UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO
Facultad de Ciencias

Autores:
Fernanda Villafán Flores
Fernando Alvarado Palacios
Adrián Aguilera Moreno

Gráficas y Juegos

Tarea 6

1. Sea G una gráfica conexa no euleriana. Demuestre que las siguientes afirmaciones son equivalentes.

   (a) Hay un paseo euleriano en G.

   (b) Hay exactamente dos vértices de grado impar en G.

   (c) Existe una familia de ciclos ajenos por aristas dos a dos $\{C_i\}_{i=1}^{k}$ y un paseo P tal que $E_G = E_P \cup \bigcup_{i=1}^{k} E_{C_i}$.

   Demostración: Sea G una gráfica.

   Probaremos las siguientes implicaciones:

   - $(a) \Longrightarrow (b)$.

     Sea P un paseo euleriano en G.

     Como G es conexa, podemos hacer adyacentes al vértice inicial y al vértice final de P. Esto implica que tenemos un **paseo cerrado** y por tanto, tenemos un **circuito euleriano**.

     Así, obtenemos que G es una gráfica euleriana.

     De aquí, notemos que todos los vértices de la gráfica euleriana tienen grado par (*por propiedades de gráficas eulerianas*) y, si borramos la arista que une al vértice inicial y al vértice final de P, obtenemos que el grado de dichos vértices disminuye en 1.

     Esto implica que ambos vértices ahora tienen grado impar (ya que *número par − número impar = número impar*).

     Por lo tanto, dichos vértices son los únicos dos vértices de grado impar en G.

   - $(b) \Longrightarrow (c)$.

     Como ya probamos que G es una gráfica euleriana, *por propiedades* sabemos que G tiene una **descomposición en ciclos**, digamos $C_1, C_2, \cdots, C_k$. Y además por el inciso (a), sabemos que existe un paseo P en G el cuál (*por hipótesis*) tiene exactamente dos vértices de grado impar.

     Entonces tenemos que:

     $$\begin{aligned} E_G &= \bigcup_{i=1}^{k} E_{C_i} \cup E_P \\ &= E_P \cup \bigcup_{i=1}^{k} E_{C_i} \end{aligned}$$

   - $(c) \Longrightarrow (a)$.

     Esto es inmediato ya que *por hipótesis*, existe un paseo P tal que:

     $$E_G = E_P \cup \bigcup_{i=1}^{k} E_{C_i}$$

En particular si G no tiene ciclos, es decir, $\bigcup_{i=1}^{k} E_{C_i} = \emptyset$ tenemos que:

$$\begin{aligned} E_G &= E_P \cup \bigcup_{i=1}^{k} E_{C_i} \\ &= E_P \cup \emptyset \\ &= E_P \end{aligned}$$

Así, si $E_G = E_P$ implica que hay un paseo euleriano en G (por definición de **paseo euleriano**).

Por lo tanto, queda demostrado que las afirmaciones son equivalentes.

$\square$

2. Sea D una digráfica conexa. Demuestre que D es euleriana si y sólo si para cada $v \in V_D$, se tiene $d^+(v) = d^-(v)$.

Demostración: • $\Longrightarrow$.

Sea D una digráfica conexa e eucliriana $\to$ Por definición de gráfica eucliriana existe un circuito euclidiano que une a todos los vértices, llamémosle C a este circuito.

Entonces, sea x perteneciente a V_D el inicio de este circuito.

$\to C = (x, v_i, v_{i+1}, \cdots, v_{i+n}, u)$ con i y n pertenecientes a los naturales.

Como todos los vértices son consecutivos, notemos que cada vértice de C es cola y cabeza para dos flechas distintas en el circuito $\to$ para todo V_k que pertenece a C existe d^+ y d^- que une a V_k con sus vértices adyacentes V_{k-1} y V_{k+1}.

Así, cada vértice de la trayectoria C tendrá una "arista" d^+ y una d^- (ya que D es par y por construcción de C).

