

Trabajo Práctico 1

Programación Lineal

1^{er} cuatrimestre 2025

Investigación Operativa

Integrante	LU	Correo electrónico
Guibaudo, Camila	682/17	camiguiba@gmail.com
Azar, Agustin	693/21	Agustin.azar101@gmail.com
Pages, Julieta	1691/21	julib.pages@gmail.com



Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)

Intendente Güiraldes 2610 - C1428EGA

Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina

Tel/Fax: (+54 +11) 4576-3300

<http://www.exactas.uba.ar>

1 Modelos

Se nos presentó un problema donde una empresa debe distribuir productos a varios clientes, y quiere incorporar una nueva metodología para hacerlo. Entonces, para ver si podría ser conveniente, se desarrollaron tres modelos. El primero para representar el Modelo Actual de distribución donde solo se cuenta con un camión para hacer todos los repartos. Este modelo coincide con el modelo del *The Traveling Salesman Problem (Modelo Actual)*. Luego se realizó un modelo que pasa a incluir la opción de realizar ciertas entregas en bici o a pie desde un punto por el que pasara el camión, sujeto a ciertas restricciones. Y por último, vamos a tener un tercer modelo que consiste en agregar al modelo anterior un par de restricciones que serían deseables, y nos interesa ver cuánto se perdería en caso de tenerlas en cuenta. En adelante, llamaremos Modelo Actual al modelo que maneja actualmente la empresa, donde solo se cuenta con un camión, Nuevo Modelo al modelo que permite el uso de repartidores, y Modelo Adicional a su versión con restricciones deseables.

1.1 Modelo Actual (Modelo Actual):

Variables

$x_{i-j} \in \{0, 1\}$	1 si se viaja del nodo i al nodo j
$u_i \in \mathbb{R}$	Variable auxiliar para eliminación de subciclos (MTZ)

Restricciones

1. Visitar una única vez cada cliente

$$\sum_{j=1}^n x_{i-j} = 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

2. Conservación de flujo

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_{i-j} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_{j-i} = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

3. Eliminación de subciclos / detour (MTZ)

$$u_i - u_j + (n-1)x_{i-j} \leq n-2 \quad \forall i, j \in \{2, \dots, n\}, i \neq j$$

$$u_1 = 0$$

$$1 \leq u_i \leq n-1 \quad \forall i \in \{2, \dots, n\}$$

1.2 Nuevo Modelo:

Variables

$x_{i-j} \in \{0, 1\}$	1 si se va del nodo i al nodo j en camión
$u_i \in \mathbb{R}$	Variable auxiliar para eliminación de subciclos (MTZ)
$r_{i-j} \in \{0, 1\}$	1 si se va del nodo i al nodo j con repartidor (bici)
$d_i \in \{0, 1\}$	1 si el nodo i es depósito

Parámetros

- n : Número total de nodos (clientes + depósito)
- $i, j \in \{1, \dots, n\}$
- El nodo 1 representa el depósito

Restricciones

1. Solo un depósito activo

$$\sum_{i=1}^n d_i = 1$$

2. El camión pasa máximo una vez por cliente

$$\sum_{i=1}^n x_{i-j} \leq 1 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

3. Conservación de flujo (camión)

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_{i-j} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n x_{j-i} = 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

4. El repartidor solo sale de nodos por los que pasó el camión

$$\sum_{k=1}^n x_{k-i} + d_i - r_{i-j} \geq 0 \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$$

5. Cumplir la distancia máxima para el repartidor

$$r_{i-j} \cdot \text{dist}_{i-j} \leq d_{\max} \quad \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$$

6. Eliminación de subciclos / detour (MTZ)

$$u_i - u_j + (n-1)x_{i-j} - nd_i - nd_j \leq n-2 \quad \forall i \neq j, i, j \in \{1, \dots, n\}$$

$$\begin{aligned} u_i + d_i &\geq 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \\ u_i + n \cdot d_i &\leq n \quad \forall i \in \{1, \dots, n\} \end{aligned}$$

(si i es el depósito ($d_i = 1$) entonces no le pedimos nada)

7. Asegurar la visita a cada cliente

$$\sum_{k=1}^n (x_{k-j} + r_{kj}) + d_j \geq 1 \quad \forall j \in \{1, \dots, n\}$$

O llego con camión, o llego con repartidor, o soy el depósito.

