

# UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO

## Facultad de Ciencias

Autores:

Fernanda Villafán Flores  
Fernando Alvarado Palacios  
Adrián Aguilera Moreno



Gráficas y Juegos

## Tarea 2

1. Demuestre que toda flecha en un camino dirigido cerrado en una digráfica pertenece a algún ciclo dirigido.
2. Demuestre que si  $G$  es simple y  $\delta \geq 2$ , entonces  $G$  contiene un ciclo de longitud al menos  $\delta + 1$ .
3. Sea  $G$  una gráfica conexa. Demuestre que si  $G$  no es completa, entonces contiene a  $P_3$  como subgráfica inducida.

**Demostración:** Procedamos por reducción al absurdo.

Sea  $G$  una gráfica completa, entonces  $P_3$  es subgráfica de  $G$ . Para este ejercicio necesitamos de una condición,  $V_G \geq 3$ , para las gráficas que no cumplan esto se tendrá la demostración por vacuidad.

Tomemos a  $x_{i-1}, x_i, x_{i+1}$  en  $V_G$  ( $2 \leq i \leq |V_G| - 1$ ), como  $G$  es completa se tiene que la distancia entre cualesquiera 2 vértices es 1, luego tenemos que hay  $\binom{3}{2}$  aristas!! y esto es claramente mayor que 2 ( $|E_{P_3}|$ ), como los vértices que tomamos son arbitrarios, podemos concluir que  $P_3 \subseteq G$ .

Como la anterior contradicción resulta de suponer a  $G$  completa, podemos asegurar que si  $G$  no es completa, entonces  $P_3 \subseteq G$ . QED

4. Demuestre que cualesquiera dos trayectorias de longitud máxima en una gráfica conexa tienen un vértice en común.
5. Caracterice a las gráficas  $k$ -regulares para  $k \in \{0, 1, 2\}$ .

**Solución:**

$k = 0$ ) Son todas las gráficas que no tienen aristas, a estas se les conoce como gráficas vacías.

$k = 1$ ) Estas son gráficas con una cantidad de vértices par y son tantas uniones de  $P_2$  como  $\frac{|V_G|}{2}$ . Las gráficas con  $|V_G|$  impar no entran aquí porque siempre habrá  $(|V_G| - 1)P_2$  y algún vértice (aislado) será de grado igual a 0!! (o, pensando en lazos, de grado igual a 2), lo que contradice el ser 1-regular.

$k = 2$ ) Son gráficas que contienen ciclos o son combinaciones de ciclos. Todos los ciclos son 2-regulares, esto no implica que todas las gráficas 2-regulares sean un ciclo pero si que los contengan o que sean combinaciones de estos.

Con los 3 puntos anteriores concluimos la caracterización.  $\square$

6. Demuestre que si  $|E| \geq |V|$ , entonces  $G$  contiene un ciclo.

**Demostración:** (Por contradicción)

Supongamos que  $G$  es una gráfica tal que  $|E| \geq |V|$  y  $G$  no contiene ningún ciclo  $\implies$  el número máximo de vértices de este tipo de gráficas será igual a  $|V| - 1$  (Ya que todo vértice se podría relacionar con algún otro vértice sin repetir con los vértices anteriores, pero el último no se podría relacionar con algún otro vértice ya que si lo hiciera formaría un ciclo)  $\implies |E| \leq |V| - 1 < |V|$  (!lo que es una contradicción ya que contradice nuestra hipótesis de que  $|E| \geq |V|$ ). Por lo tanto la gráfica  $G$  debe tener al menos un ciclo.

QED

## Puntos extra

1. Sea  $G$  una gráfica. Demuestre que  $G$  es  $k$ -partita completa si y sólo si no contiene a  $K_{k+1}$  ni a  $\overline{P}_3$  como subgráficas inducidas.
2. Demuestre que si  $G$  es una gráfica con  $|V| \geq 4$  y  $|E| > n^2/4$ , entonces  $G$  contiene un ciclo impar.
3. Sea  $d = (d_1, \dots, d_n)$  una sucesión no creciente de enteros no negativos. Sea  $d' = (d_2 - 1, \dots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \dots, d_n)$ .
  - (a) Demuestre que  $d$  es gráfica si y sólo si  $d'$  es gráfica.
  - (b) Usando el primer inciso, describa un algoritmo que acepte como entrada una sucesión no creciente de enteros no negativos  $d$  y devuelva una gráfica simple con sucesión de grados  $d$ , un certificado de que  $d$  no es gráfica.