UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO
Facultad de Ciencias

Autores:
Fernanda Villafán Flores
Fernando Alvarado Palacios
Adrián Aguilera Moreno

Gráficas y Juegos

Tarea 3

1. Demuestre que si $e \in E$, entonces $c(G) \leq c(G-e) \leq c(G)+1$.

   Demostración: Dado que c corresponde a la función que devuelve la cantidad de componentes conexas, analicemos dos casos posibles:

   - Si "e" no es un puente:
   $$c(G-e) = c(G) \tag{1}$$
   pues sabemos que si una arista no es puente, al borrarla, G no cambia en número de componentes conexas y así
   $$c(G) \leq c(G-e) \tag{2}$$
   pues de la dicotomia de $\leq$, cumple con la igualdad. Luego hacemos notar que
   $$c(G) < c(G)+1 \tag{3}$$
   $$\Rightarrow c(G) \leq c(G)+1 \tag{4}$$
   de 1 y 4 se sigue
   $$c(G-e) \leq c(G)+1 \tag{5}$$
   de 5 y 2 tenemos
   $$c(G) \leq c(G-e) \leq c(G)+1$$

   - Si "e" es un puente:
   $$c(G) < c(G-e) \tag{6}$$
   por la definición de arista como puente. Así
   $$c(G) \leq c(G-e) \tag{7}$$
   pues de la dicotomia se cumple con $<$. Además sabemos que el número de componentes conexas aumenta exactamente en 1 (porque estamos trabjando con gráficas simples) en $G-e$, de lo anterior se sigue que
   $$c(G-e) = c(G)+1 \tag{8}$$
   $$\Rightarrow c(G-e) \leq c(G)+1 \tag{9}$$
   de 7 y 9 se sigue
   $$c(G) \leq c(G-e) \leq c(G)+1$$

   De lo anterior concluimos que $c(G) \leq c(G-e) \leq c(G)+1$. QED

2. Una gráfica es *escindible completa* si su conjunto de vértices admite una partición (S, K) de tal forma que S es un conjunto independiente, K es un clan, y cada vértice en S es adyacente a cada vértice en K. Demuestre que una gráfica es escindible completa si y sólo si no contiene a C_4 ni a $\overline{P_3}$ como subgráfica inducida.

Demostración: Sea $C_4 = (x_0, x_1, x_2, x_3, x_0)$ y $\overline{P_3} = \{y_0, y_1, y_2\}$, tal que $y_0y_2 \in E_G$ e $y_0y_1, y_1y_2 \notin E_G$ [1], con $x_i, y_j \in V_G$ $(0 \leq i \leq 3,\ 0 \leq j \leq 2)$. Nótese que los x_i's e y_j's no pueden estar contenidos en una misma parte, esto es, C_4 y $\overline{P_3}$ no están contenidos en S, pues ningún vértice en S es adyacente, y de igual manera no están contenidos en K, pues para cualesquiera 3 o 4 vértices en K se tiene a K_3 o K_4.

Para este ejercicio analizaremos dos posibles casos:

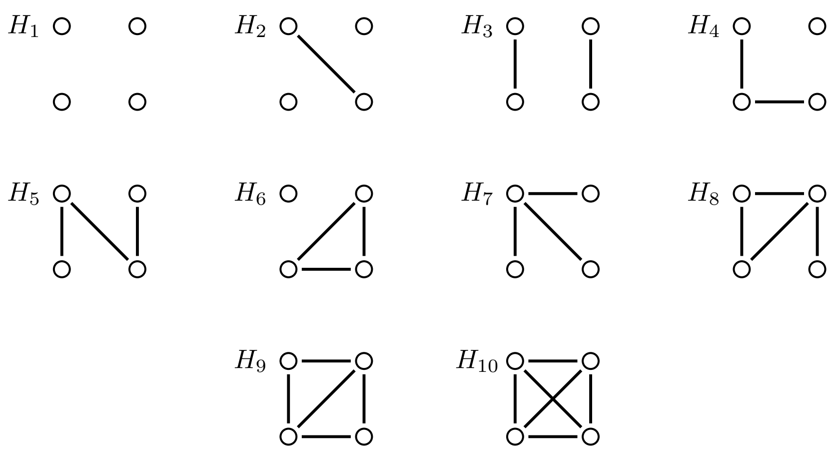
$\Rightarrow$) Procedamos por reducción al absurdo.