8. Máximo una entrega refrigerada por nodo

$$\sum_{j \in R} r_{i-j} \leq 1 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

donde $R \subseteq \{1, \dots, n\}$ es el conjunto de clientes con productos refrigerados.

1.3 Modelo Adicional:

Este modelo es una extensión del modelo anterior donde se incorporan dos restricciones extra deseables por la empresa:

- Cada repartidor contratado realiza al menos 4 entregas.
- Hay determinados clientes que deben ser atendidos exclusivamente por el camión.

La función objetivo, las variables y las restricciones son iguales a las del modelo anterior. Solo se agregan las siguientes variables y restricciones adicionales:

Variables adicionales

$$r_i \in \{0, 1\} \quad 1 \text{ si al menos un repartidor parte del nodo } i$$

Restricciones adicionales

1. Si un repartidor parte del nodo i , entonces debe realizar al menos cuatro entregas

$$\sum_{j=1}^n r_{i-j} - 4 \cdot r_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

2. Si un repartidor parte del nodo i , entonces $r_i = 1$

$$\sum_{j=1}^n r_{i-j} - n \cdot r_i \leq 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, n\}$$

3. Si un nodo i es un cliente exclusivo, entonces un camión debe pasar por él

$$\sum_{j=1}^n x_{i-j} + d_i \geq 1 \quad \forall i \in E$$

donde E es el conjunto de clientes exclusivos.

2 Resultados

2.1 Asunciones

- Consideramos que el costo del camión para ir de la ciudad i a la ciudad j es igual al costo de ir desde j a i .
- En cada instancia se asume que existe una conexión entre cada par de clientes, lo que equivale a trabajar con grafos completos.
- Las distancias entre cliente y cliente son distancias euclídeas.

2.2 Comparación metodología actual con nueva metodología

2.2.1 Experimento 1: variación del costo a pagar a repartidores

En este experimento se trabaja con una ciudad de área $20 * 1.5 * 20 * 1.5 \text{ km}^2$ donde hay distribuidos de forma aleatoria, 20 clientes. La distancia máxima que puede recorrer un repartidor se fijó en 5 km. Se estableció que el 25% de los clientes requieren productos refrigerados y estos clientes se eligieron al azar. Para modelar los costos de transporte en camión, se definió que el costo asociado a un trayecto entre dos clientes es 10 veces la distancia entre ellos. Esto refleja la relación de proporcionalidad usual entre el kilometraje recorrido y el costo del transporte por camión.

En este experimento analizamos cómo varía el costo total de distribución para ambas metodologías, para distintos valores de costo por cada entrega hecha por un repartidor. Para las distintas opciones de costo por entrega por repartidor, se evalúa cuál sería el % de ahorro que se tendría al aplicar la nueva metodología (uso de repartidores) con respecto a la metodología actual (basada exclusivamente en el uso de camión). También se analiza a partir de qué costo por repartidor deja de ser rentable contratar repartidores.

