Máximo común divisor

Máximo común divisor

Ecuaciones diofánticas: son un tipo de ecuación de dos incógnitas con coeficientes enteros, a las cuales se les buscan soluciones también enteras; por ejemplo, la ecuación $x + y = 2$ es una ecuación de este tipo, con infinitas soluciones.

Definición:

Si a y b son enteros, decimos que el entero d es un máximo común divisor, o MCD, de a y b si:

1. $d \mid a$ y $d \mid b$;
2. si $c \mid a$ y $c \mid b$, entonces $c \mid d$;
3. $d \geq 0$.

Y escribimos **d = MCD(a, b).**

Cálculo del MCD

En la educación inicial, en nuestra escuela primaria, se nos enseña a calcular el MCD por descomposición de factores primos.

Figura 1 : Método para hallar el MCD para números pequeños

MÁXIMO COMÚN DIVISOR

- El máximo común divisor (m.c.d.) de dos o más números es el mayor de los divisores comunes.
- Para hallar el máximo común divisor de dos o más números, por ejemplo, m.c.d. (12, 18), se siguen estos pasos:

  1.° Se descompone cada número en producto de factores primos.

  2.° El producto de estos factores comunes elevados al menor exponente es el máximo común divisor de los números dados.

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$12 = 2^2 \times 3$

$18 = 2 \times 3^2$

m.c.d. $(12, 18) = 2 \times 3 = 6$

Fuente: [Imagen sin título sobre máximo común divisor]. (s. f.). Recuperada de https://goo.gl/61I8kz

Este procedimiento es útil siempre y cuando los enteros a y b sean números pequeños. En este curso, el método que vamos a utilizar para hallar el MCD es el que utiliza el algoritmo de Euclides.

Ejemplo: Cómo encontrar el MCD de 2406 y 654 utilizando el algoritmo de Euclides.

Se empieza haciendo la división de los dos números para encontrar el resto y luego se aplica sucesivamente la propiedad que dice :

MCD(a,b) = MCD (b,r) , donde r es el resto de la división de a y b.

MCD(2406, 654) = MCD(654, 444), porque 2406 = 654 . 3 + 444;

= MCD(444, 210), porque 654 = 444 . 1 + 210;

= MCD(210, 24), porque 444 = 210 . 2 + 24;

= MCD(24, 18), porque 210 = 24 . 8 + 18;

= MCD(18, 6), porque 24 = 18 . 1 + 6;

= 6, porque 18 = 6 . 3;

MCD(2406, 654)= 6.

Este proceso debe detenerse, porque cada resto es estrictamente menor que el anterior.En el paso que el resto se hace cero se obtiene el MCD , como el resto del paso anterior.

Esta forma de encontra el MCD es conocido como el algoritmo de Euclides en honor al matemático griego Euclides (300 a. C.).

A continuación se va a enunciar un teorema muy importante y de aplicación a distintos ejercicios de la materia.Este teorema nos dice que el MCD entre dos números a y b se puede expresar como combinación lineal de dichos números

Teorema

Sean a y b enteros con $b \geq 0$, y sea d =MCD(a, b), entonces podemos representar $d = x.a + y.b$, siendo x e y dos números enteros.{\displaystyle \operatorname {mcd} (48;60)=2^{2}\cdot 3=12}

Veamos ahora cómo a partir de los cálculos usados para encontrar el MCD de 2406 y 654, podemos expresar al 6 como combinación lineal de ellos dos:

6 = 24 – 18.1 = 1.24 + (−1).18;

$= 24 + (-1).(210 - 24.8) = (-1).210 + 9.24;$

$= -210 + 9.(444 - 210.2) = 9.444 + (-19).210;$

$= 9.444 + (-19).(654 - 444.1) = (-19).654 + 28.444;$

$= (-19).654 + 28.(2406 - 654.3) = 28.2406 + (-103).654.$

De este modo, la expresión requerida, $d = x.a + y.b$, es:

$6 = 28.2406 + (-103).654.$

Realmente parece un trabalenguas matemático, pero, con paciencia y prolijidad, se desanda el camino que uno hace para encontrar el mcd y se encuentra la forma de expresar el máximo común divisor como "combinación lineal" de los enteros a y b. Solo se necesita aplicar una forma de factor común para las expresiones que tienen los números claves.

Vamos a definir dos conceptos más que están asociados con el MCD: los números coprimos y el mínimo común múltiplo, MCM.

Números coprimos

Dos números se dice que son coprimos si el MCD entre ellos es el 1.

Mínimo común múltiplo

Si a y b son enteros, decimos que el entero m es un mínimo común múltiplo, o MCM, de a y b si:

1. a | m y b | m;
2. si a | n y b | n, entonces m | n;
3. m ≥ 0.

