

TEORÍA DE CIRCUITOS 2015

FUNCIONES DE APROXIMACIÓN

BERSIER, Andrés

GARDELLA, Pablo

Índice

1. Introducción

- 1.1. Parámetros que caracterizan a una función transferencia
- 1.2. Condiciones necesarias para que la transferencia $H(s)$ sea realizable
- 1.3. Propiedades de $|H(j\omega)|^2$
- 1.4. Sistemas de fase mínima
- 1.5. Normalización y desnormalización

2. Aproximaciones por atenuación

- 2.1. Butterworth
 - 2.1.1. Forma General
 - 2.1.2. Determinación de Coeficientes
 - 2.1.3. Lugar de Singularidades
 - 2.1.4. Características
 - 2.1.5. Ejemplo de aplicación
- 2.2. Chebycheff I
 - 2.2.1. Forma General
 - 2.2.2. Determinación de Coeficientes
 - 2.2.3. Lugar de singularidades
 - 2.2.4. Características:
 - 2.2.5. Ejemplo de aplicación
- 2.3. Chebycheff II (Inverso)
 - 2.3.1. Forma General
 - 2.3.2. Determinación de Coeficientes
 - 2.3.3. Lugar de Singularidades
 - 2.3.4. Características
 - 2.3.5. Ejemplo de aplicación
- 2.4. Legendre
 - 2.4.1. Forma General
 - 2.4.2. Determinación de Coeficientes
 - 2.4.3. Lugar de Singularidades
 - 2.4.4. Características
 - 2.4.5. Ejemplo de aplicación

3. Aproximaciones por retardo de grupo

- 3.1. Bessel
 - 3.1.1. Forma General
 - 3.1.2. Determinación de Coeficientes
 - 3.1.3. Normalización y Desnormalización para Retardo de Grupo
 - 3.1.4. Lugar de Singularidades
 - 3.1.5. Características
 - 3.1.6. Ejemplo de aplicación
- 3.2. Gauss
 - 3.2.1. Forma General
 - 3.2.2. Determinación de Coeficientes
 - 3.2.3. Lugar de singularidades
 - 3.2.4. Características

4. Método para Diseñar Aproximaciones

- 4.1. Transferencia Genérica
- 4.2. Condiciones de los polinomios
- 4.3. Ejemplo de aplicación

5. Aproximación Elíptica

5.1.	Motivación	
5.2.	Aproximación Cauver	
5.2.1.	Restricciones	
5.2.2.	Función Racional Elíptica	
5.2.3.	Orden	
5.2.4.	Comportamiento	
5.2.5.	Expresión racional	
5.2.6.	Funciones Matlab	
5.3.	Recetario	
5.3.1.	Orden	
5.3.2.	Singularidades	

6. Anexo: Funciones elípticas

6.0.3.	El problema del péndulo	
6.0.4.	Funciones meromórficas	
6.0.5.	Definición	
6.0.6.	Integral elíptica	
6.0.7.	Funciones elípticas de Jacobi	
6.0.8.	Fórmulas de adición	
6.0.9.	Argumento imaginario puro	
6.0.10.	Periodicidad	
6.0.11.	Períodos fundamentales	
6.0.12.	Mapecto al eje real	

1. Introducción

Según la *Real Academia Española*, un filtro es un *sistema de selección en un proceso según criterios previamente establecidos*. En el marco de Teoría de Circuitos los filtros permitirán eliminar y/o seleccionar ciertas componentes espectrales respecto las demás. Por ejemplo eliminar los 50Hz del ruido de línea que se induce en los circuitos, dividir el espectro de audio en canales para maximizar el rendimiento de parlantes a la hora de reproducir una canción, limitar en banda una señal analógica para su digitalización (teorema de Nyquist). Los filtros incluso son etapas esenciales en el proceso de modulación y demodulación en AM, FM, PM, FSK, etc. Estas son solamente algunas de las aplicaciones más comunes de los filtros; como se vé su utilidad es indiscutible por lo que en este escrito se procederá a desarrollar un método estandarizado para su diseño.

Antes de comenzar, se destacarán 3 cuestiones relativas al diseño de filtros.

1. Lo importante es la aplicación. A la hora de diseñar un filtro se debe pensar en cual será su razón de ser y que tolerancias existen en su entorno. Por ejemplo, en el caso del filtrado de los 50Hz , el filtro ideal sería aquel que elimine por completo a dicha frecuencia, pero **¿Qué significa eliminar por completo?** Si la amplitud de los 50Hz inducidos es de $1V_P$ y tenemos un piso de ruido en $10mV$, **¿Habrà alguna diferencia en los resultados si el filtro atenúa 100 veces o 100.000 veces?** La respuesta es que si, en ambos casos los 50Hz serán indistinguibles del ruido de fondo pero en el segundo caso construir el filtro será mucho más costoso. Entonces se ve que en vez de necesitar un filtro que atenúe a los 50Hz en ∞dB , basta con uno que atenúe 40dB . Estas tolerancias que dependen de la aplicación permiten construir algo llamado **Plantilla**.

$$\text{Aplicación} \xrightarrow{\text{limitaciones}} \text{Plantilla}$$

2. Una vez definidas las tolerancias para la aplicación particular se debe proceder a encontrar la función transferencia que mejor aproxime al filtro deseado. Es posible que existan muchas funciones transferencias que cumplan con las especificaciones impuestas, por lo que se deberá ponderar algún criterio para comenzar el diseño, ya sea dificultad de construcción, comportamiento de la respuesta en frecuencia, métodos de calibración, tendencia a fallas, sensibilidades a los componentes, etc. Las **funciones de aproximación** encapsulan estos criterios, por ejemplo: Si se busca un filtro que no tenga problemas de calibración y no sea propenso a fallas, posiblemente la mejor opción sea utilizar una aproximación *Butterworth*, ahora bien, el problema de la aproximación *Butterworth* es que su «buen» comportamiento es a expensas de un aumento desmedido en la cantidad de componentes necesarios para su construcción, por lo que si se desea reducir esto se puede utilizar una aproximación *Chebyshev* a costa de mayor dificultad de calibración, o incluso puede utilizarse una aproximación *Cauer* para reducir todavía más la cantidad de componentes pero aumentando la probabilidad de fallas del circuito. Como se vé, *el diseño de filtros es una relación de múltiples compromisos*.

$$\text{Plantilla} \xrightarrow{\text{Aproximaciones}} \text{Transferencia}$$

3. La última cuestión a remarcar es entender el desacople entre las etapas de diseño. Primero se encuentran las tolerancias, es decir se define una suerte de “*plantilla*” en la que se especifican los límites que debe cumplir nuestro filtro. En segundo lugar se elige la función aproximación que permita conseguir el comportamiento deseado, es decir, cumplir con la plantilla propuesta en el paso anterior y tener una función transferencia que cumple con las especificaciones impuestas. Y el último paso, que **no es el objetivo de estudio de este apunte** es materializar la función transferencia en circuitos con amplificadores operacionales, resistencias, capacitores e inductores. Estos circuitos que permiten sintetizar una función transferencia se llaman “*Celdas*”, y será motivo de estudio en futuras clases.

$$\text{Transferencia} \xrightarrow{\text{Celda}} \text{Circuito}$$

1.1. Parámetros que caracterizan a una función transferencia

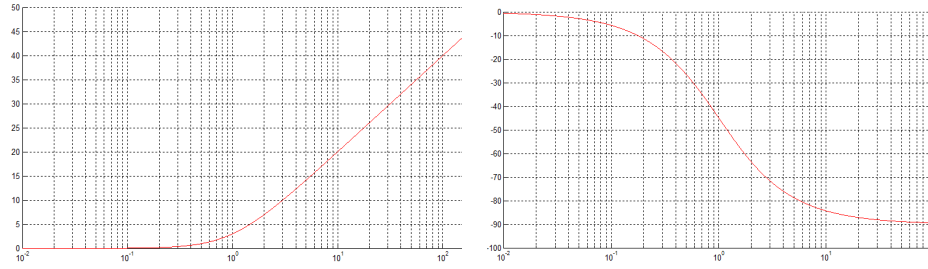
Dada una función transferencia $H(s)$ genérica de la siguiente forma:

$$H(s) = K \frac{b_0 + b_1 s + b_2 s^2 + \dots + b_M s^M}{a_0 + a_1 s + a_2 s^2 + \dots + a_N s^N} \quad (1)$$

Su respuesta en frecuencia será $H(s)|_{s=j\omega}$, es decir, se evalúa la variable compleja s en el eje imaginario $j\omega$ haciendo 0 su parte real.

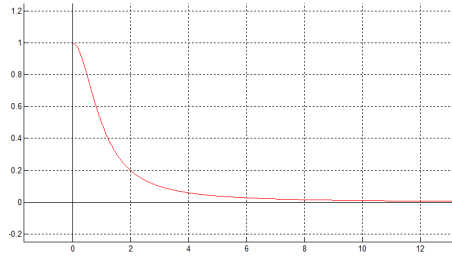
Se definen entonces los siguientes parámetros:

- Atenuación: $|A(j\omega)| = \frac{1}{|H(j\omega)|}$
- Fase: $\varphi(\omega) = \arctan \left\{ \frac{\text{Im}\{H(j\omega)\}}{\text{Re}\{H(j\omega)\}} \right\}$
- Retardo de Grupo: $\tau_g(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega}$



(a) Módulo de la respuesta en frecuencia - Atenuación

(b) Fase de la respuesta en frecuencia



(c) Retardo de Grupo de la respuesta en frecuencia

Figura 1: Ejemplo: $H(s) = \frac{1}{s+1}$

Los filtros se pueden diseñar para cumplir requisitos en función de cualquiera de los 3 parámetros. Se estudiarán en este apunte filtros que cumplan requisitos acerca de la atenuación o acerca del retardo de grupo (al definir el retardo de grupo, también se está definiendo la fase ya que la relación entre ambas es unívoca a excepción de una constante).

En primer lugar se plantearán métodos para cumplir restricciones respecto a la atenuación. Las funciones transferencias como la de la ecuación (1) no permiten diseñar filtros ideales. Un ejemplo de filtro ideal es uno tal que su atenuación sea de 0 dB (ganancia unitaria) para frecuencias menores a f_0 y de $\infty \text{ dB}$ (ganancia 0) para frecuencias mayores a f_0 . Por esta razón se definen *intervalos de tolerancia* donde las transferencias representan a un filtro ideal dentro de estos límites respecto a su magnitud (módulo de la respuesta en frecuencia). Se definen los siguientes modelos de plantillas:

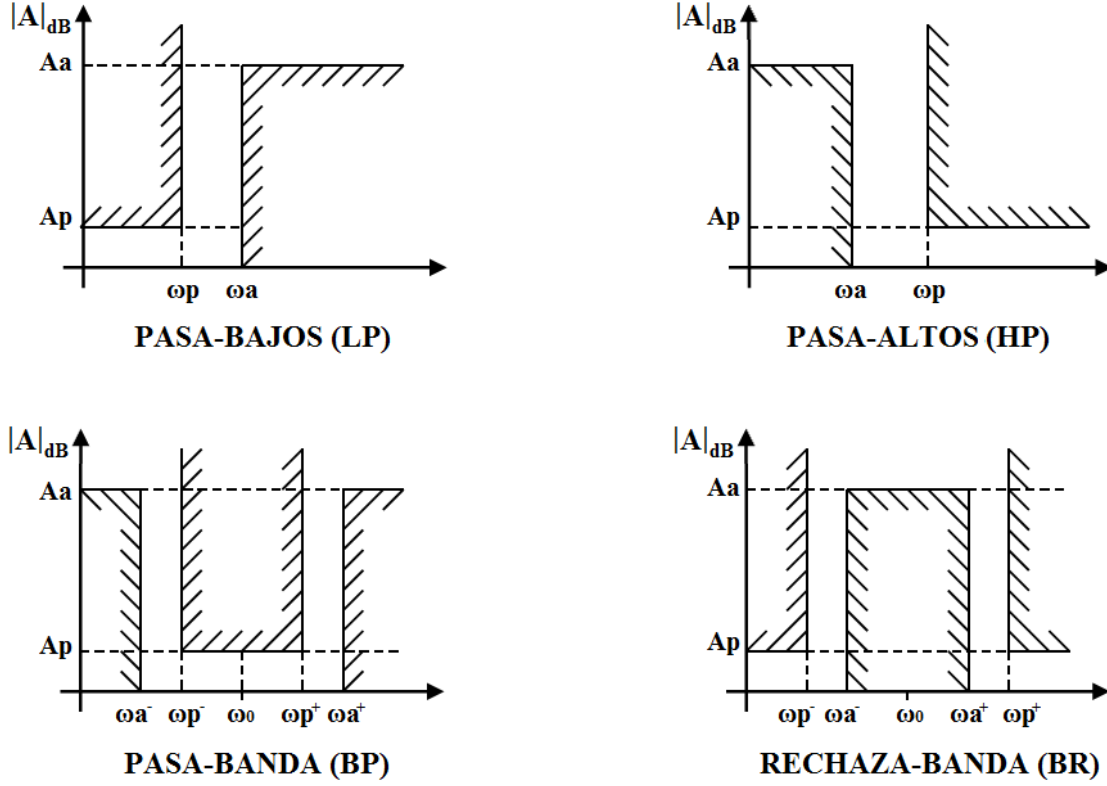


Figura 2: Plantillas de filtros

en donde

- A_a : mínima atenuación permitida en banda atenuada.
- A_p : máxima atenuación permitida en banda de paso.
- ω_a : primer/última $(-/+)$ frecuencia de la banda atenuada.
- ω_p : última/primer $(+/-)$ frecuencia de la banda de paso
- ω_0 : frecuencia central de un *pasa banda*/*rechaza banda*.

donde se debe cumplir con la condición de simetría geométrica: $\omega_0^2 = \omega_p^+ \cdot \omega_p^- = \omega_a^+ \cdot \omega_a^-$.

Además se define un ancho de banda relativo $B = \frac{\omega_p^+ - \omega_p^-}{\omega_0} = \frac{\Delta\omega_p}{\omega_0}$.

1.2. Condiciones necesarias para que la transferencia $H(s)$ sea realizable

1. **Invarianza en el tiempo:** Todos los componentes con los cuales se va a implementar el sistema son de valores fijos: resistencias, capacitores, amplificadores operacionales, etc.
2. **Causalidad:** La salida al momento t_i no puede depender de la entrada al momento t_j si $j > i$.
3. **Linealidad:** no es obligatorio, pero en este escrito solo se consideran aplicaciones lineales.

