CAMPOS ESCALARES- ACTIVIDADES RESUELTAS- PARTE 3

ACTIVIDAD 8:

a) *Para las leyes que se definen a continuación, hallar las derivadas parciales* $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ *y* $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ *usando la definición.*

i) $f(x, y) = 2y - x$ **ii)** $f(x, y) = yx^2$

Las derivadas parciales son casos particulares de las derivadas direccionales correspondientes a los desplazamientos en la dirección de los ejes coordenados.

Derivada parcial de f con respecto a x

Sean $z = f(x, y)$; $(x_0; y_0) \in D_f$. Si $(x, y) \to (x_0; y_0)$ según la dirección del eje x; o sea si sólo varía x mientras y permanece constante e igual a y_0, entonces a la derivada direccional correspondiente la llamamos **derivada parcial de f con respecto a x** .

La derivada parcial de f con respecto a x en $(x_0; y_0)$ se define como:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0)}{\Delta x}$$

Derivada parcial de f con respecto a y

Sean $z = f(x, y)$; $(x_0; y_0) \in D_f$. Si $(x, y) \to (x_0; y_0)$ según la dirección del eje y; o sea si sólo varía y mientras x permanece constante e igual a x_0, entonces a la derivada direccional correspondiente la llamamos **derivada parcial de f con respecto a y**.

La derivada parcial de f con respecto a y en $(x_0; y_0)$ se define como:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0; y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)}{\Delta y}$$

i) $f(x, y) = 2y - x$

Aplicando la definición de **derivada parcial de f con respecto a x en $(x_0; y_0)$** :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2y_0 - (x_0 + \Delta x) - (2y_0 - x_0)}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2y_0 - x_0 - \Delta x - 2y_0 + x_0}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x} = -1$$

Aplicando la definición de **derivada parcial de f con respecto a y en $(x_0; y_0)$**:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0;\ y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{2(\ y_0 + \Delta y) - x_0 - (2y_0 - x_0)}{\Delta y} =$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{2\ y_0 + 2\Delta y - x_0 - 2y_0 + x_0}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{2\Delta y}{\Delta y} = 2$$

ii) $f(x, y) = yx^2$

Aplicando la definición de **derivada parcial de f con respecto a x en $(x_0; y_0)$**:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x; y_0) - f(x_0; y_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_0 . (x_0 + \Delta x)^2 - y_0 . {x_0}^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_0 . ({x_0}^2 + 2x_0\Delta x + \Delta x^2) - y_0 . {x_0}^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_0 . {x_0}^2 + y_0 . 2x_0\Delta x + y_0 . \Delta x^2 - y_0 . {x_0}^2}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{y_0 . 2x_0\Delta x + y_0 . \Delta x^2}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} y_0 . 2x_0 + y_0 . \Delta x = 2y_0 . x_0$$

Aplicando la definición de **derivada parcial de f con respecto a y en** $(x_0; y_0)$:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0;\ y_0 + \Delta y) - f(x_0; y_0)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{(\ y_0 + \Delta y) . {x_0}^2 - y_0 . {x_0}^2}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{y_0 . {x_0}^2 + \Delta y . {x_0}^2 - y_0 . {x_0}^2}{\Delta y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta y . {x_0}^2}{\Delta y} = {x_0}^2$$

b) *Aplicar las reglas de derivación para hallar las derivadas parciales de primer orden de los campos escalares del ejercicio 5.*

Para calcular las derivadas parciales de un campo escalar aplicamos la siguiente regla:

REGLA PARA CALCULAR DERIVADAS PARCIALES: si $z = f(x, y)$

1. Para calcular f_x, considerar ´y´ como una constante y derivar $f(x,y)$ con respecto a x.
2. Para calcular f_y, considerar ´x´ como una constante y derivar $f(x,y)$ con respecto a y.

i) $\boldsymbol{f(t,x) = x \cdot t}$

$\frac{\partial f}{\partial t}(t,x)$ Para obtener la presente derivada parcial consideramos $\boldsymbol{x}$ como una constante y derivamos $f(t,x) = x.\boldsymbol{t}$ con respecto a $\boldsymbol{t}$. Queda: $\frac{\partial f}{\partial t}(t,x) = x$

