



**UNCUYO**  
UNIVERSIDAD  
NACIONAL DE CUYO



**FACULTAD  
DE INGENIERÍA**

**UNIVERSIDAD NACIONAL DE CUYO**

**FACULTAD DE INGENIERÍA**

**ROBÓTICA I**

**ANEXO - TRABAJO FINAL**

# Índice

<b>1. Desarrollos matemáticos</b>	<b>2</b>
1.1. Cinemática Inversa . . . . .	2
1.1.1. Primer Problema . . . . .	3
1.1.2. Cálculo de $q_1$ . . . . .	4
1.1.3. Cálculo de $q_2$ . . . . .	5
1.1.4. Cálculo de $q_3$ . . . . .	6
1.1.5. Segundo Problema . . . . .	8
1.1.6. Cálculo de $q_4$ . . . . .	8
1.1.7. Cálculo de $q_5$ . . . . .	9
1.1.8. Cálculo de $q_6$ . . . . .	10
<b>2. Implementación en Matlab</b>	<b>11</b>
2.1. Base y Tool . . . . .	12
2.2. Offsets . . . . .	12
2.3. Otras consideraciones . . . . .	13
2.3.1. Mejor solución . . . . .	13
2.3.2. Soluciones articulares más allá de $-\pi$ y $\pi$ . . . . .	13
<b>3. Análisis de gráficas en el espacio articular</b>	<b>14</b>
3.1. Robot 1 . . . . .	14
3.2. Robot 2 . . . . .	16
3.3. Robot 3 . . . . .	18

# 1. Desarrollos matemáticos

## 1.1. Cinemática Inversa

Partiendo de que nuestro robot tiene 6 grados de libertad, se tiene el siguiente planteo:

$$(q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6) = F(T)$$

Donde T es la matriz de transformación homogénea entre la base el efector final. Con lo cual se desea encontrar una función que, a partir de una determinada matriz de transformación homogénea válida, nos permita encontrar los valores articulares necesarios para poder llevar al extremo del robot a la posición y orientación deseada.

Como se menciona en el informe, la solución al problema se dará mediante el empleo del método de **Pieper**, el cual consiste en dividir el problema planteado en dos partes, desacoplando el brazo del robot de la muñeca. Este método es aplicable a aquellos robots que poseen una muñeca esférica, es decir, robots que tienen las últimas 3 articulaciones de rotación, con ejes que se cortan en un mismo punto. Nuestro robot cumple con dichas condiciones.

Si denominamos la posición del extremo como:

$${}^0\bar{p}_6$$

Y la posición de la muñeca como:

$${}^0\bar{p}_4 = {}^0\bar{p}_6 - d_6\hat{z}_6$$

Siendo  $d_6$  parámetro de la matriz de D&H de la fila 6, mientras que  $\hat{z}_6$  es el versor z de la matriz de transformación homogénea del sistema {0} al sistema {6}, cuya dirección va desde el extremo al punto de la muñeca.

A continuación se dará solución al primer problema.

### 1.1.1. Primer Problema

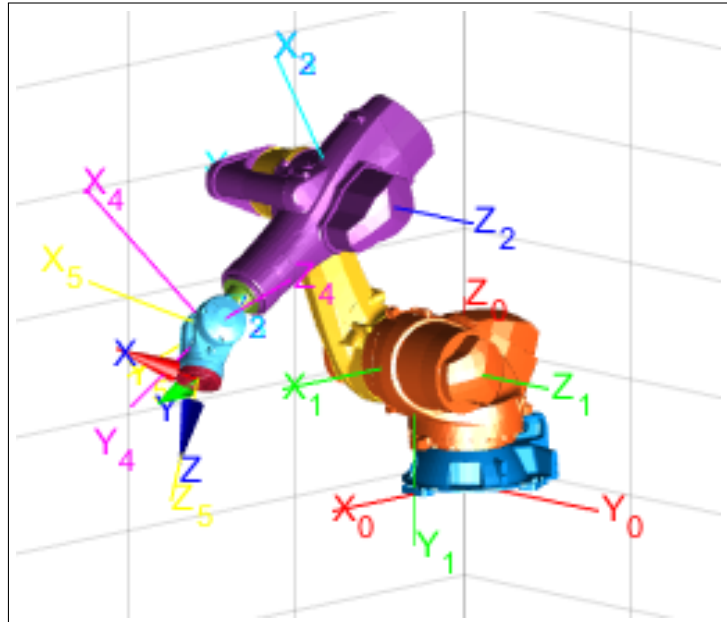


Figura 1: Ejemplo de posición a alcanzar por el robot

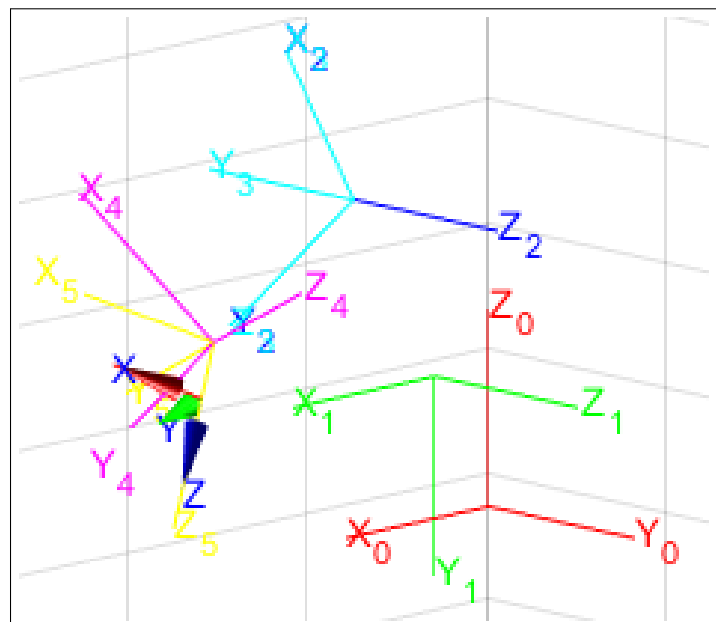


Figura 2: Sistemas coordenados de las articulaciones

Las figuras mostradas esquematizan el problema para un punto générico en el espacio. En la segunda figura solo se esquematizan los sistemas coordenados, en donde el sistema coordenado del extremo se corresponde con el sistema coordenado  $\{6\}$ .