4. **Real:** dado que la respuesta al impulso de la transferencia es real, $H(s)$ cumple la siguiente propiedad

$$H^*(j\omega) = H(-j\omega) \quad (2)$$

5. **Racional:** no es necesario, pero todos los circuitos conocidos que emplean componentes pasivos y fuentes controladas se pueden analizar mediante ecuaciones diferenciales lineales que derivarán en funciones racionales en la variable de Laplace.

6. **Orden finito:** no es posible realizar filtros de infinitos componentes.

7. **Estabilidad:** dada una $H(s)$ racional y causal, los polos deben quedar en el semiplano izquierdo.

8. **Grado del numerador menor o igual al grado del denominador:** La respuesta en frecuencia de un filtro, con componentes que puedan realizarlo, siempre está acotada en el infinito. Utilizando la ecuación (1)

$$H(j\omega)|_{\omega \rightarrow \infty} \cong \frac{b_M(j\omega)^M}{a_N(j\omega)^N} = \begin{cases} 0 \leftrightarrow M < N \\ \frac{b_M}{a_N} \leftrightarrow M = N \\ \infty \leftrightarrow M > N \end{cases} \quad (3)$$

Entonces $M \leq N$.

9. **Polinomio del denominador con constante distinta de cero:** La respuesta en frecuencia de un filtro debe estar acotada en continua.

$$H(j\omega)|_{\omega \rightarrow 0} = K \frac{b_0}{a_0} \quad (4)$$

Entonces a_0 debe ser distinto de cero (El caso $b_0 = a_0 = 0$ no se tiene en consideración porque habría un cero en continua que se cancelaría con un polo en esta misma frecuencia).

1.3. Propiedades de $|H(j\omega)|^2$

Para realizar el diseño de filtros analógicos se diseñará en un principio $|H(j\omega)|^2$ de forma tal que $|H(j\omega)|$ cumpla con la plantilla especificada y se procederá a encontrar una $\hat{H}(s)$ que cumpla $|\hat{H}(s)|^2|_{s=j\omega} = |H(j\omega)|^2$. Nótese que en principio existen infinitas $\hat{H}(s)$ que cumplan esta condición:

$$|H(j\omega)|^2 = H(j\omega) \cdot H^*(j\omega) \quad (5)$$

Utilizando la ecuación (2) se obtiene

$$|H(j\omega)|^2 = H(j\omega) \cdot H(-j\omega) \quad (6)$$

De esta forma, $|H(j\omega)|^2$ tiene las siguientes propiedades:

- La función es un cociente de polinomios en ω , cuyos coeficientes son reales.
- Sólo hay potencias pares en ω .
- Si el numerador tiene raíces reales, éstas tendrán multiplicidad par.

1 INTRODUCCIÓN

1.4. Sistemas de fase mínima

Para poder asegurarse que $|H(j\omega)|^2$ parte de una única transferencia $H(s)$, se puede imponer la condición de que el sistema de fase mínima (se mostrará a continuación). Por ejemplo, existen infinitas $H(s)$ que satisfacen la condición $|H(j\omega)|^2 = 1$. La más sencilla es $H(s) = 1$, la cuál es de fase mínima; sin embargo un ecualizador de fase de primer orden $H(s) = \frac{-s+\omega_0}{s+\omega_0}$ también satisface la condición pero la diferencia de fase entre $\omega = 0$ y $\omega \rightarrow \infty$ es de -180° .

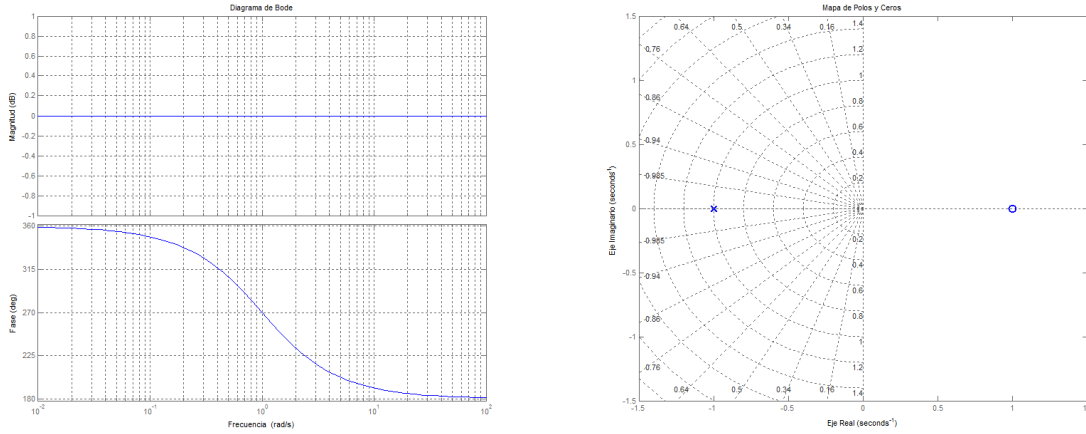


Figura 3: $H(s) = \frac{-s+\omega_0}{s+\omega_0}$ con $\omega_0 = 1$

En primer lugar, se puede asegurar que los polos estarán en el semiplano izquierdo por estabilidad. Ahora se demostrará que si no hay ceros en el semiplano derecho, el sistema será de fase mínima.

Si se evalúa a $H(s)$ en el eje $j\omega$ y se la descompone en parte real e imaginaria se obtiene

$$H(j\omega) = \text{Re}\{H(j\omega)\} + j \cdot \text{Im}\{H(j\omega)\} \quad (7)$$

Si $H(s)$ es **analítica en el semiplano derecho** entonces, utilizando **la Transformada de Hilbert**:

$$\begin{cases} \text{Im}\{H(j\omega)\} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re}\{H(j\xi)\}}{\omega - \xi} d\xi \\ \text{Re}\{H(j\omega)\} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Im}\{H(j\xi)\}}{\omega - \xi} d\xi + \text{Re}\{H(j\infty)\} \end{cases} \quad (8)$$

Es decir que toda $H(s)$ que sea analítica en el semiplano derecho queda totalmente determinada por su parte real o imaginaria ya que una es función de la otra.

Si ahora se descompone a $H(j\omega)$ en módulo y fase

$$H(j\omega) = e^{-\alpha(\omega)} \cdot e^{-j\varphi(\omega)} \quad (9)$$

y se llama

$$\gamma(j\omega) = -\ln(H(j\omega)) = \ln\left(\frac{1}{H(j\omega)}\right) \quad (10)$$

$$\gamma(j\omega) = -\ln\left(e^{-[\alpha(\omega)+j\varphi(\omega)]}\right) \quad (11)$$

$$\gamma(j\omega) = \alpha(\omega) + j\varphi(\omega) \quad (12)$$

Si $\gamma(j\omega)$ es analítica en el semiplano derecho de s entonces:

$$\begin{cases} \varphi(\omega) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\alpha(\xi)}{\omega - \xi} d\xi \\ \alpha(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\varphi(\xi)}{\omega - \xi} d\xi \end{cases} \quad (13)$$

Entonces si los ceros de $H(s)$, es decir los polos de $\gamma(s)$, no se encuentran en el semiplano derecho, se puede obtener la fase de $H(s)$ a partir de su módulo y viceversa. Este tipo de funciones se denominan de *fase mínima* y los filtros a diseñar cumplirán esta condición, de forma tal de que cuando se conozca $|H(s)|^2$ se pueda obtener fácilmente y de manera unívoca $H(s)$ conservando únicamente las singularidades del plano izquierdo (los polos por estabilidad y los ceros por fase mínima).

1.5. Normalización y desnormalización

Para estandarizar el cálculo de las aproximaciones, éstas se realizan en una plantilla de un pasa bajos normalizado. El método consiste en llevar la plantilla original a una plantilla normalizada mediante una normalización y luego llevar la función transferencia normalizada a la función transferencia que cumpla con la plantilla requerida mediante una desnormalización.

La plantilla normalizada es una plantilla pasabajos con las mismas atenuaciones que la original, $\omega_{pN} = 1$ y ω_{aN} definida por la siguiente tabla:

<i>Tipo de Filtro</i>	ω_{aN}
Pasa-bajos	$\frac{\omega_a}{\omega_p}$
Pasa-altos	$\frac{\omega_p}{\omega_a}$
Pasa-banda	$\frac{\Delta\omega_a}{\Delta\omega_p}$
Rechaza-banda	$\frac{\Delta\omega_p}{\Delta\omega_a}$

Cuadro 1: Normalización

Una vez obtenida la plantilla normalizada se diseña el filtro con alguno de los métodos propuestos más adelante y se procede a desnormalizar la función transferencia normalizada obtenida. Para eso se reemplaza la variable s de $H_N(s)$ según indica la siguiente tabla.

<i>Tipo de Filtro</i>	<i>Transformación</i>
Pasa-bajos	$s_N \rightarrow \frac{s}{\omega_p}$
Pasa-altos	$s_N \rightarrow \frac{\omega_p}{s}$
Pasa-banda	$s_N \rightarrow \frac{1}{B} \left(\frac{s}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{s} \right)$
Rechaza-banda	$s_N \rightarrow \frac{1}{\frac{1}{B} \left(\frac{s}{\omega_0} + \frac{\omega_0}{s} \right)}$

Cuadro 2: Desnormalización

Se define como selectividad k de un filtro a la relación que hay entre la frecuencia de paso y la de atenuación, es decir, la selectividad de un filtro es una medida de cuan estrecha es la banda de transición.

$$k = \frac{1}{\omega_{aN}} \quad (14)$$

Un filtro ideal tiene selectividad unitaria, mientras que los filtros reales deben tener selectividad menor a 1 porque la frecuencia de atenuación del pasa bajo normalizado será estrictamente mayor a la frecuencia de paso.

2. Aproximaciones por atenuación

2.1. Butterworth

La aproximación de Butterworth se diseña para tener *la mayor planicie posible en la banda de paso y que la transferencia sea monotonamente decreciente*. Para conseguir esto se propone que no haya ceros en la función transferencia (por la condición de monotonía) y que las primeras $2n - 1$ derivadas de $|H(j\omega_N)|$ (de orden $2n$) sean nulas en $\omega = 0$. Esto se consigue haciendo que en el denominador haya un polinomio de la forma $a \cdot \omega^{2n} + b$.

2.1.1. Forma General

$$|H(j\omega_N)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \omega_N^{2n}} \quad (15)$$

2.1.2. Determinación de Coeficientes

En el diseño de aproximaciones se parte de un filtro pasabajos normalizado con $\omega_{pN} = 1$, donde se impone que la atenuación en ω_{pN} sea A_p . De esta forma se puede obtener el valor de ε como muestra la siguiente ecuación:

$$|H(j\omega_{pN})|^2 = \left(10^{\frac{-A_p[dB]}{20}}\right)^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \omega_{pN}^{2n}} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \quad (16)$$

despejando ε resulta:

$$\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_p[dB]}{10}} - 1} \quad (17)$$

Ya se ha determinado el valor de ε . Ahora es necesario determinar el valor de n , es decir, *el orden del filtro*.

El orden de un filtro es la cantidad de polos que tiene su pasabajos normalizado. Para eso se utilizan los datos A_a y ω_{aN} como se muestra en la siguiente ecuación:

$$|H(j\omega_{aN})|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 \omega_{aN}^{2n}} \leq \left(10^{\frac{-A_a[dB]}{20}}\right)^2 \quad (18)$$

En este caso el valor de la transferencia en ω_{aN} debe ser menor o igual al especificado ya que la atenuación A_a es la mínima para el punto ω_{aN} . Despejando se obtiene:

$$n \geq \frac{\log\left(\frac{10^{\frac{A_a[dB]}{10}} - 1}{\varepsilon^2}\right)}{2 \cdot \log(\omega_{aN})} \quad (19)$$

como n debe ser un número entero para que la transferencia sea lineal, éste queda definido por la siguiente ecuación.

$$n_{MfN} = \left\lceil \frac{\log\left(\frac{10^{\frac{A_a[dB]}{10}} - 1}{10^{\frac{A_p[dB]}{10}} - 1}\right)}{2 \cdot \log(\omega_{aN})} \right\rceil \quad (20)$$

2.1.3. Lugar de Singularidades

En este momento los valores de ε y de n ya son conocidos. Tomando $\omega = s/j = -js$, y utilizando la ecuación (15), $|H(s)|^2$ queda definida por la siguiente ecuación.

$$|H(s)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 (-js)^{2n}} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 s^{2n} (-1)^n} \quad (21)$$

Los polos de $|H(s)|^2$ se encuentran en

$$p_{Nk} = \begin{cases} \rho \cdot e^{j\pi(\frac{2k-1}{2n})} & n \text{ par} \\ \rho \cdot e^{j\pi(\frac{k-1}{n})} & n \text{ impar} \end{cases} \quad (22)$$

con $k \in [0, 2n]$ y $\rho = \frac{1}{\sqrt[n]{\epsilon}}$.

Nótese que la separación angular entre polos es $\theta = \frac{\pi}{n}$ y que la distancia del primer polo al eje $j\omega$ es $\frac{\theta}{2}$, es decir, *los polos se encuentran sobre el perímetro de una circunferencia de radio $\frac{1}{\sqrt[n]{\epsilon}}$.*

Una vez determinada $|H(s)|^2$ se debe obtener la forma de $H(s)$. Para eso hay que recordar que **se desea una transferencia de fase mínima** por lo que se conservarán las singularidades del semiplano izquierdo. Esto es similar con el resto de las aproximaciones y se puede observar en la siguiente figura en la que se ven a modo de ejemplo las singularidades de una aproximación Butterworth de orden 5 y los diferentes parámetros que se mencionaron.

