow |V| - 1 = 4 \cdot k, \text{ con } k \in \mathbb{N} \\ &\longrightarrow |V| = 4 \cdot k + 1 \end{aligned}$$

Luego, por definición de $\overline{G}$, tenemos:

$$|E_{\overline{G}}| = \binom{|V| - 1}{2} - |E_G|$$

Sea $n = |V_G|$.
Así,

$$\begin{aligned}
|E_G| &= |E_{\overline{G}}| \\
&= \binom{|V_G| - 1}{2} - |E_G| \\
&= \binom{n-1}{2} - (n-1), \text{ porque } |V_G| = n \\
&= \frac{(n-1)!}{2! \cdot ((n-1)-2)!} - (n-1) \\
&= \frac{(n-1)!}{2! \cdot (n-1-2)!} - (n-1) \\
&= \frac{(n-1)!}{2! \cdot (n-3)!} - (n-1) \\
&= \frac{(n-1)(n-2)(n-3)!}{2! \cdot (n-3)!} - (n-1), \text{ porque } n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2)! \\
&= \frac{(n-1)(n-2)\cancel{(n-3)!}}{2! \cdot \cancel{(n-3)!}} - (n-1) \\
&= \frac{(n-1)(n-2)}{2!} - (n-1) \\
&= \frac{(n-1)(n-2)}{2} - (n-1), \text{ porque } 2! = 2 \cdot 1 = 2 \\
&= \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \frac{2(n-1)}{2} \\
&= \frac{(n-1)(n-2) - 2(n-1)}{2} \\
&= \frac{n^2 - 3n + 2 - 2n + 2}{2} \\
&= \frac{n^2 - 5n + 4}{2}
\end{aligned}$$

Ahora,

$$\begin{aligned}
\frac{n^2 - 5n + 4}{2} &= \frac{4\left[\frac{n^2}{4} - \frac{5n}{4} + 1\right]}{2} \\
&= 4 \cdot \frac{\left[\frac{n^2}{4} - \frac{5n}{4} + 1\right]}{2} \\
&= 4 \cdot \frac{\left[\frac{n^2 - 5n}{4} + 1\right]}{2} \\
&= 4 \cdot \frac{\left[\frac{n^2 - 5n + 4}{4}\right]}{2} \\
&= 4 \cdot \left[\frac{n^2 - 5n + 4}{8}\right]
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos lo siguiente:

$$|E_G| = 4 \cdot \left[\frac{n^2 - 5n + 4}{8}\right] \longrightarrow |V_G| - 1 = 4 \cdot \left[\frac{n^2 - 5n + 4}{8}\right]$$

Despejando $|V_G|$, obtenemos:

$$|V_G| - 1 = 4 \cdot \left[\frac{n^2 - 5n + 4}{8}\right] \longrightarrow |V_G| = 4 \cdot \left[\frac{n^2 - 5n + 4}{8}\right] + 1$$

Sea $k = \left[\frac{n^2 - 5n + 4}{8}\right]$. Entonces:

$$|V_G| = 4 \cdot k + 1$$

Por lo tanto, llegamos a que $|E_G| = |E_{\overline{G}}|$ si $|V_G| = 4 \cdot k + 1$.

QED

7.

8.

9.

10.

11.

12.