Exponemos aquí los resultados obtenidos:

Costo por repartidor	Costo Modelo Actual	Costo Nuevo Modelo	Repartidores requeridos	Ahorro (%)
2	1220	860	10	29,5%
3	1220	870	10	28,7%
5	1220	890	10	27,0%
10	1220	940	9	23,0%
20	1220	1020	8	16,4%
30	1220	1100	5	9,0%
40	1220	1150	4	5,7%
50	1220	1190	4	2,5%
55	1220	1205	4	1,2%
60	1220	1220	2	0,0%
70	1220	1220	0	0,0%

Table 1: Comparación de costos entre metodologías para distintos costos por repartidor

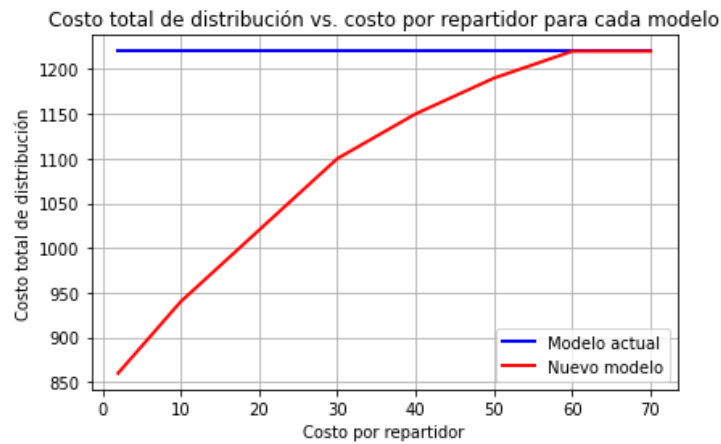


Figure 1: Costo total vs. costo por repartidor para cada modelo

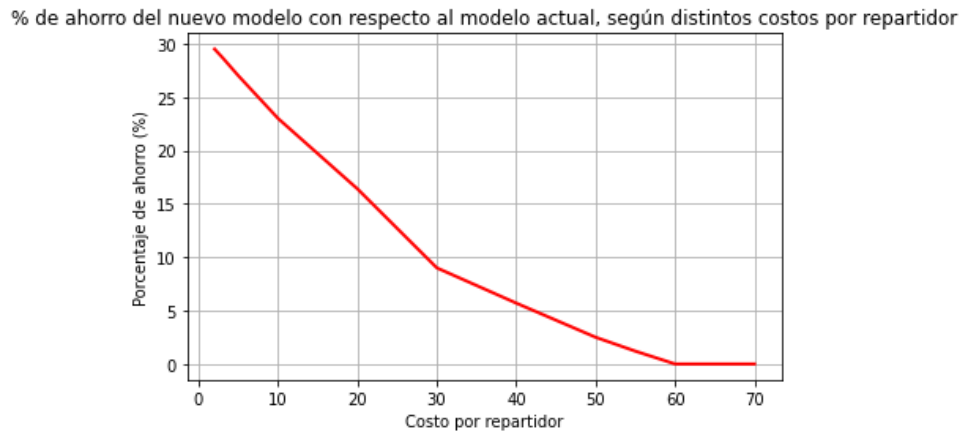


Figure 2: Porcentaje de ahorro en costo total de distribución para el Nuevo Modelo en comparación con el Modelo Actual, según distintos costos por repartidor

De estos resultados, podemos observar que si la empresa implementara el Nuevo Modelo y pagara 30 o menos por cada reparto realizado por repartidor, la rentabilidad de la empresa mejoraría significativamente, pues generaría un ahorro en costos de distribución mayor al 9,0%. De hecho, si la empresa lograra conseguir repartidores que cobren 5 por viaje o menos, se reducirían los costos de entrega en un 27% que es un ahorro muy significativo.

También observamos que si no se lograsen conseguir repartidores que cobren menos de 55 por viaje, entonces definitivamente no valdría la pena implementar el Nuevo Modelo, pues el ahorro sería prácticamente nulo.

Concluimos que, ante estas condiciones de este experimento, si la empresa pudiera pagar a sus repartidores una suma de 30 o menos por reparto, entonces sí le sería muy beneficiosa la aplicación del Nuevo Modelo.