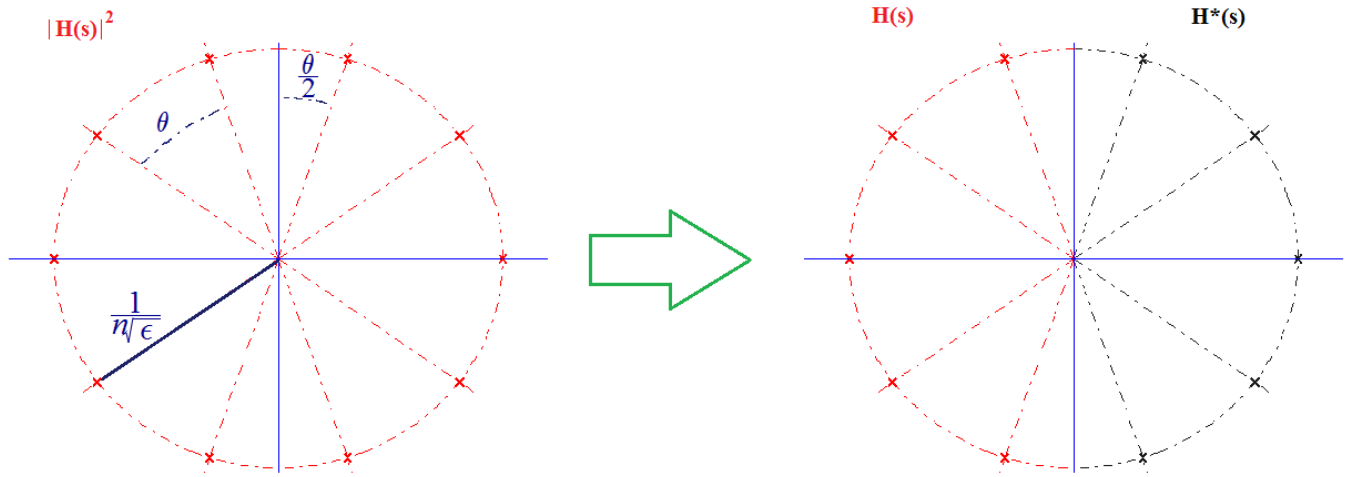


Figura 4: Singularidades de una aproximación Butterworth de orden 5

2.1.4. Características

- Máxima planicie en banda de paso (las primeras $2n - 1$ derivadas para $\omega = 0$ son nulas).
- $|H(j\omega)|$ monótona decreciente ($|A(j\omega)|$ monótona creciente).
- Pendiente en banda atenuada de $20n \text{ dB/dec}$.
- Baja selectividad.

2.1.5. Ejemplo de aplicación

Suponga que se tiene una plantilla pasa-bajos normalizada con las siguientes características:

ω_p	1 rad/seg
ω_a	$1,5 \text{ rad/seg}$
A_p	3 dB
A_a	30 dB

Cuadro 3: Parámetros ejemplo Butterworth

Se eligió $\omega_p = 1$ para que la plantilla ya esté normalizada por defecto. Utilizando la ecuación (17) se obtiene $\epsilon = 1$ y utilizando la ecuación (20) se obtiene $n_{min} = 9$. Esto quiere decir que utilizando un filtro Butterworth

de orden menor a 9 no se podrá cumplir la plantilla. La siguiente figura muestra la atenuación en función de la frecuencia de la aproximación con $n = 1..,9$.

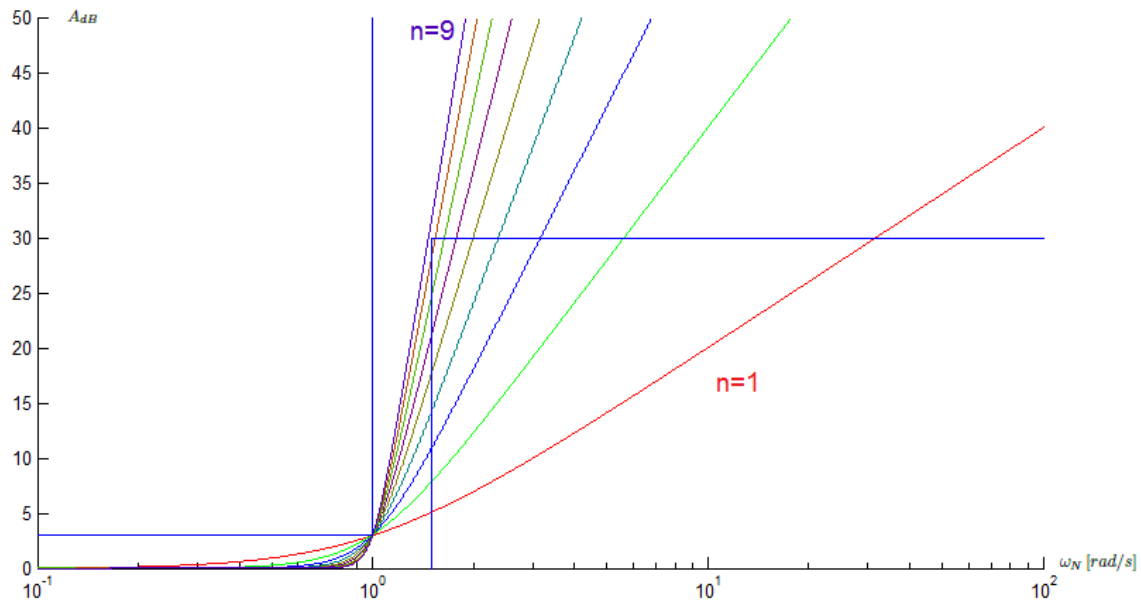


Figura 5: Ejemplo Butterworth - Atenuación

Se puede observar que para órdenes menores a 9, la atenuación en banda atenuada no llega a los 30 dB requeridos por plantilla. En las siguientes figuras se puede observar la fase en función de la frecuencia y el retardo de grupo de las mismas aproximaciones.

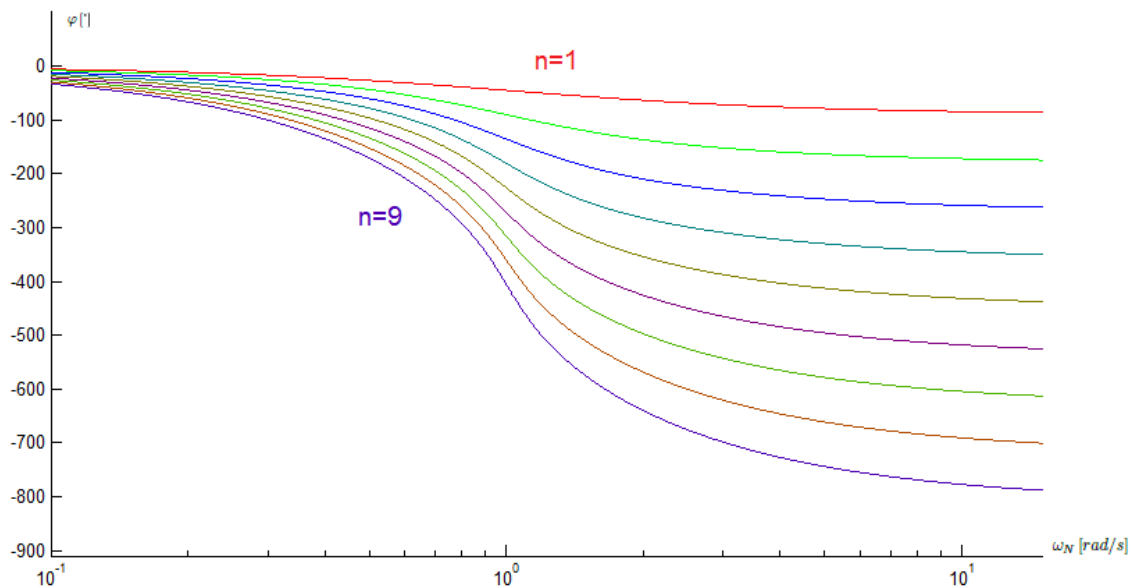


Figura 6: Ejemplo Butterworth - Fase

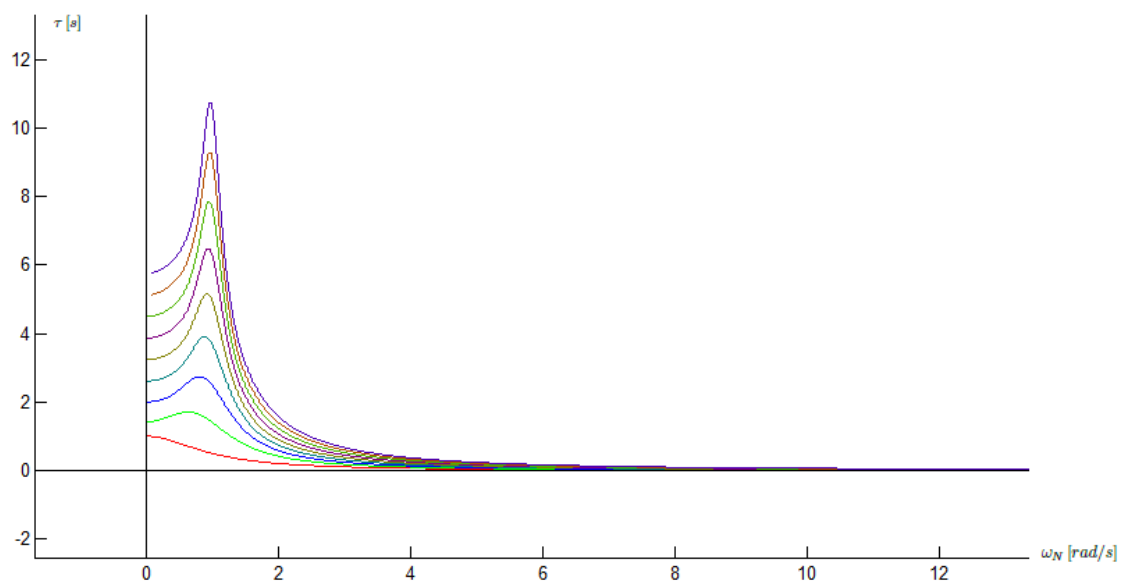


Figura 7: Ejemplo Butterworth - Retardo de Grupo

2.2. Chebycheff I

Como se vió en el ejemplo anterior, una aproximación de Butterworth requiere de ordenes relativamente altos para cumplir con las plantillas propuestas. En cambio, *la aproximación de Chebycheff permite conseguir las mismas selectividades que Butterworth con ordenes menores*, a costa de sacrificar la condición de monotonía. Entonces permitiendo que la función transferencia varíe entre 1 y el límite de la banda de paso se consiguen menores banda de transición respecto de la aproximación Butterworth.

2.2.1. Forma General

$$|H(j\omega_N)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega_N)} \quad (23)$$

donde $T_n(\omega_N)$ es el n-ésimo **polinomio de Chebycheff** y está definido por la siguiente ecuación:

$$T_n(\omega_N) = \begin{cases} \cos(n \cdot \arccos(\omega_N)) & \omega_N \leq 1 \\ \cosh(n \cdot \operatorname{arcosh}(\omega_N)) & \omega_N > 1 \end{cases} \quad (24)$$

Nótese que en realidad $\cos(n \cdot \arccos(\omega_N)) = \cosh(n \cdot \operatorname{arcosh}(\omega_N)) \forall \omega_N$ porque el $\arccos(\cdot)$ de una magnitud mayor a 1 es un número complejo. Pero para realizar la operación y no tener que operar con números complejos (lo cual es más costoso que operar con números reales) se define a estos polinomios de forma diferente en función de si su variable independiente es menor o mayor a la unidad.

Se puede realizar el cambio de variable $\omega_N = \cos(x)$, ($x = \arccos(\omega_N)$), quedando definido:

$$\hat{T}_n(x) = \cos(nx) \quad (25)$$

Forma de Recurrencia

- $T_0(\omega_N) = 1$
- $T_1(\omega_N) = \cos(x) = \omega_N$
- $T_2(\omega_N) = \cos(2x) = \cos^2(x) - \operatorname{sen}^2(x) = 2 \cdot \cos^2(x) - 1 = 2 \cdot \omega_N^2 - 1$
- $T_3(\omega_N) = \cos(3x) = \cos(2x + x) = -3 \cdot \cos(x) + 4 \cdot \cos^3(x) = -3 \cdot \omega_N + 4 \cdot \omega_N^3$
- ...
- $T_{n+1}(\omega_N) = 2 \cdot \omega_N \cdot T_n(\omega_N) - T_{n-1}(\omega_N)$

Propiedades de $T_n(\omega_N)$

1. $0 \leq |T_n(\omega_N)| \leq 1 \quad \forall |\omega_N| < 1$
 $1 \leq |T_n(\omega_N)| \leq \infty \quad \forall |\omega_N| \geq 1$
2. $T_n(\omega_N + \delta) > T_n(\omega_N) \quad \forall |\omega_N| \geq 1, \delta > 0$
3. $T_n(0) = 1 \quad \forall n \text{ par}$
 $T_n(0) = 0 \quad \forall n \text{ impar}$
4. $T_n(1) = 1 \quad \forall n$

2.2.2. Determinación de Coeficientes

En primer lugar se determina el valor del coeficiente ε . Utilizando $\omega_{pN} = 1$, la ecuación (23) y la propiedad 4 se obtiene la siguiente ecuación:

$$|H(j\omega_{pN})|^2 = \left(10^{\frac{-A_p[dB]}{20}}\right)^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega_{pN})} = \frac{1}{1 + \varepsilon^2} \quad (26)$$

despejando ε :

$$\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_p[dB]}{10}} - 1} \quad (27)$$

En segundo lugar se determina el orden n

$$|H(j\omega_{aN})|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega_{aN})} \quad (28)$$

y como $\omega_{aN} > \omega_{pN} = 1$, los polinomios se escribirán en su forma hiperbólica.

$$|A(j\omega_{aN})|^2 = \left(10^{\frac{A_a[dB]}{20}}\right)^2 \leq 1 + \varepsilon^2 T_n^2(\omega_{aN}) = 1 + \varepsilon^2 \cosh^2(n \cdot \operatorname{arcosh}(\omega_{aN})) \quad (29)$$

despejando

$$n \geq \frac{\operatorname{arcosh}\left(\frac{\sqrt{10^{\frac{A_a[dB]}{10}} - 1}}{\varepsilon}\right)}{\operatorname{arcosh}(\omega_{aN})} \quad (30)$$

y como n tiene que ser un número natural

$$n_{MÍN} = \left\lceil \frac{\operatorname{arcosh}\left(\frac{\sqrt{10^{\frac{A_a[dB]}{10}} - 1}}{\sqrt{10^{\frac{A_p[dB]}{10}} - 1}}\right)}{\operatorname{arcosh}(\omega_{aN})} \right\rceil \quad (31)$$

Nótese la similitud con la expresión del orden mínimo para la aproximación Butterworth de la ecuación (20). La única diferencia con la aproximación de Butterworth es la función empleada en el denominador, por lo que si el análisis se hiciese genérico para una función $F(\omega_N)$ se llegarían a expresiones validas para las 2 aproximaciones en las que simplemente habría que reemplazar a esta función por la correspondiente en cada aproximación.

