tarea CONTINUIDAD

1 Sea la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si \;\; x < 2 \\ 3 - x & si \;\; x \geq 2 \end{cases}$

a) Hacer la gráfica de $\boldsymbol{f}$.

b) Demostrar analíticamente que $\boldsymbol{f}$ no es continua en $x = 2$

c) ¿qué tipo de discontinuidad tiene $\boldsymbol{f}$ en $x = 2$?

2 Dada la función:

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & si \quad x < -1 \\ x & si \quad |x| < 1 \\ 1 - x & si \quad x \geq 1 \end{cases}$$

a) Graficar la función y analizar su continuidad en $\mathbb{R}$.

b) Clasifica las discontinuidades, si es que las hay.

3 Hallar y clasificar los puntos de discontinuidad de la función f. Graficarla.

$$f(x) = \frac{x^2 - 16}{-x^2 - 3x + 4}$$

4 Sea la función $g(x) = \dfrac{3x^2 + 3x - 6}{2x^2 - 6x - 20}$

a) Determinar el dominio de g y realizar su gráfica.

b) Encontrar las asíntotas verticales y horizontales de la gráfica de g.

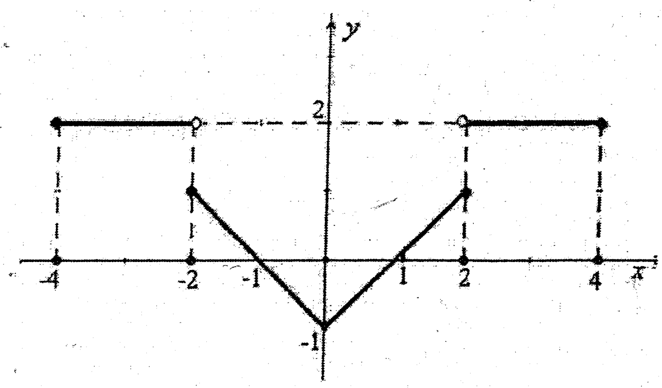
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Departamento de Matemática - Escuela de Formación Básica

Análisis Matemático I - 2º Cuatrimestre 2008

Parcial 1 - 29/09/08 - Tema A

Apellido y Nombres:		
e-mail:		
Legajo:	Comisión:	Carrera:

1. Dada la resperesentación gráfica de función f,



(a) escribir la ley de f y su Dominio,

(b) dar el Conjunto Imagen de f,

(c) graficar la función $g(x) = f(2x)$ y escribir el Dominio y el Conjunto Imagen de g.

2. Sea g la función decuya ley es $g(x) = 5 + \ln(3 + x)$.

(a) Hallar el Dominio de g.

(b) Graficar g y justificar la existencia g^{-1}.

(c) Escribir la ley y el Dominio de g^{-1}.

(ya lo hicimos!!)

3. Decidir si cada una de las siguientes afirmaciones es falsa o verdadera, justificando la respuesta.

(a) Toda función inyectiva en $\mathbb{R}$ es monótona en $\mathbb{R}$.

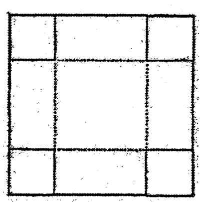
(b) Si $g(x) = \sqrt{8 - 2x^2}$ y $h(x) = 1/x^2$, entonces $Dom\ h \circ g = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$.

(c) $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(5\pi/4)) = 5\pi/4$.

(d) El período de $h(x) = \cos(x/3)$ es 2π.

4. Exprese el área de un rectángulo de perímetro 20 cm en función de la longitud de la base.

5. Se dispone de un cartón cuadrado de 10 cm de lado, si se cortan cuatro cuadrados congruentes de x cm de lado, en las esquinas del mismo (como se muestra en la figura) y se doblan sus cuatro lados se obtiene una caja sin tapa.



a) Exprese la superficie lateral (S) de la caja, en función de x, (ley y dominio)

b) A partir de la gráfica de dicha función determine la longitud del lado de los cuadrados que se cortan para obtener una caja de superficie lateral máxima.

Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Departamento de Matemática - Escuela de Formación Básica
Análisis Matemático I - 1er Cuatrimestre 2008
Parcial 2 - 12/04/08 **Tema 2**

Apellido y Nombres:		
Legajo:	Comisión:	Carrera:

1. Dada la función

$$g(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & \text{si} \quad -\frac{3}{2} < x \leq 0 \\ -\text{sen} 2x & \text{si} \quad 0 < x < \pi \end{cases}$$

Traza la gráfica y determina el dominio y el recorrido de cada una de las siguientes funciones:

a) g b) $f(x) = |g(x)|$ c) $h(x) = g(x+1)$

2. a) Define función par y función impar. Indica en cada caso las características de las gráficas y ejemplifica.
b) Determina si la función $g(x) = \dfrac{3x \cos x}{x^2 - 4}$ es par o impar.

3. Dadas las funciones

$$h(x) = \ln(1 - |x|) \qquad f(x) = \frac{x+3}{x-1}$$

(a) Determina el dominio y la ley de la función compuesta $h \circ f$.
(b) Representa en el eje real el dominio de la función compuesta $h \circ f$.

4. Determina si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa. Justifica tu respuesta.

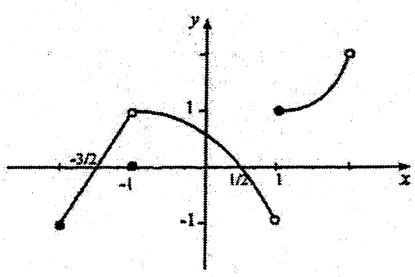
(a) $\dfrac{1}{x} + x > 0 \Longleftrightarrow x > 0$
(b) $|-a| = -|a|$ para todo $a \in \mathbb{R}$
(c) $\log_2(x+y) = \log_2(x) \cdot \log_2(y)$ para todo $x, y \in \mathbb{R}^+$

5. Sea $g : (1, 3] \to \mathbb{R}$ tal que $g(x) = \dfrac{1}{x} - 1$.

(a) Traza la gráfica de g.
(b) Justifica, a partir de la gráfica, que g admite inversa. Determina dominio y ley de la función g^{-1} y traza su gráfica.

6. A partir de la gráfica de la función $h : [-2, 2) \to \mathbb{R}$, determina si cada una de las siguientes proposiciones es verdadera o falsa. En el caso que sea falsa escríbela en forma correcta.

(a) Rango$(h) = [-1, 2]$.
(b) $h(-1) = 0$.
(c) $h(1) = -1$
(d) h es creciente en $[-2, -1]$.
(e) $\{x \in \mathbb{R} : h(x) \geq 0\} = [-3/2, 1/2]$



CONTINUIDAD

EN UN PUNTO : f es continua en a si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$

POR DERECHA : f es continua por derecha en a si :

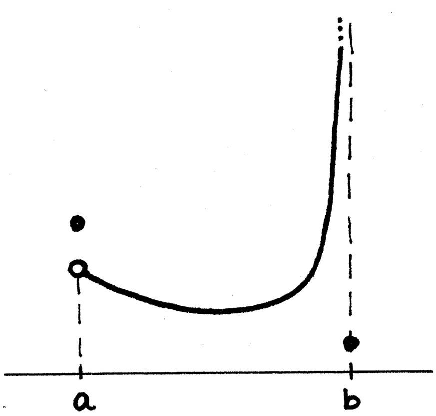
$$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

POR IZQUIERDA : f es continua por izquierda en a si :

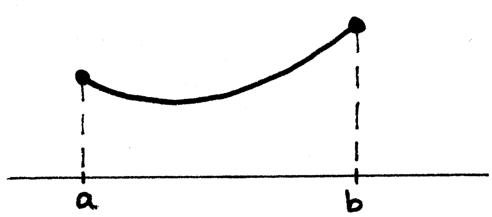
$$\lim_{x \to a^-} f(x) = f(a)$$

EN UN INTERVALO ABIERTO : f es continua en $(a;b)$ si es continua para cada $x \in (a;b)$

EN UN INTERVALO CERRADO : f es continua en $[a;b]$ si es continua para cada $x \in (a;b)$ y además es continua por derecha en a y continua por izquierda en b.



