UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO
Facultad de Ciencias

Autores:
Fernanda Villafán Flores
Fernando Alvarado Palacios
Adrián Aguilera Moreno

Gráficas y Juegos

Tarea 13

1. Considere los vértices $x = (0, \dots, 0)$, y $y = (1, \dots, 1)$ n-cubo, Q_n. Describa una colección máxima de xy-trayectorias ajenas por aristas dos a dos en Q_n y un xy-corte mínimo por vértices que separe a x de y.

2. Demuestre que una gráfica 3-conexa no bipartita contiene al menos cuatro ciclos impares.

3. Sea G una gráfica k-conexa con $k \geq 2$. Demuestre que cualesquiera k vértices de G están contenidos en un ciclo común.

   Demostración: Sea $x \in V_G$ y sea C un subconjunto de G tal que $V_C = V_G - \{x\}$.

   Supongamos que $x \notin C$.

   Como G es k-conexa, por el **Lema del Abanico** sabemos que existen k-trayectorias internamente ajenas entre x y C.

   Sean $v_1, v_2, \dots, v_k$ los vértices de C que alcanzó x por medio de las k-trayectorias.

   Ahora, sabemos por la **Proposición 1.6.1** de las *Notas de Clase* que:

   Para una gráfica G, si $\delta \leq 2$ entonces G tiene al menos un ciclo.

   Si hacemos a C un ciclo de G, entonces C se ve de la siguiente manera:

   $$C = (v_1, \dots, v_2, \dots, v_k, \dots, v_1)$$

   Como x es adyacente a $v_1, v_2, \dots, v_k$ vértice de C, tomemos el siguiente ciclo:

   $$C' = (x, v_1, v_2, \dots, v_k, x)$$

   Por lo tanto, probamos que cualesquiera k vértices de G están contenidos en un ciclo común.

   □

3. Sea G una gráfica k-conexa, y sean X y Y subconjuntos de V de cardinalidad al menos k. Demuestre que existe una familia de al menos k (X, Y)-trayectorias ajenas.

4. Considere el siguiente juego. Dos jugadores seleccionan alternadamente vértices distintos $v_0, v_1, v_2, \dots$ sobre una gráfica G, donde para cada $i \geq 0$, v_{i+1} es adyacente a v_i. El último jugador que pueda elegir un vértice es el ganador. Demuestre que el primer jugador tiene una estrategia ganadora si y sólo si G no tiene un apareamiento perfecto.

5. Demuestre que es imposible, utilizando fichas de dominó, cubrir un tablero de ajedrez donde dos esquinas contrarias fueron removidas.

6. Una línea en una matriz es un renglón o una columna de la matriz. Demuestre que el mínimo número de líneas que contienen todas entradas distintas de cero en una matriz es igual al máximo número de entradas distintas de cero tales que no hay dos en la misma línea.

8. Demuestre que para cada $k > 0$, toda gráfica bipartita y k regular es 1-factorizable.

   Demostración: Procedemos por inducción sobre k.

   - **Caso Base:** $k = 1$.
     Sea G una gráfica 1-regular.
     Por la definición de 1-factorizable, tenemos que G es el factor que estábamos buscando.
   - **Hipótesis de Inducción.** Supongamos que para cada $k > 0$ se cumple que toda gráfica k-regular es 1-factorizable.

- **Paso Inductivo.**

  Sea G una gráfica $(k+1)$-regular.

  Dado que G es bipartita, por el **Teorema 1.7.2** sabemos que G no contiene ciclos impares. Esto implica que cada vértice en G tiene grado par y por tanto, G es par.
  Así, entonces G es euleriana y por el **Teorema 4.1.1** sabemos que G se puede descomponer en una familia de ciclos $C_1, C_2, \ldots, C_n$.

  Notemos que si existe un ciclo C_i que pase por todos los vértices, al eliminarlo el grado de todos los vértices disminuiría en 2. Así, eliminamos a todos los ciclos necesarios para poder disminuir el grado de todos los vértices en 2. Por lo que obtuvimos una gráfica G' que es k-regular, la cual por **Hipótesis de Inducción** sabemos que es 1-factorizable.

  Además, notemos que los factores $H_1, \ldots, H_n$ de G' también se van a encontrar en G; y la unión de los ciclos $C_i, \ldots, C_j$ que borramos para obtener a G' forman el factor H_{n+1} tal que $G = H_1, \ldots, H_n, H_{n+1}$.

  Por lo tanto, probamos que G es 1-factorizable.

$\square$

Puntos Extra

1. Sea $A_1, \ldots, A_m$ un conjunto de subconjuntos de S. Un sistema de representantes distintos para la familia $(A_1, \ldots, A_m)$ es un subconjunto $\{a_1, \ldots, a_m\}$ de S tal que $a_i \in A_i$, $1 \leq i \leq m$, y $a_i \neq a_j$ para $i \neq j$. Demuestre que $(A_1, \ldots, A_m)$ tiene un sistema de representantes distintos si y sĺo si
$$\left| \bigcup_{i \in J} A_i \right| \geq |J|$$
   para cada subconjunto J de $\{1, \ldots, m\}$.

2. Demuestre que son equivalentes
   (a) El Teorema del Flujo-Máximo Corte-Mínimo.
   (b) El Teorema de Menger.
   (c) El Teorema de Hall.
   (d) El Lemma de König.