1. La formalización

formalizar

1. tr. Dar estructura formal a una proposición o a un discurso.
2. tr. Revestir algo de los requisitos legales o de procedimiento. Formalizar un expediente, un ingreso, un asiento.
3. tr. Concretar, precisar algo. Formalizar un negocio, una propuesta.
4. tr. Dar carácter de seriedad a lo que no la tenía. Formalizar un noviazgo.
5. tr. Representar algo, como ideas, informaciones o conocimientos, con los recursos formales de un sistema.
6. prnl. Dicho de una persona: Hacerse seria y responsable.

(RAE)

Formalizar es representar determinado fenómeno en términos de un sistema riguroso y explícito. En lingüística, la formalización es el uso de herramientas de la lógica y de las matemáticas para la construcción de un algoritmo que genere, reconozca e, idealmente, interprete las oraciones del lenguaje natural.

Para explicar los beneficios de la formalización, Peregrín Otero (1970) utiliza el siguiente cuento:

> Un gavilán se cruza en vuelo con lo que parece un centenar de palomas. Pero una de ellas lo saca del error:
>
> –No somos cien —le dice–. Si sumamos las que somos, más tantas como las que somos, más la mitad de las que somos, y la mitad de la mitad de las que somos, en ese caso, contigo, gavilán, seríamos cien.
>
> ¿Cuántas palomas había en la bandada?

$$n + n + \frac{n}{2} + \frac{n}{4} + 1 = 100$$

> Así formulada, la respuesta no tiene ya el aire de “adivina adivinanza” que tenía, aunque quizás el sibilinismo haya sido reemplazado por el esoterismo un tanto misterioso e inaccesible que algunos suelen ver en todo lo que huela a matemáticas (es decir, a simbolización de variables). (Peregrín Otero 1970: 75)

2. Conjuntos

“Un conjunto es una colección de distintos objetos a los cuales se les llama *miembros* o *elementos* de ese conjunto”(Partee *et al.*, 2012, Capítulo 1). “Distintos objetos” en sentido estricto: no hay objetos repetidos en un conjunto. Cada miembro de un conjunto es único dentro de esa colección. ¿Y qué elementos pueden pertenecer a un conjunto? Los que queramos. Un conjunto puede estar conformado por elementos concretos (como autos o perros) o por elementos abstractos (como los números naturales o las oraciones del español). Lo importante, para poder reconocer a un elemento como miembro de un conjunto particular, es la definición de ese conjunto. Además, así como no hay elementos repetidos, en un conjunto tampoco hay un orden de sus elementos. Es indistinto mencionar a un miembro antes que otro o hacerlo de forma inversa.

2.1. Definición de conjuntos

Existen tres formas de definir un conjunto: por extensión, por predicación o por intensión. A continuación, detallamos las características de cada tipo de definición.

La **notación por extensión** consiste en listar todos los elementos que pertenecen al conjunto. Por ejemplo, de la siguiente forma puedo definir el conjunto de los útiles escolares:

(1) {lapicera, lápiz, regla, cuaderno, goma}

Recordemos que cualquier elemento puede pertenecer a un conjunto y que sus miembros no necesariamente deben tener algo en común, por lo que el siguiente también es un conjunto válido:

(2) {Facultad de Filosofía y Letras, 10, Python}

Algo importante a tener en cuenta cuando definimos un conjunto con los nombres de los elementos que lo conforman es que *lo que pertenece al conjunto es el elemento (sea concreto o abstracto) denotado por el nombre, no el nombre en sí mismo.* En el ejemplo anterior, lo que pertenece al conjunto es la Facultad de Filosofía y Letras y no su nombre. Lo mismo con el lenguaje de programación Python o con el número 10.

Si, en cambio, lo que quisiésemos incluir en el conjunto fuese el nombre de determinado elemento, lo que debemos hacer es utilizar comillas simples:

(3) {'Facultad de Filosofía y Letras', 10, Python}

Ahora nuestro conjunto es el conjunto del nombre de la Facultad de Filosofía y Letras, el número 10 y el lenguaje de programación Python.

Esto nos abre la posibilidad de definir un conjunto por extensión haciendo uso de distintos nombres o formas de designar y que, sin embargo, todas esas formas aludan al mismo conjunto:

- {Ciudad Autónoma de Buenos Aires, La Plata, Santa Fe}
- {Capital Federal, La Plata, Santa Fe}
- {La capital de la República Argentina, La Plata, Santa Fe}

Por último, dos aclaraciones relevantes: los conjunto no tienen orden y no tiene ninguna importancia si nombramos elementos más de una vez al definirlo de manera extensional. Lo importante, al definir un conjunto, es si contiene a determinado elemento o no.