2.2.3. Lugar de singularidades

Utilizando el cambio de variable $\omega = \frac{s}{j} = -js$, se llega a que $x = \arccos(\frac{s}{j}) = \alpha + j\beta$, por lo que $s = j \cdot \cos(\alpha + j\beta)$. De esta forma:

$$s = \sigma + j\omega = j \cdot \cos(\alpha + j\beta) \quad (32)$$

utilizando la siguiente propiedad trigonométrica:

$$\cos(A + jB) = \cos(A) \cdot \cosh(B) - j \cdot \sen(A) \cdot \sinh(B) \quad (33)$$

se obtiene $\sigma + j\omega = \sen(\alpha) \cdot \sinh(\beta) + j \cdot \cos(\alpha) \cdot \cosh(\beta)$ que corresponde al sistema:

$$\begin{cases} \sigma_N = \sen(\alpha) \cdot \sinh(\beta) \\ \omega_N = \cos(\alpha) \cdot \cosh(\beta) \end{cases} \quad (34)$$

Se procede ahora a encontrar las raíces del denominador de la ecuación (23).

$$0 = 1 + \varepsilon \cdot \cos^2(nx) = (1 + j\varepsilon \cdot \cos(nx)) \cdot (1 - j\varepsilon \cdot \cos(nx)) \quad (35)$$

2 APROXIMACIONES POR ATENUACIÓN

despejando:

$$\cos(n(\alpha + j\beta)) = \cos(nx) = \pm \frac{j}{\varepsilon} \quad (36)$$

y utilizando la propiedad (33) se puede escribir al sistema como:

$$\begin{cases} \sen(n\alpha) \cdot \sinh(n\beta) = \pm \frac{1}{\varepsilon} \\ \cos(n\alpha) \cdot \cosh(n\beta) = 0 \end{cases} \quad (37)$$

resolviendo el sistema:

$$\begin{cases} \alpha = \frac{2k-1}{2n}\pi \\ \beta = \pm \frac{1}{n} \operatorname{arcsenh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \end{cases} \quad \text{con } k \in [0, n-1] \quad (38)$$

reemplazando en el sistema (34) se obtiene el lugar de los polos normalizados $p_{Nk} = \sigma_k + j\omega_k$ de $|H(s)|^2$.

$$\begin{cases} \sigma_k = \mp \sen\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \cdot \sinh\left(\frac{1}{n} \cdot \operatorname{arcsenh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right) \\ \omega_k = \cos\left(\frac{2k-1}{2n}\pi\right) \cdot \cosh\left(\frac{1}{n} \cdot \operatorname{arcsenh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right) \end{cases} \quad (39)$$

Para obtener $H(s)$ a partir de $|H(s)|^2$ se deben conservar los polos que se encuentren en el semiplano izquierdo del plano S , es decir, aquellos p_{Nk} con σ_k negativo.

Elevando ambos miembros al cuadrado y utilizando la propiedad $\sen^2(A) + \cos^2(A) = 1$ se puede llegar a la siguiente expresión:

$$\frac{\sigma_k^2}{\sinh^2\left(\frac{1}{n} \operatorname{arcsenh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)} + \frac{\omega_k^2}{\cosh^2\left(\frac{1}{n} \operatorname{arcsenh}\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)\right)} = \frac{\sigma_k^2}{a^2} + \frac{\omega_k^2}{b^2} = 1 \quad (40)$$

La expresión(40) corresponde a la **ecuación de una elipse en el plano s donde el eje mayor de largo b estará en el eje $j\omega$** . Esto se puede observar en el diagrama de polos y ceros de $|H(s)|^2$ para un filtro Chebycheff I de orden 5 mostrado a modo de ejemplo en la siguiente figura:

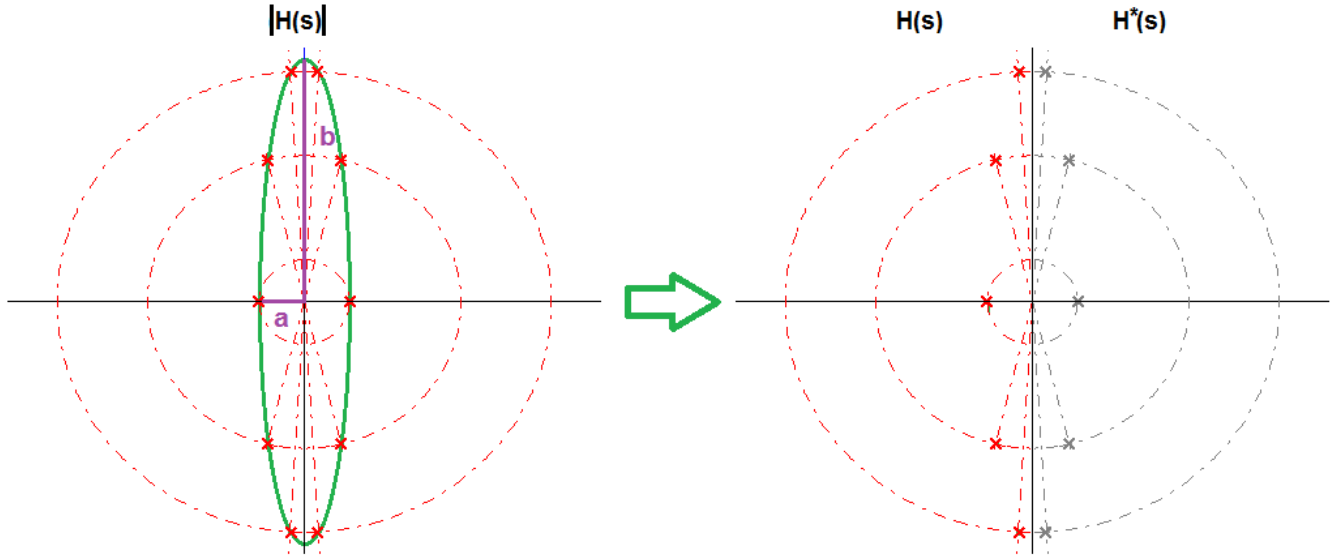


Figura 8: Polos Chebycheff orden 5

2.2.4. Características:

- Respuesta con ripple constante en la banda de paso.
- $|A(j\omega)|_{dB} = \begin{cases} 0 & n \text{ impar} \\ A_p & n \text{ par} \end{cases}$
- Monótona decreciente para $\omega_N > \omega_{pN} = 1$.
- Pendiente de $20n \text{ dB/dec}$ en banda atenuada.
- Buena selectividad, menor estabilidad.
- Elevada distorsión de fase.

2.2.5. Ejemplo de aplicación

Utilizando la misma plantilla que la de la tabla 3 se propone realizar un filtro con la aproximación Chebycheff *I*. Se obtuvieron $\varepsilon = 1$ mediante la ecuación (27) y un orden mínimo de 5 a partir de la ecuación (31).

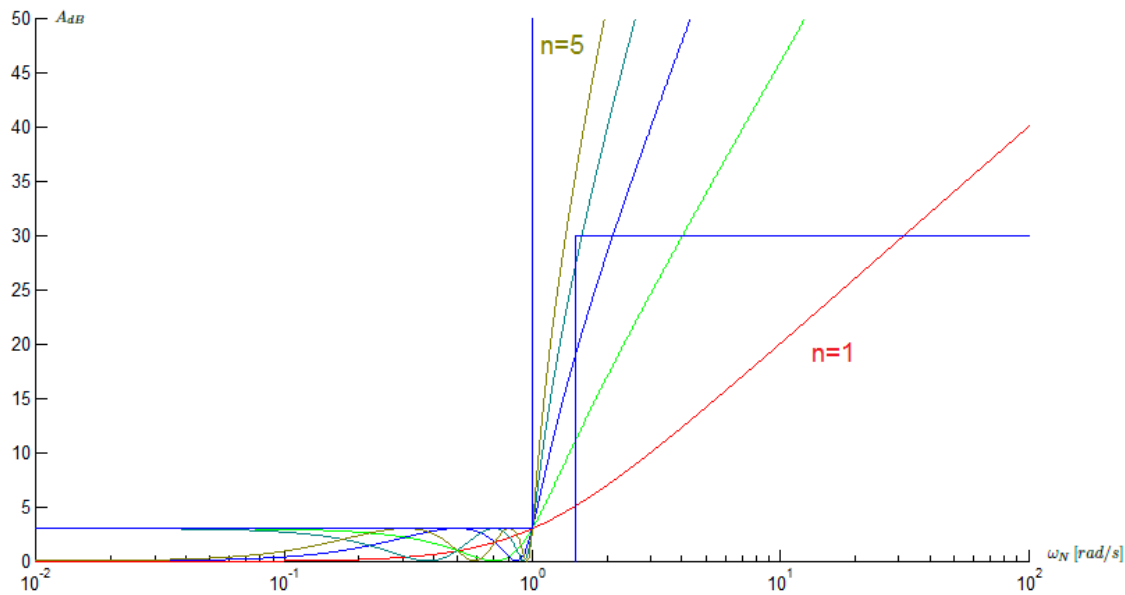
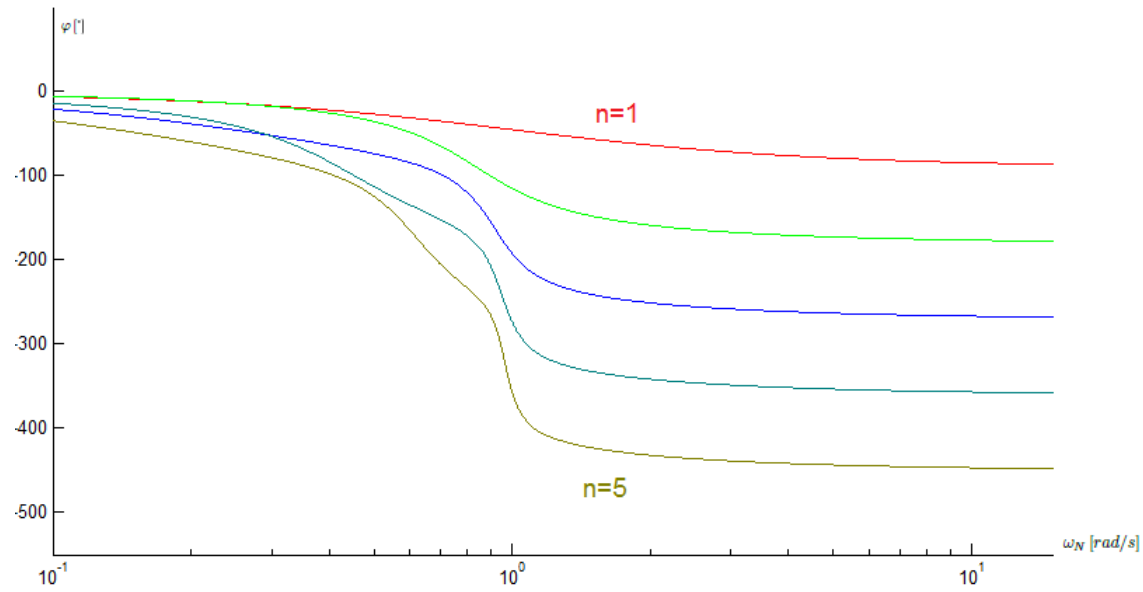
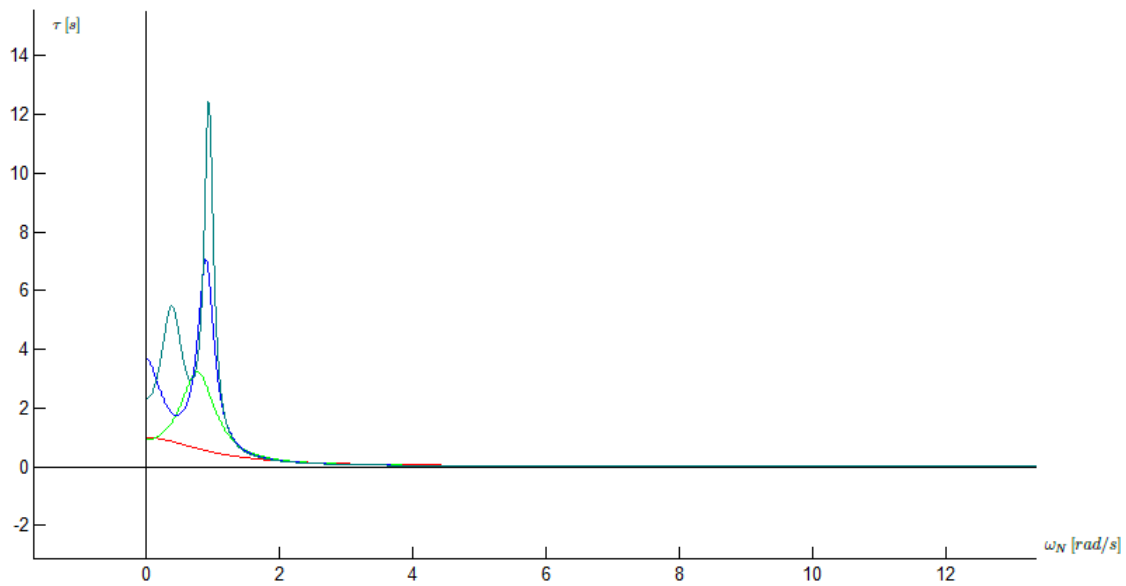


Figura 9: Ejemplo Chebycheff *I* - Atenuación

Figura 10: Ejemplo Chebycheff *I* - FaseFigura 11: Ejemplo Chebycheff *I* - Retardo de Grupo

Nótese que en el retardo de grupo de una aproximación Chebycheff *I* hay tantos puntos con derivada nula como en la atenuación.

2.3. Chebycheff II (Inverso)

Las aproximaciones anteriores tienen en la banda de atenuación una pendiente de $20n\text{ dB/dec}$, es decir una atenuación que crece proporcionalmente a la frecuencia. En algunas aplicaciones, sólo se requiere que la atenuación esté por encima de A_p . Por ejemplo si $A_p = 40\text{ dB}$ y se tiene una aproximación que oscila con un mínimo de 45 dB , esta cumplirá la plantilla. La aproximación de Chebycheff II se basa en esta propiedad.