$\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)$ Para obtener esta derivada parcial consideramos $\boldsymbol{t}$ como una constante y derivamos $f(t,x) = \boldsymbol{x}.t$ con respecto a $\boldsymbol{x}$: $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x) = t$

ii) $\boldsymbol{g(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}}$

$\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)$ Para obtener esta derivada parcial consideramos $\boldsymbol{y}$ como una constante y derivamos $\boldsymbol{g(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}}$ con respecto a $\boldsymbol{x}$. Para esto aplicamos la regla de la cadena dado que tenemos una composición: $\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2.\sqrt{25-x^2-y^2}}.(-2x) = \frac{-x}{\sqrt{25-x^2-y^2}}$

$\frac{\partial g}{\partial y}(x,y)$ Procediendo de manera análoga, pero considerando $\boldsymbol{x}$ como una constante y derivando

$\boldsymbol{g(x,y) = \sqrt{25 - x^2 - y^2}}$ con respecto a $\boldsymbol{y}$: $\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{2.\sqrt{25-x^2-y^2}}.(-2y) = \frac{-y}{\sqrt{25-x^2-y^2}}.$

iii) $z = h(x,y) = e^{x \cdot y}$

$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y)$ En este caso consideramos $\boldsymbol{y}$ como una constante y derivamos $\boldsymbol{h(x,y) = e^{x \cdot y}}$ con respecto a $\boldsymbol{x}$.

Para esto aplicamos la regla de la cadena dado que también estamos en presencia de una composición.

$\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) = e^{x.y}.y$

$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y)$ Considerando $\boldsymbol{x}$ como una constante y derivando $\boldsymbol{h(x,y) = e^{x \cdot y}}$ con respecto a $\boldsymbol{y}$:

$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = e^{x.y}.x$

iv) $g(u,v) = \frac{1}{u^2+9v^2-9} = (u^2 + 9v^2 - 9)^{-1}$

Finalmente, para este campo escalar obtenemos:

$\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) = \frac{-1}{(u^2+9v^2-9)^2}.2u$ $\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \frac{-1}{(u^2+9v^2-9)^2}.18v$

ACTIVIDAD 10:

Hallar las leyes y dominios de las derivadas parciales de segundo orden de los campos siguientes. Indicar si los dominios hallados coinciden con los de los campos escalares correspondientes:

a) $f(x,y) = x^2 \cdot y + x \cdot \sqrt{y}$

b) $f(u,v) = u^2 . v \; + \; cos(u) + u\,.sen(v)$

c) $f(t,x) = e^{t \cdot x}$

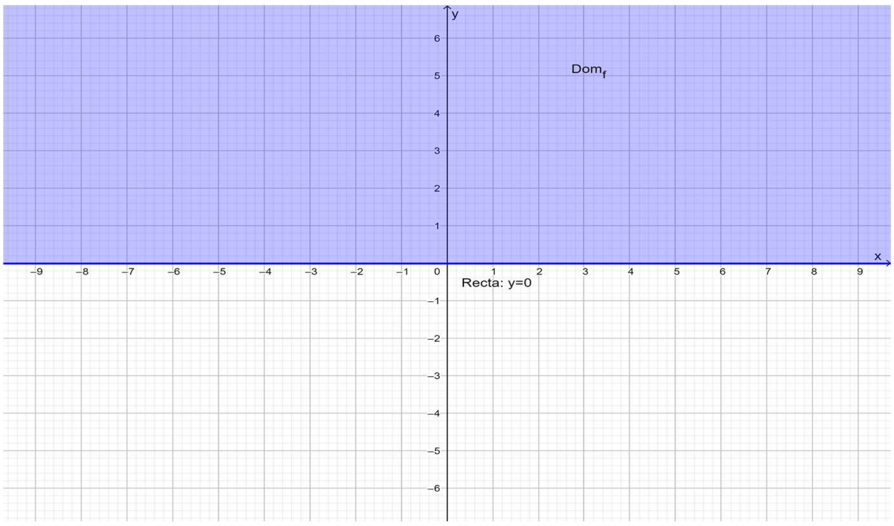
d) $f(r,s) = \ln(r+s)$

Para una función f de dos variables, sus derivadas parciales, f_x y f_y, son también funciones de dos variables para las cuales podemos hallar sus derivadas parciales, a las que se denominan *derivadas parciales de segundo orden de f*, que a su vez son funciones de dos variables. Al ser función, además de su ley, debemos definir su dominio, es decir, los puntos del plano para los cuales tiene sentido la ley.

a) $f(x,y) = x^2 \cdot y + x \cdot \sqrt{y}$

Primero veamos cuál es el dominio de la función f. La única restricción algebraica que tiene la expresión anterior es que y debe ser mayor o igual que cero para que esté bien definida la raíz cuadrada. Así,

$Dom_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq 0\}$. Gráficamente:



Entonces teniendo en cuenta la regla anterior, para hallar f_x, derivamos f como función de x considerando la variable y como una constante, para derivar utilizamos las reglas de derivación vistas en Matemática I. Luego, $f_x(x,y) = 2xy + \sqrt{y}$.