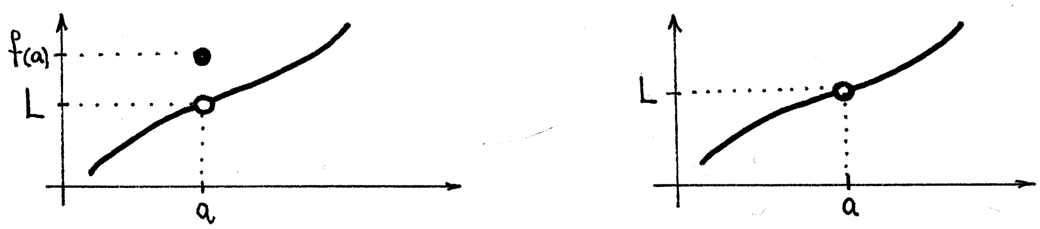
esta función es continua en $(a;b)$ pero no lo es en $[a;b]$



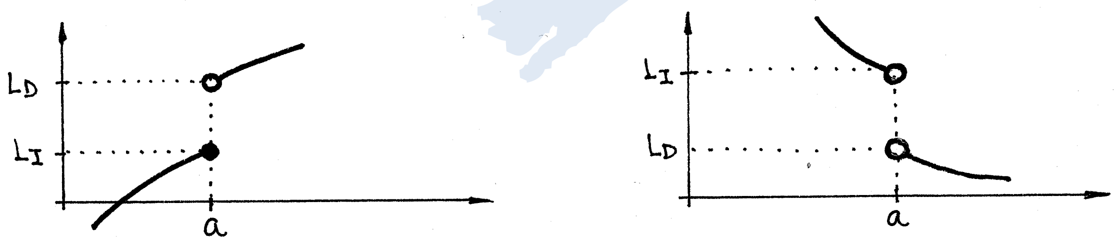
esta función es continua en $[a;b]$ y por lo tanto, también en $(a;b)$

CLASIFICACIÓN DE LAS DISCONTINUIDADES

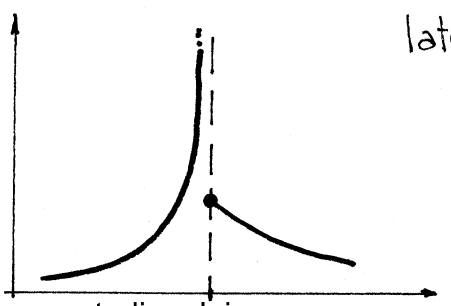
EVITABLES : f tiene en el punto a una discontinuidad **evitable** (o **removible**) si el límite cuando $x \to a$ **existe** y **es finito**, pero, o bien no coincide con $f(a)$ o bien $\nexists\, f(a)$.



SALTO FINITO : f tiene en el pto a una discontinuidad inevitable de **salto finito** si los límites laterales cuando $x \to a$ **existen**, **son finitos**, pero **son distintos**.



SALTO INFINITO : f tiene en el pto a una discontinuidad inevitable de **salto infinito** si uno de los límites laterales, o ambos, vale $+\infty$ ó $-\infty$

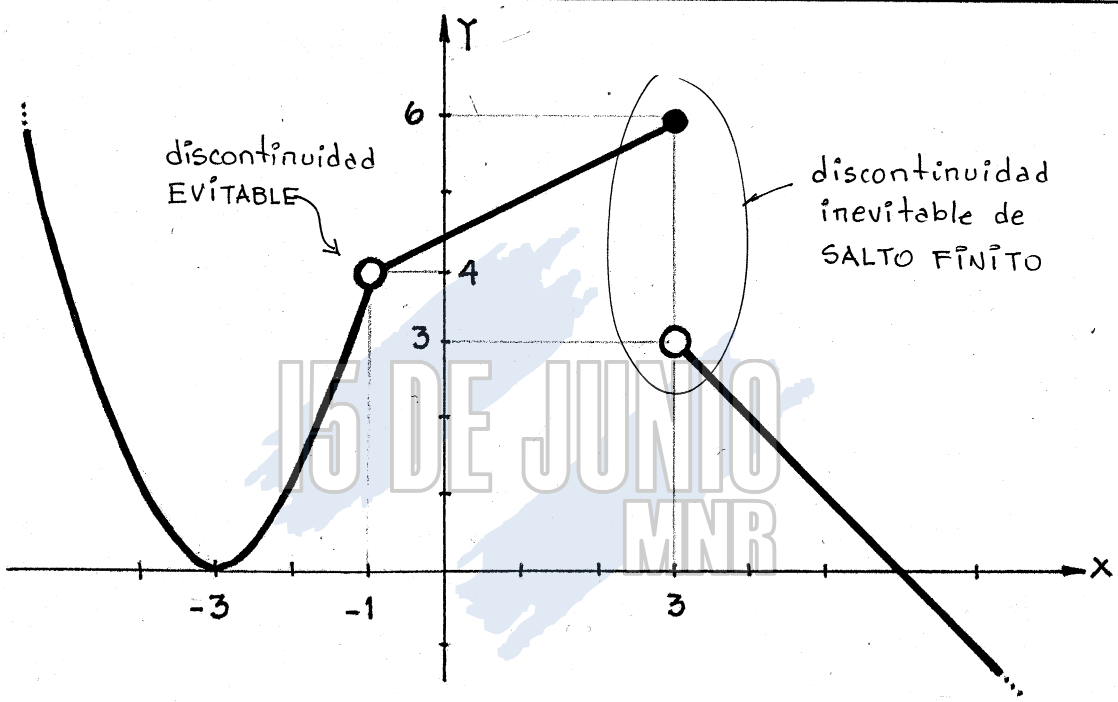


LÍMITES

1 Sea la función $f(x) = \begin{cases} (x+3)^2 & si \quad x < -1 \\ \frac{1}{2}x + \frac{9}{2} & si \ -1 < x \leq 3 \\ 6 - x & si \quad x > 3 \end{cases}$

Hallar , si existen, los siguientes límites :

- $\lim_{x \to -3} f(x)$ • $\lim_{x \to -1} f(x)$ • $\lim_{x \to 3} f(x)$



$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -3^-} f(x) = 0 \\ \lim_{x \to -3^+} f(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 3} f(x) = 0 \quad Y \quad f(-3) = 0$$