2.3.1. Forma General

La aproximación de Chebycheff II se define de la siguiente manera:

$$|H(j\omega_N)|^2 = 1 - \frac{1}{1 + \varepsilon^2 T_n^2\left(\frac{1}{\omega_N}\right)} \quad (41)$$

Esta expresión muestra que la aproximación de Chebycheff II se basa en la aproximación inversa de Chebycheff I, realizando el cambio de variable $\omega_N = \frac{1}{\omega_{N \text{ Chebishev I}}}$, es decir, es la inversa de una aproximación Chebycheff I pasaalto. La siguiente figura ilustra esta transformación:

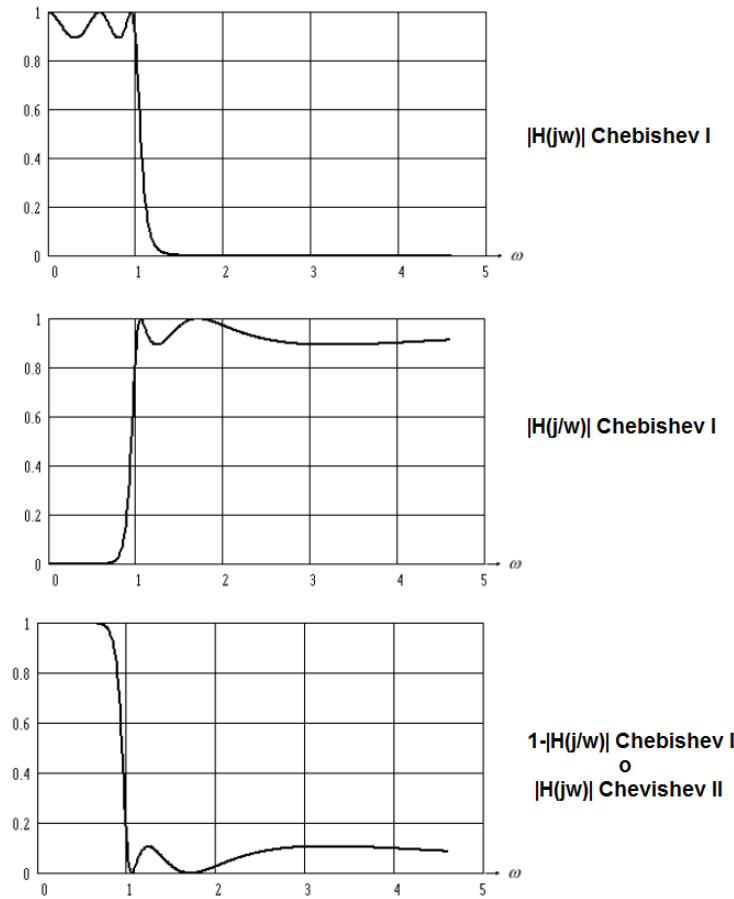


Figura 12: Chebycheff I a Chebycheff II

La ecuación (41) puede ser reescrita como:

$$|H(j\omega_N)|^2 = \frac{\varepsilon^2 T_n^2\left(\frac{1}{\omega_N}\right)}{1 + \varepsilon^2 T_n^2\left(\frac{1}{\omega_N}\right)} \quad (42)$$

2.3.2. Determinación de Coeficientes

De forma análoga que en la aproximación Chebycheff *I* se pueden despejar los valores de ε y del orden mínimo tomando $\omega_{pN} = 1$.

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{10^{\frac{A_a[dB]}{10}} - 1}} \quad (43)$$

$$n_{MÍN} = \left\lceil \frac{\operatorname{arcosh} \left(\frac{1}{\varepsilon \sqrt{10^{\frac{A_p[dB]}{10}} - 1}} \right)}{\operatorname{arcosh}(\omega_{aN})} \right\rceil \quad (44)$$

Nótese que si en las ecuaciones de los órdenes mínimos de Chebycheff *I* y *II* se reemplaza ε por su expresión correspondiente, en ambos casos el orden mínimo queda definido como

$$n_{MÍN} = \left\lceil \frac{\operatorname{arcosh} \left(\frac{\sqrt{10^{\frac{A_a[dB]}{10}} - 1}}{\sqrt{10^{\frac{A_p[dB]}{10}} - 1}} \right)}{\operatorname{arcosh}(\omega_{aN})} \right\rceil \quad (45)$$

por lo que *dada una plantilla, el orden mínimo será el mismo para una aproximación Chebycheff I o II.*

2.3.3. Lugar de Singularidades

Partiendo de la expresión (42) y haciendo un desarrollo análogo al de la aproximación Chebycheff *I*, se puede obtener el lugar de los polos y los ceros de $|H(j\omega_N)|^2$. Éstos están dados por las siguientes expresiones:

$$p_{Nk} = \omega_{aN} \frac{1}{\operatorname{sen}(\alpha_k) \cdot \operatorname{senh}(\beta) + j \cdot \cos(\alpha_k) \cdot \cosh(\beta)} \quad (46)$$

$$z_{Nk} = \omega_{aN} \frac{j}{\cos(\alpha_k)} \quad (47)$$

donde:

$$\alpha_k = \frac{2k-1}{2n} \pi \quad k \in [1, 2n] \quad (48)$$

$$\beta = \left| \frac{1}{n} \cdot \operatorname{arcsenh} \left(\frac{1}{\varepsilon} \right) \right| \quad (49)$$

Para obtener $H(s)$ basta con quedarse con las singularidades que se encuentran en el semiplano izquierdo del plano s . Como los ceros se encuentran en el eje $j\omega$, cada par aportará un cero a $H(s)$ y otro a $H^*(s)$ por lo que para obtener los ceros de $H(s)$ hay que quedarse con uno de cada par.

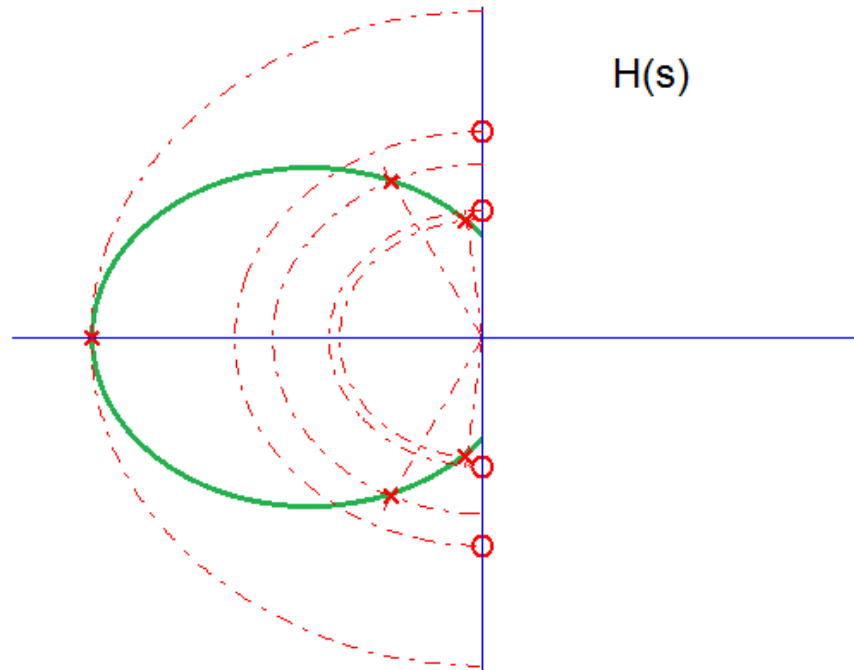


Figura 13: Polos y Ceros Chebycheff II orden 5

Nótese que en el caso de Chebycheff *II* los polos también están inscriptos en una elipse, aunque esta *no está necesariamente centrada en el eje $j\omega$* .

2.3.4. Características

- Respuesta con ripple en la banda atenuada
- $|H(j\omega)|$ monótona decreciente en banda de paso y transición.
- Presenta *ceros de transmisión en banda atenuada*.
- Mismo orden mínimo que Chebycheff *I* pero polos con menor Q .
- Saltos de 180° en la fase debido a cada cero de transmisión.
- Pendiente de 20 dB/década luego de los ceros si el orden es impar. Pendiente de 0 dB/década luego de los ceros si el orden es par.

2.3.5. Ejemplo de aplicación

Utilizando la misma plantilla que la de la tabla 3 se propone realizar un filtro con la aproximación Chebycheff *II*. Se obtuvieron $\varepsilon = 1$ mediante la ecuación (27) y un orden mínimo de 5 a partir de la ecuación (45) al igual que para Chebycheff *I*.

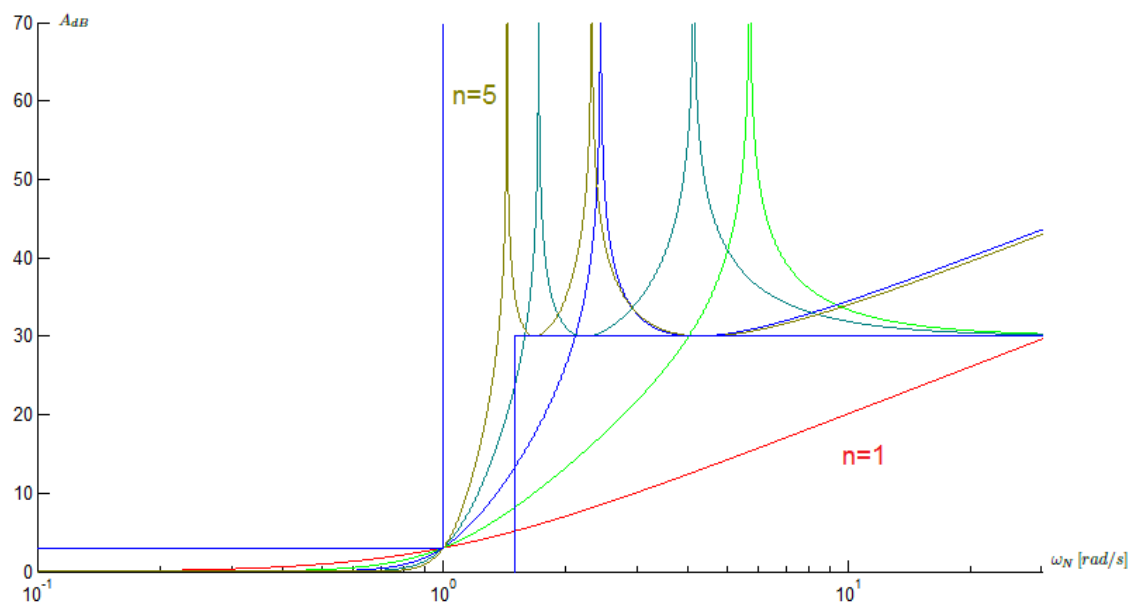


Figura 14: Ejemplo Chebycheff II - Atenuación

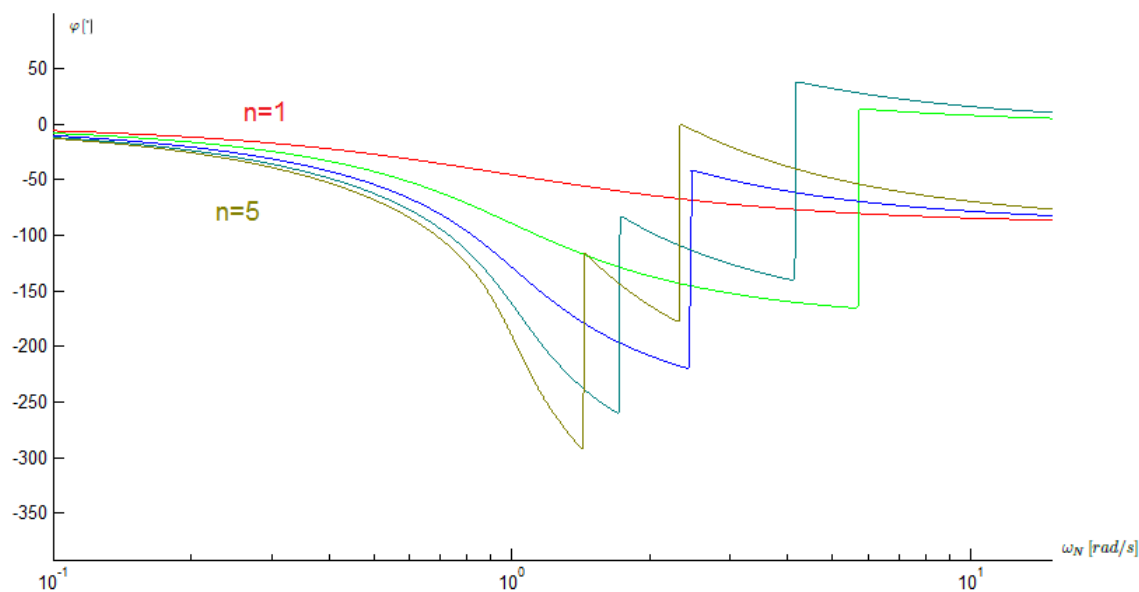
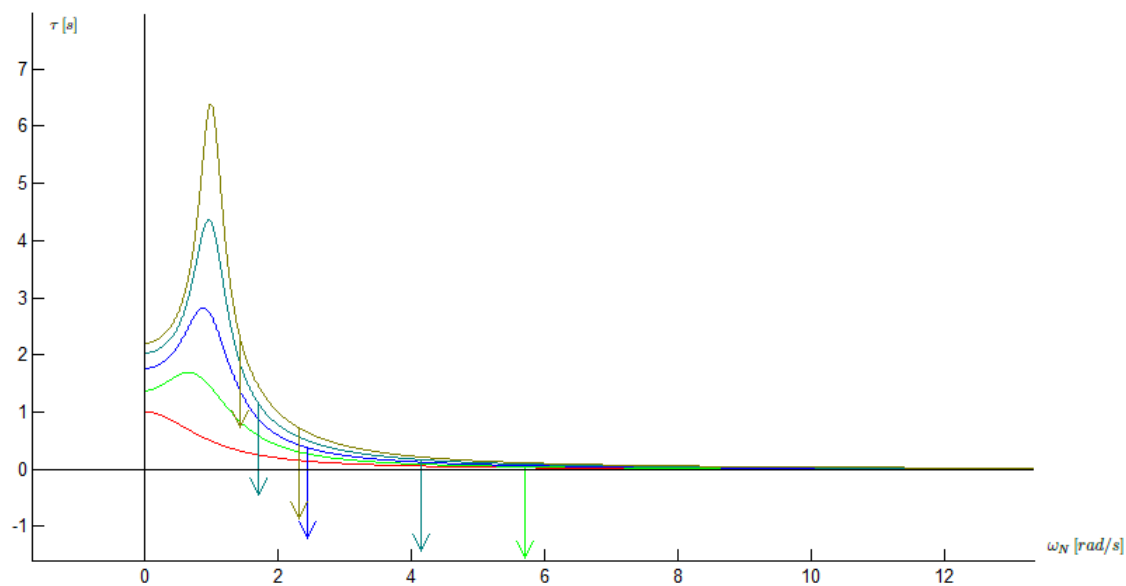


Figura 15: Ejemplo Chebycheff II - Fase

Figura 16: Ejemplo Chebycheff *II* - Retardo de Grupo

2.4. Legendre

La aproximación Legendre[2] surge como necesidad de una menor banda de transición respecto a la aproximación Butterworth pero sin tener oscilaciones en la banda de paso como en Chebycheff *I*. Para conseguir esto se usan los polinomios de Legendre en la forma genérica $\frac{1}{1+\varepsilon^2 F^2(\omega)}$ de la transferencia. Esta aproximación es conocida también bajo el nombre de *Papoulis*.