Por comodidad llamaremos al punto de la muñeca como  $\bar{p}$ , cuyas componentes resultan ser  $p_1, p_2$  y  $p_3$ , que se corresponden con las componentes en  $x, y, z$ . Recordemos que el punto en cuestión es el origen de coordenadas del sistema  $\{4\}$ .

Sabemos que este problema posee cuatro soluciones en el caso general, dado que el punto  $\bar{p}$  se encuentra en el plano que queda descrito por  $q_1$  o por  $q_1 + \pi$ . Luego podemos encontrar la solución codo arriba y codo abajo con los valores de  $q_2$  y  $q_3$ .

Como primer caso, en todo el análisis, se considerarán solo ocho las soluciones dadas por unos supuestos límites articulares del robot desde  $-\pi$  a  $\pi$ ., para ello se denotarán los distintos valores para una misma articulación con un número indicado entre paréntesis.

### 1.1.2. Cálculo de $q_1$

Para calcular  $q_1$  observemos la siguiente imagen.

Sabemos que  $q_1$  es el ángulo formado entre  $X_0$  y  $X_1$  al rededor de  $Z_0$ , de este modo se puede calcular, con la ayuda de Matlab como:

$$q_1 = \text{atan2}(p_2, p_1)$$

Para calcular el segundo valor de  $q_1$  debemos considerar el signo del mismo, como se muestra a continuación.

$$q_1(1) > 0 \rightarrow q_1(2) = q_1(1) - \pi$$

$$q_1(1) \leq 0 \rightarrow q_1(2) = q_1(1) + \pi$$

De esta forma se consiguen dos valores de  $q_1$  comprendidos entre  $\pi$  y  $-\pi$ .

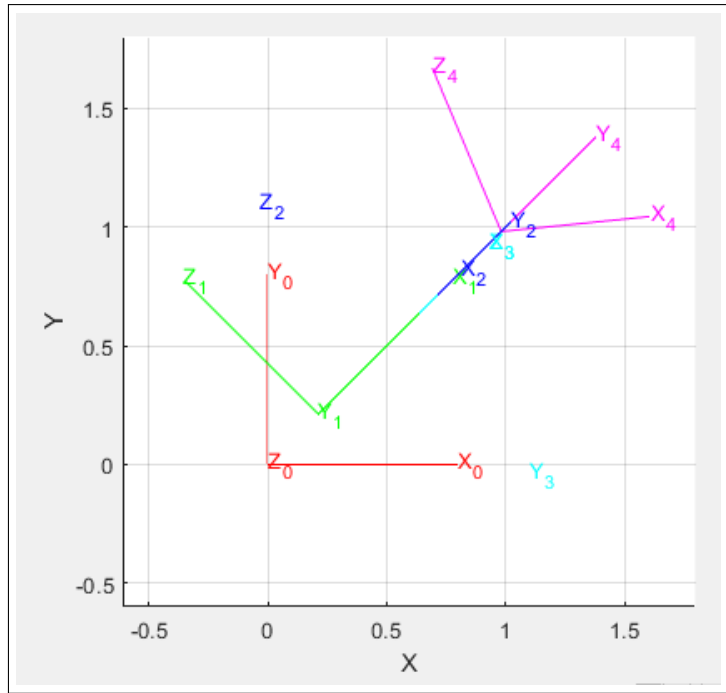


Figura 3: Cálculo de  $q_1$

### 1.1.3. Cálculo de $q_2$

Conociendo el valor de  $q_1$  podemos calcular la matriz de transformación homogénea  ${}^0T_1$  a partir de la cual podemos referenciar el punto  $\bar{p}$  respecto al sistema  $\{1\}$ , a partir de la siguiente expresión.

$${}^1\bar{p} = ({}^0T_1)^{-1} * \bar{p}$$

Donde  ${}^1\bar{p}$  es el punto de la muñeca referenciado al sistema  $\{1\}$ . En este caso tanto  ${}^1\bar{p}$  como  $\bar{p}$  se encuentran en coordenadas homogéneas.

Ahora analizando la siguiente figura, se observa el problema del codo arriba, codo abajo. Entonces definimos:

$$\beta_2 = \text{atan2}({}^1p_2, {}^1p_1)$$

$$r = \sqrt{({}^1p_2)^2 + ({}^1p_1)^2}$$

$$\alpha_2 = \text{acos} \left( \frac{(a_2)^2 + r^2 - (d_4)^2}{2 r a_2} \right)$$

$$q_2 = \beta_2 - \text{real}(\alpha_2)$$

$$q_2 = \beta_2 + \text{real}(\alpha_2)$$

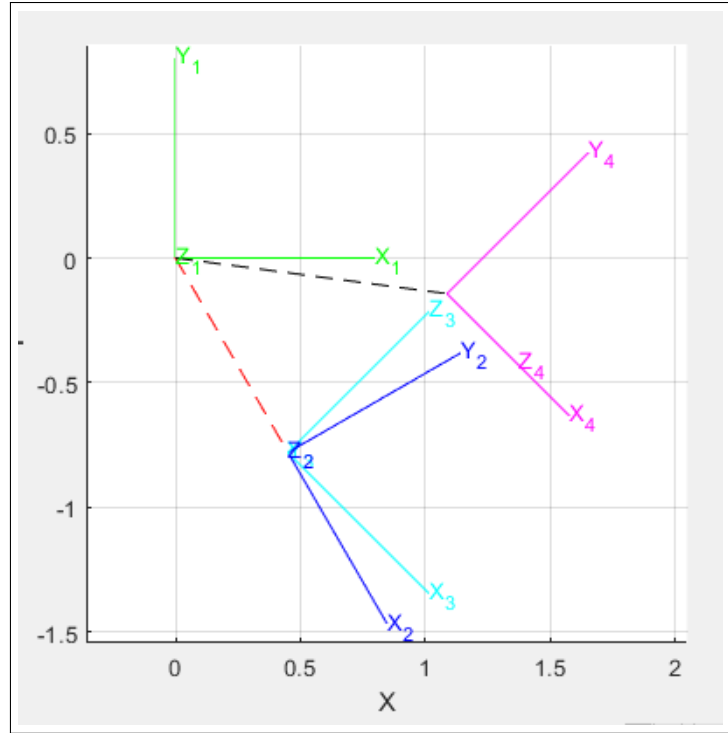


Figura 4: Cálculo de  $q_2$

Siendo  $a_2$  y  $d_4$  parámetros de la matriz D&H. Sabemos que  $q_2$  es el ángulo formado entre  $X_1$  y  $X_2$  al rededor de  $Z_1$ .