Por lo tanto, $d^+ = d^-$ ya que para todo vértice de D se pueden sumar el número de veces que aparecen en la trayectoria C y preservará la igualdad anterior.

- $\Longleftarrow$.

Sea D conexa y para toda v que pertenece a V_D se tiene que $d^+ = d^- \to$ para toda v que pertenece a V_D, existe al menos una d^+ y una d^-.

Por lo que para todo v que pertenece a V_D, v es mayor igual a 2. Pero el grado de v siempre debe ser par, ya que tenemos la igualdad $d^+ = d^- \to D$ es par.

Por lo tanto, por teorema visto en clase tenemos que D es una gráfica eucliriana.

$\square$

3. La digráfica de *de Bruijn-Good* BG_n tiene como conjunto de vértices al conjunto de todas las sucesiones binarias de longitud n, y donde el vértice $a_1a_2\cdots a_n$ es adyacente al vértice $b_1b_2\cdots b_n$ si y sólo si $a_{i+1} = b_i$ para $1 \leq i \leq n-1$. Demuestre que BG_n es una digráfica euleriana de orden 2^n y diámetro dirigido n.

Demostración: Sabemos que dado 2 vértices $v = a_1a_2\cdots a_n$ y $u = b_1b_2\cdots b_n$, estos son adyacentes si $1 \leq i \leq n-1$, luego BG_n es 4-regular, pues existen 4 maneras de elegir vértices adyacentes a algún $x \in V_{BG_n}$. Veamos un ejemplo general de lo antes mencionado: Sean $x = a\cdots b$ e $y = c\cdots d$ donde $x, y \in V_{BG_n}$ y $a, b, c, d \in \{0, 1\}$, así

$xy \in E_{BG_n}$ si $\cdots b = c \cdots$, como podemos tomar c, d como $OR_2^2 = 2^2 = 4$, entonces cada vértice tiene grado 4, exactamente dos aristas de "*llegada*" y dos de "*salida*" inciden en x. Como G es 4-regular, entonces es par y por el teorema de caracterización de las gráficas eulerianas concluimos que G es euleriana.

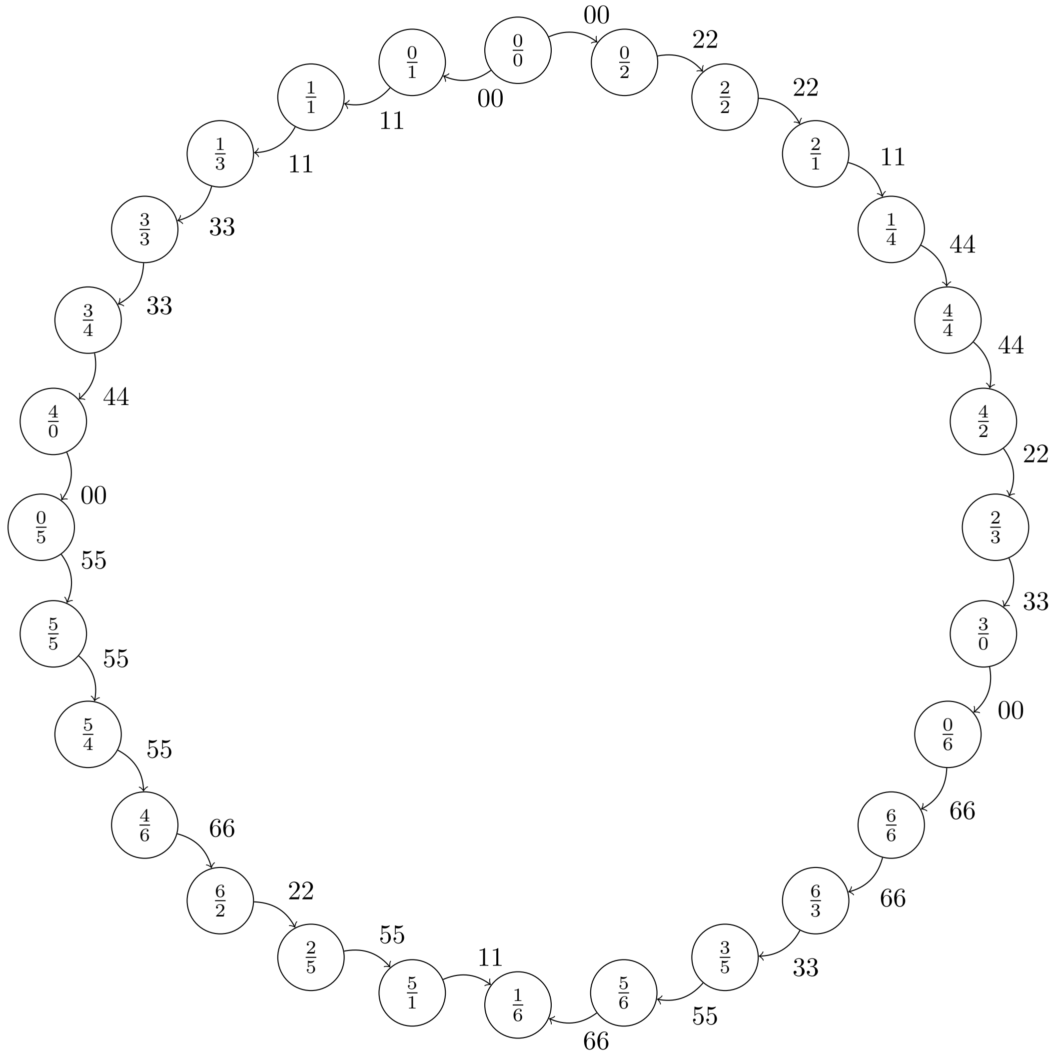
Por combinatoria sabemos que $OR_2^n = 2^n$ [ordenaciones con repetición] y este es justo el orden de BG_n.

