UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO
Facultad de Ciencias

Autores:
Fernanda Villafán Flores
Fernando Alvarado Palacios
Adrián Aguilera Moreno

Gráficas y Juegos

Tarea 5

1. Demuestre que si G es simple y 3-regular, entonces $\kappa = \kappa'$.

2. Demuestre que una gráfica es 2-conexa por aristas si y sólo si cualesquiera dos vértices están conectados por al menos dos trayectorias ajenas por aristas.

3. Demuestre que si G no tiene ciclos pares, entonces cada bloque de G es K_1, K_2 o un ciclo impar.

4. Sea G una gráfica 2-conexa y sean X y Y subconjuntos ajenos de V, cada un con al menos dos vértices. Demuestre que G contiene trayectorias ajenas P y Q tales que

   (a) Los vértices iniciales de P y Q pertenecen a X.

   (b) Los vértices finales de P y Q pertenecen a Y.

   (c) Ningún vértice interno de P o Q pertenece a $X \cup Y$.

5. Sea G una gráfica conexa con al menos 3 vértices. Demuestre que los siguientes enunciados son equivalentes.

   (a) G es un bloque.

   (b) Entre cualesquiera dos vértices distintos existen dos trayectorias internamente ajenas.

   (c) Para cualesquiera dos vértices de G existe un ciclo que los contiene.

   (d) Para cualquier vértice y cualquier arista de G existe un ciclo que los contiene.

   (e) Para cualesquiera dos aristas de G existe un ciclo que los contiene.

   (f) Dados dos vértices $u, v \in V(G)$ y una arista $e \in E(G)$, existe una uv-trayectoria que pasa por e.

   (g) Para cualesquiera tres vértices distintos de G, existe una trayectoria que une a cualesquiera dos de ellos y que pasa por el tercero.

   (h) Para cualesquiera tres vértices distintos de G, existe una trayectoria que une a cualesquiera dos de ellos que no pasa por el tercero.

   Demostración: Las implicaciones; $(a) \Rightarrow (b)$, $(b) \Rightarrow (c)$ y $(c) \Rightarrow (d)$, se omiten por estar escritas en las notas de clase. Las implicaciones restantes se enumeran a continuación:

   ·) Por mostrar $(d) \Rightarrow (e)$.
   Por (d) sabemos que cualquier arista se encuentra contenida en un ciclo, por consecuencia directa, cualesquiera 2 aristas se encuentran contenidas en algún ciclo.

   ·) Por mostrar $(e) \Rightarrow (f)$.
   Nótese que como consecuencia de (e)(en partícular cualquier arista esta contenida en un ciclo) cualquier vértice no aislado forma parte de un ciclo, como G es conexa, entonces todos sus vértices son parte de algún ciclo, esto nos lleva a que G es 2-conexa por aristas. Luego para u, v en V_G existen al menos dos uv-trayectoria ajenas por aristas. De lo anterior veamos como son v y u, esto es

- Si u, v forman parte de un mismo ciclo C. Sea $e \in E_G$ tal que forme parte de C, entonces terminamos, pues existe una trayectoria que pasa por e. Ahora, supongamos que e no es parte de C, y sea $e = xy(x, y$ en $V_G)$, así supongamos que los vértices y y v son los que se pueden "conectar" por la trayectoria de mayor longitud entre ellos y a la que llamaremos T, veamos que si x se encuentra en T terminamos, pues existe una xu-trayectoria que complementa a T para formar una uv-trayectoria con e contenida, luego si x no esta contenida en T, entonces Tx incluye a e por lo que si u no esta contenida en T, entonces existe una xu-trayectoria P tal que TxP es la trayectoria buscada[1].
- u, v forman parte de ciclos distintos. Si e forma parte de alguno de los ciclos que contiene a u y v como vértices, entonces hay una trayectoria Q que pasa por v (o u) y por e, pues están en el mismo ciclo, luego existe una trayectoria P que inicia en e y llega hasta u (o v) como consecuencia de que G sea conexa, además P ajena con Q por ser G 2-conexa por aristas, luego PQ es la trayectoria que pasa por u y v que además contiene a la arista e. Para finalizar, si e no se encuentra contenida en los ciclos que contienen a u y v como vértices. Supongamos que $e = xy(x, y$ en $V_G)$ y que de x se pueda obtener la trayectoria más larga con v, así, existe una xv-trayectoria T que ya contiene a e (porque T es la más larga, caso contrario sólo basta unir $T = Ty$), como existe una vu-trayectoria P, entonces TP (TyP) es la trayectoria buscada y terminamos.