Vemos entonces que por cada valor de  $q_1$  encontramos dos valores de  $q_2$ , debido a que la matriz de transformación homogénea del sistema  $\{0\}$  al sistema  $\{1\}$  depende de  $q_1$ .

Dado que  $\alpha_2$  puede ser imaginario, debemos colocar la función `real()` en Matlab. Cuando  $\alpha_2$  resulte imaginario, el punto no será alcanzable por las dimensiones del robot, pero la búsqueda de valores articulares puede seguir para encontrar una configuración articular que nos lleve a una posición y orientación cercanas a las deseadas.

#### 1.1.4. Cálculo de $q_3$

Continuando con la metodología de trabajo, para calcular  $q_3$  debemos referenciar el punto de la muñeca al sistema  $\{2\}$ . Esto se puede hacer de la siguiente forma:

$${}^2\bar{p} = ({}^0T_2)^{-1} * \bar{p}$$

O lo que es lo mismo:

$${}^2\bar{p} = ({}^1T_2)^{-1} * {}^1\bar{p}$$

Como existen dos valores de  $q_1$  y dos valores de  $q_2$  por cada uno de esos dos valores de  $q_1$ , existirán cuatro matrices distintas  $({}^1T_2)^{-1}$ , con lo cual existirán cuatro valores de  $q_3$ .

Si la analizamos la siguiente figura:

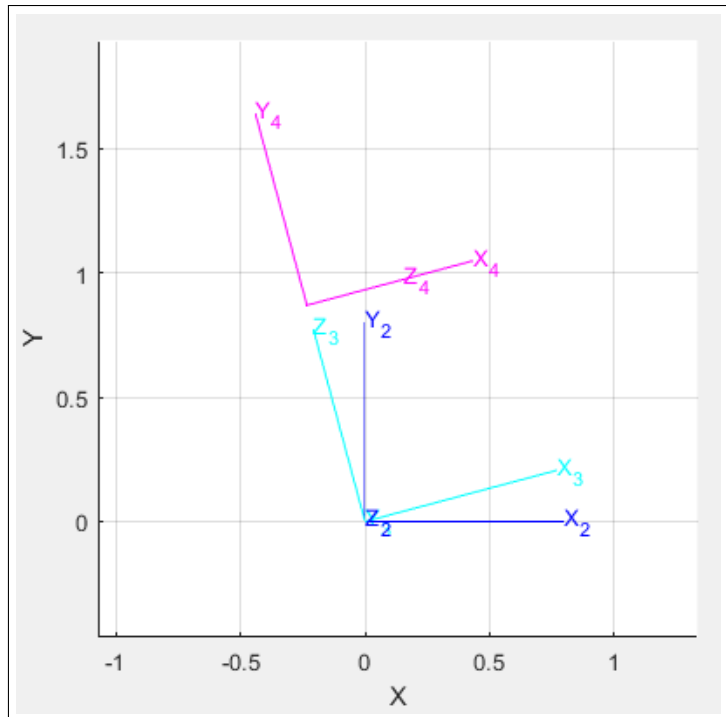


Figura 5: Cálculo de  $q_3$

Sabemos que  $q_3$  es el ángulo formado entre  $X_3$  y  $X_2$  al rededor de  $Z_2$ , de este modo se puede calcular como:

$$q_3 = \text{atan2}({}^2p_2, {}^2p_1) - \pi/2$$

Llegado a este punto, como se mencionó antes, tendremos cuatro soluciones, como se indica a continuación:



Solución 1	$q_1(1)$	$q_2(1)$	$q_3(1)$
Solución 2	$q_1(1)$	$q_2(2)$	$q_3(2)$
Solución 3	$q_1(2)$	$q_2(3)$	$q_3(3)$
Solución 4	$q_1(2)$	$q_2(4)$	$q_3(4)$

Cuadro 1: Soluciones a la posición de la muñeca

### 1.1.5. Segundo Problema

Como se mencionó anteriormente, este problema consiste básicamente en encontrar los valores de  $q_4$ ,  $q_5$  y  $q_6$  que permitan encontrar la posición y orientación del extremo del robot.

Una vez encontrados los valores de  $q_3$  el sistema  $\{3\}$  queda completamente determinado en posición y orientación. De modo que ahora podemos referenciar todos los sistemas que siguen con respecto al mismo.

### 1.1.6. Cálculo de $q_4$

A partir de la matriz de transformación homogénea  ${}^3T_6$ , la que se corresponde con la transformación del sistema  $\{3\}$  al sistema  $\{6\}$ , podremos encontrar el valor de  $q_4$ , ya que la posición del sistema  $\{6\}$  se corresponde con la posición del extremo del robot. Siendo:

$${}^3T_6 = ({}^0T_3)^{-1} * T$$

Para poder encontrar el valor de  $q_4$ , analizamos la siguiente figura, sabiendo que  $q_4$  es el ángulo de rotación desde  $X_3$  hasta  $X_4$  al rededor de  $Z_3$ . De este modo:

$$q_4 = \text{atan2}({}^3T_6(2, 3), {}^3T_6(1, 3))$$

Al igual que en el caso de  $q_1$  encontramos dos valores por cada solución hallada hasta el momento, es decir, existen ocho valores de  $q_8$  distintos, de modo que:

