Diseño de autómata para conteo de la palabra *casa*

Agustín Galdeman

Materia: Diseño Lógico

Fecha: 30 de marzo

Buenos Aires

1. Introducción

Este documento describe un autómata finito determinista (AFD) diseñado para contar las ocurrencias de la palabra casa" en un texto de hasta 1000 caracteres, usando 1000 estados para codificar el conteo sin un contador explícito. El alfabeto permitido es $\Sigma = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k, l, m, n, o, p, q, r, s, t, u, v, w, x, y, z, \text{espacio}\}$, y casa" debe estar delimitada por espacios en blanco para ser considerada una ocurrencia válida (excepto para cuando apareciera al inicio o final de la cadena). A diferencia de un diseño con 5 estados que depende de contar transiciones externamente o agregar un contador binario, este autómata usa 1000 estados para representar tanto el progreso en la lectura de "casa" como el número de ocurrencias detectadas, hasta un máximo de 200.

2. Diseño del Autómata con 1000 Estados

Para contar las ocurrencias sin un contador numérico, el autómata codifica el número de ocurrencias directamente en sus estados. Dado que el texto tiene 1000 caracteres y cada ocurrencia de casa" requiere al menos 5 caracteres (casa " o " casa"), el máximo teórico de ocurrencias es 200. Con 1000 estados, organizamos el autómata en 200 grupos de 5 estados cada uno, permitiendo contar hasta 200 ocurrencias antes de saturarse.

2.1. Estructura de los Estados

Los 1000 estados se dividen en 200 grupos, donde cada grupo representa un número de ocurrencias detectadas:

- Grupo 0 (0 ocurrencias): $q_{0,0}, q_{0,1}, q_{0,2}, q_{0,3}, q_{0,4}$.
- Grupo 1 (1 ocurrencia): $q_{1,0}, q_{1,1}, q_{1,2}, q_{1,3}, q_{1,4}$.
- ...
- Grupo 199 (199 ocurrencias): $q_{199,0}, q_{199,1}, q_{199,2}, q_{199,3}, q_{199,4}$.

Dentro de cada grupo n ($0 \leq n \leq 199$):

- $q_{n,0}$: Estado inicial del grupo (n ocurrencias completadas).
- $q_{n,1}$: Se leyó c".
- $q_{n,2}$: Se leyó ca".
- $q_{n,3}$: Se leyó cas".

- $q_{n,4}$: Se leyó casa" (esperando un espacio).

Cada grupo tiene 5 estados, y 200 grupos $\times$ 5 estados = 1000 estados totales. Se añade un estado final que cuenta la última ocurrencia.

2.2. Función de Transición δ

La función $\delta : Q \times \Sigma \to Q$ define cómo el autómata avanza entre estados:

- $\delta(q_{n,0}, c) = q_{n,1}$, $\delta(q_{n,0}, x) = q_{n,0}$ (para $x \neq c$, $0 \leq n \leq 199$).
- $\delta(q_{n,1}, a) = q_{n,2}$, $\delta(q_{n,1}, x) = q_{n,0}$ (para $x \neq a$).
- $\delta(q_{n,2}, s) = q_{n,3}$, $\delta(q_{n,2}, x) = q_{n,0}$ (para $x \neq s$).
- $\delta(q_{n,3}, a) = q_{n,4}$, $\delta(q_{n,3}, x) = q_{n,0}$ (para $x \neq a$).
- Para $0 \leq n < 199$: $\delta(q_{n,4}, \text{"}) = q_{n+1,0}$, $\delta(q_{n,4}, x) = q_{n,0}$ (para $x \neq \text{"}$).
- Para $n = 199$: $\delta(q_{199,4}, \text{`` "}) = q_{199,0}$, $\delta(q_{199,4}, x) = q_{199,0}$ (saturación).

Cuando el autómata lee un espacio en $q_{n,4}$ ($n < 199$), avanza al grupo $n+1$, incrementando el conteo implícito. En $n = 199$, se queda en el grupo 199, indicando que ha alcanzado el límite. Luego se transiciona al estado final.