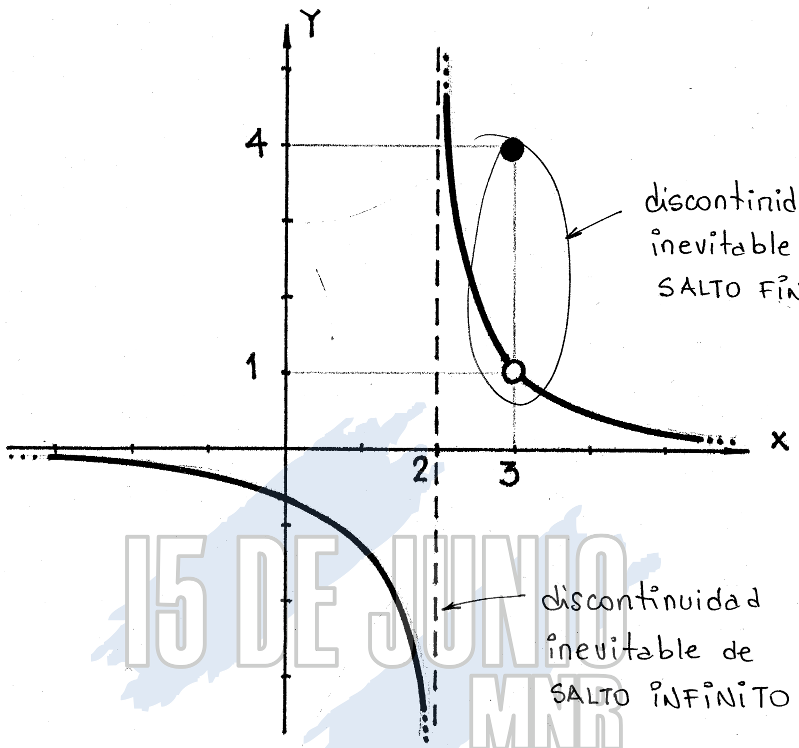
$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to -1^-} f(x) = 4 \\ \lim_{x \to -1^+} f(x) = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to -1} f(x) = 4 \quad \text{pero} \quad \nexists f(-1)$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 3^-} f(x) = 6 \\ \lim_{x \to 3^+} f(x) = 3 \end{array}\right\} \quad \nexists \lim_{x \to 3} f(x) \quad \text{pero} \quad f(3) = 6$$

2 Sea la función $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & si \quad x \neq 3 \\ 4 & si \quad x = 3 \end{cases}$

Hallar , si existen, los siguientes límites :

- $\lim_{x\to 3} f(x)$ • $\lim_{x\to 2} f(x)$ • $\lim_{x\to\infty} f(x)$ • $\lim_{x\to-\infty} f(x)$



$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 3^-} f(x) = 1 \\ \lim_{x\to 3^+} f(x) = 1 \end{array}\right\} \quad \lim_{x\to 3} f(x) = 1 \qquad \text{pero } f(3) = 4$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{x\to 2^-} f(x) = -\infty \\ \lim_{x\to 2^+} f(x) = +\infty \end{array}\right\} \quad \nexists \lim_{x\to 2} f(x) \quad \text{Y} \quad \nexists f(2)$$

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0 \quad \text{Y} \quad \lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$$

d) La función $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}} & \text{si} \quad x>1\\ x^2+x & \text{si} \quad x\le 1\end{cases}$ ¿es continua en $x=1$?

- $f(1) = 1^2 + 1 = 2$

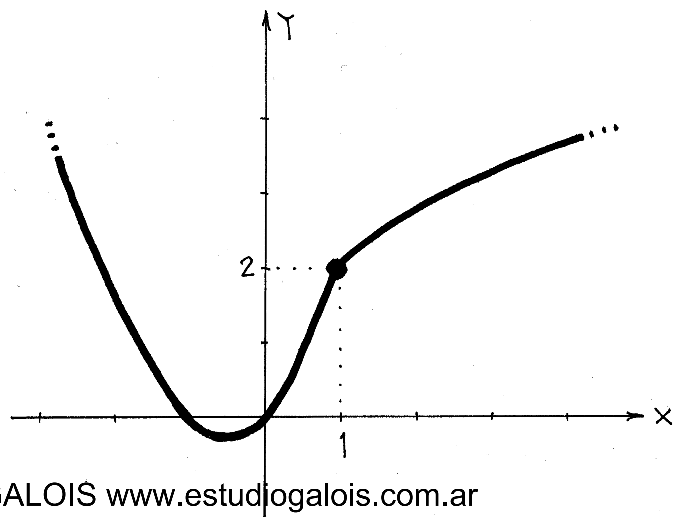
- $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} x^2+x = 2$

- $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1-x \nearrow 0}{1-\sqrt{x} \searrow 0} \overset{\text{truco del conjugado}}{=} \lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{1-x}{1-\sqrt{x}} \cdot \dfrac{1+\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{(1-x).(1+\sqrt{x})}{1^2-(\sqrt{x})^2} = \lim_{x\to 1^+} \frac{(1-x)(1+\sqrt{x})}{1-x} = 2$$

$\therefore \lim\limits_{x\to 1} f(x) = 2$ Y $f(1) = 2$

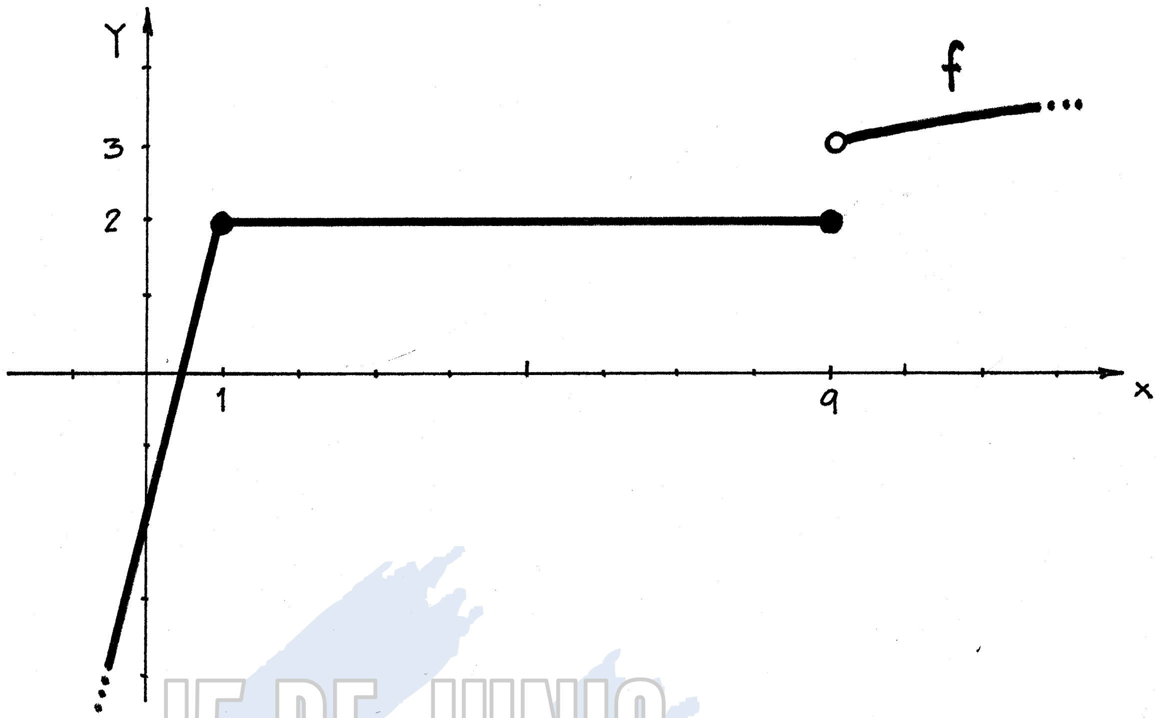
$\therefore$ f es continua en $x=1$ ✓



Ejercicio 1: Dada la función $f(x) = \begin{cases} 4x-2 & si \quad x<1 \\ 2 & si \quad 1 \le x \le 9 \\ \sqrt{x} & si \quad x>9 \end{cases}$

a) Estudiar la continuidad de f en $\mathbb{R}$

b) Realizar la gráfica de f y clasificar las discontinuidades, si las hubiese.