·) Por mostrar $(f) \Rightarrow (g)$.

Por (f) tenemos que cualesquiera 2 vértices u, v y para toda arista e, existe una uv-trayectoria que contiene a e. Como G es conexa, entonces, cualquier vértice es parte de alguna arista, así, para cualesquiera x, y, z en V_G existe una xz-trayectoria T que contiene a $e \in E_G$, tal que $e = yw(w \in E_G)$ y por tanto T pasa por y.

·) Por mostrar $(g) \Rightarrow (h)$.

Como G es conexa, sabemos que existe una xy-trayectoria T, una xz-trayectoria P, y una yz-trayectoria Q, todas ellas de longitud mínima. Así

- Si todas las longitudes son iguales, *i.e.*, $\mathcal{L}(T) = \mathcal{L}(P) = \mathcal{L}(Q)$. Por hipótesis x, y, z no son iguales, así, cualquier trayectoria no contiene al tercer vértice y hemos encontrado al menos 2 trayectoias que cumplen con h.
- Si dos de las trayectorias tienen una longitus mínima igual y menor a la que es desigual, *i.e.*, $\mathcal{L}(T) = \mathcal{L}(P) < \mathcal{L}(Q)$ o $\mathcal{L}(T) > \mathcal{L}(P) = \mathcal{L}(Q)$ o $\mathcal{L}(T) = \mathcal{L}(Q) < \mathcal{L}(P)$. En este caso, analicemos las dos trayectorias que resulten tener menor longitud entre P, Q, T. Si las trayectorias son T y P, entonces cualquiera de estas no contiene al tercer vértice, pues x, y, z son distintos y las trayectorias elegidas son las de menor longitud. Si se tiene que las trayectorias mínimas son T y Q, o P y Q, se cumple que un tercer vértice no esta en alguna de las dos trayectorias, pues en caso contrario y por saber que x, y, z son distintos, se tendría que hay una trayectoria menor con 2 de los vértices que estamos trabajando!!!, pero esto es absurdo, ya que, nuestras trayectorias eran mínimas, por lo cual se cumple h.
- Si una de las longitudes mínimas es menor a las restantes, *i.e.*, $\mathcal{L}(T) = \mathcal{L}(P) > \mathcal{L}(Q)$ o $\mathcal{L}(T) < \mathcal{L}(P) = \mathcal{L}(Q)$ o $\mathcal{L}(T) = \mathcal{L}(Q) > \mathcal{L}(P)$. Para este caso, elegimos la trayectoria con menor longitud y esta no contendrá al tercer vértice,

[1] Con esto debería bastar, pues estamos mostrando la equivalencia a un bloque propiamente, sin embargo el caso restante también lo analizo, pues no veo como descartalo sin usar lo que estoy mostrando.

pues para que pasará por el se necesitaría recorrer más aristas. En este caso tenemos una trayectoria que cumple con h.

·) Por mostrar $(h) \Rightarrow (a)$.
Sean x, y, z en V_G tales que P es una xy-trayectoria que no pasa por z. Como G es conexa, entonces existe una xy-trayectoria R y una yz-trayectoria S, tales que, $T = RS$, luego hemos encontrado dos xy-trayectorias distintas que en partícular forman un ciclo, además este ciclo es único porque esto pasa con cualquier vértice y entre ellos, *i.e.*, si seguimos escogiendo vértices de V_G veremos que todos están en un ciclo y que están relacionados de esta manera con todos los vértices, de lo anterior G es un único ciclo y concluimos que G es un bloque.

De lo anterior y por silogismo hipotético en los incisos anteriores se concluye que la caracterización se cumple. **Q.E.D.** $\square$