Ahora bien, imaginemos que nuestro conjunto es el conjunto de los números múltiplos de 2 mayores a 2 y menores a 50. En este caso nos sería un poco más costoso nombrarlos a todos. Podríamos recurrir a cierta abrevatura:

(4) $\{4, 6, 8, 10, ..., 50\}$

Pero en este caso sería más útil recurrir a la **notación por predicados** (también llamada **por comprensión** o **por intensión**), que establece una propiedad que los miembros de un conjunto deban tener de modo que puedan ser reconocidos como tales. Siguiendo nuestro ejemplo:

(5) {x | x es múltiplo de 2, mayor a 2 y menor o igual a 50}

La línea vertical o *pleca* se lee "tal que" y marca el inicio de la definición de la propiedad. La "x" no refiere a ningún elemento en particular. Es una variable cuyo valor es asignado de acuerdo a la popiedad indicada a continuación. En esta notación también es posible utilizar dos puntos (:) en lugar de la pleca:

(6) {x: x es múltiplo de 2, mayor a 2 y menor o igual a 50}

Por último, si un conjunto es recursivo[1], este puede definirse mediante **reglas recursivas**. Por ejemplo, el conjunto E de los números múltiplos de 2 mayores a 2 puede definirse como sigue:

1. $4 \in$ E
2. Si x $\in$ E, entonces x+2 $\in$ E
3. Nada más pertenece a E

El símbolo $\in$ debe leerse como "pertenece" e indica que un elemento es miembro de un conjunto. La regla anterior nos dice que 4 pertenece al conjunto E y luego, la segunda regla nos indica que, si un número pertenece al conjunto, ese número incrementado en 2 también es miembro de tal conjunto. Ningún otro elemento es

[1]La noción de recursividad se abordará con más detalle en las próximas clases. Por ahora, basta tener presente que un conjunto es recursivo si, dado cierto elemento, es posible identificar si pertenece o no al conjunto en cuestión.

miembro del conjunto en cuestión. Esta última regla se conoce típicamente como *Regla de clausura* y hace que un conjunto sea recursivo en tanto delimita claramente que los elementos anteriormente indicados pertenecen al conjunto y el resto no pertenecen.

Dadas estas tres notaciones, es posible usar cualquiera de ellas para definir un conjunto. Por supuesto, algunas notaciones pueden ser más convenientes que otras. Si el conjunto que queremos definir tiene infinitos elementos, la notación extensional no será la óptima, dado que no seremos capaces de nombrar a todos sus miembros. Por otro lado, si el conjunto es finito y sus elementos no tienen ninguna cualidad en común más que ser miembros de tal conjunto, posiblemente esta notación sí sea la más útil.

Cuando dos conjuntos, definidos con cualquier notación, tienen exactamente los mismo elementos, decimos que se trata del *mismo conjunto*. Eso puede expresarse con el signo '='.

$$\{1, 2, 3\} = \{\mathrm{x} \mid \mathrm{x} \in \mathbb{N} \text{ y } 0<\mathrm{x}<4\}$$

De esto podemos deducir que el conjunto vacío es único. Existe solamente un conjunto que no posee ningún elemento. Para indicar que nos referimos a él utilizamos la siguiente notación: $\emptyset$.

2.2. Relaciones entre conjuntos

Cuando los miembros de un conjunto A también son miembros de un conjunto B, decimos que *A es un subconjunto de B* o, también que *A está incluido en B*. A esta relación la denotamos de la siguiente manera: $A \subseteq B$. El subconjunto B, en este caso, podría contenter elementos que A no, pero esto no es obligatorio, por lo que la *relación de subconjunto* permite que cada conjunto sea un subconjunto de sí mismo.

Si, en cambio, lo que deseamos es indicar que A es subconjunto de B y que este último tiene efectivamente elementos que el primero no (*i.e.* son conjuntos distintos), debemos utilizar la *relación de subconjunto propio*, la cual se denota: $A \subset B$.

Algunos ejemplos de estas relaciones son:

1. $\{a, b, c\} \subseteq \{a, b, c, g, h, z\}$
2. $\{a, b, c\} \subseteq \{a, b, c\}$

3. $\{a, b\} \not\subseteq \{h, i\}$

4. $\{m, n\} \subset \{m, n, o\}$

5. $\emptyset \subset \{p\}$

6. $\{\emptyset\} \not\subseteq \{p\}$

7. $\{\{a\}\} \not\subseteq \{a\}$

8. $\{a\} \not\subseteq \{\{a\}\}$, pero $\{a\} \in \{\{a\}\}$

De los anteriores ejemplos, detengámonos en los últimos 4. La definición de subconjunto nos permite afirmar que el conjunto vacío está incluido (de forma propia o impropia) en cualquier otro conjunto (ejemplo 5), dado que un conjunto es subconjunto de otro si todos sus miembros se encuentran contenidos en este último. Puesto que el conjunto vacío no posee miembro alguno, esto es trivialmente cierto.

No sucede lo mismo, en cambio, con el conjunto que contiene al conjunto vacío (ejemplo 6). Si un conjunto A contiene al conjunto vacío, entonces tiene un miembro, y si este elemento no se encuentra en un conjunto B, entonces *no puede decirse que A esté incluido en B.*

Algo similar ocurre con un conjunto que contiene a otro conjunto, llamémosle A. Este nunca será subconjunto de otro conjunto B si este último no posee también a dicho conjunto en cuestión.

Por último, el ejemplo 8 nos permite reflexionar sobre la diferencia entre un subconjunto y un miembro de un conjunto. *El subconjunto es siempre un conjunto, mientras que un miembro de un conjunto puede o no ser un conjunto en sí mismo*. Por ejemplo, a es un miembro del conjunto {a,b,c}, pero no es un subconjunto de este dado que no es un conjunto en absoluto. El conjunto {a}, en cambio, sí lo es y es también un subconjunto (propio, de hecho) de {a,b}. Vemos así que la noción de inclusión afecta a los conjuntos mientras que la de pertenencia, a los elementos o miembros.

