UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO
Facultad de Ciencias

Autores:
Fernanda Villafán Flores
Fernando Alvarado Palacios
Adrián Aguilera Moreno

Gráficas y Juegos

Tarea 4

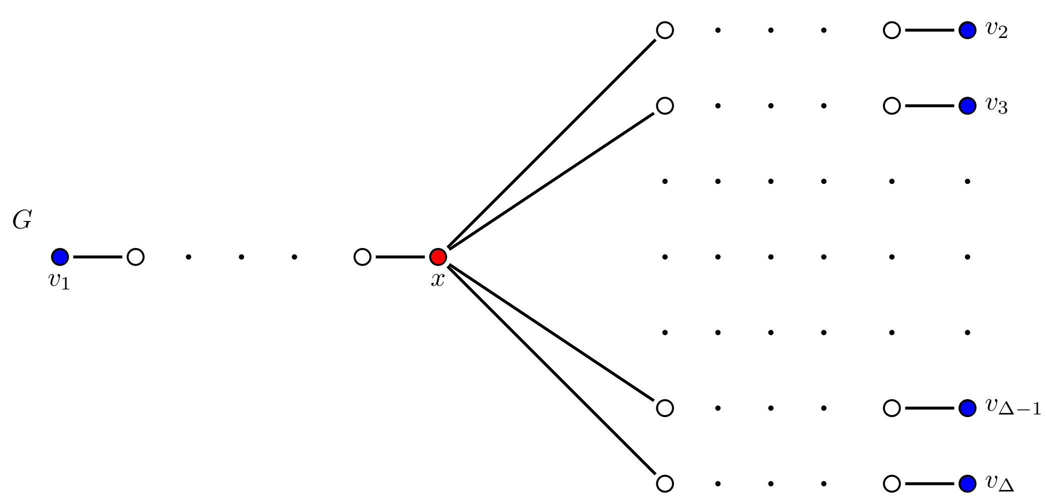
1. Sea G una gráfica no trivial. Demuestre que G es una trayectoria si y sólo si G es un árbol con exactamente dos vértices de grado 1.

2. (a) Demuestre que cada árbol con grado máximo $\Delta > 1$ tiene al menos Δ hojas.

   Demostración: Sea G un árbol y sea $x \in V_G$ tal que $d(x) = \Delta$ (notar que x no necesariamente es el único que cumple tener grado igual a Δ, por lo que se tomará alguno que cumpla esto), entonces x tiene exactamente Δ vecinos, por la caracterización de árbol, sabemos que G es acíclico y por tanto los caminos que parten desde x (tienen a x como vértice inicial) hacia algunos de sus Δ vecinos, no tienen vértices en común que sean distintos de x (caso contrario, habría 2 trayectorias que tienen inicio en x a las que llamaremos w_1 y w_2, y además tienen en común al menos un vértice v y por tanto w_1w_2 es un ciclo!! que está contenido en G), luego, como x tiene Δ vecinos, entonces podemos tomar al menos Δ trayectorias distintas entre ellas tales que terminen en algún vértice u_i $(1 \leq i \leq \Delta)$ y por tanto cada u_i es una hoja de G, como hemos encontrado Δ hojas podemos concluir que el árbol G con grado máximo Δ tiene al menos Δ hojas. QED

   (b) Construya, para cada elección de n y Δ, con $2 \leq \Delta < n$, un árbol de orden n con exactamente Δ hojas.

   Solución: Sea G un árbol, usemos el resultado anterior, y garantizamos que, como G tiene algún $x \in V_G : d(x) = \Delta$, entonces G tiene al menos Δ hojas. Luego, partícularmente en los árboles de exactamente Δ hojas, cada camino W_i que tenga como vértice inicial a x no tendrá bifurcaciones, esto es, xW_iv_i es la única manera de llegar de x a v_i y además W_i es una trayectoria (y por definición de trayectoria, no tendrá bifurcaciones), como x es vértice inicial de exactamente Δ trayectorias W_i, entonces hay exactamente Δ hojas en G. En resumen, G tendrá exactamente Δ vértices de grado 1, a continuación se muestra un ejemplo que trata de ser lo más general posible:



   donde los v_i's son las hojas, para $1 \leq i \leq \Delta$. □

3. Un *centro* en una gráfica es un vértice u tal que $\max_{v \in V} d(u, v)$ es mínima. Demuestre que un árbol tiene exactamente un centro o dos centros adyacentes.

4. Demuestre o brinde un contraejemplo: Toda gráfica con menos aristas que vértices tiene una componente que es un árbol.

5. Un *hidrocarburo saturado* es una molécula C_mH_n en la que cada átomo de carbono tiene cuatro enlaces, cada átomo de hidrógeno tiene un enlace, y ninguna sucesión de enlaces forma un ciclo. Demuestre que para cualquier entero positivo m, la molécula C_mH_n existe sólo si $n = 2m + 2$.

6. Demuestre que una sucesión $(d_1, \ldots, d_n)$ de enteros positivos es la sucesión de grados de un árbol si y sólo si $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$.

