

# UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO

## Facultad de Ciencias

Autores:

Fernanda Villafán Flores  
Fernando Alvarado Palacios  
Adrián Aguilera Moreno



Gráficas y Juegos

## Tarea 2

1. Demuestre que toda flecha en un camino dirigido cerrado en una digráfica pertenece a algún ciclo dirigido.
2. Demuestre que si  $G$  es simple y  $\delta \geq 2$ , entonces  $G$  contiene un ciclo de longitud al menos  $\delta + 1$ .
3. Sea  $G$  una gráfica conexa. Demuestre que si  $G$  no es completa, entonces contiene a  $P_3$  como subgráfica inducida.
4. Demuestre que cualesquiera dos trayectorias de longitud máxima en una gráfica conexa tienen un vértice en común.
5. Caracterice a las gráficas  $k$ -regulares para  $k \in \{0, 1, 2\}$ .
6. Demuestre que si  $|E| \geq |V|$ , entonces  $G$  contiene un ciclo.

## Puntos extra

1. Sea  $G$  una gráfica. Demuestre que  $G$  es  $k$ -partita completa si y sólo si no contiene a  $K_{k+1}$  ni a  $\overline{P_3}$  como subgráficas inducidas.
2. Demuestre que si  $G$  es una gráfica con  $|V| \geq 4$  y  $|E| > n^2/4$ , entonces  $G$  contiene un ciclo impar.
3. Sea  $d = (d_1, \dots, d_n)$  una sucesión no creciente de enteros no negativos. Sea  $d' = (d_2 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n)$ .
  - (a) Demuestre que  $d$  es gráfica si y sólo si  $d'$  es gráfica.
  - (b) Usando el primer inciso, describa un algoritmo que acepte como entrada una sucesión no creciente de enteros no negativos  $d$  y devuelva una gráfica simple con sucesión de grados  $d$ , un certificado de que  $d$  no es gráfica.