2.4.1. Forma General

$$|H(j\omega_N)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 L_n(\omega_N^2)} \quad (50)$$

donde $L_n(\omega_N)$ se definen a partir de los polinomios de Legendre como:

$$L_n(\omega_N^2) = \begin{cases} \int_{-1}^{2\omega_N^2-1} \left[\sum_{i=0}^k a_i P_i(x) \right]^2 dx & n \text{ impar} \quad n = 2k+1 \\ \int_{-1}^{2\omega_N^2-1} (x+1) \left[\sum_{i=0}^k a_i P_i(x) \right]^2 dx & n \text{ par} \quad n = 2k+2 \end{cases} \quad (51)$$

donde $P_i(x)$ es el polinomio de Legendre de orden i que responde a la siguiente ecuación.

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \left[(x^2 - 1)^n \right] \quad (52)$$

los polinomios responden a la siguiente fórmula de recurrencia:

$$(n+1) \cdot P_{n+1}(x) = (2n+1) \cdot x \cdot P_n(x) - n \cdot P_{n-1}(x) \quad (53)$$

Las constantes a_i se pueden determinar de acuerdo a la siguiente tabla:

$n \text{ impar}$	k	$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2(k+1)}}$	$a_i = (2i+1)a_0$
$n \text{ par}$	$k \text{ impar}$	$a_0 = \frac{1}{\sqrt{(k+1)(k+2)}}$	$a_i = (2i+1)a_0 \quad i \text{ par}$ $a_i = 0 \quad i \text{ impar}$
$n \text{ par}$	$k \text{ par}$	$a_1 = \frac{3}{\sqrt{(k+1)(k+2)}}$	$a_i = \frac{(2i+1)a_3}{3} \quad i \text{ impar}$ $a_i = 0 \quad i \text{ par}$

Cuadro 4: Constantes a_i

Propiedades de $L_n(\omega_N^2)$

1. $L_n(0) = 0$
2. $L_n(1) = 1$
3. $\frac{dL_n(\omega_N^2)}{d\omega_N} \geq 0$ (son monótonos crecientes)
4. $\left. \frac{dL_n(\omega_N^2)}{d\omega_N} \right|_{\omega_N=\omega_{pN}=1} = \text{MÁX} \left\{ \frac{dL_n(\omega_N^2)}{d\omega_N} \right\}$ (máxima derivada en ω_{pN})

2.4.2. Determinación de Coeficientes

En primer lugar se procede a calcular el valor de ε que viene dado por la siguiente expresión.

$$\varepsilon = \sqrt{10^{\frac{A_p[dB]}{10}} - 1} \quad (54)$$

para elegir el mínimo orden necesario se parte de la expresión (50) y se obtiene la siguiente ecuación.

$$L_n(\omega_{aN}^2) \geq \log \left(\frac{10^{\frac{A_a[dB]}{10}} - 1}{\varepsilon^2} \right) \quad (55)$$

Ya que obtener el mínimo orden a partir de la expresión (55) es poco práctico, se lo puede obtener de forma iterativa.

2.4.3. Lugar de Singularidades

En este caso no resulta práctico obtener fórmulas cerradas para determinar el lugar de las singularidades para un orden genérico, por lo que se procede una vez encontrado los valores de ε y n a utilizar la ecuación (50) y realizar el cambio de variable $\omega_N = -js$ y se obtiene la siguiente expresión.

$$|H(s)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 L_n(s^2)} \quad (56)$$

Ahora sólo basta con conservar los polos del semiplano izquierdo para obtener $H(s)$.

Se puede observar que para un mismo orden, los polos de una aproximación de Legendre tendrán mayor factor de calidad que los de una aproximación de Butterworth pero menor que los de una aproximación de Chebycheff I .

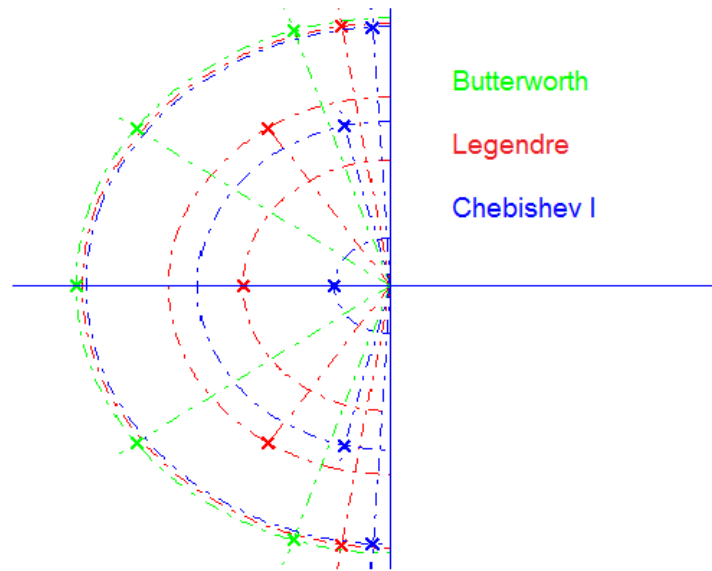


Figura 17: Polos Legendre orden 5

2.4.4. Características

- Máxima derivada de $|A(j\omega_N)|$ en $\omega_N = \omega_{pN} = 1$ para aproximaciones sin ripple.
- $|A(j\omega_N)|$ monótona creciente (un punto con derivada nula) → sin ripple en banda de paso.
- Menos selectivo que Chebycheff I y II pero más estable.

2.4.5. Ejemplo de aplicación

Utilizando la misma plantilla que la de la tabla 3 se propone realizar un filtro con la aproximación Legendre. Se obtuvieron $\varepsilon = 1$ mediante la ecuación (27) y un orden mínimo de 6. En este caso el orden mínimo se obtuvo por iteración.

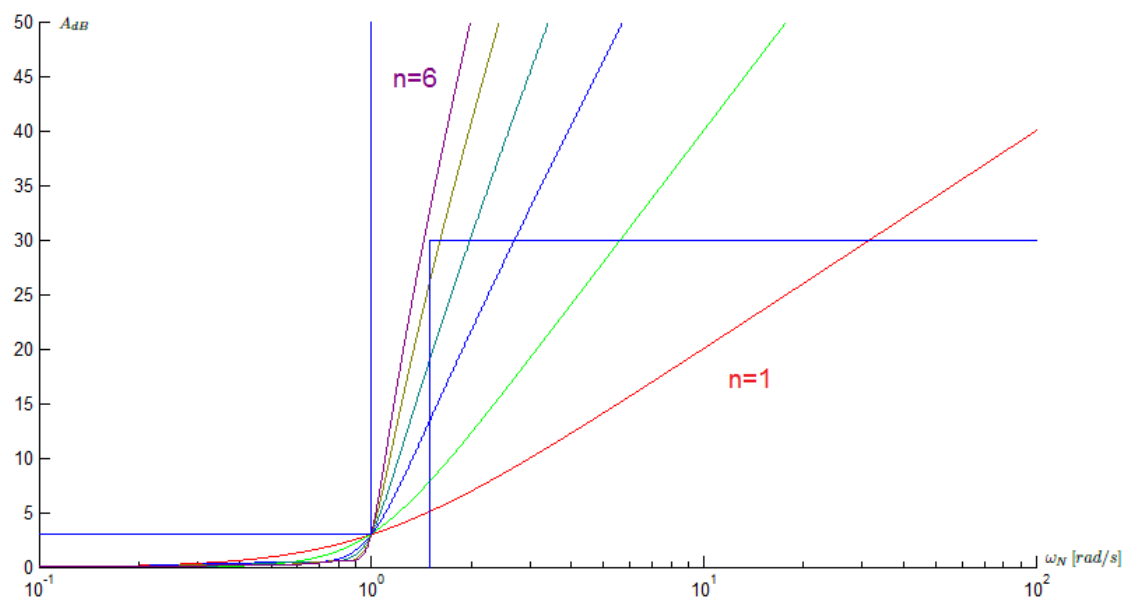


Figura 18: Ejemplo Legendre - Atenuación

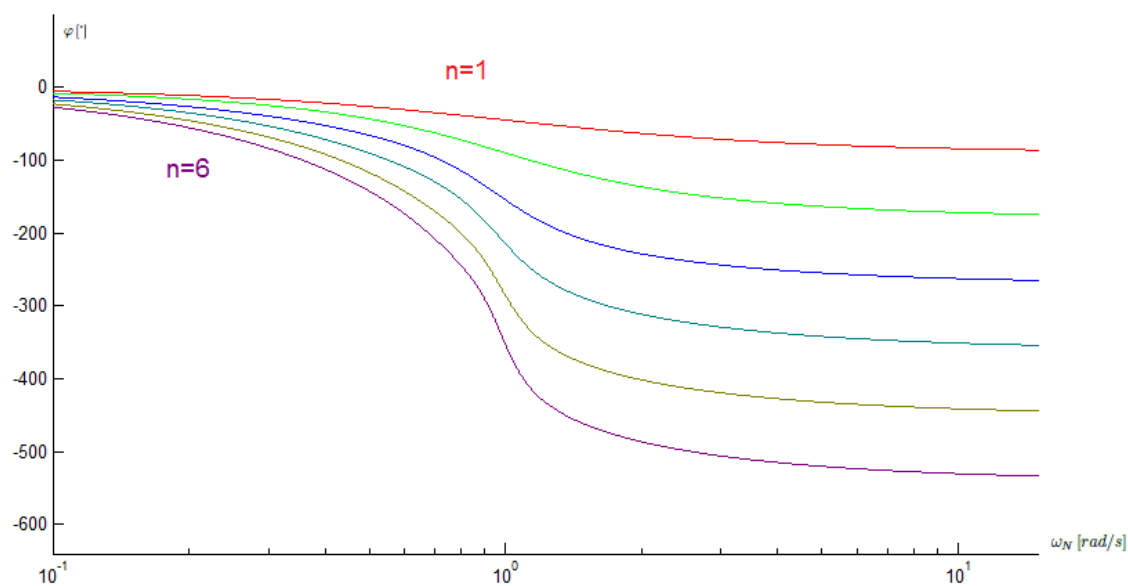


Figura 19: Ejemplo Legendre - Fase

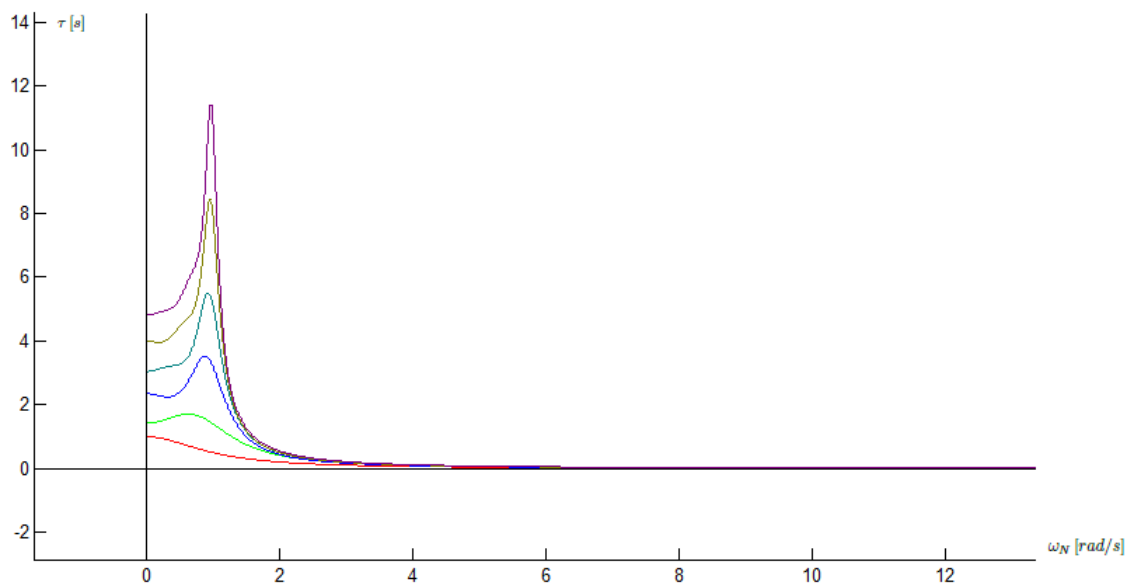


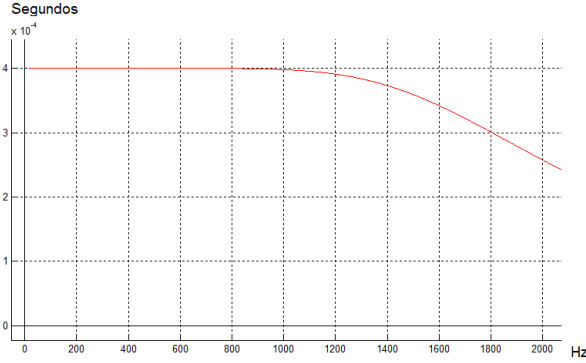
Figura 20: Ejemplo Legendre - Retardo de Grupo

