UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO
Facultad de Ciencias

Autores:
Fernanda Villafán Flores
Fernando Alvarado Palacios
Adrián Aguilera Moreno

**Gráficas y Juegos**

# Tarea 5

1. Demuestre que si $G$ es simple y 3-regular, entonces $\kappa = \kappa'$.

   ***Demostración:*** Para este ejercicio veamos que $\kappa$ y $\kappa$' son a lo más 3, pues por el teorema
$$\kappa \leq \kappa' \leq \delta$$
   y como $G$ es 3-regular, entonces $\delta = 3$ y $\kappa \leq \kappa' \leq 3$.

   Luego, analicemos 3 posibles casos:

   ·) $\kappa = 1 = \kappa'$. Procedamos por reducción al absurdo. Si $\kappa = 1$ y $\kappa' \in \{2, 3\}$, entonces si $\kappa' = 2$ (o 3) tenemos que particularmente $\kappa' = 1$ !! (por la definición de $\kappa'$), lo anterior es una contradcción de suponer que $\kappa \neq \kappa'$, así $\kappa = 1 = \kappa'$.

   ·) $\kappa = 2 = \kappa'$. Procedamos por reducción al absurdo. Si $\kappa = 2$ y $\kappa' \in \{1, 3\}$, entonces tenemos que $\kappa' = 3$ es análogo al caso anterior. Si $\kappa' = 1$, tenemos que $\kappa = 2$ y por definición de $\kappa$ tenemos que particularmente $\kappa = 1$!!, he aquí una contradicción de suponer que $\kappa \neq \kappa'$, luego $\kappa = 2 = \kappa'$.

   ·) $\kappa = 3 = \kappa'$. Procedamos por reducción al absurdo. Si $\kappa = 3$ y $\kappa' \in \{1, 2\}$, entonces $\kappa = 1$!! de manera particular y por definición de $\kappa$, de esto se sigue que $\kappa = 3 = \kappa'$.

   De los casos anteriores se tiene que si $G$ es simple y 3-regular, entonces $\kappa = \kappa'$. QED

2. Demuestre que una gráfica es 2-conexa por aristas si y sólo si cualesquiera dos vértices están conectados por al menos dos trayectorias ajenas por aristas.

   ***Demostración:*** Procedemos por doble implicación.

   Sea $G$ una gráfica y sean $u, v \in V_G$.

   - $\Longrightarrow$.
     **Demostraremos que cualesquiera dos vértices están conectados por al menos dos trayectorias ajenas por aristas.**
     Tenemos que $G$ es 2-conexa por aristas, entonces existe una $uv$-trayectoria $P$ tal que:
     $$P = (p_1, p_2, \cdots, p_n)$$
     Ahora, si borramos a la arista $e$ de $P$ que conecta a los vértices $p_i$ y $p_{i+1}$, entonces existe una $uv$-trayectoria $Q$ tal que:
     $$Q = (q_1, q_2, \cdots, q_n)$$
     , donde $Q$ no pasa por la arista $e$ (esto ya que $G$ es 2-conexa por aristas).
     Luego, $G$ sigue siendo conexa y por tanto, pudimos encontrar al menos dos $uv$-trayectorias ajenas por aristas que conectan a los vértices $u$ y $v$.

   - $\Longleftarrow$.
     **Demostraremos que $G$ es una gráfica 2-conexa por aristas.**
     Tenemos que $u$ y $v$ están conectados por al menos dos $uv$-trayectorias ajenas por aristas $P$ y $Q$. Esto implica que si queremos desconectar a la gráfica $G$, debemos borrar dos aristas (una arista en $P$ y otra en $Q$). Entonces, $G$ sigue siendo conexa si tenemos subconjuntos $S$ en $G$ con $|S| < 2$.
     Por lo tanto, tenemos que $G$ es 2-conexa.