Para calcular f_y, derivamos f como función de y considerando la variable x como una constante, así, utilizando las reglas de derivación se obtiene: $f_y(x,y) = x^2 + \frac{x}{2\sqrt{y}}$.

Ahora bien, para estas funciones se pueden obtener las derivadas parciales respecto de x y respecto de y, que corresponden a las derivadas parciales de segundo orden de la función f.
Usando las reglas de derivación se obtiene:

$f_{xx}(x,y) = 2y$ $\qquad$ $f_{xy}(x,y) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{y}}$

$f_{yx}(x,y) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{y}}$ $\qquad$ $f_{yy}(x,y) = -\frac{x}{4\sqrt{y^3}}$

Veamos cuál es el dominio de estas funciones: en primer lugar, hay que tener en cuenta que son funciones definidas a partir de la función f, con lo cual los puntos de sus dominios deben ser parte del Dom_f.

Con esto en mente, concluimos que la función f_{xx} está definida para todo punto del dominio de f, ya que no hay en su ley ninguna NUEVA restricción para las variables x e y. Entonces,

$$\boxed{Dom_{f_{xx}} = Dom_f.}$$

En cada una de las otras tres funciones, uno de los términos es un cociente donde en el denominador aparece la variable y, entonces aquí sí tenemos una nueva restricción para los puntos del dominio y es que y NO puede tomar el valor cero, luego

$$\boxed{Dom_{f_{xy}} = Dom_{f_{yx}} = Dom_{f_{yy}} = \{(x,y) \in Dom_f : y \neq 0\} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y > 0\}.}$$

En este caso, los dominios de las derivadas parciales de segundo orden f_{xy}, f_{yx} y f_{yy} no coincide con Dom_f.

b) $f(u,v) = u^2.v + \cos u + u.\,sen v$

Para el campo escalar f su dominio está dado por todos los puntos del plano, ya que su ley no presenta restricciones algebraicas. $Dom_f = \mathbb{R}^2$.

Las derivadas parciales de f con respecto de sus dos variables son

$$f_u(u,v) = 2u.v - \mathrm{sen}u + \mathrm{sen}v$$

$$f_v(u,v) = u^2 + u \cdot \cos v.$$

Hallemos ahora las derivadas parciales de segundo orden de la función f derivando las funciones anteriores. Como dijimos antes, para hacerlo se utilizan las reglas de derivación que ya conocemos para funciones de una variable. Para este campo escalar sus segundas derivadas parciales son:

$$f_{uu}(u,v) = 2v - \cos u \qquad f_{uv}(u,v) = 2u + \cos v$$

$$f_{vu}(u,v) = 2u + \cos v \qquad f_{vv}(u,v) = -u\,.\,\mathrm{sen} v$$

En este caso, para las cuatro derivadas parciales de segundo orden se tiene que el dominio coincide con $Dom_f = \mathbb{R}^2$, ya que ninguna ley tiene restricciones algebraicas para las variables involucradas.

$$\boxed{Dom_{f_{uu}} = Dom_{f_{uv}} = Dom_{f_{vu}} = Dom_{f_{vv}} = Dom_f = \mathbb{R}^2.}$$

c) $f(t,x) = e^{t\cdot x}$

En este caso el dominio de f está dado por todos los puntos del plano, ya que su ley no tiene restricciones algebraicas. $Dom_f = \mathbb{R}^2$.