$$q_4(1) > 0 \rightarrow q_4(2) = q_4(1) - \pi$$

$$q_4(1) \leq 0 \rightarrow q_4(2) = q_4(1) + \pi$$

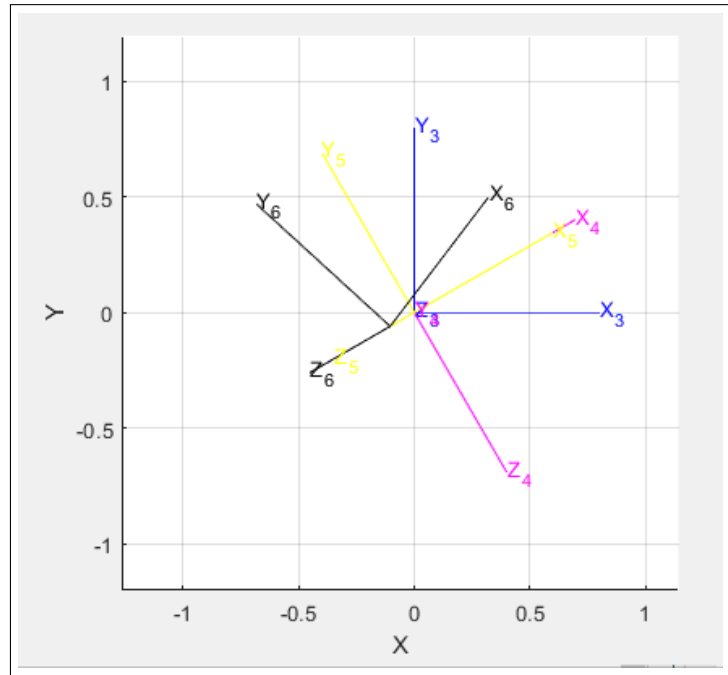


Figura 6: Cálculo de  $q_4$

#### 1.1.7. Cálculo de $q_5$

Siguiendo con la metodología de trabajo, para encontrar  $q_5$  referenciamos el punto del extremo al sistema  $\{4\}$ . Para esto utilizamos la siguiente matriz de transformación homogénea.

$${}^4T_6 = ({}^3T_4)^{-1} * ({}^0T_3)^{-1} * T$$

O lo que es lo mismo:

$${}^4T_6 = ({}^3T_4)^{-1} * {}^3T_6$$

Sabiendo que  $q_5$  es el ángulo de rotación desde  $X_4$  hasta  $X_5$  al rededor de  $Z_4$ , si analizamos la siguiente figura podremos determinar que:

$$q_5 = \text{atan2}({}^4T_6(2, 3), {}^4T_6(1, 3)) - \pi/2$$

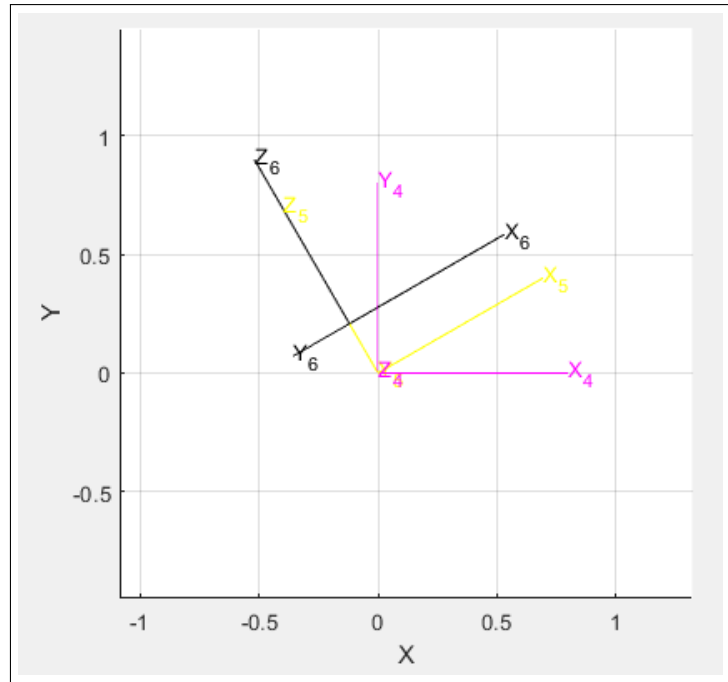


Figura 7: Cálculo de  $q_5$

Como existen ocho matrices distintas de  ${}^4T_6$ , existirán entonces ocho valores distintos de  $q_5$ .

#### 1.1.8. Cálculo de $q_6$

Continuando con el método de trabajo empleado hasta el momento, busquemos la siguiente matriz de transformación homogénea:

$${}^5T_6 = ({}^4T_5)^{-1} * ({}^3T_4)^{-1} * ({}^0T_3)^{-1} * T$$

O lo que es lo mismo:

$${}^4T_6 = ({}^4T_5)^{-1} * {}^4T_6$$

Luego sabiendo que  $q_6$  es el ángulo de rotación desde  $X_5$  hasta  $X_6$  al rededor de  $Z_5$ , si analizamos la siguiente figura podremos determinar que:

$$q_6 = \text{atan2}({}^5T_6(2, 1), {}^5T_6(1, 1))$$

Donde existen ocho valores distintos de  $q_6$ .