3. Aproximaciones por retardo de grupo

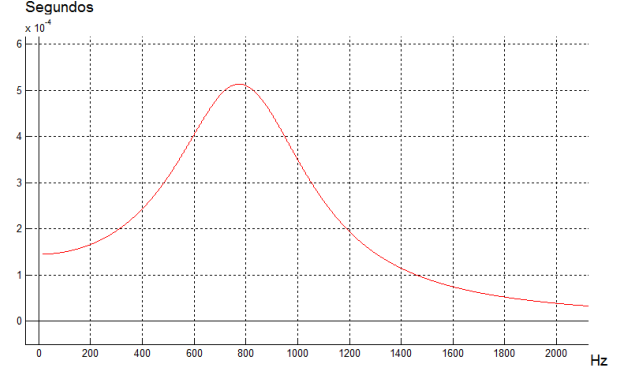
3.1. Bessel

Para que una señal no se distorsione, es necesario que mantenga su retardo de grupo $\tau(\omega)$ constante, es decir, su fase $\varphi(\omega)$ lineal. Este hecho permite que señales de diferentes frecuencias experimenten un mismo retardo al pasar por el filtro.

$$\tau(\omega) = -\frac{d\varphi(\omega)}{d\omega} \quad (57)$$



(a) Retardo de grupo constante hasta 1kHz



(b) Retardo de grupo no constante

Figura 21: Retardo de grupo

Se ve en la figura 21a que todas las señales con frecuencia menor a 1 kHz experimentarán el mismo retardo ($400\text{ }\mu\text{s}$) al pasar por el sistema. En cambio, en la figura 21b no existe una zona donde ese retardo sea constante. Es de interés ahora tener la capacidad de diseñar filtros con fase lineal (retardo de grupo constante). Este método diferirá de los anteriores ya que *no sólo se necesita imponer restricciones sobre la atenuación sino que también sobre el retardo de grupo*. Se buscará entonces hacer que el retardo de grupo sea lo más constante posible sólo en la banda de paso. En las bandas de transición y de atenuación esto no será importante ya que la señal pasada por el filtro no contendrá información en esas frecuencias. Si bien esta aproximación se puede desnormalizar para lograr filtros pasabajos, pasabanda y rechazabanda; sólo con filtros pasabajos se podrá tener el retardo de grupo constante para un rango de frecuencias.

Para analizar que propiedades tiene el retardo de grupo y poder plantear una función que las cumpla se plantea

$$H(j\omega) = \text{Re}\{H(j\omega_N)\} + j \cdot \text{Im}\{H(j\omega_N)\} \quad (58)$$

donde

$$|H(j\omega_N)|^2 = \text{Re}^2\{H(j\omega_N)\} + \text{Im}^2\{H(j\omega_N)\} \quad (59)$$

y

$$\varphi(\omega_N) = \arctan\left\{\frac{\text{Im}\{H(j\omega_N)\}}{\text{Re}\{H(j\omega_N)\}}\right\} \quad (60)$$

y usando la ecuación (57)

$$\tau(\omega_N) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\text{Re}\{H(j\omega_N)\}}{\text{Im}\{H(j\omega_N)\}}\right)^2} \cdot \frac{\text{Im}\{H(j\omega_N)\} \cdot \frac{d\text{Re}\{H(j\omega_N)\}}{d\omega_N} - \frac{d\text{Im}\{H(j\omega_N)\}}{d\omega_N} \cdot \text{Re}\{H(j\omega_N)\}}{\text{Re}^2\{H(j\omega_N)\}} \quad (61)$$

operando se llega a que

$$\tau(\omega_N) = \frac{\operatorname{Im}\{H(j\omega_N)\} \cdot \frac{d\operatorname{Re}\{H(j\omega_N)\}}{d\omega_N} - \frac{d\operatorname{Im}\{H(j\omega_N)\}}{d\omega_N} \cdot \operatorname{Re}\{H(j\omega_N)\}}{|H(j\omega)|^2} \quad (62)$$

Debido a la ecuación (2) se sabe que:

- $\operatorname{Re}\{H(j\omega_N)\}$ es par.
- $\operatorname{Im}\{H(j\omega_N)\}$ es impar.

por lo que

- $\frac{d\operatorname{Re}\{H(j\omega_N)\}}{d\omega_N}$ es impar
- $\frac{d\operatorname{Im}\{H(j\omega_N)\}}{d\omega_N}$ es par.

y como $|H(j\omega_N)|^2$ es par, la función $\tau(\omega_N)$ también será par por lo que se puede pensar como $\tau(\omega_N^2)$.

El retardo de grupo $\tau(\omega_N)$ tiene coeficientes reales positivos y que es función de ω_N^2 . Éstas son propiedades análogas a las de $|H(j\omega_N)|^2$ por lo que se puede realizar un diseño análogo a las aproximaciones vistas anteriormente pero tomando como parámetro de interés el retardo de grupo.

3.1.1. Forma General

Se parte de una transferencia pasabajos normalizada.

$$H(s_N) = \frac{1}{\sum_{k=0}^n a_k \cdot s_N^k} \quad (63)$$

Con $a_0 = 1$ para que tenga ganancia unitaria en continua. Separando parte real e imaginaria se obtiene

$$H(j\omega_N) = \frac{1}{\sum_{k_{PAR}}^n (-1)^{\frac{k}{2}} a_k \omega_N^k + j\omega \sum_{k_{IMPAR}}^n (-1)^{\frac{k-1}{2}} a_k \omega_N^{k-1}} \quad (64)$$

por lo que

$$\varphi(\omega) = \arctan \left\{ \frac{\omega \sum_{k_{IMPAR}}^n (-1)^{\frac{k-1}{2}} a_k \omega_N^{k-1}}{\sum_{k_{PAR}}^n (-1)^{\frac{k}{2}} a_k \omega_N^k} \right\} = \arctan \left\{ \frac{x(\omega_N)}{y(\omega_N)} \right\} \quad (65)$$

Utilizando la ecuación (57) se obtiene

$$\tau(\omega_N) = \frac{y(\omega_N) \cdot \frac{dx(\omega_N)}{d\omega} - x(\omega_N) \cdot \frac{dy(\omega_N)}{d\omega}}{x^2(\omega_N) + y^2(\omega_N)} \quad (66)$$

Reemplazando $x(\omega_N)$ y $y(\omega_N)$:

$$\tau(\omega) = \frac{(a_1) + \omega_N^2 \cdot (a_1 a_2 - 3a_3) + \omega_N^4 (5a_5 - 3a_1 a_4 + a_2 a_3) + \omega_N^6 (5a_1 a_6 + a_3 a_4 - 3a_2 a_5 - 7a_7) + \dots}{1 + \omega_N^2 \cdot (a_1^2 - 2a_2) + \omega_N^4 (a_2^2 - 2a_1 a_3 + 2a_4) + \omega_N^6 (a_3^2 + 2a_1 a_5 - 2a_2 a_4 - 2a_6) + \dots} \quad (67)$$

Se desea que $\tau(\omega_N)$ sea constante por lo que se plantea que tenga máxima planicie en el origen (como la atenuación en Butterworth), es decir, sus $2n - 1$ derivadas en $\omega_N = 0$ deben ser nulas. Una solución simple a este problema es igualar los coeficientes de las respectivas potencias de ω_N del numerador y del denominador.

- $a_1 = 1$
- $a_1 a_2 - 3a_3 = a_1^2 - 2a_2$
- $5a_5 - 3a_1 a_4 + a_2 a_3 = a_2^2 - 2a_1 a_3 + 2a_4$
- $5a_1 a_6 + a_3 a_4 - 3a_2 a_5 - 7a_7 = a_3^2 + 2a_1 a_5 - 2a_2 a_4 - 2a_6$

3 APROXIMACIONES POR RETARDO DE GRUPO

■ ...

Simplificando se llega a que:

- $a_1 = 1$
- $a_2 - a_3 = \frac{1}{3}$
- $3(a_5 - a_4) + a_3 = \frac{1}{15}$
- $15(a_6 - a_7) + a_4 - 6a_5 = \frac{1}{105}$

Si se van formando las $H(s_N)$ correspondientes a los órdenes $n = 1, 2, 3, \dots$ se puede observar que cumplen con:

$$a_k = \frac{(2n-k)!}{2^{n-k}k!(n-k)!} \cdot \frac{2^n n!}{(2n)!} \quad (68)$$

El término de la derecha sirve para normalizar y lograr que $a_0 = a_1 = 1$.

De esta forma el denominador responde a las *funciones de Bessel* siendo estas definidas por la siguiente expresión:

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^n b_k \cdot x^k \quad (69)$$

donde

$$b_k = \frac{(2n-k)!}{2^{n-k}k!(n-k)!} \quad (70)$$

Nótese que en este caso los b_k no tienen el término de normalización, por lo que $H_n(s)$ quedará definido por

$$H_n(s_N) = \frac{B_n(0)}{B_n(s_N)} = \frac{b_0}{\sum_{k=0}^n b_k s^k} = \frac{1}{\sum_{k=0}^n a_k s^k} \quad (71)$$

Los polinomios de Bessel también pueden quedar definidos por la siguiente ecuación de recurrencia:

$$B_n(x) = (2n-1)B_{n-1}(x) + x^2 B_{n-2}(x) \quad (72)$$

Un filtro de Bessel ideal sería aquel cuyo orden tendiera a infinito. Éste queda definido por

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n(s_N) = \frac{1}{1 + s_N + \frac{1}{2}s_N^2 + \frac{1}{6}s_N^3 + \frac{1}{24}s_N^4 + \dots} \quad (73)$$

Se puede observar que el denominador corresponde en la expansión en serie de Taylor alrededor de 0 (serie de Maclaurin) de e^s , por lo que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n(s_N) = e^{-s_N} \quad (74)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} H_n(j\omega_N) = e^{-j\omega_N} \quad (75)$$

por lo que

$$\varphi(\omega_N) = \omega_N \quad (76)$$

Se llega entonces a la notable conclusión de que un filtro de Bessel ideal tiene fase lineal (retardo de grupo constante y unitario). El objetivo ahora es determinar como afecta el orden a la relación retardo de grupo y frecuencia máxima a la cual este permanece constante con una cierta cota de error. A continuación se presenta una propiedad del retardo de grupo que da una pauta para determinar el orden y que es válida para cualquier función aproximación sin ceros:

$$\int_0^\infty \tau(\omega_N) d\omega = \int_0^\infty -\frac{d\varphi(\omega_N)}{d\omega_N} d\omega = -[\varphi(\infty) - \varphi(0)] = -\left[-n\frac{\pi}{2} - 0\right] = n\frac{\pi}{2} \quad (77)$$

Se puede también encontrar una relación del retardo de grupo con el módulo. Desarrollando se llega a que

$$\tau(\omega_N) = 1 - \frac{\omega_N^{2n}}{B_n^2(0)} |H(j\omega_N)|^2 \quad (78)$$

3.1.2. Determinación de Coeficientes

Según el parámetro de diseño que se desea conservar, la normalización y desnormalización se realiza con la frecuencia de corte o con el retardo de grupo que debe presentar toda la banda de paso.

Si se desea diseñar para cumplimiento de plantilla en atenuación se debe realizar el mismo procedimiento que se hizo con las aproximaciones vistas anteriormente. La determinación del orden en este caso será iterativa como en el caso de la aproximación de Legendre. Para una misma plantilla, el orden necesario es superior al de una aproximación Butterworth, por lo que se suele diseñar teniendo en cuenta el retardo de grupo.

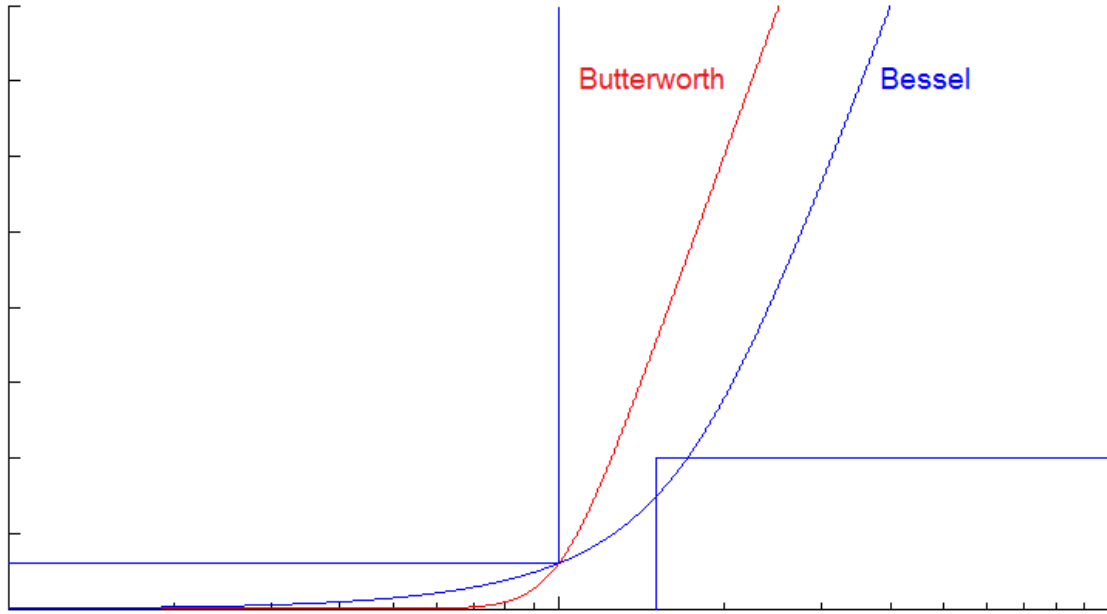


Figura 22: Bessel orden 5 VS Butterworth orden 5

Si se desea diseñar para cumplimiento de retardo de grupo, se tendrán los siguientes parámetros a tener en cuenta:

- $\tau(0)$: El retardo de grupo deseado en $\omega = 0$.
- ω_{RG} : La frecuencia angular hasta la cual el retardo de grupo debe permanecer por encima de una cierta tolerancia.
- Υ : La máxima diferencia relativa entre el retardo de grupo en $\omega = 0$ y $\omega = \omega_{RG}$ (entre 0 y 1).