Respecto de esto, merece la pena detenernos en una última diferencia respecto de estas relaciones: la propiedad de *transitividad.* Mientras que la inclusión es transitiva por definición, la pertenencia no lo es. Imaginemos los siguientes ejemplos:

1. Sean X y C dos subconjuntos tales que X={a,b,c} y C={a, X}, podemos afirmar que $b \in X$ y $X \in C$ pero $b \notin C$, dado que C={a,{a,b,c}}

2. Sean A, B y C tres conjuntos tales que $A \subseteq B$ y $B \subseteq C$, entonces, por la misma definición de subconjunto $A \subseteq C$. Esto se debe a que, si A está incluido en B, todos los elementos de A están en B y, si B está incluido en C, todos los elementos de B están también en C, por lo que todos los elementos de A estarán necesariamente en en C.

2.3. Operaciones entre conjuntos

Las siguientes operaciones toman dos conjuntos y devuelven otro conjunto.

La **unión** es aquella operación que toma a dos conjuntos y devuelve como resultado un conjunto compuesto por los elementos de los primeros dos.

$A \cup B = \{x | x \in A \text{ o } x \in B\}$

Por ejemplo: Sea A={a,b,c} y B={c,h,i}, $A \cup B$={a,b,c,h,i}.

Por otro lado, la **intersección** toma dos conjuntos y devuelve un conjunto conformado por los elementos presentes en ambos.

$A \cap B = \{x | x \in A \text{ y } x \in B\}$

Por ejemplo: Sea A={a,b,c} y B={c,h,i}, $A \cap B$={c}.

La **diferencia**, por su parte, es una operación que substrae los elementos de un conjunto a otro.

$A - B = \{x | x \in A \text{ y } x \notin B\}$

Por ejemplo: Sea A={a,b,c} y B={c,h,i}, $A - B$={a,b}.

Es importante aquí notar que, a diferencia de lo que sucede con las dos operaciones anteriores, el orden en el que se aplica la substracción es relevante. Sin importar cuáles sean los conjuntos A y B, vale que $A \cup B = B \cup A$ y $A \cap B = B \cap A$. Sin embargo, $A - B \neq B - A$. La operación **complemento** toma un conjunto y devuelve todos los elementos que no pertenezcan a él.

$$A' = \{x | x \notin A\}$$

Los elementos que no pertenezcan a A pero sí a su complemento dependerán del universo o dominio con el que se esté trabajando. Por ejemplo, si el universo son los números naturales y A={x | x es un número natural par}, A' estará conformado por todos los números naturales impares.

Por último, el **producto cartesiano** es aquella operación que toma dos conjuntos A y B y genera todos los pares ordenados que toman como primer elemento un miembro del primer conjunto y, como segundo elemento, un miembro del segundo. Esta operación se escribe $A \times B$ y se define:

$$A \times B = \{\langle x, y \rangle | \text{ x } \in \text{A e y } \in B\}$$

Por ejemplo, si $A = \{m, n, o\}$ y $B = \{4, 5\}$, entonces:

- $A \times B = \{\langle m, 4\rangle, \langle m, 5\rangle, \langle n, 4\rangle, \langle n, 5\rangle, \langle o, 4\rangle, \langle o, 5\rangle\}$
- $B \times A = \{\langle 4, m\rangle, \langle 4, n\rangle, \langle 4, o\rangle, \langle 5, m\rangle, \langle 5, n\rangle, \langle 5, o\rangle\}$
- $B \times B = \{\langle 4, 4\rangle, \langle 4, 5\rangle, \langle 5, 4\rangle, \langle 5, 5\rangle\}$

A diferencia de un conjunto, que como ya se señaló no tiene orden, un par ordenado sí lo tiene. No obstante, dado que el resultado del producto cartesiano es un conjunto, no tiene orden. Aunque sus elementos sí lo tienen.

Cabe también aclarar que el producto cartesiano de un conjunto cualquiera con el conjunto vacío $\emptyset$ da como resultado el conjunto vacío.

2.4. Diagramas de Venn

Los diagramas de Venn son una buena forma de representar conjuntos. En estos diagramas, cada conjunto se representa con un círculo y sus miembros, con puntos.

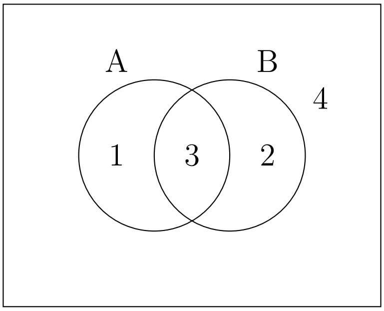


Figura 1: Diagrama de Venn

En la figura 1, la región 1 contiene los elementos que pertenecen al conjunto A pero no al B, y lo contrario sucede con la región 2. La tercera región indica los elementos que pertenecen tanto al conjunto A como al B (*i.e.* la intersección de ambos). Y la región 4 representa los elementos que no se encuentran en ninguno de los conjuntos.

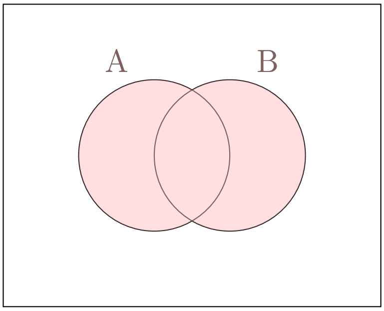
Aquí recurrimos la denominación de estas operaciones mediante números a los fines prácticos de la explicación. Pero cuando queremos indicar que nos referimos a determinados elementos en particular es más usual utilizar el sombreado de la región en cuestión. En la figura 2, ejemplificamos con las distintas operaciones.