Las derivadas parciales de f con respecto de sus variables t y x están dadas por:

$$f_t(t,x) = x \cdot e^{t\cdot x}$$

$$f_x(t,x) = t \cdot e^{t\cdot x}$$

Derivamos cada una de ellas respecto de t (entonces consideramos x constante) y respecto de x (consideramos t constante) para obtener las derivadas parciales de segundo orden del campo escalar f.

$$f_{tt}(t,x) = x^2 \cdot e^{t\cdot x}$$

$$f_{xt}(t,x) = e^{t\cdot x} + xt \cdot e^{t\cdot x}$$

$$f_{xt}(t,x) = e^{t\cdot x} + xt \cdot e^{t\cdot x}$$

$$f_{xx}(t,x) = t^2 \cdot e^{t\cdot x}$$

Una vez más estas funciones están definidas para todo punto del dominio de f. Así,

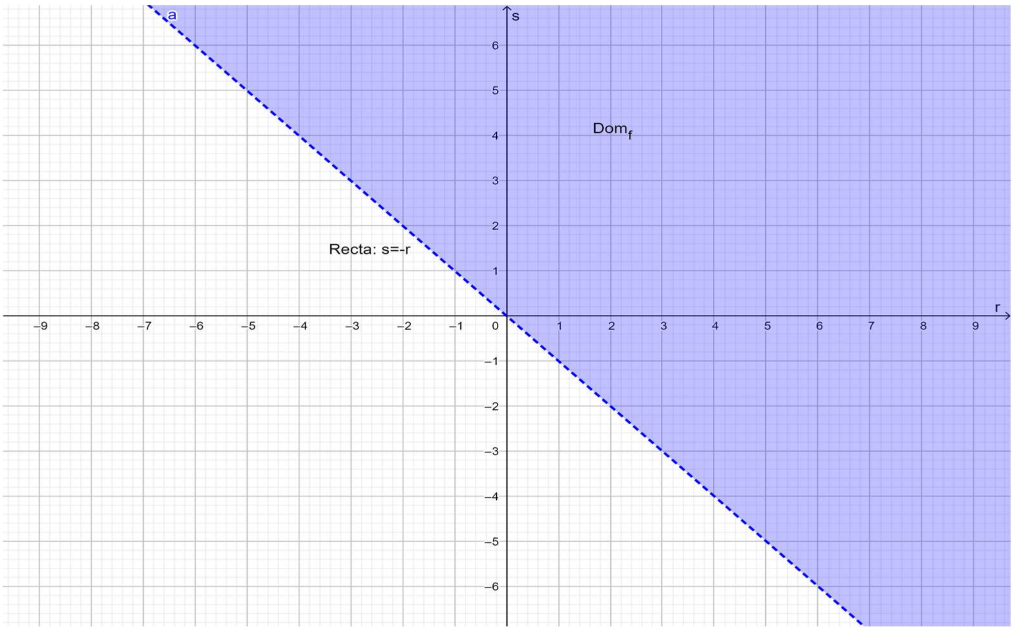
$$\boxed{Dom_{f_{tt}} = Dom_{f_{xt}} = Dom_{f_{tx}} = Dom_{f_{xx}} = Dom_f = \mathbb{R}^2.}$$

d) $f(r,s) = \ln(r+s)$

Para el campo f tenemos una restricción para su ley, al tratarse del logaritmo natural sabemos que el mismo puede calcularse siempre que el argumento sea mayor a cero. Luego, el dominio de f está dado

$$Dom_f = \{(r,s) \in \mathbb{R}^2 : r+s > 0\} = \{(r,s) \in \mathbb{R}^2 : s > -r\}.$$

En la siguiente figura se puede ver la representación gráfica de este dominio, que corresponde a uno de los semiplanos determinados por la recta $s = -r$.



Las derivadas parciales de f con respecto a sus variables r y s están dadas por:

$$f_r(r,s) = \frac{1}{r+s} \qquad f_s(r,s) = \frac{1}{r+s}$$

Derivamos estas funciones respecto de las variables r y s para obtener las derivadas parciales de segundo orden del campo escalar f.

$$f_{rr}(r,s) = -\frac{1}{(r+s)^2} \qquad f_{sr}(r,s) = -\frac{1}{(r+s)^2}$$

$$f_{rs}(r,s) = -\frac{1}{(r+s)^2} \qquad f_{ss}(r,s) = -\frac{1}{(r+s)^2}$$

Una vez más están funciones están definidas para todo punto del dominio de f, ya que la única restricción que tenemos para todas ellas es que $r + s \neq 0$ y esta condición la satisfacen todos los puntos en Dom_f. Así,