- $\cdot$) Si G es *escendible completa*, entonces C_4 es subgráfica inducida de G. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $x_0 \in S$ y $x_1 \in K$ (caso contrario, $x_1 \in S$ y x_0 no sería adyacente a x_1!!), luego, si $x_2 \in S$ entonces $x_3 \in K$ (caso contrario, $x_3 \in S$ y x_2 no sería adyacente a x_3!!), así $x_1x_3 \in E_G$!! (pues $x_1, x_3 \in K$) por definición de K (clan). Si $x_2 \in K$, entonces $x_3 \in S$ (caso contrario, $x_3 \in K$ y $x_1x_3 \in E_G$!!), pero x_0 no es adyacente a x_3!! $(x_0, x_3 \in S)$ y he aquí una contradicción de suponer a C_4 como subgráfica inducida de G. Por tanto, se concluye que C_4 no está contenida como subgráfica inducida en G.
- $\cdot\cdot$) Si G es *escendible completa*, entonces $\overline{P_3}$ es subgráfica inducida de G. Supongamos, sin pérdida de generalidad, que $y_0 \in S$ entonces $y_1 \in S$ $(y_0y_1 \notin E_G)$, luego $y_2 \in S$!! $(y_1y_2 \notin E_G)$, pero no todos los y_i's pueden estar en S. Si $y_0 \in K$, entonces $y_1 \in S$ o $y_1 \in K$ implican que y_0 es adyacente a y_1!! pero $y_0y_1 \notin E_G$ y he aquí una contradicción de suponer a $\overline{P_3}$ como subgráfica inducida de G. Por tanto, se concluye que $\overline{P_3}$ no está contenida como subgráfica inducida en G.

$\Leftarrow$) Para este caso analicemos a todas las gráficas no isomorfas que no son $\overline{P_3}$ con 3 vértices y no son C_4 con 4 vértices.

Con 3 vértices:

Con 4 vértices:



Propongamos la partición (S, K) en G.

[1] Esto sin perder generalidad.

Notar que $H_2, H_3, H_4, H_5, H_6,$ y H_8 contienen como subgráficas inducidas a $\overline{P_3}$, luego sólo $H_1, H_7, H_9,$ y H_{10} junto a $G_1, G_2,$ y G_3 son subgráficas inducidas de G y podemos hacer el siguiente análisis

1) G_2 y H_1 están contenidas como subgráficas inducidas en S.
2) G_1 tiene los 2 vértices de grado 1 en S y el único vértice de grado 2 está en K.
3) G_3 y H_{10} están en K.
4) H_7 tiene a su único vértice de grado 3 en K y el resto de sus vértices está en S.
5) H_9 tiene a sus 2 vértices de grado 2 en S y al resto en K.

Con base a lo anterior podemos sugerir que K es un clan y S es independiente, y ambos subconjuntos de V_G, con esto tenemos que G es *escindible*. Por (2), (4) y (5) vemos que es necesario que haya aristas entre vértices de S y K, como (1) y (3) no restringen la condición anterior, entonces se puede considerar a *escindible completa*.

De los casos anterior concluimos que una gráfica es escindible completa si y sólo si no contiene a C_4 ni a $\overline{P_3}$ como subgráfica inducida. QED

3. (a) Demuestre que si $|E| > \binom{|V|-1}{2}$, entonces G es conexa.

Demostración: Si $|E_G| = \binom{|V|-1}{2}$, entonces hay dos posibilidades:

- G es conexa, entonces $G + e$ con $e \in E_G$, cumple

$$\begin{aligned} |E_{G+e}| &= \binom{|V|-1}{2} + 1 \\ &> \binom{|V|-1}{2} \end{aligned}$$

Además e no es ni lazo ni arista multiple, pues sabemos de resultados vistos en clase que una gráfica es completa si $|E| = \binom{|V|}{2}$ y como

$$\binom{|V|}{2} \neq \binom{|V|-1}{2}$$

pues

$$\binom{|V|}{2} = \frac{n \cdot (n-1)}{2}$$

y

$$\binom{|V|-1}{2} = \frac{(n-1) \cdot (n-2)}{2}$$

luego

$$\begin{aligned} \binom{|V|}{2} &\neq \binom{|V|-1}{2} \\ \frac{n \cdot (n-1)}{2} &\neq \frac{(n-1) \cdot (n-2)}{2} \\ n \cdot (n-1) &\neq (n-1) \cdot (n-2) \\ n &\neq n-2 \end{aligned}$$

y de hecho

$$\binom{|V|}{2} > \binom{|V|-1}{2}$$

así se justifica que e no sea ni lazo, ni arista multiple. De lo anterior se sigue que $G+e$ es una gráfica simple que además es conexa, pues G ya es conexa.

- G no es conexa, entonces existe un vértice aislado x, pues

$$\begin{aligned}\binom{|V|-1}{2} &= \frac{|V_G|^2 - |V_G| - 2\cdot|V| + 2}{2}\\ &= \frac{|V_G|^2 - |V_G|}{2} + \frac{2 - 2|V_G|}{2}\\ &= \frac{|V_G|\cdot(|V_G|-1)}{2} - \frac{\cancel{2}\cdot(|V_G|-1)}{\cancel{2}}\\ &= \binom{|V_G|}{2} - (|V_G|-1)\end{aligned}$$

y sabemos por resultados vistos en clases que hay $\binom{|V_G|}{2}$ aristas en una gráfica completa y un vértice puede relacionarse a lo más con $|V_G|-1$ vértices (pues estamos trabajando con gráficas simples), nótese que de lo anterior se infiere que $G-x$ es conexa [2], así $G+e$ (con $e \in E_G$)

$$\begin{aligned}|E_{G+e}| &= \binom{|V|-1}{2} + 1\\ &> \binom{|V|-1}{2}\end{aligned}$$

es conexa, pues como no hay lazos y no hay aristas múltiples en G, tenemos que la nueva arista esta comprendida entre x y algún otro vértice en V_{G-x} por lo que habrá una xy-trayectoria para $y \in E_G$.