2.5. Ejercitación

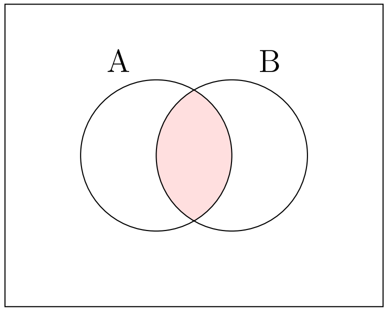
Las siguientes consignas fueron tomadas y adaptadas de Saab y Carranza (2021).

A continuación se detalla la formación de cinco bandas clásicas del rock argentino. Usando esa información como base, resuelva las actividades que siguen:

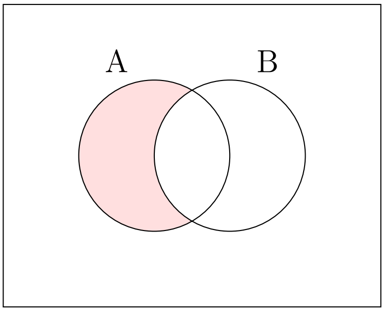
- Sui Generis: Charly García (teclado y voz) y Nito Mestre (guitarra y voz).



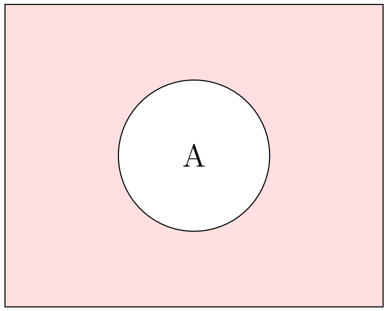
(a) Unión ($A \cup B$)



(b) Intersección ($A \cap B$)



(c) Diferencia ($A - B$)



(d) Complemento de A (A')

Figura 2: Diagramas de Venn: ejemplos de operaciones

- PorSuiGieco: Charly García (teclado, guitarra y voz), Nito Mestre (guitarra y voz), León Gieco (guitarra, armónica y voz), Raúl Porchetto (guitarra y voz) y María Rosa Yorio (voz).

- Serú Girán: Charly García (teclado y voz), David Lebón (guitarra y voz), Pedro Aznar (bajo y voz) y Oscar Moro (batería).

- Almendra: Luis Alberto Spinetta (guitarra y voz), Edelmiro Molinari (guitarra), Emilio del Guercio (bajo) y Rodolfo García (batería).

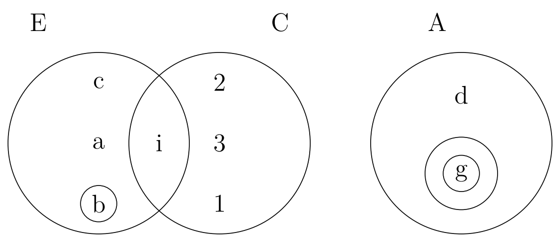
- Pescado Rabioso: Luis Alberto Spinetta (guitarra y voz), David Lebón (bajo y voz), Carlos Cutaia (teclado) y Black Amaya (batería).

1. Defina por extensión los siguientes conjuntos:

   a) A = {x: x es integrante de Sui Generis}

    b) B = {x: x es integrante de Serú Girán}
    c) C = {x: x es integrante de Pescado Rabioso}

2. Realice las siguientes operaciones:
    a) A ∪ B
    b) A ∩ B
    c) C ∩ E
    d) B ∩ D
    e) (A ∪ B ∪ C ∪ D ∪ E) − A
3. Defina por intensión los conjuntos resultantes de las operaciones del ejercicio anterior.
4. Determine si estas afirmaciones son verdaderas o falsas:
    a) Luis Alberto Spinetta *notin* A
    b) Charly García *notin* A
    c) A ⊆ B
    d) B ⊆ A
    e) Luis Alberto Spinetta ∈ E ∩ C
5. Observe los siguientes diagramas de Venn y defina los conjuntos A y C, tal como se ejemplifica con el conjunto E.



- Por extensión
  E = {a, c, {b}, i }
- Por intensión
  E = {x: x ∈ E}

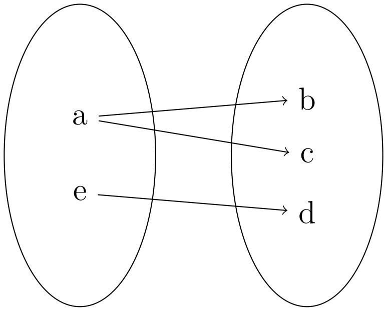


Figura 3: Relación $R : A \to B$

3. Funciones

3.1. Relaciones

Intuitivamente, podríamos decir que una relación es algún tipo de vínculo que dos elementos tienen o no. La maternidad, por ejemplo, es una relación que mantiene una madre con sus hijos o hijas, pero que no mantienen estos últimos entre sí. Del mismo modo, un conjunto puede ser subconjunto de otro. Pero un elemento que no sea un conjunto nunca podrá ser un subconjunto de otra colección. Así, los miembros de un conjunto pueden tener relaciones con elementos del mismo o de otro conjunto.