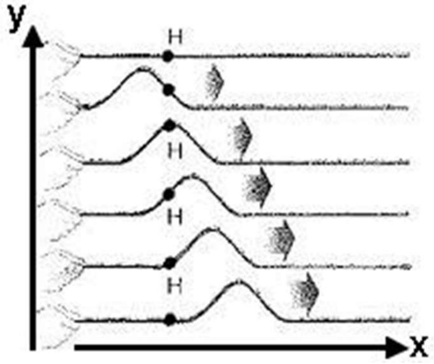
$$\boxed{Dom_{f_{rr}} = Dom_{f_{sr}} = Dom_{f_{rs}} = Dom_{f_{ss}} = Dom_f.}$$

Una observación importante que debemos hacer es que las derivadas parciales de segundo orden mixtas (es decir, las que involucran variables distintas, por ejemplo f_{xy} y f_{yx}) son IGUALES para todos los campos analizados. Esto, si bien no es cierto para todos los campos escalares, sí lo satisfacen la mayor parte de las funciones que pueden encontrarse en la práctica (Ver Teorema de Clairaut en pág. 182 del libro.)

ACTIVIDAD 11:

Se tiene una cuerda de modo que ambos extremos de la misma estén fijos; en estado de reposo (equilibrio) se encuentra extendida. Si se coloca un sistema de referencia de modo que el eje horizontal x coincida con la posición de equilibrio de la cuerda y se la hace vibrar, el desplazamiento vertical $y = f(x,t)$ de un punto cualquiera sobre la cuerda en la posición x al instante t satisface la ecuación unidimensional de onda (en el gráfico dado, cada esquema de la cuerda es para un tiempo diferente):

$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ *donde la constante α depende de la densidad y tensión de la cuerda.*



En primer lugar, observemos que en este caso las variables involucradas representan dos magnitudes distintas, por un lado la variable x es la posición horizontal de un punto cualquiera de la cuerda, y por el otro, la variable t representa el tiempo en que el punto se encuentra en dicha posición.

En cada ítem de esta actividad se presenta una función $y = f(x,t)$ que representa el desplazamiento vertical del punto de la cuerda para un instante t. Para mostrar que estas funciones satisfacen la ecuación de onda unidimensional, debemos hallar las derivadas parciales de segundo orden $\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ y verificar que se cumple la igualdad planteada en dicha ecuación.

a) $y(x,t) = \ln(2x + 2\alpha t)$

Notar que α es una constante dada por el problema, es decir, que α es un número real.

Primero hallamos la derivada parcial de primer orden de y respecto de x, es decir, derivamos respecto de x considerando t constante).

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x,t) =^{(1)} \frac{2}{2x + 2\alpha t} = \frac{2}{2(x + \alpha t)} = \frac{1}{x + \alpha t} = (x + \alpha t)^{-1}$$

(1) Utilizamos la regla de la cadena, pues y como función de x con t constante es una composición de funciones.

Ahora derivamos esta función respecto de x para obtener la segunda derivada parcial de y respecto de x:

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = \frac{-1}{(x + \alpha t)^2}.}$$

Por otro lado, la derivada parcial de primer orden de y respecto de t es:

$$\frac{\partial y}{\partial t}(x,t) =^{(2)} \frac{2\alpha}{2x + 2\alpha t} = \frac{2\alpha}{2(x+\alpha t)} = \frac{\alpha}{x+\alpha t} = \alpha \cdot (x+\alpha t)^{-1}$$

(2) Utilizamos la regla de la cadena, pues y como función de t con x constante es una composición de funciones.

Ahora derivamos esta función y_t respecto de t para obtener la segunda derivada parcial de y respecto de t:

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) =^{(3)} (-1)\cdot \alpha \cdot (x+\alpha t)^{-2} \cdot \alpha = \frac{-\alpha^2}{(x+\alpha t)^2}.}$$

(3) Utilizamos una vez más la regla de la cadena.