Sabemos por la definición de distancia entre dos vértices que esta es la mínima trayectoria entre los vértices. Sea $x = 0 \cdots 0$ e $y = 1 \cdots 1$ (con tantos 0's y 1's como n en BG_n) y a su vez xy-trayectoria (caso análogo yx-trayectoria) es de longitud n, pues el rabo [cola] o vértice donde se esta ubicado, que en un inicio es x, incide en el vértice que sustituya al "1" más a la derecha en la cadena (nodo) que se ubique por un "0", así habrá exactamente n aristas en xy o $n+1$ vértice en xy, luego xy es de la distancia de longitud máxima (esto no quiere decir que sea la única) entre todas las distancias, pues se hacen al menos n cambios en la cadena (que tiene n dígitos tomados entre 1's y 0's) x para "*llegar*" a y. Luego, por definición de diámetro en una digráfica, el diámetro de BG_n es n.

De lo anterior se concluye la demostración. $\square$

4. Demuestre que existe una forma de ordenar todas las fichas de dominó en un ciclo (respetando las reglas del juego). ¿Cómo generalizaría este resultado para dominós con n puntos? (el dominó estándar es el de 6 puntos).

Demostración: A continuación se muestra una manera de ordenar las fichas de dominó de tamaño estándar en un ciclo:



donde $\frac{0}{0}$ es la ficha que no tiene puntos, $\frac{1}{5}$ la ficha con uno y cinco puntos, y así de manera consecutiva. Las aristas indican como se van uniendo las fichas.

Por el ejemplo anterior queda mostrado que existe una manera de ordenar las fichas en un dominó de 6 puntos en forma de ciclo. Para mostrar este resultado de manera general, hay que notar que necesitamos una condición necesaria, esta es, el dominó debe de ser de $n = 2 \cdot k$ $[k \in \mathbb{N}]$ puntos, pues en caso contrario no podemos obtener un ciclo, ya que existirán $2k + 1$ fichas con el valor de 0 en alguna posición, *i.e.*, una ficha que tenga cero puntos en alguna de sus "*caras*"[1], y por paridad no podremos agrupar en parejas a las fichas que tengan cero puntos en alguna de sus "*caras*". Luego el dominó cumple con $n = 2 \cdot k$, y cada vértice [*ficha de dominó*] tiene, a lo más, grado 2. Nótese que la cantidad total de fichas es $\frac{n \cdot (n+1)}{2}$ y cada ficha tiene dos "*caras*", luego hay $n \cdot (n+1) = 2 \cdot (k^2 + k)$ "*caras*", lo que es una cantidad par. Luego, veamos que pasa cuando:

