

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO

Facultad de Ciencias

Autores:

Fernanda Villafán Flores
Fernando Alvarado Palacios
Adrián Aguilera Moreno



Gráficas y Juegos

Tarea 2

1. Demuestre que toda flecha en un camino dirigido cerrado en una digráfica pertenece a algún ciclo dirigido.
2. Demuestre que si G es simple y $\delta \geq 2$, entonces G contiene un ciclo de longitud al menos $\delta + 1$.
3. Sea G una gráfica conexa. Demuestre que si G no es completa, entonces contiene a P_3 como subgráfica inducida.

Demostración: Procedamos por reducción al absurdo.

Sea G una gráfica completa, entonces P_3 es subgráfica de G . Para este ejercicio necesitamos de una condición, $V_G \geq 4$, para las gráficas que no cumplan esto se tendrá la demostración por vacuidad.

Tomemos a $x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}$ en V_G ($2 \leq i \leq |V_G| - 2$), como G es completa se tiene que la distancia entre cualesquiera 2 vértices es 1, luego tenemos que hay $\binom{4}{2}$ aristas!! y esto es claramente mayor que 3, como los vértices que tomamos son arbitrarios, podemos concluir que $P_3 \not\subseteq G$.

Como la anterior contradicción resulta de suponer a G completa, podemos asegurar que si G no es completa, entonces $P_3 \subseteq G$. QED

4. Demuestre que cualesquiera dos trayectorias de longitud máxima en una gráfica conexa tienen un vértice en común.
5. Caracterice a las gráficas k -regulares para $k \in \{0, 1, 2\}$.
6. Demuestre que si $|E| \geq |V|$, entonces G contiene un ciclo.

Puntos extra

1. Sea G una gráfica. Demuestre que G es k -partita completa si y sólo si no contiene a K_{k+1} ni a $\overline{P_3}$ como subgráficas inducidas.
2. Demuestre que si G es una gráfica con $|V| \geq 4$ y $|E| > n^2/4$, entonces G contiene un ciclo impar.
3. Sea $d = (d_1, \dots, d_n)$ una sucesión no creciente de enteros no negativos. Sea $d' = (d_2 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n)$.
 - (a) Demuestre que d es gráfica si y sólo si d' es gráfica.
 - (b) Usando el primer inciso, describa un algoritmo que acepte como entrada una sucesión no creciente de enteros no negativos d y devuelva una gráfica simple con sucesión de grados d , un certificado de que d no es gráfica.