De lo anterior, concluimos que $G$ es 2-conexa por aristas si y sólo si cualesquiera dos vértices están conectados por al menos dos trayectorias ajenas por aristas. QED

3. Demuestre que si $G$ no tiene ciclos pares, entonces cada bloque de $G$ es $K_1$, $K_2$ o un ciclo impar.

***Demostración:*** Procedemos por contrapositiva.

Demostraremos que si ningún bloque de $G$ es $K_1$, $K_2$ ni un ciclo impar, entonces $G$ tiene ciclos pares.

Sea $G$ una gráfica y $G_1$ un bloque de $G$ con al menos 3 vértices.

El inciso $c$) del **Ejercicio** 5 nos dice que:

Para cualesquiera dos vértices de $G$, existe un ciclo que los contiene

Por lo anterior, entonces $G_1$ contiene un ciclo y además, por hipótesis, tenemos que $G_1$ no tiene ciclos impares.

Por lo tanto, $G_1$ tiene ciclos pares. QED

4. Sea $G$ una gráfica 2-conexa y sean $X$ y $Y$ subconjuntos ajenos de $V$, cada un con al menos dos vértices. Demuestre que $G$ contiene trayectorias ajenas $P$ y $Q$ tales que

   (a) Los vértices iniciales de $P$ y $Q$ pertenecen a $X$.

   (b) Los vértices finales de $P$ y $Q$ pertenecen a $Y$.

   (c) Ningún vértice interno de $P$ o $Q$ pertenece a $X \cup Y$.

***Demostración:*** Sea G 2-conexa y X, Y subconjuntos ajenos de V $\Leftrightarrow$ sean x'$\in$ X y y'$\in$ Y $\Leftrightarrow$ por el ejercicio 2 esta tarea, podemos asegurar que existen dos trayectorias internamente ajenas por aristas que conectan a x' y y', nombremos a estas trayectorias P' y Q'.

Sea P'= $(x' = a_0, a_1, a_2, ..., a_n = y')$ para alguna n que pertenezca a los Naturales y sea Q'= $(x' = b_0, b_1, b_2, ..., b_k = y')$ para alguna k que pertenezca a los naturales.

$\Leftrightarrow$ Comparando los vertices, sea $a_i$ para alguna i que pertenece a los naturales, tal que $a_i \in$ X, pero $a_{i+1} \notin$ X por lo que ahora P'= $(x' = a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, ..., a_n = y')$.

De igual forma existira algun $b_r$ para alguna r que pertenece a los naturales, tal que $b_r \in$ X, pero $b_{r+1} \notin$ X por lo que ahora Q'= $(x' = b_r, b_{r+1}, b_{r+2}, ..., b_k = y')$.

Ahora definamos $P'^{-1}$ como $(y' = a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, ..., a_i = x')$ y $Q'^{-1}$ como $(y' = b_k, b_{k-1}, b_{k-2}, ..., b_r = x')$ $\Leftrightarrow$ aplicando el razonamiento anterior, existira t que pertenenzca los naturales, tal que $b_{k-t} \in Y$ y $b_{k-(t+1)} \notin Y$ y de igual forma existiara s que pertenezca a los naturales tal que $a_{n-s} \in Y$ y $a_{n-(s+1)} \notin Y$ $\Leftrightarrow$ definamos a $P = (a_i, a_{i+1}, ...., a_{n-s})$ y definimos a $Q = (b_j, b_{j+1}, ..., b_{k-t})$

Por lo tanto:

a) se cumple ya que $a_i$ y $b_j$ pertenencen a X por construccion de nuetras trayectorias P y Q.

b) se cumple ya que $a_{n-r}$ y $b_{k-t}$ pertenencen a Y por construccion de P y Q.

c) se cumple de nuevo por construccion de P y Q y ya que X y Y son conjuntos disjuntos de V QED

5. Sea $G$ una gráfica conexa con al menos 3 vértices. Demuestre que los siguientes enunciados son equivalentes.

   (a) $G$ es un bloque.