Para la noción de relación, usamos la siguiente notación: Rab o aRb, donde R es la relación en cuestión, y a y b son los elementos involucrados en ella. También es posible anotar $R \subseteq A \times B$ para indicar que el primer elemento de la relación pertenece al conjunto A y el segundo, a B. En este caso, se dice que la relación es *de* A *a* B. La figura 3 representa visualmente esta situación. Allí, las flechas indican las relaciones entre los distintos elementos. Cuando la relación ocurre entre elementos que pertenecen al mismo conjunto, supongamos A, decimos que es una relación *en* A,

La figura 3 nos muestra dos conjuntos y relaciones que se establecen entre algunos de sus elementos. En concreto, $\{\langle a, b\rangle, \langle a, c\rangle, \langle e, d\rangle\}$. El **complemento de una relación** $R \subseteq A \times B$, denotado *R'*, está dado por los pares ordenados resultantes del producto cartesiano *no* contemplados por esa relación:

$$R' = (A \times B) - R$$

En nuestro ejemplo, $R' = \{\langle a, d\rangle, \langle e, b\rangle, \langle e, c\rangle\}$. Por otro lado, la **inversa de una relación** $R \subseteq A \times B$, indicada con R^{-1}, contiene los pares ordenados que pertenecen a R pero con sus coordenadas invertidas. Siguiendo el ejemplo, $R^{-1} = \{\langle b, a\rangle, \langle c, a\rangle, \langle d, e\rangle\}$.

Observemos que $(R')' = R$ y que $(R^{-1})^{-1} = R$. Pero, mientras que $R \subseteq A \times B$ y $R' \subseteq A \times B$, $R^{-1} \subseteq B \times A$.

Conviene tener presente la siguiente nomenclatura:

- **Dominio**: es el conjunto que contiene los elementos "de los que parte" una relación.
- **Rango o imagen**: es el conjunto que contiene los elementos "a los que efectivamente llega" una relación.
- **Codominio**: es el conjunto que contiene al rango. Codominio y rango pueden ser el mismo conjunto o no[2].

3.2. Definición de función

Una función es un tipo especial de relación. Se dice que una relación entre A y B es una función si y solo si se cumplen las siguientes dos propiedades:

1. Cada elemento en el dominio está emparejado solamente con un elemento en el rango
2. El dominio de R es igual a A

Lo anterior es equivalente a decir que el producto cartesiano entre A y B $(A \times B)$ es una función solamente si todos los miembros de A aparecen una única vez en la primera coordenada de un par ordenado.

Si suponemos que $A = \{m, n, o\}$ y $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, los siguientes son ejemplos de funciones *de A a B*:

[2] Por ejemplo, una relación que toma cualquier valor de los números naturales (**N**) y lo multiplica por 2 devuelve también un valor contenido en los números naturales (**N**), este será su codominio. Sin embargo, su rango estará formado por los números naturales pares exclusivamente.

- $M = \{\langle m, 1\rangle\, \langle n, 3\rangle\, \langle o, 5\rangle\}$
- $N = \{\langle m, 1\rangle\, \langle n, 2\rangle\, \langle o, 3\rangle\}$

Obsérvese que en ninguno de los dos casos los elementos de B aparecen en todas las tuplas, pero eso no es un problema. Lo importante es que todos los elementos de A estén en una y no más de una.

Los siguientes ejemplos, en cambio, no constituyen funciones:

- $P = \{\langle m, 1\rangle\, \langle n, 2\rangle\}$
- $Q = \{\langle m, 1\rangle\, \langle n, 2\rangle\, \langle o, 3\rangle\, \langle m, 4\rangle\}$

En el primer caso, no todos los miembros de A integran un par ordenado y en el segundo, el elemento m se encuentra asociado a dos elementos en el rango.

La terminología para hablar de funciones es muy similar a la que usamos para anteriormente para hablar de relaciones. Cuando una función toma como valores de entrada elementos del conjunto A y como resultado devuelve elementos del conjunto B, decimos que esa función *va de* A *a* B o, lo que es lo mismo, notamos $f : A \to B$.

Los elementos dentro del dominio de la función se suelen llamar **argumentos** y los que se encuentran entre su rango, **valores**. De este modo, en nuestro ejemplo anterior $M(m) = 1$, m consituye el argumento y 1, el valor resultante de aplicar la función M a m.

Por último, no debemos perder de vista que, si bien aquí hemos utilizado ejemplos de funciones unarias, esto ha sido solo a los efectos de simplificar la explicación. Una función puede tomar más de un argumento. Pensemos, por ejmplo, en la función suma: $f(x, y) = x + y$.

3.3. Clasificación de funciones

Supongamos $f : A \to B$. Según su comportamiento, esta función podrá clasificarse de la siguiente manera:

- Si codominio y rango coinciden, se dice que la función es **sobreyectiva** (A *onto* B). Si esto no ocurre, y por lo tanto hay elementos de B que no se corresponden con ningún miembro de A, entonces la función es **no sobreyectiva** (A *into* B).

