UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO

Facultad de Ciencias

Autores:
Fernanda Villafán Flores
Fernando Alvarado Palacios
Adrián Aguilera Moreno

Gráficas y Juegos

Tarea 6

1. Sea G una gráfica conexa no euleriana. Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

   (a) Hay un paseo euleriano en G.

   (b) Hay exactamente dos vértices de grado impar en G.

   (c) Existe una familia de ciclos ajenos por aristas dos a dos $\{C_i\}_{i=1}^{k}$ y un paseo P tal que $E_G = E_P \cup \bigcup_{i=1}^{k} E_{C_i}$.

2. Sea D una digráfica conexa. Demuestre que D es euleriana si y sólo si para cada $v \in V_D$, se tiene $d^+(v) = d^-(v)$.

   Demostración: $\Longrightarrow$ Sea D una digrafica conexa e eucliriana $\rightarrow$ Por definicion de grafica eucliriana existe un circuito euclidiano que une a todos los vertices, llamemosle C a este circuito $\rightarrow$ sea x perteneciente a V_D el inicio de este circuito $\rightarrow$ C$=(x, v_i, v_{i+1}, ..., v_{i+n}, u)$ con i y n pertenecientes a los naturales, $\rightarrow$ como todos los vertices son consecutivos notemos que cada vertice de C es cola y cabeza para dos flechas distintas en el circuito $\rightarrow$ para todo V_k que pertenece a C existe d^+ y d^- que unene a V_k con sus vertices adyacentes V_{k-1} y V_{k+1} $\rightarrow$ cada vertice de la trayectoria C tendrá una "arista" d^+ y una d^-, ya que D es par y por construccion de C. Por lo tanto $d^+ = d^-$ ya que para todo vertice de D se puen sumar el numero de veces que aparecen en la trayectoria C y preservará la igualdad anterior.

   $\Longleftarrow$ Sea D conexa y para toda v que pertenece a V_D se tiene que $d^+ = d^-$ $\rightarrow$ para toda v que pertenece a V_D existe al menos una d^+ y una d^-, por lo que para todo v que pertenece a V_D v es mayor igual a 2, pero el grado de V siempre debe ser par, ya que tenemos la igualdad $d^+ = d^-$ $\rightarrow$ D es par, por lo tanto por teorema visto en clase tenemos que D es una grafica Eucliriana

   $\square$

3. La digráfica de *de Bruijn-Good* BG_n tiene como conjunto de vértices al conjunto de todas las sucesiones binarias de longitud n, y donde el vértice $a_1a_2\cdots a_n$ es adyacente al vértice $b_1b_2\cdots b_n$ si y sólo si $a_{i+1} = b_i$ para $1 \leq i \leq n-1$. Demuestre que BG_n es una digráfica euleriana de orden 2^n y diámetro dirigido n.

4. Demuestre que existe una forma de ordenar todas las fichas de dominó en un ciclo (respetando las reglas del juego). ¿Cómo generalizaría este resultado para dominós con n puntos? (el dominó estándar es el de 6 puntos).

5. Sean G una gráfica euleriana no trivial y $u \in V_G$. Demuestre que todo paseo en G que inicia en u se puede extender a un circuito euleriano si y sólo si $G - u$ es acíclica.

Puntos Extra

1. Una digráfica D es *balanceada* si $|d^+(v) - d^-(v)| \leq 1$, para cada $v \in V$. Demuestre que toda gráfica tiene una orientación balanceada.

2. Una sucesión circular $s_1s_2\cdots s_{2^n}$ de ceros y unos es llamada una *sucesión de de Bruijn-Good* de orden n si las 2^n subsucesiones $s_is_{i+1}\cdots s_{i+n-1}$, $1 \leq i \leq 2^n$ (con los subíndices

tomados módulo 2^n son distintas, y por lo tanto constituyen todas las posibles sucesiones binarias de longitud n. Por ejemplo, la sucesión 00011101 es una una sucesión de de Bruijn-Good de orden tres. Muestre como encontrar un de estas sucesiones para cualquier orden n utilizando un circuito euleriano dirigido en la gráfica de de Bruijn-Good BG_{n-1}. Justifique su respuesta.

3. Sea G una gráfica conexa, y sea X el conjunto de vértices de G de grado impar. Suponga que $|X| = 2k$, con $k \geq 1$.

   (a) Demuestre que hay k paseos ajenos por aristas $Q_1, \ldots, Q_k$ en G tales que $E_G = \bigcup_{i=1}^{k} E_{Q_i}$.

   (b) Deduza que G contiene k paseos ajenos por aristas que conectan a los vértices de X en pares.