

UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO

Facultad de Ciencias

Autores:

Fernanda Villafán Flores

Fernando Alvarado Palacios

Adrián Aguilera Moreno



Gráficas y Juegos

Tarea 7

1. (a) Demuestre que si G tiene diámetro mayor que 3 (posiblemente infinito), entonces \overline{G} tiene diámetro menor que 3. Concluya que si G es inconexa, entonces \overline{G} es conexa.
- (b) Una gráfica G es autocomplementaria si $G \cong \overline{G}$. Demuestre que si G es autocomplementaria, entonces $|V| \stackrel{4}{\equiv} 0$ o $|V| \stackrel{4}{\equiv} 1$.
2. Un *orden topológico* de una digráfica D es un orden lineal de sus vértices tal que para cada flecha a de D , la cola de a precede a su cabeza en el orden.
- (a) Demuestre que toda digráfica acíclica tiene al menos una fuente (vértice de ingrado 0) y un sumidero (vértice de exgrado 0).

Demostración: Procedamos por reducción al absurdo. Sea D una digráfica acíclica con $\delta^+ > 0$ y $\delta^- > 0$, esto es que, para cada $v \in V_D$ hay una flecha que le “pega”¹ a v y otra que “sale”² de v . Tomemos la trayectoria \vec{T} más larga en D y sea $x \in V_D$ el último vértice de \vec{T} , luego en x sale una arista hacia algún otro vértice en \vec{T} [pues si saliera hacia algún otro vértice que no este en \vec{T} , llegaríamos a que \vec{T} no es de longitud máxima!!], así $\vec{T}xy$ claramente contiene un ciclo, esto implica que D contiene un ciclo!!, he aquí una contradicción de suponer que D no contiene ciclos.

\therefore Si D es acíclica tiene al menos una fuente y un sumidero. \square

- (b) Deduzca que una digráfica admite un orden topológico si y sólo si es acíclica.

Demostración: Para este inciso analicemos 2 posibles casos:

\Rightarrow) Procedamos por reducción al absurdo. Sea D una digráfica tal que admite un orden topológico. Supongamos que D contiene al menos un ciclo C , entonces existe un $x \in V_D$ tal que $\{x\} \subset C$ y x es un vértice inicial y final en C , luego existe $y \in V_D$: $\{y\} \subset C$ tal que $\vec{y}x$ es una arista, por tanto $y < x$ [esto es que y precede a x en el orden]. Nótese que hay una trayectoria \vec{T} que va de x a y en C , así $x < y$!! [esto es que x precede a y en el orden], he aquí una contradicción de suponer que D admite un orden topológico.

\therefore Si D admite un orden topológico $\Rightarrow D$ es acíclica.

\Leftarrow) Por el inciso (a) sabemos que D tiene al menos una *fuentes* y un *sumidero*, tomemos una componente conexa en D y veamos que si los vértices x es *fuentes* e y es *sumidero*, entonces la trayectoria de x a y es un orden topológico, si hay más de una *fuentes* o más de un *sumidero*, cada trayectoria entre una *fuentes* y un *sumidero* es un orden topológico [pues de no serlo, dos flechas distintas provenientes de una misma fuente incidirían en algún vértice en común, lo que implicaría que D contiene un ciclo!!], así la componente conexa admite un orden topológico y esto pasa para cualquier componente conexa en D .

\therefore Si D es acíclica $\Rightarrow D$ admite un orden topológico.

\therefore Una digráfica admite un orden topológico si y sólo si es acíclica. \square

- (c) Exhiba un algoritmo de tiempo a lo más cuadrático para encontrar un orden topológico en una digráfica acíclica.

¹Una arista incide en v y v es la cabeza.

²Una arista que inicia en v con dirección a otro vértice.

A continuación se muestra el algoritmo³ requerido:

1: TopologicalOrder($D; D$)

Input: Una digráfica D acíclica.
Output: Un orden topológico admitido en D basado en números.

```

1 for  $v \in V_D$  and  $d^-(v) = 0$  do
2   |  $v \leftarrow 0$ ;
3 end
4 for  $v \in V_D$  do
5   | if  $v \neq 0$  then
6     |   temp  $\leftarrow 0$ ;
7     |   for  $u \in V_D : u$  es antecesor de  $v$  en  $D$  and  $u \neq \text{null}$  do
8       |     if temp  $< u$  then
9         |       | temp  $\leftarrow u$ 
10      |     end
11      | end
12      |  $v \leftarrow \text{temp} + 1$ ;
13      | for  $u \in V_D : u$  es sucesor de  $v$  en  $D$  and  $u \neq \text{null}$  do
14        |   if  $u < v$  then
15          |     |  $u \leftarrow v + 1$ 
16          |   end
17        | end
18      | end
19 end
20 return  $D$ 