- si $x<1$ vale $f(x) = 4x-2$ → es continua por ser una función polinómica de grado 1 (lineal).

- si $1<x<9$ vale $f(x) = 2$ → es continua por ser una función constante.

- si $x>9$ vale $f(x) = \sqrt{x}$ → es continua (en su dominio) por ser la raíz de una función lineal.

- $x = 1$

$\cdot\ f(1) = 2$

$\cdot\ \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} 2 = 2$

$\cdot\ \lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (4x-2) = 2$

$\Rightarrow \lim\limits_{x \to 1} f(x) = f(1)$

$\Downarrow$

f es continua en $x = 1$ ✓

- $x = 9$

$\cdot\ f(9) = 2$

$\cdot\ \lim\limits_{x \to 9^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 9^-} 2 = 2$

$\cdot\ \lim\limits_{x \to 9^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 9^+} \sqrt{x} = 3$

$\Rightarrow \nexists \lim\limits_{x \to 9} f(x)$

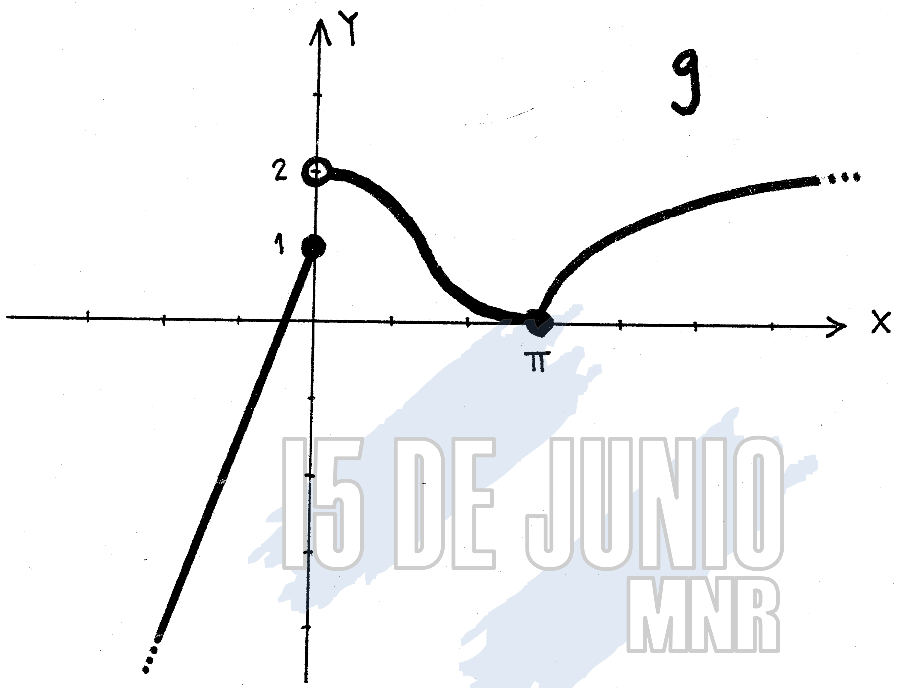
$\Downarrow$

f tiene una discontinuidad inevitable de salto finito en $x = 9$ ✓

$\therefore\ f$ es continua $\forall x \in \mathbb{R} - \{9\}$ ✓

Dada la función $g(x) = \begin{cases} 2x+1 & \text{si} \quad x \leq 0 \\ 1+\cos(x) & \text{si} \quad 0 < x \leq \pi \\ \sqrt{x-\pi} & \text{si} \quad x > \pi \end{cases}$

a) Representa gráficamente la función g.
b) Analiza la continuidad de la función en su Dominio y particularmente en $x = 0$ y en $x = \pi$
c) Determina un intervalo donde g sea inyectiva, justificando tal elección.



- si $x < 0$ vale $g(x) = 2x+1$ y es continua por ser una función lineal
- si $0 < x < \pi$ vale $g(x) = 1 + \cos x$ y es continua por ser la suma de 2 funciones continuas: una función trigonométrica y una constante.
- si $x > \pi$ vale $g(x) = \sqrt{x-\pi}$ y es continua por ser composición de 2 funciones continuas.

- si $x = 0$ vale

$$\left.\begin{array}{l} g(0) = 2.0+1 = \mathbf{1} \\ L_I = \lim\limits_{x \to 0^-} 2x+1 = \mathbf{1} \\ L_D = \lim\limits_{x \to 0^+} 1+\cos x = \mathbf{2} \end{array}\right\}$$

g tiene en $x = 0$ una discontinuidad inevitable de salto finito

- si $x = \pi$ vale

$$\left.\begin{array}{l} g(\pi) = 1 + \cos\pi = \mathbf{0} \\ L_I = \lim\limits_{x \to \pi^-} 1+\cos\pi = \mathbf{0} \\ L_D = \lim\limits_{x \to \pi^+} \sqrt{x-\pi} = \mathbf{0} \end{array}\right\}$$

g es contínua en $x = \pi$

$\therefore$ g es continua $\forall x \in \mathbb{R} - \{0\}$ ✓

g es inyectiva en el intervalo $(-\infty ; 0)$

porque $\forall x_1 \neq x_2 \in (-\infty ; 0)$ resulta $g(x_1) \neq g(x_2)$ ✓

demostración: $x_1 \neq x_2$

$$2x_1 \neq 2x_2$$

$$\underbrace{2x_1 + 1}_{g(x_1)} \neq \underbrace{2x_2 + 1}_{g(x_2)}$$

1 Hallar y clasificar los puntos de discontinuidad de la función

$$f(x) = \frac{3x^2 - 8x + 4}{x^2 - 3x + 2} \quad \text{y graficarla.}$$

$\text{dom } f = \{x \in \mathbb{R} / x^2 - 3x + 2 \neq 0\} = \mathbb{R} - \{1, 2\}$

Como f es el cociente de 2 polinomios (que son continuos $\forall x \in \mathbb{R}$) será continua en todos los valores de x que no anulen a su denominador

$\therefore f$ es continua en $\mathbb{R} - \{1,2\}$

$\Downarrow$

los puntos de discontinuidad son $x = 1 \wedge x = 2$ ✓

$\boxed{x = 1}$

- $$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \frac{3x^2 - 8x + 4}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 1^+} \frac{\cancel{(x-2)}\overbrace{(3x-2)}^{\to 1}}{\cancel{(x-2)}\underbrace{(x-1)}_{\to 0^+}} = +\infty$$

- $$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{3x^2 - 8x + 4}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \to 1^-} \frac{\cancel{(x-2)}\overbrace{(3x-2)}^{\to 1}}{\cancel{(x-2)}\underbrace{(x-1)}_{\to 0^-}} = -\infty$$

$\therefore \nexists \lim_{x \to 1} f(x) \longrightarrow$ en $x = 1$ hay una discontinuidad inevitable de salto infinito ✓

$$\boxed{x = 2}$$

- $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{3x^2 - 8x + 4 \nearrow 0}{x^2 - 3x + 2 \searrow 0} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\cancel{(x-2)}(3x-2)}{\cancel{(x-2)}(x-1)}$