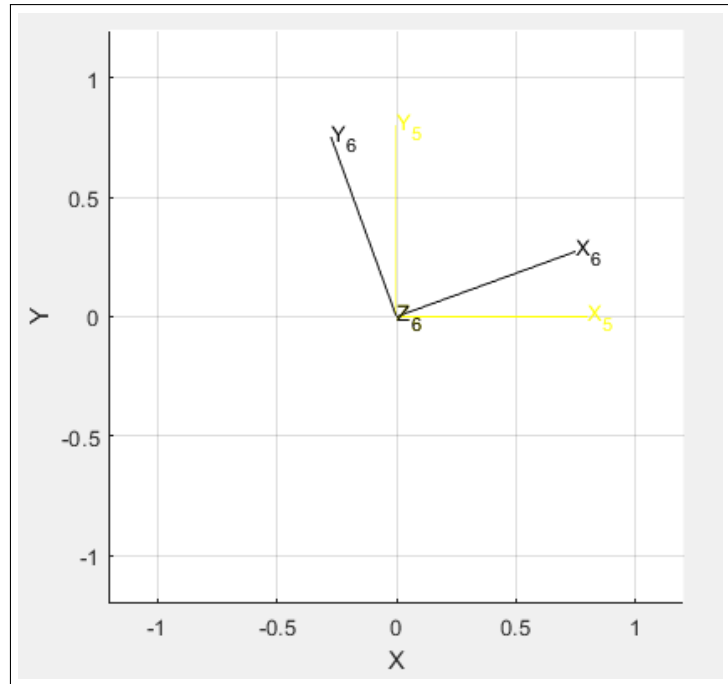


Figura 8: Cálculo de  $q_6$

De esta forma, para el caso de los límites articulares planteados, las ocho soluciones encontradas serán:

Solución 1	$q_1(1)$	$q_2(1)$	$q_3(1)$	$q_4(1)$	$q_5(1)$	$q_6(1)$
Solución 2	$q_1(1)$	$q_2(2)$	$q_3(2)$	$q_4(2)$	$q_5(2)$	$q_6(2)$
Solución 3	$q_1(2)$	$q_2(3)$	$q_3(3)$	$q_4(3)$	$q_5(3)$	$q_6(3)$
Solución 4	$q_1(2)$	$q_2(4)$	$q_3(4)$	$q_4(4)$	$q_5(4)$	$q_6(4)$
Solución 5	$q_1(1)$	$q_2(1)$	$q_3(1)$	$q_4(5)$	$q_5(5)$	$q_6(5)$
Solución 6	$q_1(1)$	$q_2(2)$	$q_3(2)$	$q_4(6)$	$q_5(6)$	$q_6(6)$
Solución 7	$q_1(2)$	$q_2(3)$	$q_3(3)$	$q_4(7)$	$q_5(7)$	$q_6(7)$
Solución 8	$q_1(2)$	$q_2(4)$	$q_3(4)$	$q_4(8)$	$q_5(8)$	$q_6(8)$

Cuadro 2: Soluciones a la posición y orientación del efector final

## 2. Implementación en Matlab

La función implementada en Matlab resulta ser:

$$q_{sol} = CinInv(T, R, q_0, q_{mejor});$$

Donde ' $q_{sol}$ ' es la matriz de solución 8x6, ' $T$ ' la matriz de transformación homogénea que define orientación y posición del efector final, ' $q_0$ ' el vector articu-

lar anterior al nuevo calculado y '*q.mejor*' el parámetro que indica si se quiere la mejor solución posible o simplemente todas.

A continuación se comentan algunas consideraciones a la hora de implementar dicho código.

## 2.1. Base y Tool

Cuando el objeto robot, de la clase SerialLink, posee atributos robot.base y robot.tool, los cual conocemos como matrices de transformación homogénea de la base y el efector final respectivamente, estos deben ser eliminados a la hora de realizar el cálculo de la cinemática inversa. En lenguaje de Matlab se debe realizar lo siguiente:

$$T = (R.base)^{-1} T (R.tool)^{-1};$$

Para realizar la inversión de la matrices arriba mencionadas, utilizamos una función denominada:

$$B = invHomog(A)$$

Donde A es una matriz de transformación homogénea y B es su inversa, el funcionamiento de dicha función se basa en la propiedad que poseen las matrices de transformación homogénea, la cual fue analizada en clase.

## 2.2. Offsets

Para el desarrollo de la cinemática inversa supusimos que el robot no poseía offsets. Sin embargo, si un robot posee offsets, lo que debe hacerse es no tener en cuenta los mismos para el cálculo de la cinemática inversa. Una vez realizados dichos cálculos y obtenidas todas las soluciones, se le deben restar los offsets iniciales del robot a dichas soluciones.

De esta manera, el conjunto de soluciones obtenidas, si serán aplicables al robot con offsets. Esto se ve implementado en el correspondiente script de Matlab de la siguiente forma.

$$offsets = R.offset;$$

*Calculamos la cinemática inversa...*

*Obtenemos la matriz  $q_{sol}$  de  $8 \times 6$ , con las ocho soluciones.*

$$R.offset = offsets;$$

$$q_{sol} = q_{sol} - ones(8, 1) * R.offset;$$

## 2.3. Otras consideraciones

A continuación se comentan otras consideraciones tenidas en cuenta a la hora de realizar el correspondiente script de Matlab.

### 2.3.1. Mejor solución

Para encontrar la mejor solución de las ocho posibles, contamos con '**qmejor**', el cual es un parámetro en la función de cinemática inversa. La sección de código '**qmejor**' lo que hace es determinar cuál de las ocho soluciones obtenidas es más cercana al vector articular semilla de nuestro robot, es decir, al vector de valores articulares a partir del cuál nuestro robot se moverá a la siguiente posición calculada. De modo que si en la función, en el lugar del parámetro '**qmejor**' colocamos un '1', la función nos devolverá una única solución, en cambio, si el parámetro resulta ser cualquier otro valor, la función nos entregará ocho soluciones.

Para la implementación de esta sección del código calculamos la distancia euclidiana entre vectores y vemos cual tiene la menor respecto del vector inicial pasado en la función, en nuestro caso, '**q0**'.

Esta sección del código se encuentra claramente indicada en el mismo.

### 2.3.2. Soluciones articulares más allá de $-\pi$ y $\pi$

El desarrollo matemático que deriva en la implementación de la función de cinemática inversa contempla límites articulares entre  $-\pi$  y  $\pi$ . Sin embargo, como

se menciona en el informe, no todas las articulaciones del robot poseen un rango de movimiento entre  $-\pi$  y  $\pi$ .

Por otra parte, para aquellas articulaciones que poseen un rango de movimiento más allá de  $-\pi$  y  $\pi$ , como podrían ser en el caso de las articulaciones 4 y 6, no se consideran soluciones por fuera de este intervalo ya que no resulta necesario para la aplicación considerada.

