Análisis de Métodos de Razonamiento e Incertidumbre

Daniel Otero Fadul

Departamento de Ciencias
Escuela de Ingeniería y Ciencias

Razonamiento Probabilístico en el Tiempo

Asumamos que vemos el mundo de una forma discreta: "tomamos fotos" de la realidad cada cierto tiempo T_m, conocido también como *tiempo de muestreo*, y observamos lo que queda registrado en esta fotos; algunas cosas se pueden observar mientras otras permanecen ocultas.

Sea $t_k = kT_m$, $k = 0, 1, 2, \ldots$. Sea X_k el *estado del sistema* en el tiempo t_k, el cual es un conjunto de variables que no son observables, y sea E_k la evidencia en este mismo tiempo t_k, la cual es el conjunto de variables que sí podemos observar.

En lo que sigue utilizaremos la siguiente notación: $X_{m:n} = X_m, X_{m+1}, \ldots, X_n$, $m, n \in \{0, 1, 2, \ldots\}$, $m < n$.

Razonamiento Probabilístico en el Tiempo

Cuando incluimos el tiempo en nuestros modelos se acostumbra a decir que la distribución de probabilidad del estado actual X_k dada la información de los estados anteriores $X_{0:k-1}$ es igual a

$$P(X_k|X_{0:k-1}).$$

Esto se conoce como el *modelo de transición*.

Nótese que en la expresión anterior se dice que el estado actual X_k depende de todos los estados anteriores $X_{0:k-1}$. Un supuesto muy común es decir que el estado actual X_k solo depende de un número finitos de sus estados anteriores. A esto se le llama el *supuesto de Markov*. Todos los sistemas que cumplan con esta propiedad se les llama **procesos de Markov**. Por ejemplo, la versión más simple del supuesto de Markov sería la siguiente:

$$P(X_k|X_{0:k-1}) = P(X_k|X_{k-1}).$$

Esta variante se conoce como un *proceso de Markov de primer orden*.

Otro supuesto importante es que la forma de la distribución de probabilidad no cambia para cada tiempo t_k, sino que es la misma siempre. Un proceso estocástico que cumple esta propiedad se le llama un **proceso estacionario**.

Razonamiento Probabilístico en el Tiempo

En cuanto a la evidencia E_k, la cual está relacionada con el *modelo del sensor*, tenemos el siguiente *supuesto de Markov del sensor*:

$$P(E_k|X_{0:k}, E_{1:k-1}) = P(E_k|X_k).$$

El término $P(E_k|X_k)$ se le conoce como el *modelo del sensor*. Nótese que se asume que no hay evidencia para el tiempo t_0.

Por otro lado, la distribución de probabilidad del estado inicial se denota como $P(X_0)$. Teniendo en cuenta lo anterior, la distribución de probabilidad conjunta de los estados $X_{0:k}$ y las evidencias $E_{1:k}$ es igual a

$$P(X_{0:k}, E_{1:k}) = P(X_0) \prod_{i=1}^{k} P(X_i | X_{i-1}) P(E_i | X_i). \tag{1}$$

Los tres términos de la expresión de la derecha se les conoce como el modelo del estado inicial $P(X_0)$, el modelo de transición $P(X_i | X_{i-1})$ y el modelo del sensor $P(E_i | X_i)$.

Razonamiento Probabilístico en el Tiempo

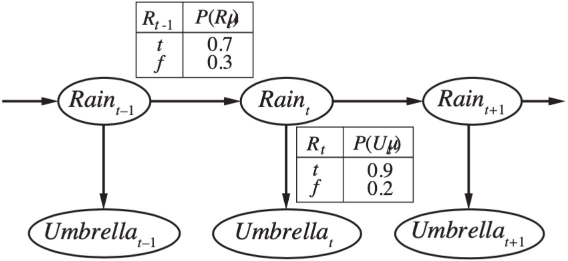

Figura: Estructura de la red Bayesiana y dela distribuciones de probabilidad condicional del ejemplo de la sombrilla. El modelo de transición es $P(\text{Rain}_k|\text{Rain}_{k-1})$ y el modelo del sensor es $P(\text{Umbrella}_k|\text{Rain}_k)$. Imagen tomada de [1].

Razonamiento Probabilístico en el Tiempo

Dado un modelo genérico temporal, hay cuatro tipos de inferencias básicas que podemos realizar:

- **Filtrado:** Este tipo de inferencia se le conoce como *estimación de estado*. En términos matemáticos, esto es equivalente a obtener la distribución de probabilidad de $P(X_k|E_{1:k} = e_{1:k})$.
- **Predicción:** El objetivo de esta inferencia es calcular la distribución de probabilidad posterior de un futuro estado dada toda la evidencia recopilada: $P(X_{k+j}|E_{1:k} = e_{1:k})$, $j > 0$.
- **"Smoothing":** En este caso, se desea calcular la distribución de probabilidad de un estado pasado X_j dada toda la evidencia: $P(X_j|E_{1:k} = e_{1:k})$ para algún j tal que $0 \leq j \leq k$.
- **Explicación más probable:** Dada una sequencia de observaciones, queremos obtener la más probable secuencia de estados que haya generado estas observaciones:

$$\max_{x_{1:k}} P(x_{1:k}|E_{1:k} = e_{1:k}).$$

Consideremos por un momento el ejemplo anterior. Digamos que queremos calcular $P(R_2|U_{1:2} = [t, t])$. Entonces, utilizando la ecuación (1), tenemos que

$$P(R_2|U_{1:2} = [t, t]) = \alpha \sum_{R_1} \sum_{R_0} P(U2 = t|R_2)P(R_2|R_1)P(U_1 = t|R_1)P(R_1|R_0)P(R_0),$$

donde α es una constante de normalización.

