UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO

Facultad de Ciencias

Autores:
Fernanda Villafán Flores
Fernando Alvarado Palacios
Adrián Aguilera Moreno

Gráficas y Juegos

Tarea 11

1. Sea D una digráfica con una función $f\colon A \to \mathbb{R}$. Demuestre que
   (a) $\sum\{f^+(v)\colon\ v \in V\} = \sum\{f^-(v)\colon\ v \in V\}$,
   (b) si f es un (x, y)-flujo, el flujo neto $f^+(x) - f^-(x)$ que sale de x es igual al flujo neto $f^-(y) - f^+(y)$ que entra a y.

2. (a) Demuestre que, para cualquier flujo f en una red N y cualquier conjunto $X \subseteq V$,

$$\sum_{v \in X} (f^+(v) - f^-(v)) = f^+(X) - f^-(X).$$

   (b) Dé un ejemplo de un flujo f en una red tal que $\sum_{v\in X} f^+(v) \neq f^+(X)$ y $\sum_{v\in X} f^-(v) \neq f^-(X)$.

3. Sea $N(X, Y)$ con conjunto de fuentes $X = \{x_i\}_{i=1}^{k}$ y conjunto de sumideros $Y = \{y_j\}_{j=1}^{\ell}$. Construya una nueva red $N'(x, y)$ de la siguiente forma.
   - Agregue dos nuevos vértices x y y.
   - Para cada $i \in \{1, \ldots, k\}$, una a x con x_i con una flecha de capacidad $c^+(x_i)$.
   - Para cada $j \in \{1, \ldots, \ell\}$, una a y_j con y con una flecha de capacidad $c^-(y_j)$.

   Para cualquier flujo f en N, considere la función f' definida sobre N' como:

$$f'(a) = \begin{cases} f(a) & \text{si } a \text{ es una flecha de } N \\ f^+(v) & \text{si } a = (x, v) \\ f^-(v) & \text{si } a = (v, y). \end{cases}$$

   (a) Demuestre que f' es un flujo en N' con el mismo valor que f.
   (b) Demuestre, recíprocamente, que la restricción de un flujo en N' al conjunto de flechas de N es un flujo en N del mismo valor.

4. Sea $N(x, y)$ una red que no contenga xy-trayectorias dirigidas. Demuestre, sin utilizar el teorema del Flujo Máximo-Corte Mínimo, que el valor de un flujo máximo, y la capacidad de un corte mínimo en N son ambos cero.

5. Sea N una red con un flujo f. Demuestre que si P es una trayectoria f-incrementable con $\varepsilon(P) = \varepsilon$, entonces la función dada por

$$f'(a) = \begin{cases} f(a) + \varepsilon & \text{si } a \in A_P \text{ y } \rightarrow \\ f(a) - \varepsilon & \text{si } a \in A_P \text{ y } \leftarrow \\ f(a) & \text{si } a \notin A_P. \end{cases}$$

   es un flujo con valor estrictamente mayor que f.