2.2.2 Experimento 2: variación de densidad de clientes en la ciudad

Todos los parámetros de este experimento se mantienen iguales que en el experimento anterior (20 clientes ubicados al azar, distancia máxima de recorrido de repartidores 5 km, un 25% de los clientes fueron elegidos al azar para que sean quienes requieren productos refrigerados y el costo de cada tramo hecho por camión es igual a 10 veces la distancia de ese tramo), solo que ahora quedó fijo el costo por reparto de repartidor en 10 y lo que se variará será la densidad de clientes de la ciudad (número de clientes por km^2). En el caso "ciudad muy densa" se acomodarán los 20 clientes en un área de $20/2 * 20/2 km^2$; en el caso "ciudad densa" en un área de $20 * 20 km^2$; para "ciudad moderada" un área de $20 * 2 * 20 * 2 km^2$; para "ciudad dispersa" un área de $20 * 4 * 20 * 4 km^2$; y para el caso de "ciudad muy dispersa" un área de $20 * 8 * 20 * 8 km^2$.

Lo que se busca en este experimento, es ver qué tan beneficiosa sería la aplicación del Nuevo Modelo con respecto al modelo tradicional, en contextos de ciudades de distintas densidades de clientes por km^2 .

He aquí los resultados:

Densidad ciudad	Costo Modelo Actual	Costo Nuevo Modelo	Repartidores requeridos	Ahorro (%)
Muy densa	350	200	16	42,9%
Densa	820	640	11	22,0%
Moderada	1440	1350	4	6,3%
Dispersa	3180	3010	3	5,4%
Muy dispersa	6450	6450	0	0%

Table 2: Comparación de costos entre metodologías para distintas densidades de clientes por km^2

Como era de esperar, observamos que el uso de repartidores a pie/bicicleta resulta muy beneficioso en ciudades de alta densidad poblacional. Al ser la densidad de clientes alta, estos distan poco entre ellos. Muchas de esas distancias son menores a la distancia máxima permitida para los repartidores, por lo que muchas de las entregas podrán ser realizadas por estos, lo cual abarata muchísimo los costos de distribución de mercadería. De hecho se observa en el caso de la ciudad densa, que el 80% de los repartos se hizo a través de repartidores. El camión debió usarse solo para llegar a 4 clientes.

A medida que la densidad poblacional se achica, se agrandan las distancias entre clientes y naturalmente se agrandan los costos de distribución total tanto para el Modelo Actual como para el Nuevo Modelo. Pero observando la columna "Ahorro" observamos que, a menor densidad poblacional, menos beneficio obtenemos de implementar el Nuevo Modelo. Esto tiene mucho sentido: a menor densidad poblacional, más grandes las distancias cliente-cliente y menos viajes factibles para hacer por repartidores, entonces es cada vez menor la diferencia que implicaría el aplicar el modelo nuevo con respecto al actual. De hecho, vemos el caso extremo en la ciudad muy dispersa, donde ningún viaje puede/conviene hacerse por repartidor, entonces el modelo nuevo no produce ninguna mejora en la rentabilidad con respecto al modelo anterior.

Concluimos que la aplicación del Nuevo Modelo puede ser útil o no, de acuerdo a la densidad de clientes que posea la ciudad. Y es especialmente útil en ciudades muy densas, donde el servicio de los repartidores será altamente utilizado.

2.3 Evaluación de pérdida al considerar restricciones deseables

2.3.1 Experimento 3: variación de número de clientes exclusivos

En este experimento comparamos el Nuevo Modelo con el Modelo Adicional. Trabajamos con una ciudad de tamaño $20 * 1.5 * 20 * 1.5 \text{ km}^2$, con 20 clientes totales. Al igual que en el experimento anterior el costo por repartidor se fijó en 10, la máxima distancia recorrible por repartidores en 5 km, la cantidad de clientes que requieren productos refrigerados también corresponde a un 25% de los clientes, elegidos al azar, y el costo por cada tramo hecho por un camión equivale a 10 veces la longitud de ese tramo. Lo que se irá variando en este experimento, es la cantidad de "clientes exclusivos" (clientes que deben recibir la mercadería sí o sí entregada por el camión).