   (b) Entre cualesquiera dos vértices distintos existen dos trayectorias internamente ajenas.

   (c) Para cualesquiera dos vértices de $G$ existe un ciclo que los contiene.

   (d) Para cualquier vértice y cualquier arista de $G$ existe un ciclo que los contiene.

   (e) Para cualesquiera dos aristas de $G$ existe un ciclo que los contiene.

   (f) Dados dos vértices $u, v \in V(G)$ y una arista $e \in E(G)$, existe una $uv$-trayectoria que pasa por $e$.

   (g) Para cualesquiera tres vértices distintos de $G$, existe una trayectoria que une a cualesquiera dos de ellos y que pasa por el tercero.

   (h) Para cualesquiera tres vértices distintos de $G$, existe una trayectoria que une a cualesquiera dos de ellos que no pasa por el tercero.

   ***Demostración:*** Las implicaciones; $(a) \Rightarrow (b)$, $(b) \Rightarrow (c)$ y $(c) \Rightarrow (d)$, se omiten por estar escritas en las notas de clase. Las implicaciones restantes se enumeran a continuación:

   ·) Por mostrar $(d) \Rightarrow (e)$.
   Por $(d)$ sabemos que cualquier arista se encuentra contenida en un ciclo, por consecuencia directa, cualesquiera 2 aristas se encuentran contenidas en algún ciclo.

   ·) Por mostrar $(e) \Rightarrow (f)$.
   Nótese que como consecuencia de $(e)$(en partícular cualquier arista esta contenida en un ciclo) cualquier vértice no aislado forma parte de un ciclo, como $G$ es conexa, entonces todos sus vértices son parte de algún ciclo, esto nos lleva a que $G$ es 2-conexa por aristas. Luego para $u, v$ en $V_G$ existen al menos dos $uv$-trayectoria ajenas por aristas. De lo anterior veamos como son $v$ y $u$, esto es

   - Si $u, v$ forman parte de un mismo ciclo $C$. Sea $e \in E_G$ tal que forme parte de $C$, entonces terminamos, pues existe una trayectoria que pasa por $e$. Ahora, supongamos que $e$ no es parte de $C$, y sea $e = xy(x, y$ en $V_G)$, así supongamos que los vértices $y$ y $v$ son los que se pueden "conectar" por la trayectoria de mayor longitud entre ellos y a la que llamaremos $T$, veamos que si $x$ se encuentra en $T$ terminamos, pues existe una $xu$-trayectoria que complementa a $T$ para formar una $uv$-trayectoria con $e$ contenida, luego si $x$ no esta contenida en $T$, entonces $Tx$ incluye a $e$ por lo que si $u$ no esta contenida en $T$, entonces existe una $xu$-trayectoria $P$ tal que $TxP$ es la trayectoria buscada[1].
   - $u, v$ forman parte de ciclos distintos. Si $e$ forma parte de alguno de los ciclos que contiene a $u$ y $v$ como vértices, entonces hay una trayectoria $Q$ que pasa por $v$ (o $u$) y por $e$, pues están en el mismo ciclo, luego existe una trayectoria $P$ que inicia en $e$ y llega hasta $u$ (o $v$) como consecuencia de que $G$ sea conexa, además $P$ ajena con $Q$ por ser $G$ 2-conexa por aristas, luego $PQ$ es la trayectoria que pasa por $u$ y $v$ que además contiene a la arista $e$. Para

[1] Con esto debería bastar, pues estamos mostrando la equivalencia a un bloque propiamente, sin embargo el caso restante también lo analizo, pues no veo como descartalo sin usar lo que estoy mostrando.

finalizar, si $e$ no se encuentra contenida en los ciclos que contienen a $u$ y $v$ como vértices. Supongamos que $e = xy(x, y$ en $V_G)$ y que de $x$ se pueda obtener la trayectoria más larga con $v$, así, existe una $xv$-trayectoria $T$ que ya contiene a $e$ (porque $T$ es la más larga, caso contrario sólo basta unir $T = Ty$), como existe una $vu$-trayectoria $P$, entonces $TP$ $(TyP)$ es la trayectoria buscada y terminamos.