De lo anterior concluimos que $|E_G| > \binom{|V|-1}{2} \Rightarrow G$ es conexa. QED

(b) Para $|V| > 1$ encuentre una gráfica inconexa con $|E| = \binom{|V|-1}{2}$.
Solución: Si $|V_G| = 2$, como $2 > 1 \Rightarrow |V_G| > 1$, luego la gráfica que tiene como vértices a u y v, y además

$$\begin{aligned}|E_G| &= \binom{2-1}{2}\\ &= \frac{(2-1)\cdot(2-2)}{2}\\ &= 0\end{aligned}$$

A continuación se muestra la gráfica mencionada:

G_1

Así observemos que la gráfica anterior es inconexa. □

[2] pues $|E_{G-x}| = \binom{|V_G|}{2}$

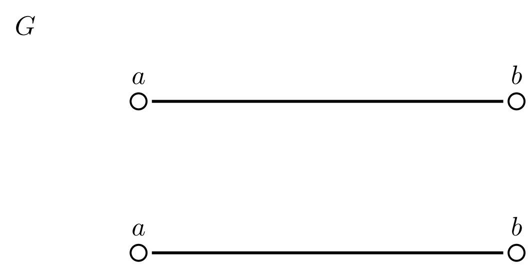
4. (a) Demuestre que si $\delta > \lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor - 1$, entonces G es conexa.

Demostración: Para este inciso procedemos por inducción sobre V_G. Sea G una gráfica con $|V_G| = 1$, así $\delta = \lfloor \frac{1}{2} \rfloor = 0$, *i.e.*

donde $E_G = \varnothing$. Luego supongamos como hipótesis inductiva que para una cantidad n de vértices, el que se cumpla $\delta = \lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor$ implica que G es conexa. A continuación veamos que pasa con $G + x$, con $x \in V_{G+x}$, así G cumple con $\delta = \lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor$, de lo anterior se sigue que x es vecino de al menos $\lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor$ vértices en G (notar que G es, de hecho, una subgráfica inducida por vértices de $G + x$), como G era conexa por hipótesis inductiva se sigue que $G + x$ es conexa. QED

(b) Para $|V|$ par encuentre una gráfica ($\lfloor \frac{|V|}{2} \rfloor - 1$)-regular e inconexa.
Solución: Con $|V| = 4$ tenemos

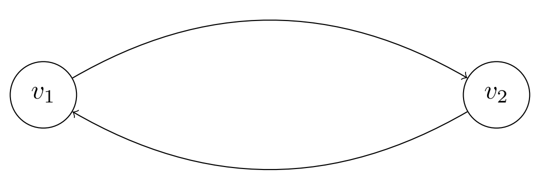
$$\begin{aligned} \lfloor \frac{4}{2} \rfloor - 1 &= 2 - 1 \\ &= 1 \end{aligned}$$



Así la gráfica es 1-regular e inconexa. □

5. Demuestre que si D no tiene lazos y $\delta^+ \geq 1$, entonces D contiene un ciclo dirigido de longitud al menos $\delta^+ + 1$.

Demostración: Para este ejercicio procedamos por inducción en V, así cuando $\delta^+ = 1$ y $|V| = 2$, tendremos



Ahora supongamos que hay un ciclo C de al menos longitud $\delta^+ + 1$, con $\delta^+ > 1$, para $n(n > 1)$ vértices en D y además D no tiene lazos. Luego para $|V_D| = n + 1$, donde llamaremos x al vértice extra, analicemos dos casos extremos:

- Si x tiene una sóla incidencia, entonces $\delta^+ = 1$ y como $\mathcal{L}(C) > 1$, tenemos que existe un ciclo de al menos $\delta^+ + 1$ y en este caso es estrictamente mayor. De lo anterior terminamos.
- Si para cada vértice $u_i(1 < i \geq |V_D| - 1)$ en G hay una arista que "salga" de u_i e incida en x, tenemos que δ^+ no se modifica. Ahora notemos que en partícular hay al menos u_i, u_{i+1} tales que existe una u_iu_{i+1}-trayectoria en C (notar que u_i y u_{i+1} son vecinos), luego como existe $e_1 = u_ix$ y $e_2 = u_{i+1}x$, con e_1 y e_2 en E_D, entonces tenemos un nuevo ciclo que es de al menos $\mathcal{L}(C) + 1$ de longitud, así como $\mathcal{L}(C) \geq \delta^+ + 1$, tenemos que el nuevo ciclo es de al menos longitud $\delta^+ + 1$.

Del análisis anterior concluimos que el enunciado se cumple. QED

Puntos Extra

1. Demuestre que el número de v_iv_j-caminos de longitud k en G es $(A^k)_{ij}$ donde A es la matriz de adyacencia de G.
2. Sea G una gráfica bipartita de grado máximo k. Demuestre que existe una gráfica bipartita k-regular, H, que contiene a G como subgráfica inducida.