Razonamiento Probabilístico en el Tiempo

Supongamos que tenemos la siguiente situación: sabemos que existe una relación lineal entre el estado X_k de un sistema en el tiempo t_k y el tiempo t_{k+1}; además, se sabe que también existe una relación lineal entre las medidas E_k que podemos realizar en el tiempo t_k y el estado del sistema en este mismo instante de tiempo. Sin embargo, tanto las medidas como la estimación del estado del sistema en el tiempo t_{k+1} están contaminadas por ruido Gaussiano:

$$\begin{aligned} X_{k+1} &= FX_k + U_k \\ E_k &= HX_k + V_k, \end{aligned}$$

donde $U_k \sim N(0, \Sigma_x)$, $V_k \sim N(0, \Sigma_e)$, F es el *modelo de transición lineal* y H es el modelo del sensor.

Dado lo anterior, tenemos que

$$\begin{aligned} P(X_{k+1}|X_k = x_k) &\sim N(Fx_k, \Sigma_x) \\ P(E_k|X_k = x_k) &\sim N(Hx_k, \Sigma_x). \end{aligned}$$

Si queremos hacer *filtrado*, es decir, obtener la distribución de probabilidad del estado X_{k+1} dadas unas medidas $e_{1:k+1}$, debemos calcular lo siguiente:

$$P(X_{k+1}|E_{1:k+1} = e_{1:k+1}) = \alpha P(E_{1:k+1} = e_{1:k+1}|X_{k+1})P(X_{k+1}|E_{1:k} = e_{1:k}),$$

donde

$$P(X_{k+1}|E_{1:k} = e_{1:k}) = \int_{x_k} P(X_{k+1}|X_k = x_k)P(X_k = x_k|E_{1:k} = e_{1:k})dx_k.$$

Este tipo de inferencia bajo estas circunstancias se le conoce como **filtrado de Kalman**: un algoritmo que utiliza una serie de medidas, teniendo en cuenta imprecisiones aleatorias, para producir estimaciones cada vez más precisas de las variables no observables de un sistema.

Es importante mencionar que si el modelo del estado inicial tiene una distribución de probabilidad Gaussiana, $P(X_0) \sim N(\mu_0, \Sigma_0)$, las operaciones de filtrado preservan esta "Gaussianidad". Debido a esto, la distribución de $P(X_{k+1}|E_{1:k} = e_{1:k})$ es una Gaussiana de media μ_{k+1} y matriz de covarianza Σ_{k+1}, así que este filtrado se reduce a estimar estos parámetros.

En este caso, tenemos que

$$\begin{aligned} \mu_{k+1} &= F\mu_k + K_{k+1}(e_{k+1} - HF\mu_k) \\ \Sigma_{k+1} &= (I - K_{k+1}H)(F\Sigma_k F^T + \Sigma_x), \end{aligned}$$

donde

$$K_{k+1} = (F\Sigma_k F^T + \Sigma_x)H^T(H(F\Sigma_k F^T + \Sigma_x)H^T + \Sigma_e)^{-1},$$

término que se conoce como la **matriz de ganancia de Kalman**.

Nótese que $\hat{x}_{k+1} = F\mu_k$ es el estado predicho para el tiempo t_{k+1}, y $\hat{e}_{k+1} = HF\mu_k$ es la observación predicha en el tiempo t_k.

Razonamiento Probabilístico en el Tiempo

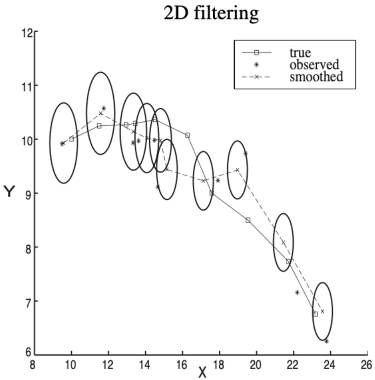

Figura: Seguimiento de un objeto en dos dimensiones. En este caso, las variables de estado son $X = \{X, Y, \dot{X}, \dot{Y}\}$, por lo cual $F, H, \Sigma_x, \Sigma_e \in \mathbb{R}^{4\times4}$. Se pueden observar la verdadera trayectoria del objeto y la trayectoria estimada por el filtrado de Kalman a partir de un conjunto de observaciones, así como los contornos de las Gaussianas para una desviación estándar de la media. Imagen tomada de [1].

BIBLIOGRAFÍA

1 Stuart Rusell,Peter Norvig, S. J., *“Artificial Intelligence: A Modern Approach”*, Cuarta Edición, Prentice Hall, 2020.