### 3. Análisis de gráficas en el espacio articular

En esta sección de los anexos se pretende analizar la forma del movimiento de las diferentes articulaciones de los robots durante todo el transcurso de sus trayectorias. En general, se busca que el movimiento de las articulaciones también sea lo más suave posible, sin que existan grandes picos de aceleración o discontinuidades entre un tramo y el siguiente de la trayectoria.

#### 3.1. Robot 1

Comenzamos por mostrar la gráfica correspondiente a la posición articular (figura 9). Se observa que los cambios de posición de posición son suaves y siguen, en general, un perfil trapezoidal.

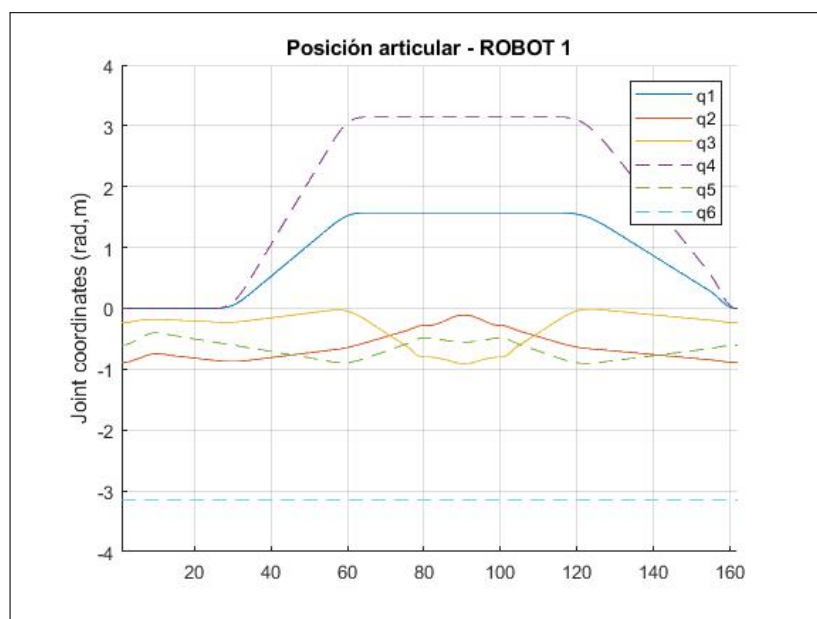


Figura 9: Posición articular - Robot 1

Por otro lado, a continuación se muestran las gráficas correspondientes a la evolución de la velocidad y aceleración articular de dicho robot durante toda la trayectoria realizada:

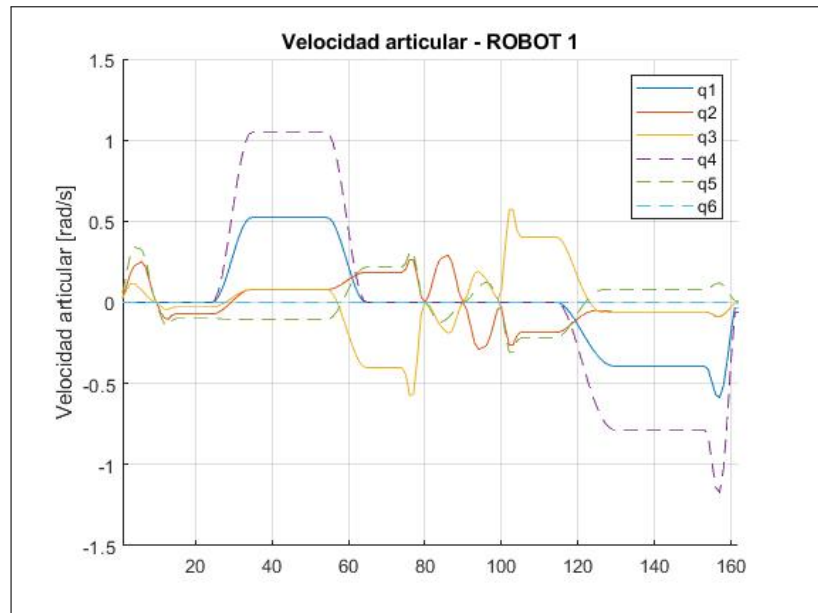


Figura 10: *Velocidad articular - Robot 1*

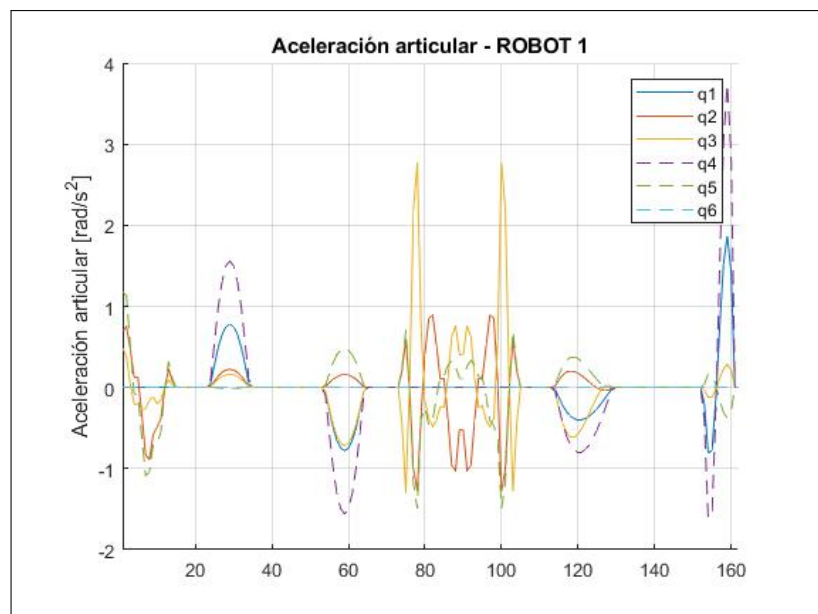


Figura 11: *Aceleración articular - Robot 1*

Se puede ver claramente que estas gráficas son mucho más caóticas que las que se obtuvieron en el espacio cartesiano, esto se debe a que se ha utilizado la función *ctrj*, la cual realiza una interpolación en el espacio cartesiano, de mane-



ra tal que no se tiene mucho control sobre las variables articulares durante este proceso y suelen experimentar picos considerables de velocidad y/o aceleración.