3. Conteo de Ocurrencias con Estados Múltiples

El conteo se realiza al avanzar entre grupos. Cada transición $\delta(q_{n,4}, \text{"}) = q_{n+1,0}$ (para $n < 199$) indica que se ha detectado una nueva ocurrencia de casa. El estado actual refleja cuántas ocurrencias se han completado:

- En $q_{0,i}$: 0 ocurrencias.
- En $q_{1,i}$: 1 ocurrencia.
- ...
- En $q_{199,i}$: 199 ocurrencias (máximo).

3.1. Ejemplo 1: "casa casa " (10 caracteres)

- Inicio: $q_{0,0}$.
- c" $\to q_{0,1}$, a" $\to q_{0,2}$, s" $\to q_{0,3}$, a" $\to q_{0,4}$, " $\to q_{1,0}$ (1ª ocurrencia).
- c" $\to q_{1,1}$, a" $\to q_{1,2}$, s" $\to q_{1,3}$, a" $\to q_{1,4}$, " " $\to q_{2,0}$ (2ª ocurrencia).

Estado final: $q_{2,0}$. Total: 2 ocurrencias.

3.2. Ejemplo 2: "la casa " (8 caracteres)

- l" $\to q_{0,0}$, a" $\to q_{0,0}$, " $\to q_{0,0}$.
- c" $\to q_{0,1}$, a" $\to q_{0,2}$, s" $\to q_{0,3}$, a" $\to q_{0,4}$, " " $\to q_{1,0}$.

Estado final: $q_{1,0}$. Total: 1 ocurrencia.

3.3. Ejemplo 3: "casa casa casa " (14 caracteres)

- c" $\to q_{0,1}$, a" $\to q_{0,2}$, s" $\to q_{0,3}$, a" $\to q_{0,4}$, " $\to q_{1,0}$.
- c" $\to q_{1,1}$, a" $\to q_{1,2}$, s" $\to q_{1,3}$, a" $\to q_{1,4}$, " $\to q_{2,0}$. " $\to q_{2,1}$, a" $\to q_{2,2}$, s" $\to q_{2,3}$, a" $\to q_{2,4}$, " $\to q_{3,0}$.

Estado final: $q_{3,0}$. Total: 3 ocurrencias.

4. Función de Traducción $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

La función de traducción $f(N)$ devuelve el número de ocurrencias en un texto de longitud N. Formalmente: f(N) = número de veces que el autómata realiza la transición $\delta(q4, "") = q0$. Debido a que se trata de una cadena de 1000 caracteres con 28 símbolos posibles, existen 28^{1000} posibles cadenas distintas. Por ende, la función de traducción mapea 28^{1000} números naturales a 201 números naturales.

5. Función de Salida ω

La función $\omega : Q \to \mathbb{N}$ asigna el número de ocurrencias:
$\omega(q_{n,i}) = n, \quad \text{para } 0 \leq n \leq 199,\ i = 0, 1, 2, 3, 4.$
Por ejemplo:

- $\omega(q_{0,0}) = 0$: Ninguna ocurrencia.
- $\omega(q_{5,3}) = 5$: 5 ocurrencias, en proceso de leer "cas".
- $\omega(q_{199,4}) = 199$: 199 ocurrencias, máximo alcanzado.

6. Registros de 1 Bit

Para codificar 1000 estados:

- $\log_2(1000) \approx 9.96$, por lo que se necesitan **10 registros de 1 bit** (10 bits permiten hasta 1024 estados).
- Ejemplo de codificación:
  - $q_{0,0} = 00000000$ (0).
  - $q_{0,1} = 00000001$ (1).
  - ...
  - $q_{199,4} = 11000111$ (199).

7. Conclusión

El autómata con 1000 estados reconoce "casa" en grupos de 5 estados, avanzando al siguiente grupo tras cada ocurrencia confirmada por un espacio, hasta un máximo de 199. Los 10 registros de 1 bit codifican los estados, y el conteo se deriva del índice n del estado final. Este diseño no usa un contador explícito, integrando el conteo en la estructura misma del autómata.