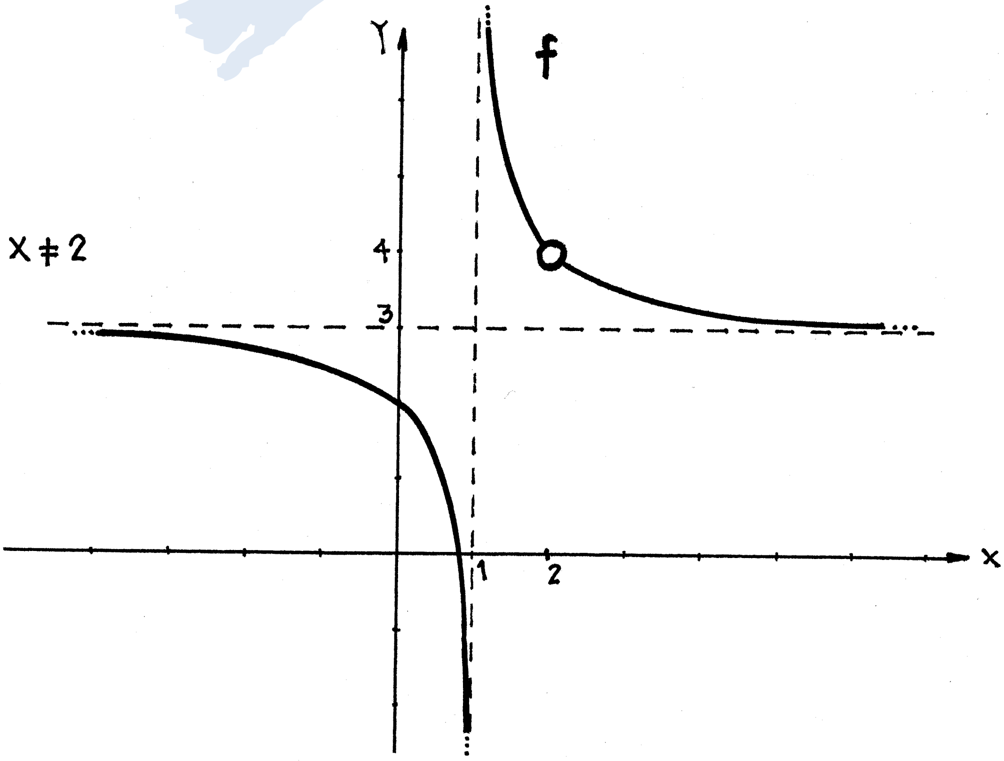
$$= \lim_{x \to 2} \frac{3x-2 \nearrow 4}{x-1 \searrow 1} = 4$$

$\therefore$ en $x = 2$ hay una discontinuidad evitable ✓

$$f(x) = \frac{3x^2 - 8x + 4}{x^2 - 3x + 2}$$

$$= \frac{\cancel{(x-2)}(3x-2)}{\cancel{(x-2)}(x-1)}$$

$$= \frac{3x-2}{x-1} \quad , \text{ si } x \neq 2$$



ASÍNTOTAS HORIZONTALES

- $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^2-4 \nearrow \infty}{-2x^2+3x-1 \searrow -\infty} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\cancel{x^2}\cdot\left(\frac{4x^2}{x^2}-\frac{4}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\cdot\left(-\frac{2x^2}{x^2}+\frac{3x}{x^2}-\frac{1}{x^2}\right)}$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{4-\frac{4}{x^2}}{-2+\frac{3}{x^2}-\frac{1}{x}} = -2$$

$\downarrow$

hay una AH cuya ecuación es $y=-2$ cuando $x\to+\infty$

- $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \dots = -2 \longrightarrow$ hay una AH cuya ecuación es $y=-2$ cuando $x\to-\infty$

Como f tiene una discontinuidad evitable en $x=1$ podemos redefinirla así:

$$\boxed{g(x) = \begin{cases} \dfrac{4x^2-4}{-2x^2+3x-1} & \text{si } x \neq 1 \\ -8 & \text{si } x = 1 \end{cases}}$$

y logramos que $f(x) = g(x) \quad \forall x \neq 1$

pero g es continua en $x=1$ ✓

(aunque no lo es en $x = 1/2$)

2 Dada la función : $f(x) = \dfrac{4x^2-4}{-2x^2+3x-1}$

a) Determina su dominio y analiza si presenta alguna discontinuidad .
En caso afirmativo, clasifícala.

b) Si f presenta una discontinuidad evitable en algún punto,
¿cómo la redefinirías para que sea continua en ese punto?

c) Encuentra, si existen, las ecuaciones de las asíntotas horizontales y verticales.

$$\operatorname{dom} f = \{ x \in \mathbb{R} \,/\, -2x^2+3x-1 \neq 0 \} = \mathbb{R} - \{1 \,,\, 1/2\}$$

Como f es el cociente de 2 polinomios (que son continuos $\forall x \in \mathbb{R}$)

será continua para todos los valores de x que no anulen a su denominador

$\therefore$ f es continua en $\mathbb{R} - \{1 , 1/2\}$

$\boxed{x = 1}$

$$\bullet \lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{4x^2-4 \nearrow 0}{-2x^2+3x-1 \searrow 0} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(4x+4)}{\cancel{(x-1)}(-2x+1)}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{4x+4 \nearrow 8}{-2x+1 \searrow -1} = -8$$

$\therefore$ en $x = 1$ hay una discontinuidad evitable

(pero no hay una asíntota vertical en $x = 2$) ✓

$\boxed{x = 1/2}$

- $\lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \dfrac{4x^2-4}{-2x^2+3x-1} = \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} \dfrac{\cancel{(x-1)}\overbrace{(4x+4)}^{\to 6}}{\cancel{(x-1)}\underbrace{(-2x+1)}_{\to 0^-}} = -\infty$

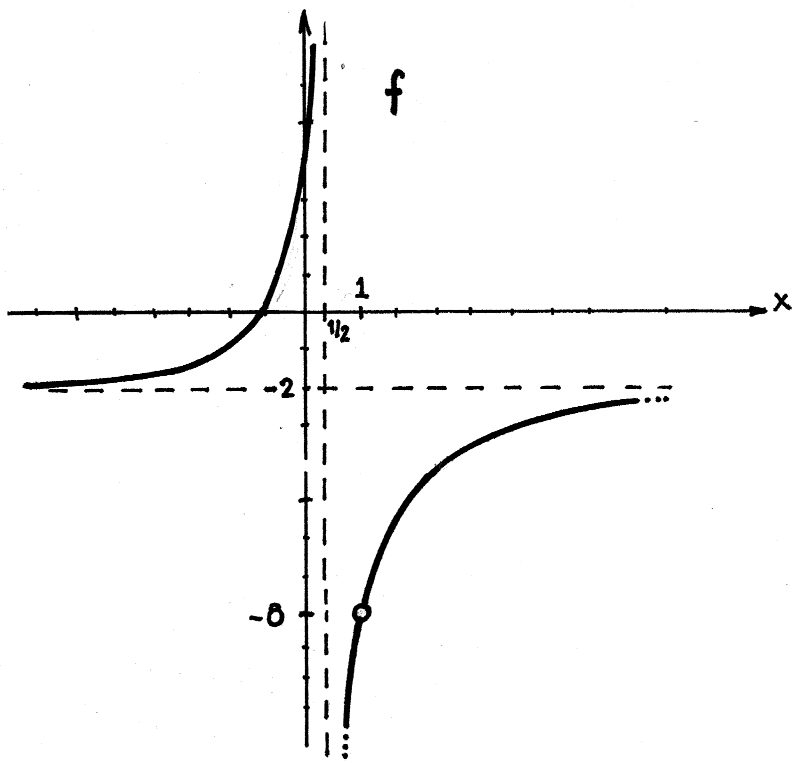
- $\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \dfrac{4x^2-4}{-2x^2+3x-1} = \lim_{x \to \frac{1}{2}^-} \dfrac{\cancel{(x-1)}\overbrace{(4x+4)}^{\to 6}}{\cancel{(x-1)}\underbrace{(-2x+1)}_{\to 0^+}} = +\infty$