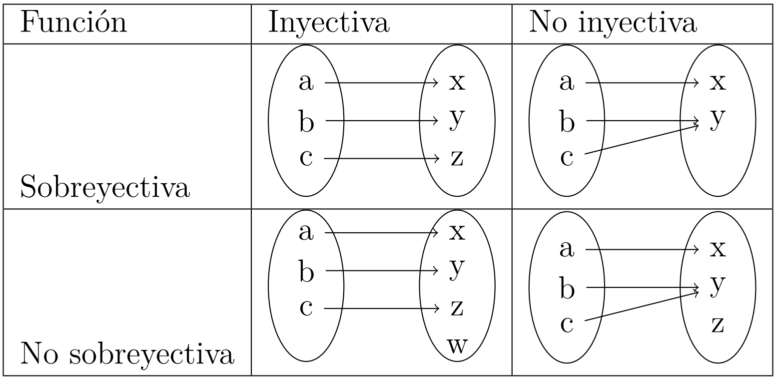


Figura 4: Clasificación de funciones

- Si cada elemento de B se corresponde con un único elemento de A, entonces la función es **inyectiva** (*one-to-one*). En caso contrario, si algún miembro de B al que "llega" más de un elemento de A, entonces la función es **no inyectiva** (*many-to-one*).

Las funciones que cumplen tanto con la propiedad de ser sobreyectivas como con la de ser inyectivas se denominan **biyectivas**. Estas funciones suelen ser de especial interés dado que su inversa es también una función.

3.4. Ejercitación

La siguiente consigna fue tomada y adaptada de Partee *et al.* (2012).

Sean $A = \{b, c\}$ y $B = \{2, 3\}$, considerar la siguiente relación de A a $(A \cup B)$:
$R = \{\langle b, b\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle c, 2\rangle, \langle c, 3\rangle\}$

1. Especificar el dominio, rango y codominio de R.

2. Especificar la relación complementaria R' y la inversa R^{-1}.

3. ¿Es esta relación una función? ¿Por qué? Si lo es, indicar de qué tipo (inyectiva, biyectiva, sobreyectiva).

4. Lenguajes

> La primera articulación del lenguaje es aquella con arreglo a la cual todo hecho de experiencia que se vaya a transmitir, toda necesidad que se desee hacer conocer a otra persona, se analiza en una sucesión de unidades, dotadas cada una de una forma vocal y de un sentido. (Martinet 1991 [1960]: 22)

> Cada una de estas unidades de la primera articulación presenta, como hemos visto, un sentido y una forma vocal (o fónica). Pero no puede ser analizada en unidades sucesivas más pequeñas dotadas de sentido. El conjunto *cabeza* quiere decir “cabeza” y no se puede atribuir a ca-, -be-, -za, sentidos distntos cuya suma sea equivalente a “cabeza”. Pero la forma vocal es analizable en una sucesión de unidades, cada una de las cuales contribuye a distinguir *cabeza* de otras unidades como *cabete*, *majeza* o *careza*. Es a esto a lo que se designará como la segunda articulación del lenguaje. (Martinet 1991 [1960]: 24)

En términos más familiares

- Léxico = Primera articulación
- Fonología = Segunda articulación.

> En el hablar corriente, ‘el lenguaje’ designa propiamente la facultad que tienen los hombres de entenderse por medio de signos vocales. Merece la pena detenerse en este carácter vocal del lenguaje. En los países civilizados, desde hace algunos milenios se hace uso con mucha frecuencia de signos pictóricos o gráficos que corresponden a los signos vocales del lenguaje. Esto es lo que se llama escritura. Hasta la invención del fonógrafo, todo signo vocal emitido era percibido inmediatamente o quedaba perdido para siempre. Por el contrario, un signo escrito, duraba tanto cuanto durara su soporte: piedra, pergamino o papel, y los rasgos dejados sobre este soporte por el buril, el estilo o la pluma. (Martinet 1991 [1960]: 14)

Si nos centramos en la segunda articulación del lenguaje en la modalidad oral, vemos que las unidades relevantes son los llamados fonemas, esto es, los sonidos distintivos que utiliza cada lengua. Ahora bien, como vamos a trabajar principalmente con textos escritos en lenguas de escritura alfabética, las unidades relevantes serán los grafemas. Y como vamos a trabajar particularmente con computadoras, las unidades relevantes serán los caracteres.

Denominamos **alfabeto** al conjunto no vacío de símbolos que constituya la segunda articulación del lenguaje (independientemente de su modalidad): grafemas, fonos, caracteres (UTF-8, ASCII, etc.). El alfabeto se designa convencionalmente con la letra Σ

Por ejemplo:

1. Alfabeto Latino = {a, b, c, d...}

2. Números naturales ($\mathbb{N}$)={1, 2, 3, 4...}

La secuencia de símbolos (iguales o diferentes) de un alfabeto Σ se conoce con el nombre de **cadena**. Así, son cadenas las palabras, las oraciones gramaticales, los constituyentes, pero también las no palabras, las oraciones agramaticales, las expresiones que no conforman constituyente, etc.

Por ejemplo:

1. Si $\Sigma = \{0, 1\}$, $\langle 0, 1, 01, 10, ...\rangle$ serán posibles cadenas.

2. Si $\Sigma = \{a, b, c, ..., z\}$, $\langle a, ba, casa, ...\rangle$ serán posibles cadenas.

- La *longitud de una cadena* w, denotada $|w|$, indica la cantidad de unidades mínimas (sean éstas letras, números o caracteres) contenidos en la cadena.

- La única cadena cuya longitud es 0 es la *cadena vacía*, denotada ϵ.

- La *concatenación* de dos cadenas w_1 y w_2 se denota $w_1 \cdot w_2$ y es una operación que consise en unir una cadena a otra de manera tal que las unidades que forman a cada una queden dispuestas en una única secuencia. Si $w_1 = \langle x_1, x_2, ..., x_n\rangle$ y $w_2 = \langle y_1, y_2, ..., y_n\rangle$, entonces $w_1 \cdot w_2 = \langle x_1, ..., x_n, y_1, ..., y_n\rangle$. En un ejemplo más concreto, si $w_1 =$ *limpia* y $w_1 =$ *parabrisas*, entonces $w_1 \cdot w_2 =$ *limpiaparabrisas*.