·) Por mostrar $(f) \Rightarrow (g)$.

Por $(f)$ tenemos que cualesquiera 2 vértices $u, v$ y para toda arista $e$, existe una $uv$-trayectoria que contiene a $e$. Como $G$ es conexa, entonces, cualquier vértice es parte de alguna arista, así, para cualesquiera $x, y, z$ en $V_G$ existe una $xz$-trayectoria $T$ que contiene a $e \in E_G$, tal que $e = yw(w \in E_G)$ y por tanto $T$ pasa por $y$.

·) Por mostrar $(g) \Rightarrow (h)$.

Como $G$ es conexa, sabemos que existe una $xy$-trayectoria $T$, una $xz$-trayectoria $P$, y una $yz$-trayectoria $Q$, todas ellas de longitud mínima. Así

- Si todas las longitudes son iguales, *i.e.*, $\mathcal{L}(T) = \mathcal{L}(P) = \mathcal{L}(Q)$. Por hipótesis $x, y, z$ no son iguales, así, cualquier trayectoria no contiene al tercer vértice y hemos encontrado al menos 2 trayectoias que cumplen con $h$.
- Si dos de las trayectorias tienen una longitud mínima igual y menor a la que es desigual, *i.e.*, $\mathcal{L}(T) = \mathcal{L}(P) < \mathcal{L}(Q)$ o $\mathcal{L}(T) > \mathcal{L}(P) = \mathcal{L}(Q)$ o $\mathcal{L}(T) = \mathcal{L}(Q) < \mathcal{L}(P)$. En este caso, analicemos las dos trayectorias que resulten tener menor longitud entre $P, Q, T$. Si las trayectorias son $T$ y $P$, entonces cualquiera de estas no contiene al tercer vértice, pues $x, y, z$ son distintos y las trayectorias elegidas son las de menor longitud. Si se tiene que las trayectorias mínimas son $T$ y $Q$, o $P$ y $Q$, se cumple que un tercer vértice no esta en alguna de las dos trayectorias, pues en caso contrario y por saber que $x, y, z$ son distintos, se tendría que hay una trayectoria menor con 2 de los vértices que estamos trabajando!!!, pero esto es absurdo, ya que, nuestras trayectorias eran mínimas, por lo cual se cumple $h$.
- Si una de las longitudes mínimas es menor a las restantes, *i.e.*, $\mathcal{L}(T) = \mathcal{L}(P) > \mathcal{L}(Q)$ o $\mathcal{L}(T) < \mathcal{L}(P) = \mathcal{L}(Q)$ o $\mathcal{L}(T) = \mathcal{L}(Q) > \mathcal{L}(P)$. Para este caso, elegimos la trayectoria con menor longitud y esta no contendrá al tercer vértice, pues para que pasará por el se necesitaría recorrer más aristas. En este caso tenemos una trayectoria que cumple con $h$.

·) Por mostrar $(h) \Rightarrow (a)$.

Sean $x, y, z$ en $V_G$ tales que $P$ es una $xy$-trayectoria que no pasa por $z$. Como $G$ es conexa, entonces existe una $xy$-trayectoria $R$ y una $yz$-trayectoria $S$, tales que, $T = RS$, luego hemos encontrado dos $xy$-trayectorias distintas que en partícular forman un ciclo, además este ciclo es único porque esto pasa con cualquier vértice y entre ellos, *i.e.*, si seguimos escogiendo vértices de $V_G$ veremos que todos están en un ciclo y que están relacionados de esta manera con todos los vértices, de lo anterior $G$ es un único ciclo y concluimos que $G$ es un bloque.

De lo anterior y por silogismo hipotético en los incisos anteriores se concluye que la caracterización se cumple. QED