$\therefore \nexists \lim_{x \to \frac{1}{2}} f(x) \longrightarrow$ en $x = \frac{1}{2}$ hay una discontinuidad inevitable de salto infinito (y una AV cuya ecuación es $x = \frac{1}{2}$) ✓

$f(x) = \dfrac{4x^2-4}{-2x^2+3x-1}$

$= \dfrac{\cancel{(x-1)}(4x+4)}{\cancel{(x-1)}(-2x+1)}$

$= \dfrac{4x+4}{-2x+1}$, si $x \neq 1$



a) $\boxed{\lim_{x\to 2}\frac{x^3-2x-4}{x^4-16}}$ $\begin{matrix}\to 0\\ \to 0\end{matrix}$

$$= \lim_{x\to 2}\frac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+2)}{\cancel{(x-2)}(x^3+2x^2+4x+8)}$$

	1	0	-2	-4
2		2	4	4
	1	2	2	0

$$= \lim_{x\to 2}\frac{x^2+2x+2}{x^3+2x^2+4x+8}\begin{matrix}\to 10\\ \to 32\end{matrix}$$

	1	0	0	0	-16
2		2	4	8	16
	1	2	4	8	0

$$= \frac{10}{32}$$

$$= \frac{5}{16} \checkmark$$

b) $\boxed{\lim_{x\to 3}\frac{2x^4-5x^2-4x-105}{3x^2-6x-9}}$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(2x^3+6x^2+13x+35)}{\cancel{(x-3)}(3x+3)}$$

$$= \lim_{x\to 3}\frac{2x^3+6x^2+13x+35}{3x+3}\begin{matrix}\to 182\\ \to 12\end{matrix}$$

	2	0	-5	-4	-105
3		6	18	39	105
	2	6	13	35	0

$$= \frac{182}{12}$$

$$= \frac{91}{6} \checkmark$$

	3	-6	9
3		9	3
	3	3	0

c) $$\boxed{\lim_{x\to -1} \frac{-5x^2+4x+9}{x^2-6x-7}}\ \begin{matrix}\nearrow 0\\ \searrow 0\end{matrix}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{\cancel{(x+1)}\,(-5x+9)}{\cancel{(x+1)}\,(x-7)}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{-5x+9}{x-7}\ \begin{matrix}\nearrow 14\\ \searrow -8\end{matrix}$$

	-5	4	9
-1		5	-9
	-5	9	0

$$= \frac{14}{-8}$$

	1	-6	-7
-1		-1	7
	1	-7	0

$$= -\frac{7}{4}\ \checkmark$$

d) $$\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{6x^3+4x^2+2x}{x^2-x}}\ \begin{matrix}\nearrow 0\\ \searrow 0\end{matrix}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}\,(6x^2+4x+2)}{\cancel{x}\,(x-1)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{6x^2+4x+2}{x-1}\ \begin{matrix}\nearrow 2\\ \searrow -1\end{matrix}$$

$$= \frac{2}{-1}$$

$$= -2\ \checkmark$$

u) $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{(x+2)^2-4}{x}}$ $\begin{matrix}\nearrow 0 \\ \searrow 0\end{matrix}$ $= \lim_{x\to 0} \frac{x^2+2.x.2+2^2-4}{x}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^2+4x+4-4}{x}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}(x+4)}{\cancel{x}} \nearrow 4 \quad = \mathbf{4} \checkmark$$

v) $\boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x}}$ $\begin{matrix}\nearrow 0 \\ \searrow 0\end{matrix}$ $= \lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+1}-1}{x} \cdot \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}+1}$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{(\sqrt{x+1})^2-1^2}{x(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\cancel{x}+\cancel{1}-\cancel{1}}{\cancel{x}(\sqrt{x+1}+1)}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt{x+1}+1} \begin{matrix}\nearrow 1 \\ \searrow 2\end{matrix}$$

$$= \mathbf{\frac{1}{2}} \checkmark$$

x) $\boxed{\lim_{x\to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x+5}-3}}$ $\nearrow 0$ $\searrow 0$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{x+5}-3} \cdot \frac{2+\sqrt{x}}{2+\sqrt{x}} \cdot \frac{\sqrt{x+5}+3}{\sqrt{x+5}+3}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{(2^2-(\sqrt{x})^2)\cdot(\sqrt{x+5}+3)}{((\sqrt{x+5})^2-3^2)\cdot(2+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{(4-x)\cdot(\sqrt{x+5}+3)}{(x+5-9)\,(2+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{(4-x)\cdot(\sqrt{x+5}+3)}{(x-4)\cdot(2+\sqrt{x})}$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{\cancel{(4-x)}\cdot(\sqrt{x+5}+3)}{(-1)\,\cancel{(4-x)}\cdot(2+\sqrt{x})} \begin{matrix}\nearrow 6 \\ \searrow -4\end{matrix}$$

$$= \frac{6}{-4}$$

$$= -\frac{3}{2} \checkmark$$

e) $\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+x^2+2x}{4x^3+3}}$ $\frac{\nearrow \infty}{\searrow \infty}$ $= \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^3}\left(\frac{x^3}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}+\frac{2x}{x^3}\right)}{\cancel{x^3}\left(\frac{4x^3}{x^3}+\frac{3}{x^3}\right)}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x}+\frac{2}{x^2} \to 1}{4+\frac{3}{x^3} \to 4} = \frac{1}{4} \checkmark$$

f) $\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{6x^3+2x^2-1}{5x^3+2x}}$ $\frac{\nearrow \infty}{\searrow \infty}$ $= \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^3}\left(\frac{6x^3}{x^3}+\frac{2x^2}{x^3}-\frac{1}{x^3}\right)}{\cancel{x^3}\left(\frac{5x^3}{x^3}+\frac{2x}{x^3}\right)}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{6+\frac{2}{x}^{\nearrow 0}-\frac{1}{x^3}^{\nearrow 0} \to 6}{5+\frac{2}{x^2}_{\searrow 0} \to 5} = \frac{6}{5} \checkmark$$

g) $\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{-10x^4+5x^3-1}{5x^4+2x^2}}$ $\frac{\nearrow \infty}{\searrow \infty}$ $= \lim_{x\to\infty} \frac{\cancel{x^4}\left(\frac{-10x^4}{x^4}+\frac{5x^3}{x^4}-\frac{1}{x^4}\right)}{\cancel{x^4}\left(\frac{5x^4}{x^4}+\frac{2x^2}{x^4}\right)}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{-10+\frac{5}{x}^{\nearrow 0}-\frac{1}{x^4}^{\nearrow 0} \to -10}{5+\frac{2}{x^2}_{\searrow 0} \to 5}$$