Sin embargo, puesto que la amplitud de estos saltos de velocidad es pequeña (menor a  $1\text{rad/s}$ , en el peor de los casos) y los picos de aceleración tampoco son considerables (menores a  $4\text{rad/s}^2$ ), se puede considerar que la trayectoria obtenida es aceptable.

De igual forma, si la aplicación lo requiriera, se podría implementar un control de posicionamiento para el robot, de forma tal de evitar los errores pequeños de posicionamiento que producen estos picos y saltos bruscos.

### 3.2. Robot 2

A continuación se muestran las gráficas correspondientes a la evolución temporal de la posición, velocidad y aceleración articulares para el robot 2.

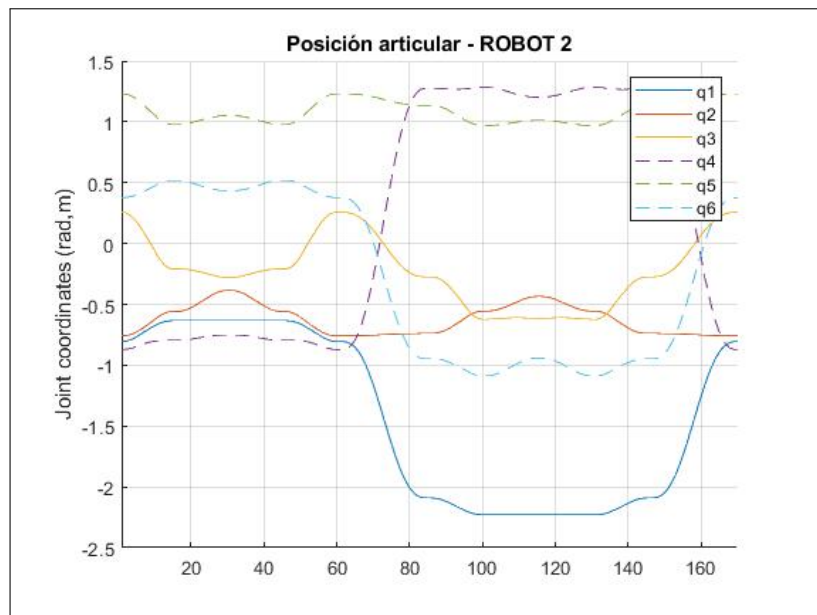
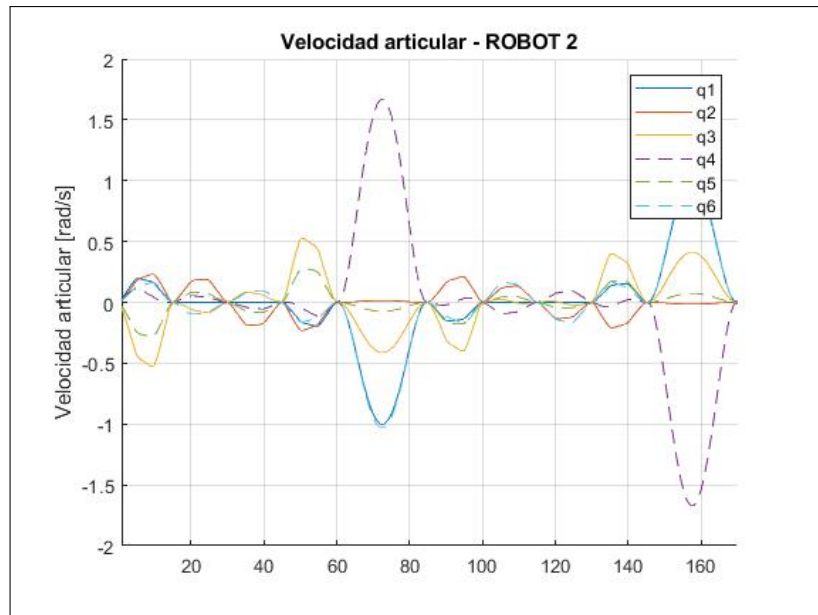
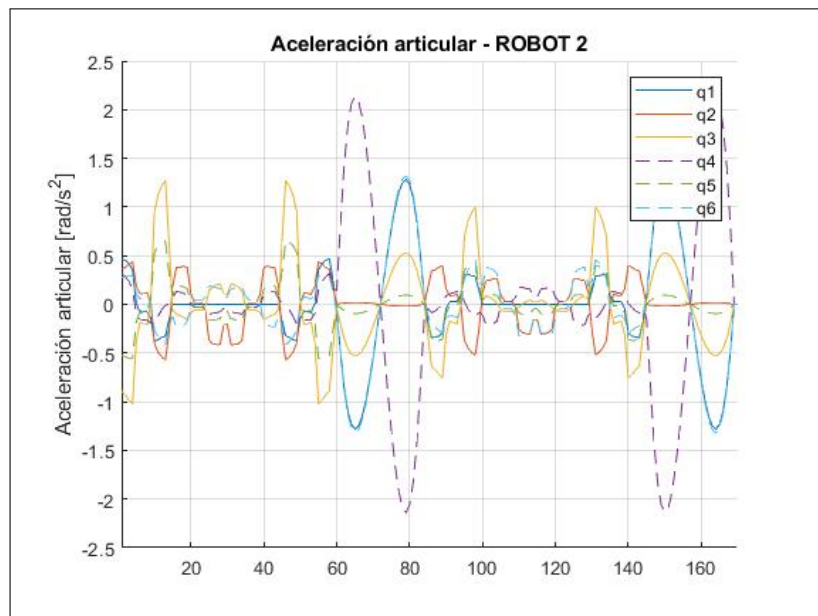


Figura 12: *Posición articular - Robot 2*

Figura 13: *Velocidad articular - Robot 2*Figura 14: *Aceleración articular - Robot 2*

En este caso, las gráficas en general son mucho más suaves que en el caso del robot 1 y las amplitudes de las aceleraciones tampoco son elevadas por lo que no se producirán considerablemente efectos dinámicos que puedan afectar al movimiento del robot ni tampoco habrán movimientos bruscos. La forma de campana de las curvas de velocidad y aceleración se debe a que se utilizó la función *jtraj* en gran parte del movimiento del robot, la cual utiliza polinomios de grado 5 para interpolar en el espacio articular.