·) n es par, entonces las n fichas que contengan n puntos en alguna de sus "*caras*" son una cantidad par [el total de estas], la idea anterior se puede aplicar para cualquier n_i con $i \in \{1, \cdots, n\}$ si n_i es una cantidad par. Además, hay una cantidad par de fichas con caras igual a n_i puntos, pues las fichas con puntos mayor a n_i contienen alguna con una cara igual a n_i puntos, luego estas son $n - n_i$ y si les sumamos las n_i antes contadas tenemos que hay n fichas que cumplen lo antes mencionado.

·) Las fichas impares (las que tengan puntos impares, un ejemplo serían todas las fichas que tienen 3 puntos en una de sus caras) son una cantidad par, pues si hay una ficha con $m = 2p + 1$ [$p \in \mathbb{N}$] puntos, como n es par y es la mayor cantidad de puntos que podrá tener una de las "*caras*" en cualquier ficha, entonces hay al menos $n - m$ fichas que contienen m puntos en una de sus "*caras*" y la otra "*cara* contiene al menos $m + 1$ puntos, *i.e.*,

$$\begin{aligned} n - m &= 2 \cdot k - (2 \cdot p + 1) \\ &= 2 \cdot (k - p) + 1 \end{aligned}$$

con $k > p$. Lo anteior es impar [$n - m$] y por paridad *impar* + *impar* es par y concluimos que las fichas con m puntos en al menos una de sus caras son una cantidad par, otra manera de verlo es que $(n - m) + m = n$ y hay justo n fichas con al menos una de sus caras igual a m puntos.

Como en cualquiera de los casos anteriores hay una cantidad par de fichas, entonces podemos agrupar conjuntos [aristas] de orden 2 con las fichas [vértices] y obtendremos una gráfica par, pues cada ficha se relacionará con exactamente 2, luego, los ordenes n en el dominó, siempre que n sea par, forman gráficas eulerianas, luego por el teorema de caracterización de gráficas eulerianas tenemos que esta es un ciclo. □

5. Sean G una gráfica euleriana no trivial y $u \in V_G$. Demuestre que todo paseo en G que inicia en u se puede extender a un circuito euleriano si y sólo si $G - u$ es acíclica.

Demostración: Sean G una gráfica euleriana no trivial y $u \in V_G$.

Procedemos por doble implicación.

- $\Longrightarrow$.

  Suponemos que todo paseo en G que inicia en u se puede extender a un circuito euleriano.

  Demostraremos que $G - u$ es acíclica.

  Procedemos por contradicción.

  Sea P un circuito euleriano de G.

  Supongamos que $G - u$ no es acíclica. Esto implica que existe un ciclo C en $G - u$.

[1] No sé como se les llama a las dos partes que tiene una ficha de dominó, nunca había jugado dominó jejeje.

Ahora, como G es una gráfica euleriana, en particular es par, entonces $G - E_C$ debe ser par. Notemos que el vértice u no pertenece a los vértices del ciclo C, lo que implica que u no es adyacente a ningún vértice del ciclo C.

De lo anterior tenemos que $u \in V_P$ y entonces, P empieza y termina en u. Así, como todos los vértices adyacentes a u están en P implica que P no se puede extender a un circuito euleriano !!!

La contradicción yace de suponer que $G - u$ no es acíclica, por tanto, $G - u$ es acíclica.

- $\Longleftarrow$.

  Suponemos que $G - u$ es acíclica.

  Demostraremos que todo paseo en G que inicia en u se puede extender a un circuito euleriano.