$$= \frac{-10}{5} = -2 \checkmark$$

h) $\boxed{\lim_{x\to\infty} \dfrac{2x^3+3x^2-4}{3x^5+4x-8}}$ $\begin{matrix}\nearrow\infty \\ \searrow\infty\end{matrix}$ $= \lim_{x\to\infty} \dfrac{x^3\left(\dfrac{2x^3}{x^3}+\dfrac{3x^2}{x^3}-\dfrac{4}{x^3}\right)}{x^5\left(\dfrac{3x^5}{x^5}+\dfrac{4x}{x^5}-\dfrac{8}{x^5}\right)}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{2+\overset{\nearrow 0}{\frac{3}{x}}-\overset{\nearrow 0}{\frac{4}{x^3}}}{x^2\left(3+\underset{\downarrow 0}{\frac{4}{x^4}}-\underset{\downarrow 0}{\frac{8}{x^5}}\right)} \begin{matrix}\nearrow 2 \\ \searrow\infty\end{matrix} = 0 \checkmark$$

i) $\boxed{\lim_{x\to\infty} \dfrac{x^4+3x^3-4}{x^8+5}}$ $\begin{matrix}\nearrow\infty \\ \searrow\infty\end{matrix}$ $= \lim_{x\to\infty} \dfrac{x^4\left(\dfrac{x^4}{x^4}+\dfrac{3x^3}{x^4}-\dfrac{4}{x^4}\right)}{x^8\left(\dfrac{x^8}{x^8}+\dfrac{5}{x^8}\right)}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{1+\overset{\nearrow 0}{\frac{3}{x}}-\overset{\nearrow 0}{\frac{4}{x^4}}}{x^4\left(1+\underset{\downarrow 0}{\frac{5}{x^8}}\right)} \begin{matrix}\nearrow 1 \\ \searrow\infty\end{matrix} = 0 \checkmark$$

r) $\boxed{\lim_{x\to\infty} \dfrac{8x^7+x^4-4x}{5x^7+3x^5-3}}$ $\begin{matrix}\nearrow\infty \\ \searrow\infty\end{matrix}$ $= \lim_{x\to\infty} \dfrac{x^7\left(\dfrac{8x^7}{x^7}+\dfrac{x^4}{x^7}-\dfrac{4x}{x^7}\right)}{x^7\left(\dfrac{5x^7}{x^7}+\dfrac{3x^5}{x^7}-\dfrac{3}{x^7}\right)}$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{8+\overset{\nearrow 0}{\frac{1}{x^3}}-\overset{\nearrow 0}{\frac{4}{x^6}}}{5+\underset{\downarrow 0}{\frac{3}{x^4}}-\underset{\downarrow 0}{\frac{3}{x^7}}} \begin{matrix}\nearrow 8 \\ \searrow 5\end{matrix} = \frac{8}{5} \checkmark$$

s) $\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x}{x+1}+\frac{5x}{x-1}\right)}$ $= \lim_{x\to\infty} \frac{3x}{x+1}\begin{smallmatrix}\nearrow\infty\\ \searrow\infty\end{smallmatrix} + \lim_{x\to\infty}\frac{5x}{x-1}\begin{smallmatrix}\nearrow\infty\\ \searrow\infty\end{smallmatrix}$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{3\cancel{x}}{\cancel{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)} + \lim_{x\to\infty}\frac{5\cancel{x}}{\cancel{x}\left(1-\frac{1}{x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{3}{1+\frac{1}{x}}\begin{smallmatrix}\nearrow 3\\ \searrow 1\end{smallmatrix} + \lim_{x\to\infty}\frac{5}{1-\frac{1}{x}}\begin{smallmatrix}\nearrow 5\\ \searrow 1\end{smallmatrix}$$

$$= 3 + 5 = 8 \checkmark$$

t) $\boxed{\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{x+2}-\frac{x^2+3}{x-1}\right)}$ $= \lim_{x\to\infty}\frac{x^2(x-1)-(x^2+3)(x+2)}{(x+2)(x-1)}$

"$\infty - \infty$"

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{(x^3-x^2)-(x^3+2x^2+3x+6)}{x^2-x+2x-2}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{x^3-x^2-x^3-2x^2-3x-6}{x^2+x-2}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{-3x^2-3x-6}{x^2+x-2}$$

$\vdots$

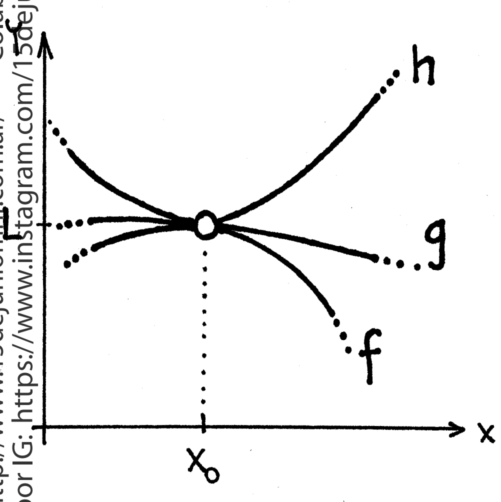
$$= -3 \checkmark$$

Ej: Aplicar el teorema del sandwich para calcular $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos x}{x^2}$

sabiendo que para todo x cercano a cero

se cumple que: $\dfrac{1}{2} - \dfrac{x^2}{24} < \dfrac{1-\cos x}{x^2} < \dfrac{1}{2}$

Teorema del sandwich: si $\exists$ funciones f, g y h son tales que



$f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo x en las cercanías de x_0 y además:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} h(x) = L$$

entonces $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = L$

$$\underbrace{\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24}}_{f(x)} < \underbrace{\frac{1-\cos x}{x^2}}_{g(x)} < \underbrace{\frac{1}{2}}_{h(x)}$$

$$\left.\begin{aligned} \lim_{x \to 0} f(x) &= \lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{2} - \frac{x^2}{24}\right) = 1/2 \\ \lim_{x \to 0} h(x) &= \lim_{x \to 0} (1/2) = 1/2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \boxed{1/2}$$

2 Demostrar que $\lim_{x\to 0} \sqrt{x}\,.\, sen\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

$$\lim_{x\to 0} \underbrace{\sqrt{x}}_{\downarrow\, 0}\,.\,\underbrace{sen\left(\tfrac{1}{x}\right)}_{\downarrow\, \nexists}$$

sabemos que $\forall x \neq 0$ se cumple que : $-1 \leq sen\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$

$$-1.\sqrt{x} \leq \sqrt{x}\,.\,sen\left(\tfrac{1}{x}\right) \leq 1.\sqrt{x}$$

- $\lim_{x\to 0} -1.\sqrt{x} = 0$
- $\lim_{x\to 0} 1.\sqrt{x} = 0$

$\Rightarrow$ por el Teorema del Sandwich vale, necesariamente :

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x}\,.\,sen\left(\tfrac{1}{x}\right) = 0 \checkmark$$

Ejercicio 4.- Demuestre que $\lim_{x\to\infty} \sin x . \sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

sabemos que $\forall x \in \mathbb{R}$ vale : $-1 \leq \operatorname{sen} x \leq 1$