- La longitud de la concatenación de dos cadenas es el resultado de la suma de sendas longitudes. Más formalmente: $|w_1 \cdot w_2| = |w_1| + |w_2|$.

- El operador *exponente* nos permite concatenar una cadena consigo misma tantas veces como dicho operador indique. Se denota w^n, donde w es la cadena que sufre la operación y n es la canitad de veces que se la debe concatenar. Cuando $n = 0$ (w^0), el resultado es una cadena vacía (ϵ). En los casos en los que $n > 0$, $w^n = w^{n-1} \cdot w$. En particular, $w^1 = w$. En un ejemplo más concreto, si $w =$hola, $w^0 = \epsilon$, $w^1 = w =$*hola*, $w^2 = w^1 \cdot w = w \cdot wholahola$, $w^3 = w^2 \cdot w =$*holahola*^{h}*ola*.

- La operación *reversa* de una cadena w se denota w^R y consiste en ordernar las unidades que conforman a w de manera inversa. Si $w = \langle x_1, x_2, ..., x_n \rangle$, entonces $w^R = \langle x_n, ..., x_2, x_1 \rangle$. Por ejemplo, si $w =$*luz*, entonces $w^R =$*zul*.

- Todas las cadenas de determinada longitud k que se pueden construir con un alfabeto Σ se representan convencionalmente Σ^k.
  Por ejemplo, dado el alfabeto Σ= ⟨a, b⟩, se dan las siguientes extensiones:
  Σ^0 = ⟨∅⟩
  Σ^1 = ⟨a, b⟩
  Σ^2 = ⟨aa, ab, ba, bb⟩
  Σ^3 = ⟨aaa, aab, abb, aba, bbb, bba, baa, bab⟩...

- La **clausura de Kleene** es una operación que, al aplicarse a un alfabeto Σ, nos permite obtener el conjunto de todas las cadenas que se pueden obtener a partir de él. Para esta operación se usa la notación Σ*.
  En términos de teoría de conjuntos,
  $\Sigma^* = \langle \Sigma^0 \cup \Sigma^1 \cup \Sigma^2 \cup \Sigma^3 \cup \Sigma^4 \cup ... \rangle$.
  Obsérvese que este conjunto (Σ^*) es siempre infinito.

Si contamos la u con diéresis y las vocales acentuadas como caracteres distintos de las no acentuadas, el español tiene 33 caracteres (solo minúsculas y sin contar signos de puntuación). Supongamos que estos 33 caracteres conforman el alfabeto Σ. Ahora bien, Σ*

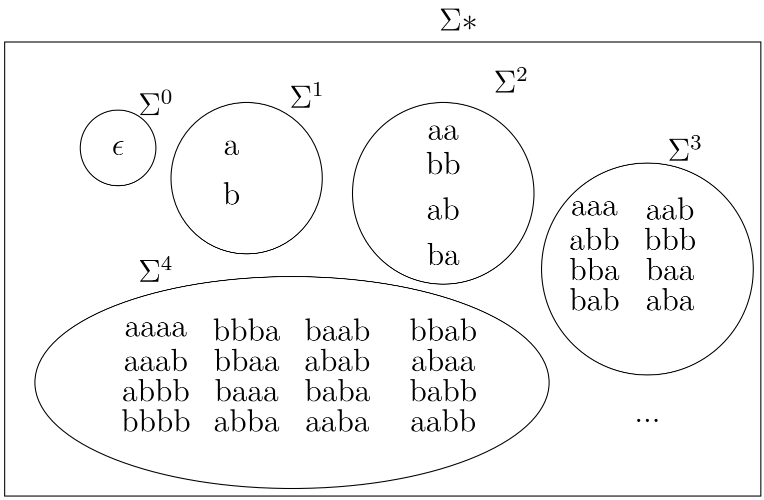


Figura 5: Imagen de ejemplo de las cadenas posibles generadas por un alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$

incluye una infinita cantidad de cadenas que no forman parte del español, como por ejemplo dkfjhg o tuqpeigh

Un l**lenguaje L** es un conjunto de cadenas *particularmente relevante* que está incluido en Σ^*.

Al ser un conjunto, un lenguaje puede definirse, como vimos anteriormente, por intensión o por extensión. Pero la segunda forma resulta inviable dado que que los lenguajes están constituidos por infinitos elementos. Es por eso que se prefiere su definición intensional.

5. Lenguajes como problemas

En lingüística formal, se asume generalmente que una lengua es un conjunto de oraciones formadas a partir de un vocabulario.

Como el conjunto total de todas las oraciones no puede definirse por extensión, el desafío de la lingüística formal consiste en encontrar una forma de definirlo por intensión.