Aquí se presentan los resultados:

Nro. exclusivos	Costo Nuevo Modelo	Costo Modelo Adicional	Rep. N.M. — Rep. M.A.	Pérdida (%)
1	920	980	8 — 8	6,5%
2	1100	1230	6 — 0	11,8%
5	950	1110	6 — 0	16,8%
10	1010	1150	8 — 0	13,9%
15	1010	1160	9 — 4	14,9%
20	790	980	10 — 0	24,9%

Table 3: Comparación de costos entre Nuevo Modelo y Modelo Adicional para diferentes cantidades de clientes exclusivos, versión I

Como no se veía una tendencia clara en los resultados de la tabla anterior, se decidió hacer el experimento nuevamente, con otras instancias también generadas de forma aleatoria, pero distintas a las utilizadas en la tabla anterior. El resto de los parámetros se mantuvieron constantes.

Los resultados quedaron así:

Nro. exclusivos	Costo Nuevo Modelo	Costo Modelo Adicional	Rep. N.M. — Rep. M.A.	Pérdida (%)
1	710	820	8 — 9	15,5%
2	950	1000	10 — 4	5,2%
5	950	1110	6 — 0	16,3%
10	1080	1210	6 — 0	12,0%
15	860	1070	8 — 0	24,0%
20	1000	1180	7 — 0	18%

Table 4: Comparación de costos entre Nuevo Modelo y Modelo Adicional para diferentes cantidades de clientes exclusivos, versión II

No se ve ningún patrón en común entre ambas tablas y tampoco se ve un patrón dentro de los resultados de cada tabla. Parecería que el porcentaje de pérdida que tenemos al aplicar el Modelo Adicional es muy sensible a la disposición de la ciudad (o sea, a las distancias cliente-cliente), entonces no podemos sacar conclusiones claras acerca de la relación entre la aplicación de este modelo con respecto al número de clientes exclusivos.

Lo único que sí parece claro es que al aumentar el número de clientes exclusivos, más probable parece ser que el número de repartidores requeridos sea 0, lo cual tiene sentido.

Para hacer un buen análisis del impacto de de la aplicación del Modelo Adicional, lo ideal sería trabajar con una instancia (ciudad) específica.

2.3.2 Experimento 4: modelo adicional ante distintas densidades de clientes por área

En este experimento trabajamos con las mismas instancias "ciudad densa", "ciudad dispersa", "ciudad muy densa", "ciudad moderada" y "ciudad muy dispersa" del experimento 2. Pero ahora, sobre cada una de ellas probaremos el Nuevo Modelo y el Modelo Adicional.

Densidad ciudad	Costo Modelo Adicional	Costo Nuevo Modelo	Rep. N.M. - Rep. M.A.	Pérdida (%)
Muy densa	240	200	16 — 16	20,0%
Densa	780	640	11 — 8	22,0%
Moderada	1440	1350	4 — 0	6,7%
Dispersa	3180	3010	3 — 0	5,6%
Muy dispersa	6450	6450	0 — 0	0%

Table 5: Comparación de costos entre metodologías para distintas densidades de clientes por km^2

Observamos que cuanto más densa es la ciudad en clientes, más diferencia habrá entre el costo total de distribución para Nuevo Modelo y Modelo Adicional. Esto es así pues, como vimos antes, para ciudades densas se favorece mucho la utilización de repartidores. En Nuevo Modelo se aprovechan al máximo los repartidores, si el modelo lo requiere, ellos están disponibles. En cambio en Modelo Adicional, se necesitan más requisitos para que se contraten repartidores. De esta forma se pueden desaprovechar grandes oportunidades de ahorro.

Por el contrario, cuanto más dispersa es la ciudad en clientes, más distancia cliente-cliente, menos repartidores podrán ser usados en ambos modelos y por ende, no se generará tanta diferencia entre modelo y modelo.

2.4 Análisis del tiempo de cómputo para distintos parámetros de CPLEX

2.4.1 Experimento 4: ...