   Demostración: Para este ejercicio analicemos 2 posibles casos:

   $\Rightarrow$) Dada la sucesión de grados $(d_1, \ldots, d_n)$ de un árbol, entonces $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$.
   Sabemos que para cualquier gráfica pasa que

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2|E|$$

   Como en un árbol se cumple que $|E| = |V| - 1$[1], entonces $|E| = n - 1$ y por tanto

$$\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$$

   $\Leftarrow$) Dada una gráfica G donde se cumple que $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$, entonces $(d_1, \ldots, d_n)$ es la sucesión de grados en un arbol.
   Veamos que G no tiene vértices aislados, pues en caso de tenerlos supongamos sin pérdida de generalidad que $x \in V_G$ es un vértice aislado, entonces $G - \{x\}$ no contiene vértices aislados y $|E_{G-\{x\}}| = 2|V_{G-\{x\}}|$!!, lo que implica que G contiene como subgráfica inducida a algún ciclo (pues la cantidad de vértices sería de al menos la cantidad de vértices) y se deja de cumplir que $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$!!.
   De la misma manera que la anterior podemos observar que todos los vértices de G no pueden tener al menos grado 2, pues suponer esto nos genera al menos un ciclo y esto implicaría que $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n)$!!, y claramente $2n \neq 2(n-1)$.
   Luego, hay exactamente 2 vértices de grado 1 en G, para esto llamemos $x, y \in V_G$ a los vértices de grado 1, entonces en $G - \{x, y\}$ se cumple que $\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-2)$ y al anexarle exactamente $\{x, y\}$ tendremos que

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} d_i &= 2(n-2) + 2 \\ &= 4n - 4 + 2 \\ &= 4n - 2 \\ &= 2(n-1)\end{aligned}$$

   en caso contrario, se deja de cumplir lo anterior y es por esto que se puede garantizar que estos son únicos.
   Como G es acíclica (por el argumento dado anteriormente), podemos deducir que G es conexa, pues de no serlo habría más de 2 vértices con grado 1 y ya observamos que este no es un caso posible. Luego, G es un árbol y por el ejercicio 1 de esta tarea tenemos que G es, partícularmente, una trayectoria.

   De los casos analizados concluimos que una sucesión $(d_1, \ldots, d_n)$ de enteros positivos es la sucesión de grados de un árbol si y sólo si $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} d_i = 2(n-1)$. QED

[1] Prop. 2.2.5 en las notas de clase

Puntos Extra

1. Para una gráfica conexa G definimos la gráfica de árboles de G, $\mathcal{T}_G$, como la gráfica que tiene por vértices a todos los árboles generadores de G, y tal que, si $S, T \in V_{\mathcal{T}_G}$, entonces ST es una arista de $\mathcal{T}_G$ si y sólo si existen aristas $e \in E_S - E_T$ y $f \in E_T - E_S$ tales que $(S - e) + f = T$. Demuestre que $\mathcal{T}_G$ es conexa.

2. Sea T un árbol arbitrario con $k + 1$ vértices. Demuestre que si G es simple y $\delta \geq k$, entonces G tiene una subgráfica isomorfa a T.

3. Sea $\mathcal{T}$ una familia de subárboles de un árbol T. Deduzca, por inducción sobre $|\mathcal{T}|$, que si cualesquiera dos elementos de $\mathcal{T}$ tienen un vértice en común, entonces hay un vértice de T que está en todos los elementos de $\mathcal{T}$.

4. (a) Determine todos los arboles T tales que $\overline{T}$ también es un árbol.

   Solución:

   ·) Si $|V_T| = 1$, entonces por vacuidad se cumple el enunciado y terminamos.

   ··) Si $|V_T| > 1$, entonces sabemos existen $|V_T| - 1$ aristas para T y que a lo más $\binom{|V_T|}{2}$ si T fuera completa. Notar que $E_{\overline{T}} = \binom{|V_T|}{2} - (|V_T| - 1)$, como queremos que $\overline{T}$ se un árbol, entonces se debe cumplir la siguiente igualdad

   $$\begin{aligned} |V_T| - 1 &= \binom{|V_T|}{2} - (|V_T| - 1) \\ \Leftrightarrow 2 \cdot (|V_T| - 1) &= \binom{|V_T|}{2} \\ \Leftrightarrow 2 \cdot (|V_T| - 1) &= \frac{|V_T| \cdot (|V_T| - 1)}{2} \\ \Leftrightarrow 4 \cdot \cancel{(|V_T| - 1)} &= |V_T| \cdot \cancel{(|V_T| - 1)} \\ \Rightarrow |V_T| &= 4 \end{aligned}$$

   y del ejercicio 1 de la tarea 1 sabemos que hay 11 gráficas de orden 4 no isomorfas entre sí y sólo 2 de esas son árboles, una es P_4 y la otra es el árbol tal que uno de sus vértices es de grado 3, pero en este último su complemento no es un árbol. Luego $T = P_4$ y este es la único salvo isomorfismo. $\square$

   (b) Determine todas las gráficas de orden al menos cuatro tales que la subgráfica inducida por cualesquiera tres de sus vértices es un árbol.

   Solución: Veamos que si $|V| > 4$, se cumple cualquiera de las siguientes condiciones:

   ·) Si la gráfica es incompleta existen al menos dos vértices que no se conectan mediante una arista, si no existe trayectoria entre estos, entonces existe una "elección" de 3 vértices tales que son inducidos de la gráfica original y no son un árbol.

   ··) Si la gráfica es completa, entonces hay 3 vértices que al inducirlos en la gráfica original forman un 3-ciclo y por tanto no son un árbol.

   De lo anterior la única gráfica que cumple con el enunciado es un 4-ciclo que no contenga como gráfica inducida un 3-ciclo. $\square$