UNIVERSIDAD AUTÓNOMA DE MÉXICO
Facultad de Ciencias

Autores:
Fernanda Villafán Flores
Fernando Alvarado Palacios
Adrián Aguilera Moreno

Gráficas y Juegos

Tarea 2

1. Demuestre que toda flecha en un camino dirigido cerrado en una digráfica pertenece a algún ciclo dirigido.

2. Demuestre que si G es simple y $\delta \geq 2$, entonces G contiene un ciclo de longitud al menos $\delta + 1$.

3. Sea G una gráfica conexa. Demuestre que si G no es completa, entonces contiene a P_3 como subgráfica inducida.

   Demostración: Procedamos por reducción al absurdo.

   Sea G una gráfica completa, entonces P_3 es subgráfica de G. Para este ejercicio necesitamos de una condición, $V_G \geq 3$, para las gráficas que no cumplan esto se tendrá la demostración por vacuidad.

   Tomemos a x_{i-1}, x_i, x_{i+1} en V_G $(2 \geq i \geq |V_G| - 1)$, como G es completa se tiene que la distancia entre cualesquiera 2 vértices es 1, luego tenemos que hay $\binom{3}{2}$ aristas!! y esto es claramente mayor que 2 $(|E_{P_3}|)$, como los vértices que tomamos son arbitrarios, podemos concluir que $P_3 \nsubseteq G$.

   Como la anterior contradicción resulta de suponer a G completa, podemos asegurar que si G no es completa, entonces $P_3 \subseteq G$. QED

4. Demuestre que cualesquiera dos trayectorias de longitud máxima en una gráfica conexa tienen un vértice en común.

5. Caracterice a las gráficas k-regulares para $k \in \{0, 1, 2\}$.

   Solución:

   $k = 0$) Son todas las gráficas que no tienen aristas, a estas se les conoce como gáficas vacías.

   $k = 1$) Estas son gráficas con una cantidad de vértices par y son tantas uniones de P_2 como $\frac{|V_G|}{2}$. Las gráficas con $|V_G|$ impar no entran aquí porque siempre habrá $(|V_G| - 1)P_2$ y algún vértice (aislado) será de grado igual a 0!! (o, pensando en lazos, de grado igual a 2), lo que contradice el ser $1-$regular.

   $k = 2$) Son gráficas que contienen ciclos o son combinaciones de ciclos. Todos los ciclos son $2-$regulares, esto no implica que todas las gráficas $2-$regulares sean un ciclo pero si que los contengan o que sean combinaciones de estos.

   Con los 3 puntos anteriores concluimos la caracterización. □

6. Demuestre que si $|E| \geq |V|$, entonces G contiene un ciclo.

Puntos extra

1. Sea G una gráfica. Demuestre que G es k-partita completa si y sólo si no contiene a K_{k+1} ni a $\overline{P_3}$ como subgráficas inducidas.

2. Demuestre que si G es una gráfica con $|V| \geq 4$ y $|E| > n^2/4$, entonces G contiene un ciclo impar.

3. Sea $d = (d_1, \ldots, d_n)$ una sucesión no creciente de enteros no negativos. Sea $d' = (d_2 - 1, \ldots, d_{d_1+1} - 1, d_{d_1+2}, \ldots, d_n)$.

   (a) Demuestre que d es gráfica si y sólo si d' es gráfica.

   (b) Usando el primer inciso, describa un algoritmo que acepte como entrada una sucesión no creciente de enteros no negativos d y devuelva una gráfica simple con sucesión de grados d, un certificado de que d no es gráfica.