Luego, como

$$\frac{-\alpha^2}{(x+\alpha t)^2} = \alpha^2 \cdot \left[\frac{-1}{(x+\alpha t)^2}\right] = \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

resulta que la función y dada satisface la ecuación de onda unidimensional.

b) $y(x,t) = sen(x+\alpha t)$

Para mostrar que este campo escalar satisface la ecuación de onda procedemos de manera análoga a lo hecho en el ítem anterior.
Hallamos la derivada parcial de primer orden de y respecto de x (consideramos t constante):

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x,t) = \cos(x+\alpha t).$$

Ahora, derivamos una vez más respecto de x y obtenemos:

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) = -sen(x+\alpha t).}$$

Por otro lado, la derivada parcial de primer orden de y respecto de t resulta:

$\frac{\partial y}{\partial t}(x,t) = \alpha\cos(x+\alpha t)$, entonces

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = -\alpha^2 sen(x+\alpha t).}$$

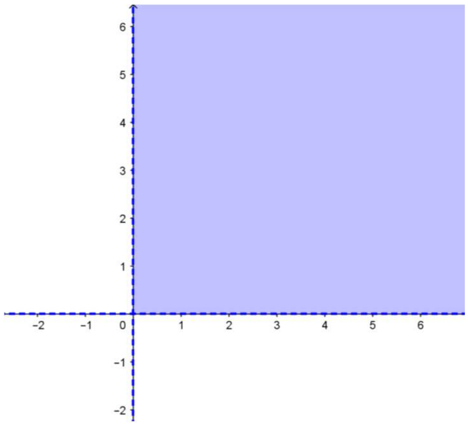
Como $-\alpha^2 \mathrm{sen}(x+\alpha t) = \alpha^2\big(-\mathrm{sen}(x+\alpha t)\big) = \alpha^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t)$, resulta que y satisface la ecuación de onda.

ACTIVIDAD 13:

La ley de los gases de los gases ideales para un mol de gas es: **PV = RT**, siendo **P** la presión medida en kilopascales, **V** el volumen en litros, **T** la temperatura absoluta en Kelvin y **R = 8,31** $\frac{\boldsymbol{kilopascal.litro}}{\boldsymbol{Kelvin}}$ la constante universal de los gases. Considerando **T = T(V,P)**, las curvas de nivel de T se llaman isotermas.

a) *Determinar y graficar el dominio de **T** y dibujar un mapa de isotermas.*

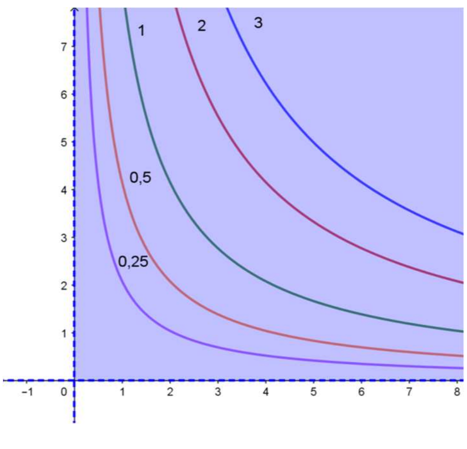
Considerando **T = T(V,P)** tenemos **T(V,P)** = $\frac{\boldsymbol{PV}}{\boldsymbol{R}}$. Luego para determinar el dominio consideramos las restricciones algebraicas y aquellas propias del contexto donde se aplica la relación funcional. Para este ejemplo no tenemos restricciones algebraicas pero si del tipo físicas. Presión y volumen son variables que deben tomar valores positivos para esta situación, entonces tenemos el siguiente dominio: $Dom_T = \{(V, P) \in \Re^2 / V > 0 \ \wedge P > 0\}$ cuya gráfico es:

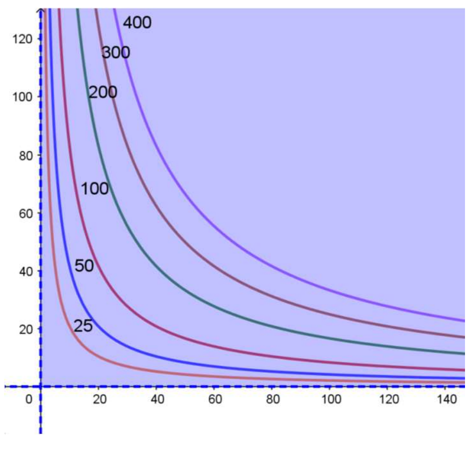


Para graficar un mapa de isotermas utilizamos **T(V,P) = k** para distintos valores de **k** ($\boldsymbol{k} \in Im_T$). Considerando la multiplicación de dos números positivos (**V** y **P**) y su división por un número positivo (**R**) obtenemos un número positivo, luego $Im_T = \Re^+$ (**T** >0, en grados Kelvin):

$$T = k$$
$$\frac{PV}{R} = k$$
$$P = \frac{kR}{V}$$

En gráficas P versus V tenemos curvas propias de funciones homográficas localizadas en el primer cuadrante.