### 3.3. Robot 3

Finalmente, para el robot 3, se tienen las siguientes gráficas:

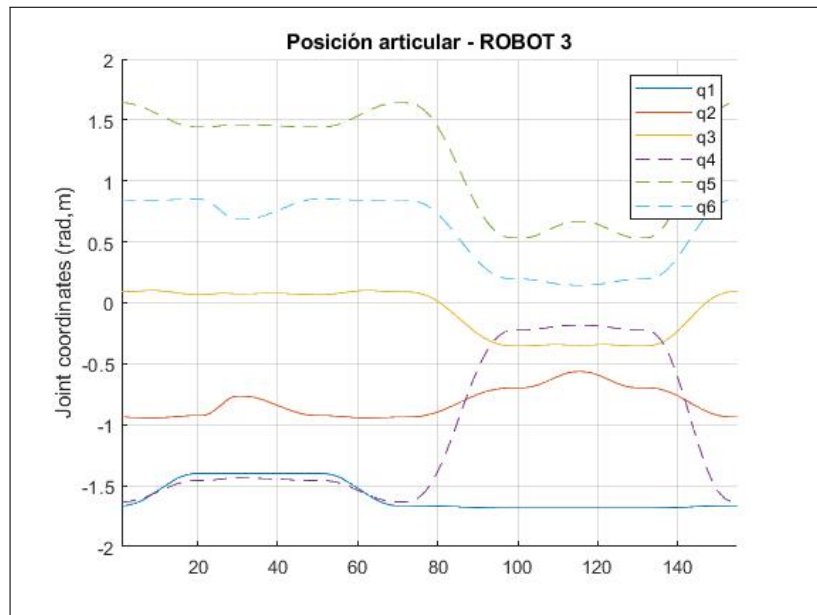


Figura 15: *Posición articular - Robot 3*

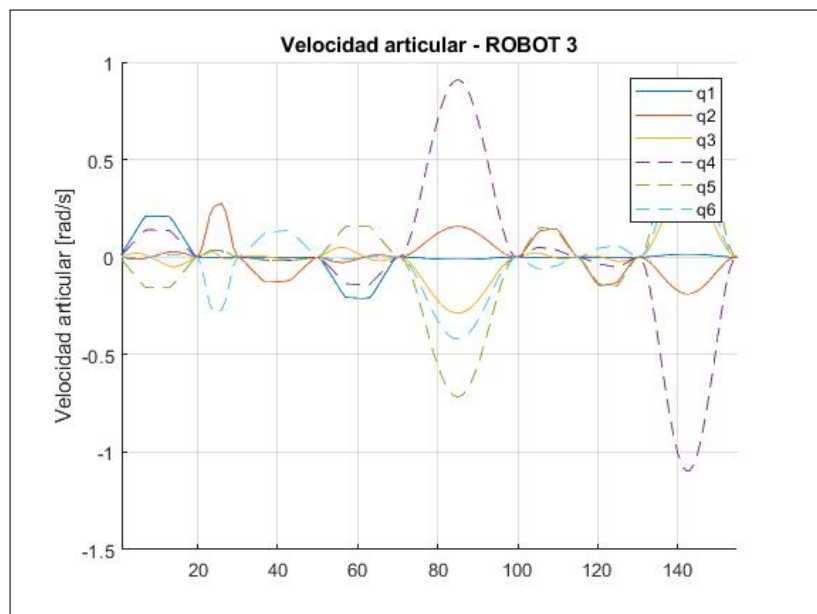


Figura 16: *Velocidad articular - Robot 3*

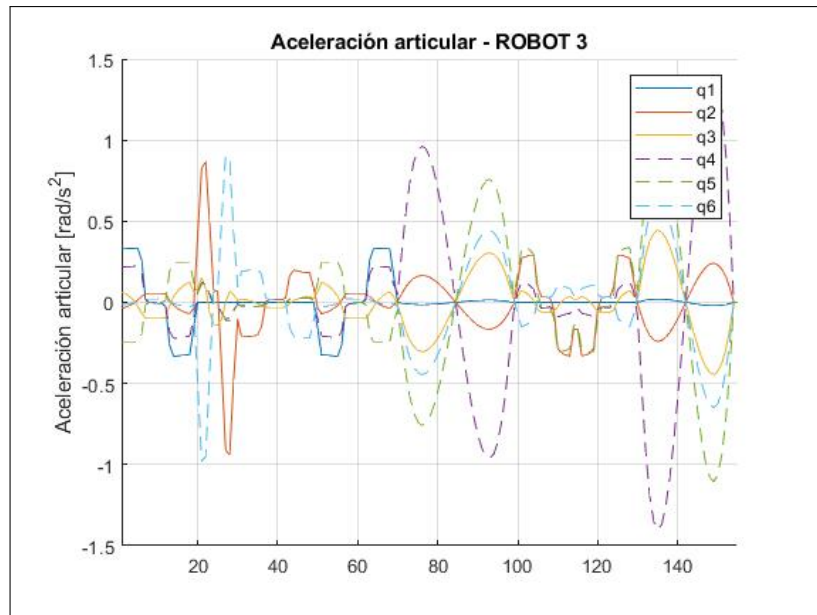


Figura 17: Aceleración articular - Robot 3

Aquí, al igual que en el caso del robot 1, se observan curvas caóticas de aceleración, sobre todo al inicio del movimiento. Nuevamente, esto se debe a la utilización de la función `ctrj`. Sin embargo, las amplitudes de los picos de aceleración son relativamente pequeños (menores a  $2,5 \text{ rad/s}^2$ ), con lo cual resulta aceptable.