  Como $G - u$ es acíclica, implica que todo ciclo C en G contiene al vértice u. De aquí, entonces tenemos que todo ciclo C en G empieza y termina en u (pues sabemos que un ciclo empieza y termina en el mismo vértice, es decir, es cerrado).

  Ahora, como cada ciclo en G no comparte ninguna arista (porque G es una gráfica euleriana), *por propiedades* sabemos que existe una familia de ciclos $\left\{C_i\right\}_{i=1}^{k}$ y un paseo P tal que:

$$E_G = E_P \cup \bigcup_{i=1}^{k} E_{C_i}$$

  Sea $u \in V_P$. Entonces se sigue que P debe ser un paseo que inicia y termina en el mismo vértice (en este caso, u), lo que implica que P es un paseo cerrado y por definición, P sería un circuito euleriano.

  Por lo tanto, tenemos un paseo cualquiera en G que empieza en u y se puede extender a un circuito euleriano.

Por lo anterior, podemos concluir que todo paseo en G que inicia en u se puede extender a un circuito euleriano si y sólo si $G - u$ es acíclica. $\square$

Puntos Extra

1. Una digráfica D es *balanceada* si $|d^+(v) - d^-(v)| \leq 1$, para cada $v \in V$. Demuestre que toda gráfica tiene una orientación balanceada.

   Demostración: Sea G una grafica $\rightarrow$ G tendrá vertices de grado par o impar, sea x un vertice que no pertenezca a G, construiremos a G^1 parecida a G, con la diferencia de que todos los vértices G que sean impares estaran relacionados con el vértice X, por lo tanto, todos los vertices de nuestra nueva gráfica G^1 tendran grado par, por lo que G^1 sera una grafica G euleriana, lo que implica que tendra un circuito euleriano que empezara en el vector x y terminara en el vector x, $\rightarrow$ le podemos dar un orden a las aristas de G^1 mediante este ciclo (si v_k es un vertice de G^1 para algun k natural $\rightarrow$ de v_{k-1} a v_k tendremos una flecha d^- y de v_k a v_{k+1} tendremos una flecha d^+), ya que construimos la digrafica G^1 $\rightarrow$ vamos a quitar las aristas "ahora flechas" que agregamos hace un momento y ahora esta esta nueva digráfica será G $\rightarrow$ podemos notar que si los grados de los vértices de G eran pares $\rightarrow$ $|d^+(v) - d^-(v)| = 0$ "por construccion de G^1" y si los grados de los vertices eran impares $\rightarrow$ $|d^+(v) - d^-(v)| = 1$ (por construcción de la digráfica G^1).

Por lo tanto, para todo vertice de la digrafica G tenemos que $|d^+(v) - d^-(v)| es menor igual que 1$ por lo tanto toda gráfica G tiene un orientación balanceada.

□

2. Una sucesión circular $s_1 s_2 \cdots s_{2^n}$ de ceros y unos es llamada una *sucesión de de Bruijn-Good* de orden n si las 2^n subsucesiones $s_i s_{i+1} \cdots s_{i+n-1}$, $1 \leq i \leq 2^n$ (con los subíndices tomados módulo 2^n son distintas, y por lo tanto constituyen todas las posibles sucesiones binarias de longitud n. Por ejemplo, la sucesión 00011101 es una una sucesión de de Bruijn-Good de orden tres. Muestre como encontrar un de estas sucesiones para cualquier orden n utilizando un circuito euleriano dirigido en la gráfica de de Bruijn-Good BG_{n-1}. Justifique su respuesta.

3. Sea G una gráfica conexa, y sea X el conjunto de vértices de G de grado impar. Suponga que $|X| = 2k$, con $k \geq 1$.

   (a) Demuestre que hay k paseos ajenos por aristas $Q_1, \ldots, Q_k$ en G tales que $E_G = \bigcup_{i=1}^{k} E_{Q_i}$.

   (b) Deduza que G contiene k paseos ajenos por aristas que conectan a los vértices de X en pares.