```

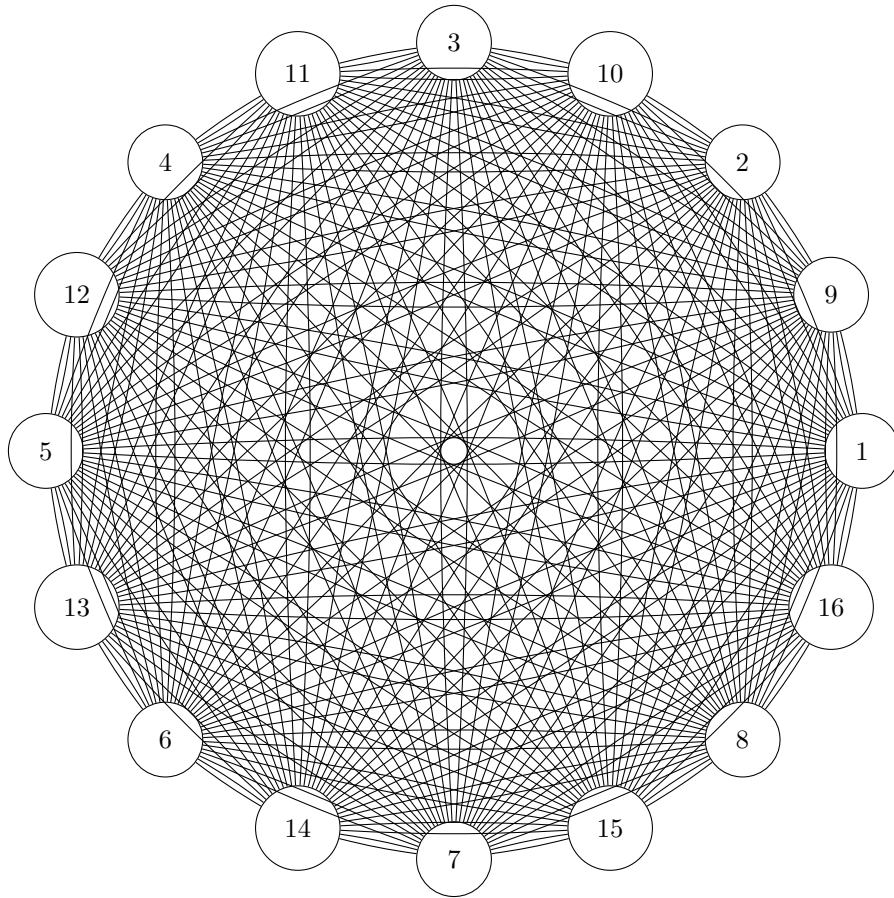
□

³Tome en cuenta que suponemos que D se pasa como parámetro con valores nulos en sus vértices.

3. Demuestre que cada uno de los siguientes problemas está en la clase NP exhibiendo un certificado y un algoritmo de tiempo polinomial para verificar el certificado (escriba el algoritmo utilizando pseudo código como el visto en clase; sólo está permitido el uso de las estructuras de control **if**, **while** y **for**). Demuestre que su algoritmo usa tiempo polinomial.

- (a) HAMILTON CYCLE.
- (b) VERTEX COVER.
- (c) COLOURING.
- (d) DOMINATING SET.

Solución de (a): A continuación se da un certificado para una gráfica que contiene un ciclo hamiltoniano:



Así, nuestro algoritmo es el siguiente:

2: HamiltonCycle(H ; true/false)

Input: Una gráfica H .

Output: TRUE o FALSE dependiendo si la entrada contiene un ciclo hamiltoniano.

Solución de (b):

Solución de (c):

Solución de (d):

Puntos extra

1. Demuestre que toda digráfica sin lazos admite una descomposición en dos digráficas acíclicas, es decir, que existen D_1 y D_2 subdigráficas de D , acíclicas y tales que $D_1 \cup D_2 = D$ y $A_{D_1} \cap A_{D_2} = \emptyset$.
2. Un torneo es una digráfica en la que entre cualesquiera dos vértices existe una única flecha. Demuestre que todo torneo es fuertemente conexo o puede transformarse en un torneo fuertemente conexo al reorientar exactamente una flecha.
3. Demuestre que una digráfica es fuertemente conexa si y sólo si contiene un camino cerrado generador.
4. Demuestre que si l, m y n son enteros con $0 < l \leq m \leq n$, entonces existe una gráfica simple G con $\kappa = l$, $\kappa' = m$ y $\delta = n$.

Demostración: Sean l, m, n perteneciente a los Enteros y G una gráfica con $\kappa=l$, $\kappa'=m$ y $\delta=n$, tenemos que $0 < l$ ya que una gráfica no puede tener conexidad menor que 0 \rightarrow por proposición demostrada en clase esta gráfica tendrá la desigualdad $0 < l \leq m \leq n$ sustituyendo los valores $0 < l \leq m \leq n$

Por lo tanto existe la gráfica (ya que la proposición demostrada en clase era un para todo y el paratodo implica el existe)

□