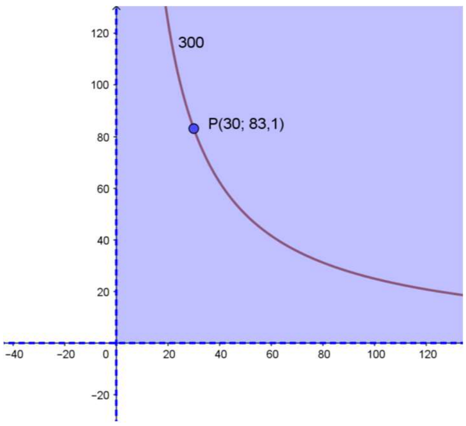


b) ¿A qué isoterma corresponde un punto en el que el gas se halla a una presión de 83,1 kPa con un volumen de 30 litros?

Para **P** = 83,1 kPa y **V** = 30 L tenemos:

$$\frac{PV}{R} = k$$
$$\frac{83{,}1.30}{8{,}31} = k$$
$$k = 300$$

Luego el punto en el que el gas se halla a una presión de 83,1 kPa con un volumen de 30 L pertenece a la isoterma C_{300}.



c) *¿Cuál es la razón de cambio de la temperatura respecto del volumen cuando el gas se halla en las condicio*nes dadas en el ítem **b**? ¿La temperatura aumenta o disminuye al aumentar el volumen? Justificar

Para calcular la razón de cambio de la temperatura respecto del volumen cuando el gas se halla en las condiciones dadas en el ítem **b** obtenemos la derivada parcial de **T** con respecto a **V** (**T**$_V$) y la evaluamos para **V** = 30 L y **P** = 83,1 kPa.

$$T_V(V,P) = \frac{P}{R}$$
$$T_V(30;83{,}1) = \frac{83{,}1}{8{,}31}$$
$$T_V(30;83{,}1) = 10\ \mathrm{K/L}$$

$T_V(30;83{,}1) > 0 \Longrightarrow$ la temperatura aumenta al aumentar el volumen y mantener la presión constante en las condiciones **V** = 30 L y **P** = 83,1 kPa.

d) *Averiguar qué son las isobaras y las isocoras y dibujar un mapa de isobaras y otro de isocoras*

Las isobaras son curvas de igual o constante presión y las isocoras son curvas de igual o constante volumen. Para dibujar un mapa de isobaras y otro de isocoras consideramos a partir de la ley de los gases ideales para un mol de gas los siguientes campos escalares:

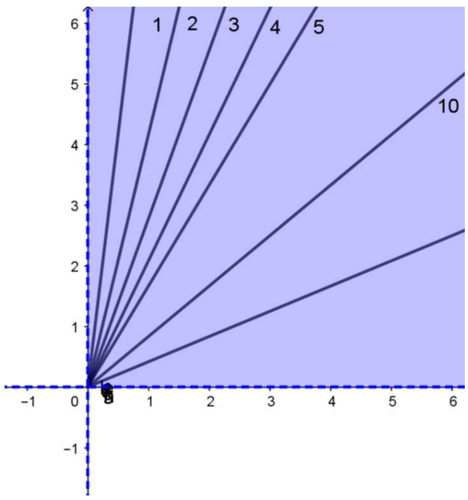
$$P(T,V) = \frac{RT}{V}$$
$$V(T,P) = \frac{RT}{P}$$

Debido a las consideraciones indicadas en el ítem **a**, tenemos **V** >0, **T** >0, **P**>0.

Para las isobaras:

$$P = k$$
$$\frac{RT}{V} = k$$
$$V = \frac{RT}{k}$$

En gráficas **V** versus **T** tenemos curvas propias de funciones lineales ($m = \frac{R}{k}, h = 0$) localizadas en el primer cuadrante.



Para las isocoras:

$$V = k$$
$$\frac{RT}{P} = k$$
$$P = \frac{RT}{k}$$

En gráficas **P** versus **T** tenemos curvas propias de funciones lineales ($m = \frac{R}{k}, h = 0$) localizadas en el primer cuadrante.