Problem. *Losses follow a distribution with pdf:*

$$f(x) = \theta^{-1} e^{-\frac{(x-\delta)}{\theta}} \quad ; x > \delta$$

The sample mean is 300 *and the sample median is* 240*. Estimate* δ *and* θ *by matching these two quantities.*
(Klugman 5th ed, 10.34)

Solution.

Akan digunakan metode moment dan kuantil (atau persentil) untuk melakukan estimasi parameter.

Misalkan X adalah variabel acak kerugian dengan pdf $f(x)$

Akan dicari fungsi distribusi (cdf) dari X:

$$\begin{aligned}
F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx \\
&= \int_{\delta}^{x} \theta^{-1} e^{-\frac{(x-\delta)}{\theta}}\,dx \quad (f(x) \text{ terdefinisi jika } x > \delta) \\
&= \int_{\delta}^{x} e^{-\frac{(x-\delta)}{\theta}} \times \frac{1}{\theta} dx \\
&\text{Misalkan } u = -\frac{(x-\delta)}{\theta} \implies \frac{du}{dx} = -\frac{1}{\theta} \iff -du = \frac{1}{\theta} dx \\
&= \int_{u(\delta)}^{u(x)} e^{u}(-du) \\
&= -e^{u} \Big|_{u(\delta)}^{u(x)} \\
&= -e^{-\frac{(x-\delta)}{\theta}} \Big|_{x=\delta}^{x=x} \\
&= \left(-e^{-\frac{(x-\delta)}{\theta}}\right) - \left(-e^{-\frac{(\delta-\delta)}{\theta}}\right) \\
&= -e^{-\frac{(x-\delta)}{\theta}} + 1 \\
&= 1 - e^{-\frac{(x-\delta)}{\theta}}
\end{aligned}$$

Akan dicari median dari X, misal $\pi_{0.5}$ adalah kuantil ke-0.5 (median) dari X, maka:

$$\begin{aligned}
& F(\pi_{0.5}) = 0.5 \\
\iff & 1 - e^{-\frac{(\pi_{0.5}-\delta)}{\theta}} = 0.5 \\
\iff & -e^{-\frac{(\pi_{0.5}-\delta)}{\theta}} = -0.5 \\
\iff & e^{-\frac{(\pi_{0.5}-\delta)}{\theta}} = 0.5 \\
\iff & -\frac{(\pi_{0.5}-\delta)}{\theta} = \ln(0.5) \\
\iff & (\pi_{0.5}-\delta) = -\theta \times \ln(0.5) \\
\iff & \pi_{0.5} = -\theta \ln(0.5) + \delta \qquad (1)
\end{aligned}$$

Akan dicari ekspektasi (momen pertama) dari X

$$\begin{aligned}
E[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx \\
&= \int_{\delta}^{\infty} x\, \theta^{-1} e^{-\frac{(x-\delta)}{\theta}}\, dx
\end{aligned}$$

Untuk menggunakan integral parsial

misalkan $u = x$ dan $dv = \theta^{-1} e^{-\frac{(x-\delta)}{\theta}} dx$, maka:

$$\frac{du}{dx} = 1 \iff du = dx$$

$$\int dv = \int \theta^{-1} e^{-\frac{(x-\delta)}{\theta}} dx \iff v = -e^{-\frac{(x-\delta)}{\theta}}$$

Dengan integral parsial $\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du$:

$$= \left(x \times (-e^{-\frac{(x-\delta)}{\theta}})\right) \Bigg|_{x=\delta}^{x=\infty} - \int_{\delta}^{\infty} -e^{-\frac{(x-\delta)}{\theta}} dx$$

= lanjutin kalo mau, saya males

Ekspektasi dari X dapat juga dicari dengan cara lain. Perhatikan bahwa pdf dari variabel acak X mirip dengan variabel acak distribusi eksponensial, yang memiliki pdf:

$$g(y) = \frac{1}{\lambda} e^{-\frac{y}{\lambda}} \quad ; y > 0$$

Misalkan Y adalah suatu variabel acak kerugian yang memiliki distribusi eksponensial, dengan pdf seperti di atas dan memiliki parameter $\theta\,(\lambda = \theta)$.

Misal didefinisikan $Y = X - \delta$, dengan δ suatu konstanta (dapat dipandang sebagai deductible) maka pdf dari $g(y)$ dapat ditulis ulang menjadi:

$$\begin{aligned}
g(y) &= g(x-\delta) \\
&= \frac{1}{\theta} e^{-\frac{(x-\delta)}{\theta}} \quad ; y > 0 \implies x - \delta > 0 \iff x > \delta
\end{aligned}$$

Perhatikan bahwa kita mendapat pdf dengan bentuk yang sama dengan pdf dari variabel acak X, maka kita dapat memandang variabel acak X sebagai distribusi eksponensial yang di *shift*/geser ke kiri sebesar δ.

Momen pertama dari X adalah:

$$\begin{aligned} E[Y] &= E[X-\delta] \\ \iff \theta &= E[X]-E[\delta] \\ \iff \theta &= E[X]-\delta \\ \therefore E[X] &= \theta+\delta \end{aligned}$$

Jadi, momen pertama dari X adalah $E[X]=\theta+\delta$

Dengan info dari soal, didapat persamaan untuk mencari parameter θ dan δ dari persamaan adalah:

Dengan metode momen:

$$\begin{aligned} E[X] &= \mu_1' \\ \iff \theta+\delta &= \bar{x} \\ \iff \theta+\delta &= 300 \\ \iff \delta &= 300-\theta \end{aligned} \tag{2}$$

Dengan metode kuantil, kita menggunakan persamaan (1) (klik angka atau teks ini untuk melihat persamaan) dan informasi soal, sehingga didapat persamaan:

$$-\theta\ln(0.5)+\delta = 240 \quad \text{(median populasi = median sampel)} \tag{3}$$

Dengan memasukkan δ dari persamaan (2) ke persamaan (3), didapat:

$$\begin{aligned} & -\theta\ln(0.5)+\delta = 240 \\ \iff & -\theta\ln(0.5)+300-\theta = 240 \quad \text{persamaan (2)} \\ \iff & -\theta(\ln(0.5)+1) = -60 \\ \iff & \hat{\theta} = \frac{60}{ln(0.5)+1} \\ \implies & \hat{\delta} = 300-\hat{\theta} = 300-\frac{60}{\ln(0.5)+1} \end{aligned}$$

Jadi, didapat estimasi dari δ dan θ dengan menyamakan kuantitas sample mean dan sample median adalah:

$$\delta \approx \hat{\delta} = 300-\frac{60}{\ln(0.5)+1} \approx 104.4665188$$

$$\theta \approx \hat{\theta} = \frac{60}{\ln(0.5)+1} \approx 195.5334812$$

Answer key: $\hat{\theta} = 195.53$, $\hat{\delta} = 104.47$