$\therefore \forall x > 0$ vale : $\underbrace{-1 . \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}_{f(x)} \leq \underbrace{\operatorname{sen} x . \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}_{g(x)} \leq \underbrace{1 . \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right)}_{h(x)}$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} -1 . \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$$\lim_{x\to\infty} h(x) = \lim_{x\to\infty} 1 . \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

$\therefore$ por el teorema del sandwich vale , necesariamente,

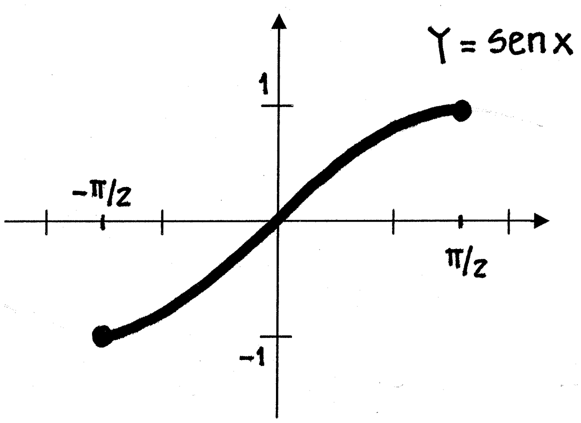
$$\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$$

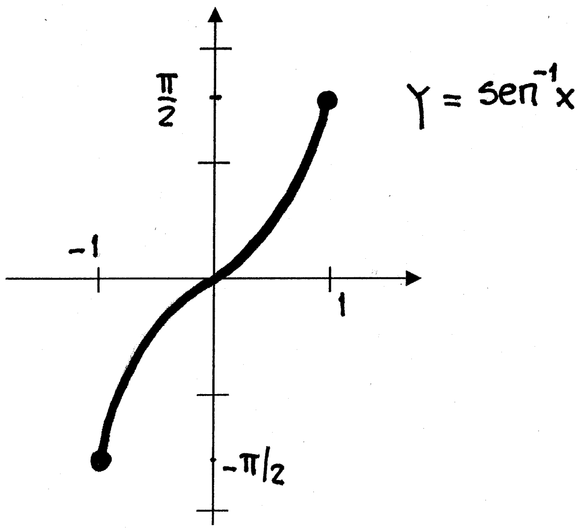
o sea

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \operatorname{sen} x . \operatorname{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0}$$ ✓

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS INVERSAS

función ARCO SENO

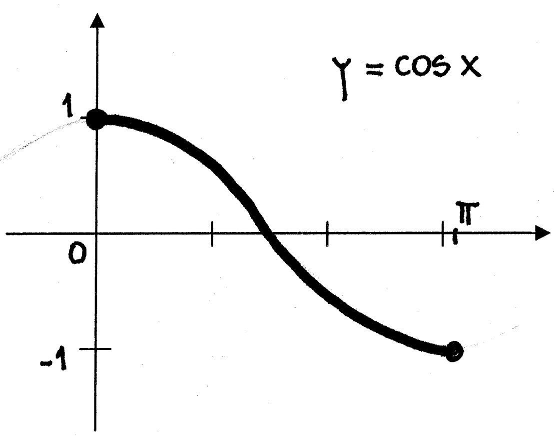


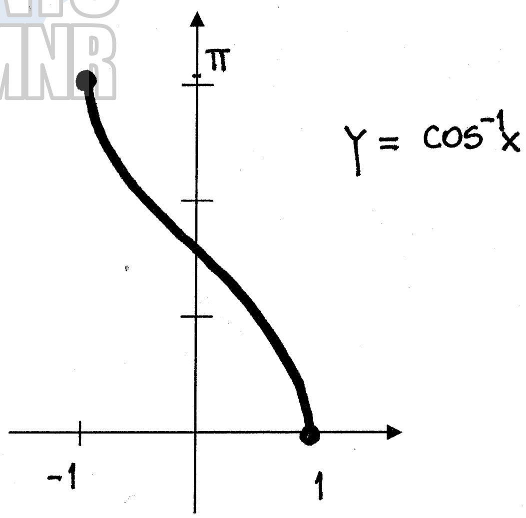


$\text{dom} = [-1, 1]$

$\text{im} = [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

función ARCO COSENO

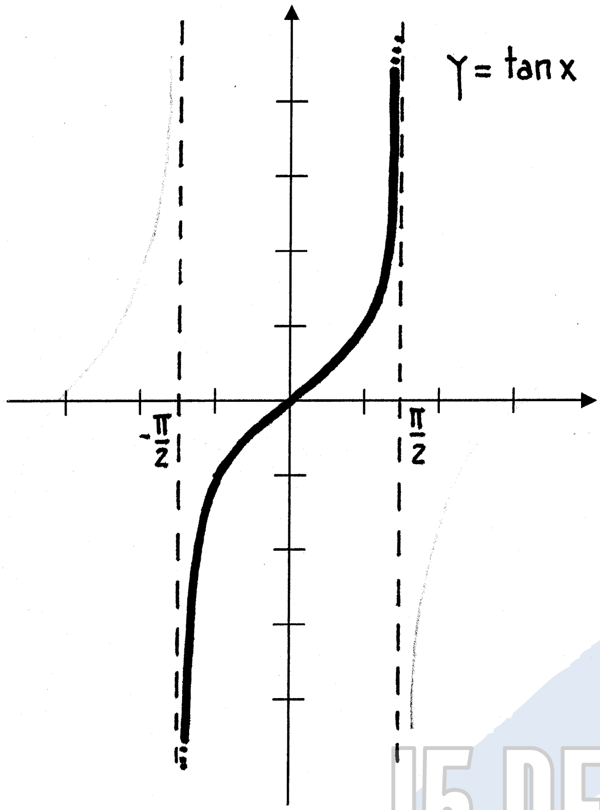


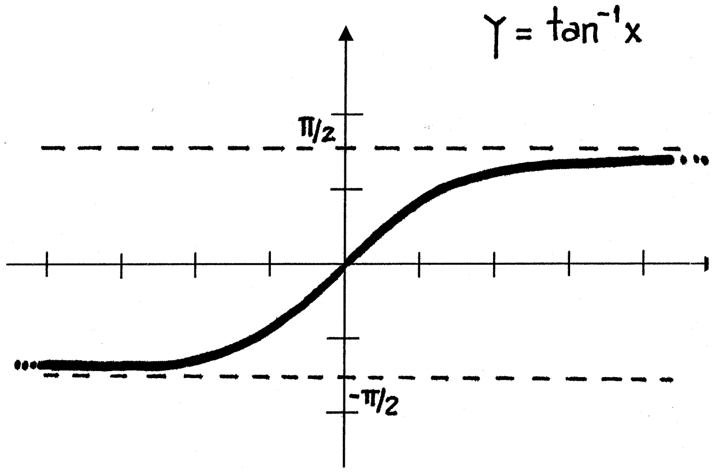


$\text{dom} = [-1, 1]$

$\text{im} = [0, \pi]$

función ARCO TANGENTE





dom = $\mathbb{R}$

im = $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

IDENTIDADES

$\operatorname{sen}(\operatorname{sen}^{-1}(x)) = x \quad \forall x \in [-1, 1]$

$\operatorname{sen}^{-1}(\operatorname{sen}(x)) = x \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\cos(\cos^{-1}(x)) = x \quad \forall x \in [-1, 1]$

$\cos^{-1}(\cos(x)) = x \quad \forall x \in [0, \pi]$

$\tan(\tan^{-1}(x)) = x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$\tan^{-1}(\tan(x)) = x \quad \forall x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$