- **Lenguaje**: Conjunto de oraciones gramaticales incluido en el conjunto total de oraciones posibles. Se supone que es un conjunto recursivo (por cada oración es posible determinar

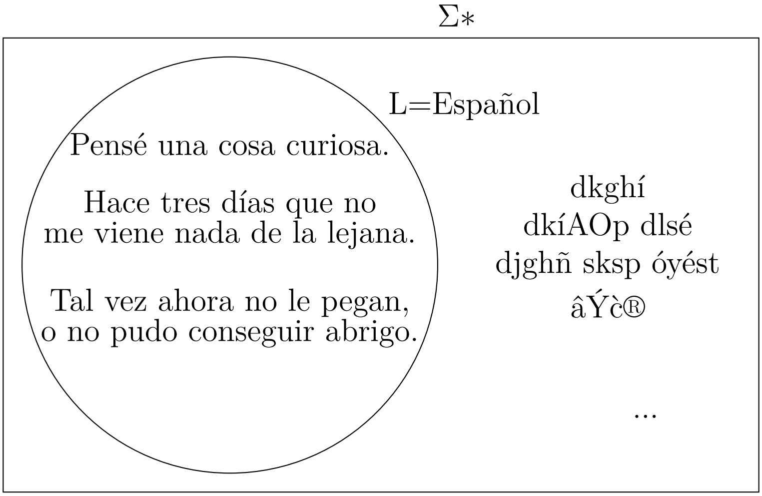


Figura 6: Lenguaje español como subconjunto de Σ^* para el alfabeto Σ = UTF-8

si pertenece o no al conjunto). Dado que es potencialmente infinito, no puede ser definido por extensión.

- **Lengua-I**: Es el sistema intensional que posee cada hablante y que produce todas las oraciones gramaticales de una lengua y ninguna de las agramaticales. Reconstruir ese algoritmo es el objetivo principal de la lingüística formal.

- **Lengua-E**: Es el conjunto de las oraciones exteriorizadas. Existe cierta ambigüedad respecto de si coincide con la noción de lenguaje, si se trata del subconjunto L-E incluido en el lenguaje L formado por las oraciones que pertenecen al conjunto de las oraciones efectivamente exteriorizadas o si es un conjunto L-E cuya intersección con L es el conjunto de las oraciones gramaticales efectivamente exteriorizadas y el complemento son las oraciones agramaticales exteriorizadas ya sea por errores de actuación o por el motivo que fuere.

La noción de lenguaje se extiende no solamente a los lenguajes naturales sino también a cualquier conjunto de cadenas formadas a partir de un alfabeto Σ.

Dentro de la teoría de autómatas, plantear un problema significa preguntarse si un elemento dado pertenece a determinado lenguaje o no. Esto significa, dada una cadena $w \in \Sigma*$, decidir si dicha cadena pertenece o no a un L determinado.

6. Soluciones

6.1. Soluciones a ejercitación sobre conjuntos

1. Defina por extensión los siguientes conjuntos:

   a) A = {Charly García, Nito Mestre}

   b) B = {Charly García, David Lebón, Pedro Aznar, Oscar Moro}

   c) C = {Luis Alberto Spinetta, David Lebón, Black Amaya, Carlos Cutaia}

2. Realice las siguientes operaciones:

   a) A $\cup$ B = {Charly García, Nito Mestre, Raúl Porchetto, León Gieco, María Rosa Yorio}

   b) A $\cap$ B = {Charly García, Nito Mestre}

   c) C $\cap$ E = {David Lebón}

   d) B $\cap$ D = $\emptyset$

   e) (A $\cup$ B $\cup$ C $\cup$ D $\cup$ E) $-$ A = {Raúl Porchetto, León Gieco, María Rosa Yorio, Luis Alberto Spinetta, Edelmiro Molinari, Emilio del Guercio, Rodolfo García, Black Amaya, Carlos Cutaia, Oscar Moro, Pedro Aznar, David Lebón}

3. Defina por intensión los conjuntos resultantes de las operaciones del ejercicio anterior.

4. Determine si estas afirmaciones son verdaderas o falsas:

   a) Luis Alberto Spinetta *notin* A = Verdadera

   b) Charly García *notin* A = Falsa

   c) A $\subseteq$ B = Verdadera

   d) B $\subseteq$ A = Falsa

   e) Luis Alberto Spinetta $\in$ E $\cap$ C = Falsa

5. Observe los siguientes diagramas de Venn y defina los conjuntos A y C, tal como se ejemplifica con el conjunto E.

   - C = {i, 2, 3, 1}
   - C = {x: x $\in$ C}
   - A = {d, {{g}}}
   - A = {x: x $\in$ A}

6.2. Soluciones a ejercitación sobre funciones

Sean $A = \{b, c\}$ y $B = \{2, 3\}$, considerar la siguiente relación de A a $(A \cup B)$:
$R = \{\langle b, b\rangle, \langle b, 2\rangle, \langle c, 2\rangle, \langle c, 3\rangle\}$

1. Dominio = { b,c }

   Rango = { 2,3 }

   Codominio = { 2,3 }

2. $R' = \{\langle b, c\rangle, \langle b, 3\rangle, \langle c, b\rangle, \langle c, c\rangle\}$

   $R^{-1} = \{\langle b, b\rangle, \langle 2, b\rangle, \langle 2, c\rangle, \langle 3, c\rangle\}$

3. Esta relación no es una función porque cada elemento del dominio se corresponde con más de un elemento del rango.

Referencias

Partee, B., Meulen, A., y Wall, R. (2012). *Mathematical methods in linguistics*. Kluwer Academics, Dordrecht.

Peregrín Otero, C. (1970). *Introducción a la lingüística transformacional*. Siglo XXI, México DF.

Saab, A. y Carranza, F. (2021). *Dimensiones del significado: una introducción a la semántica formal*. SADAF, Buenos Aires.