Y escribimos **m = MCM(a, b).**

Relación entre el MCD y MCM.

MCM(a,b). MCD (a,b)=a.b

Ejemplo de ejercicio resuelto:

Encuentra enteros n y m que satisfagan: 966n + 685m = 70 (ecuación diofántica).

- [ ] Primer paso: encontrar el MCD (966, 685):

  966 = 1.685 + 281;

  685 = 2.281 + 123;

  281 = 2.123 + 35;

123 = 3.35 + 18;

35 = 1.18 + 17;

18 = 1.17 + 1;

17 = 17.1 + 0;

MCD (966, 685) = 1.

- [ ] Escribir el MCD como combinación lineal de 966 y 685.

1 = 18 – 1.17;

= 18 – 1.(35 – 1.18) = -1.35 +2.x 18;

= -1.35 + 2.(123 – 3.35) = 2.123 – 7.35;

= 2.123 – 7.(281- 2.123) = -7.281 + 16.123;

= -7.281 + 16.(685 – 2.281) = 16.685 – 39.281;

= 16.685 – 39.(966 - 1 . 685) = -39 . 966 + 55.685.

Se encontró, a partir del paso anterior, que 1 = -39.966 + 55.685.

Por ende, si se multiplican ambos miembros por 70, se obtiene la siguiente igualdad: 70 = 70.(-39.966 + 55.685).

Apliquemos la propiedad distributiva: 70 = 70 .(-39).966 + 70.55.685.

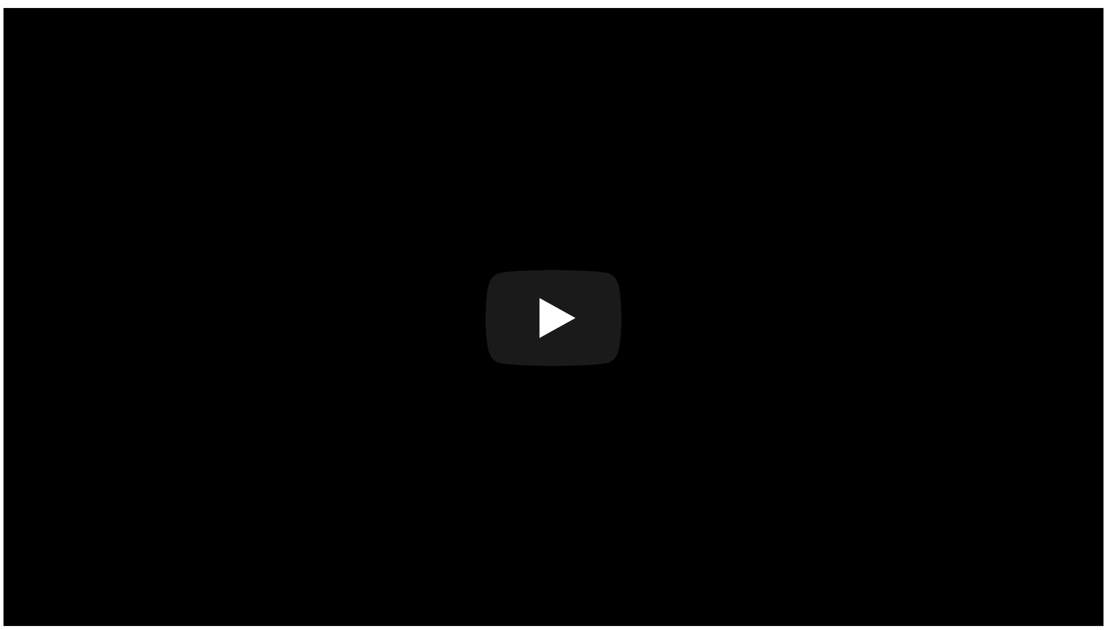
Solo basta observar qué es lo que buscábamos y a dónde llegamos:

$$966n + 685m = 70.$$

$$70 = \mathbf{70x(-39)}x966 + \mathbf{70x55}x685.$$

Se deduce entonces que las incógnitas buscadas asumen los siguientes valores: n = -2730 y m = 385.

En este video podremos ver una forma de organizar las cuentas.



Fuente: Aula4ALL.; [Aula4ALL]. (2014, Agosto 18). Cálculo del m.c.d. y m.c.m. utilizando el algoritmo de euclides - Máximo Común Divisor; [Youtube]. Recuperado de https://www.youtube.com/watch?v=x6qFMSRpgpM

Referencias

Espinosa Armenta, R. (2010). Matemáticas discretas. México: Alfaomega.

[Imagen sin título sobre máximo común divisor]. (s. f.). Recuperada de https://univiasecmatematicas1.files.wordpress.com/2012/11/mcd.png?w=419&h=233