3.1.3. Normalización y Desnormalización para Retardo de Grupo

Ya que el retardo de grupo que se obtiene usando la aproximación de Bessel es unitario, se debe realizar el proceso de normalización y desnormalización cuando se diseña. Definidos los parámetros se procede a realizar la normalización como:

$$\omega_{RGN} = \omega_{RG} \cdot \tau(0) \quad (79)$$

y

$$\tau_N(0) = 1 \quad (80)$$

Ahora sólo basta con evaluar iterativamente aumentando el orden de la transferencia de forma tal de que el retardo de grupo de la transferencia de orden n cumpla la condición

$$\tau_N(\omega_{RGN}) \geq \tau_N(0) \cdot (1 - \Upsilon) = 1 - \Upsilon \quad (81)$$

siendo Υ el error permitido en el retardo de grupo.

Una vez encontrado el orden se procede a realizar la desnormalización realizando el siguiente mapeo:

$$s_N \rightarrow s \cdot \tau(0) \quad (82)$$

3.1.4. Lugar de Singularidades

Al igual que con la aproximación de Legendre no resulta práctico obtener fórmulas cerradas para determinar el lugar de las singularidades para un orden genérico. Para un mismo orden, el factor de calidad de los polos será menor que el de los de una aproximación Butterworth. Esto se puede observar en la siguiente figura.

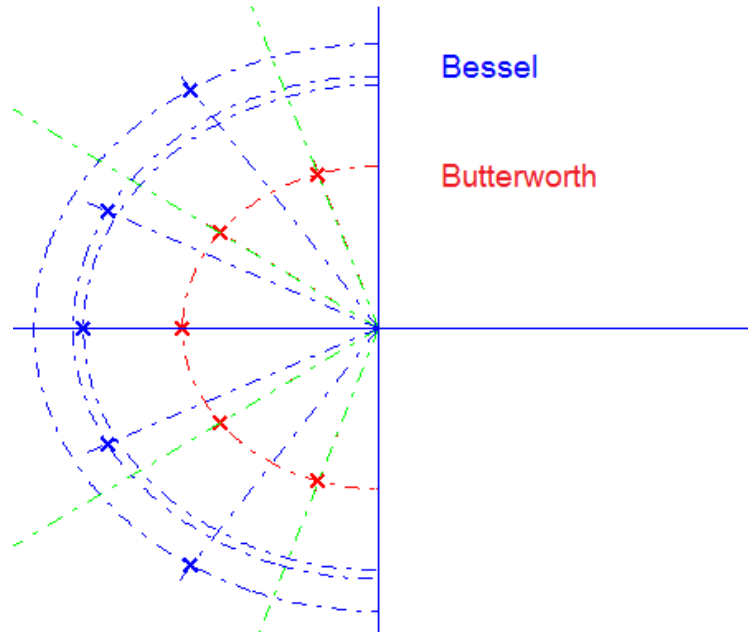


Figura 23: Polos de aproximación Bessel

3.1.5. Características

- Máxima planicie en el retardo de grupo, por lo cual presenta la fase más lineal de todas las aproximaciones.
- Muy poco selectivo. Para una misma plantilla se necesitan órdenes superiores a la aproximación de Butterworth.
- $|H(j\omega)|$ monótona decreciente.
- Su respuesta al escalón tiene overshoot pero menor en comparación a las aproximaciones por atenuación.

3.1.6. Ejemplo de aplicación

Ya que la normalización y desnormalización es diferente cuando se diseña por retardo de grupo, se partirá en este caso de una plantilla normalizada.

$\tau(0)$	ω_{RG}	$\Upsilon\%$
10 ms	600 rad/s	20%

Cuadro 5: Plantilla de Retardo de Grupo

Al normalizar se obtiene $\tau(0) = 1\text{ s}$ y $\omega_{RGN} = 6\text{ rad/s}$. Se generan filtros iterativamente aumentando el orden hasta que se llega al que cumple con la condición necesaria como se ve en la siguiente figura, donde el error de retardo de grupo para un orden 7 es de $15\% < 20\%$.

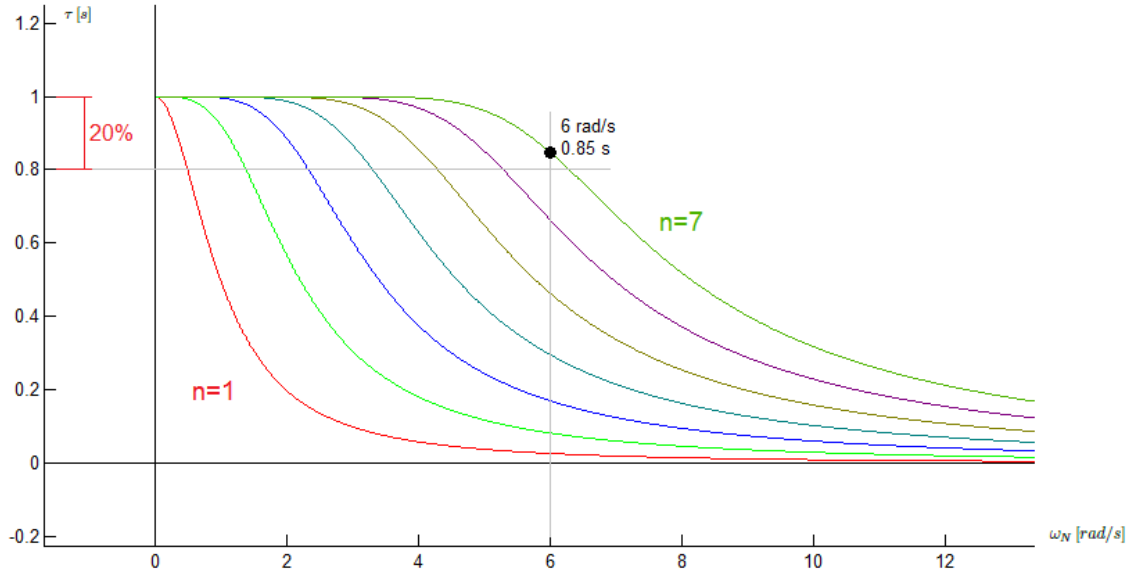


Figura 24: Ejemplo Bessel - Retardo de Grupo Normalizado

Se conserva dicho filtro normalizado y se lo desnormaliza con la expresión (82). Finalmente se obtiene un filtro de orden 7 que cumple con la plantilla de retardo de grupo requerida.

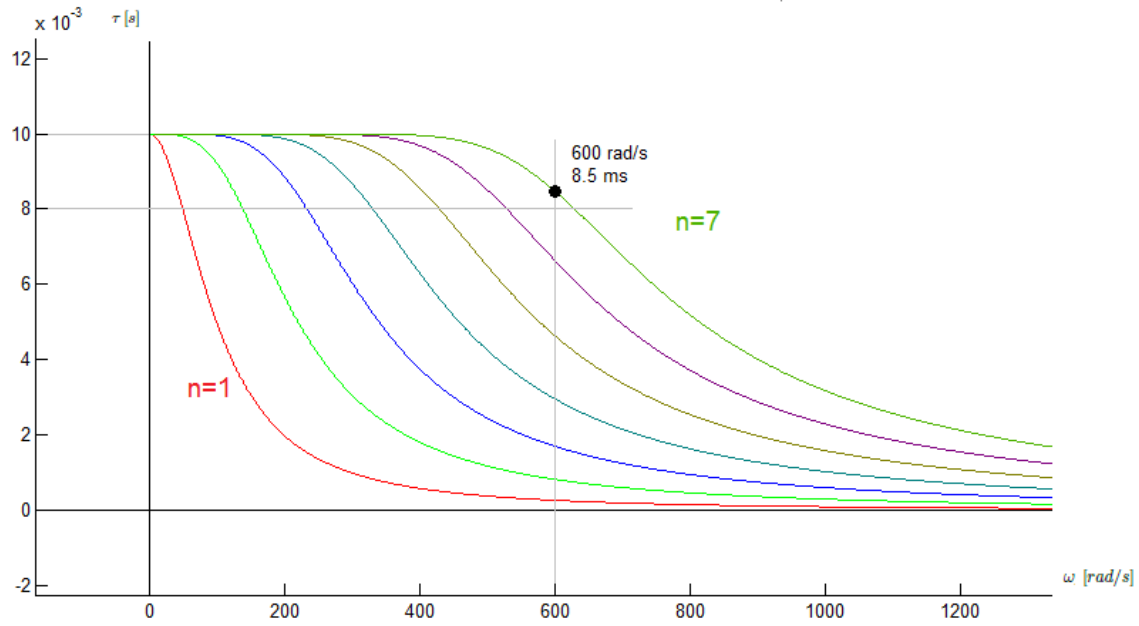


Figura 25: Ejemplo Bessel - Retardo de Grupo Desnormalizado

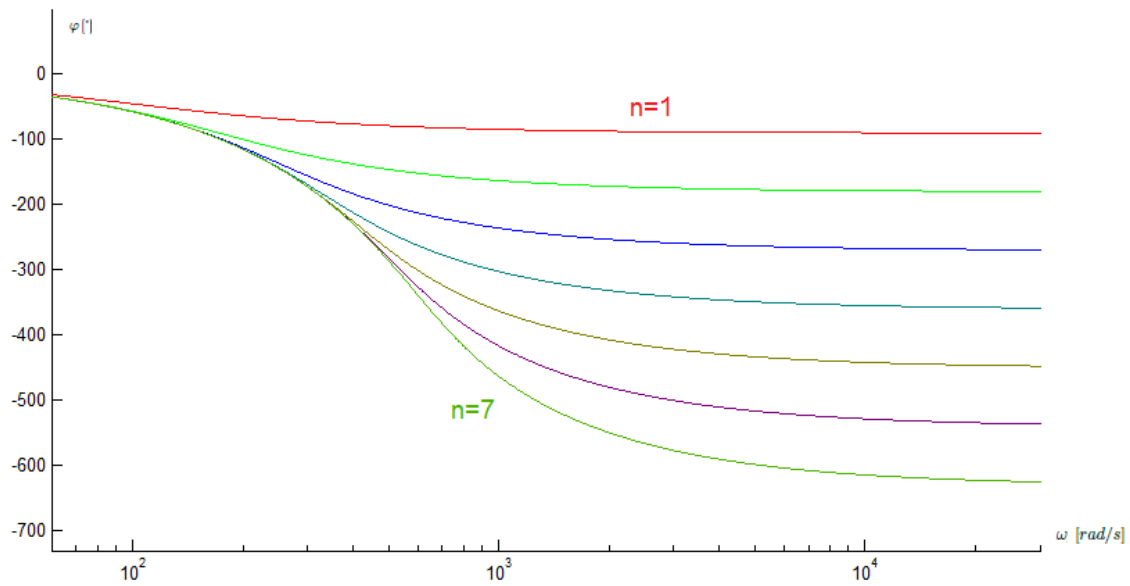


Figura 26: Ejemplo Bessel - Fase

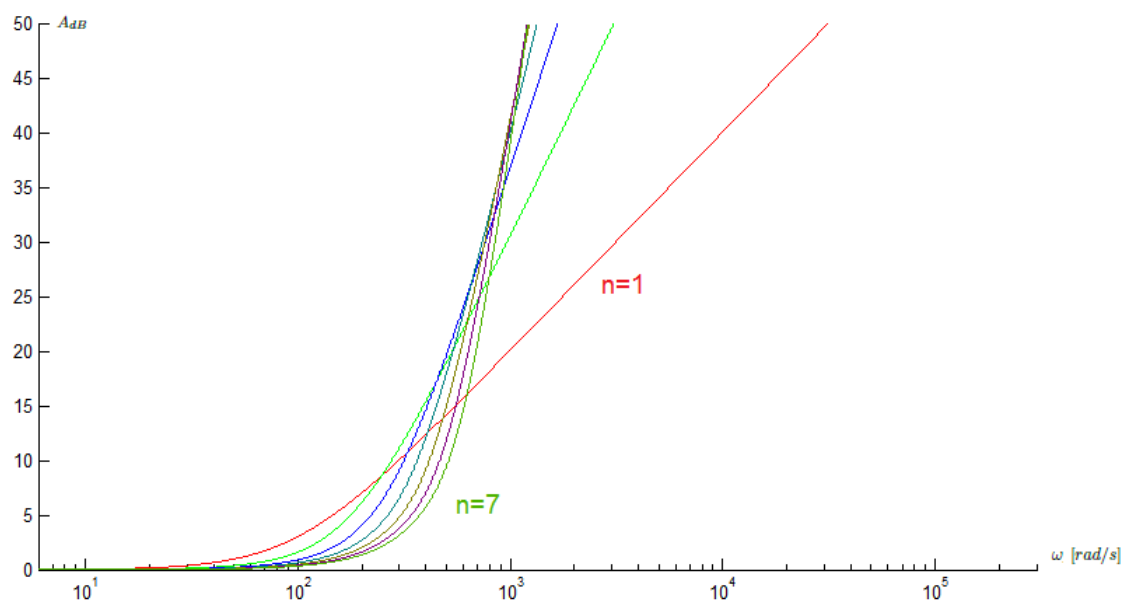


Figura 27: Ejemplo Bessel - Atenuación

3.2. Gauss

Un filtro Gaussiano es un filtro cuya respuesta al impulso es una Gaussiana, en virtud de esto la salida del filtro será la convolución entre la señal de entrada y una gaussiana. Esto se conoce como *Transformación de Weierstrass*. Nótese que la gaussiana debe estar retardada y truncada en algún instante porque los filtros son causales y no puede haber salida para $t < 0$.

Los filtros Gaussianos permiten tener retardo de grupo constante para un rango de frecuencias de una forma análoga a los filtros de Bessel.

3.2.1. Forma General

El filtro Gaussiano ideal responde a la siguiente ecuación.

$$|H(j\omega)|^2 = e^{-\gamma\omega^2} \quad (83)$$

Desarrollando mediante serie de Taylor alrededor de $\omega = 0$ se obtiene:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \gamma\omega^2 + \frac{\gamma^2\omega^4}{2!} + \frac{\gamma^3\omega^6}{3!} + \dots} \quad (84)$$

Ya que no se pueden implementar filtros de orden infinito, se trunca a partir del n -ésimo polinomio, quedando $|H(j\omega)|^2$ definido como sigue:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \sum_{k=1}^n \frac{\gamma^k}{k!} \omega^{2k}} \quad (85)$$

3.2.2. Determinación de Coeficientes

Para la determinación del orden, se procede a realizar la normalización de la misma forma que en la aproximación de Bessel tomando $\gamma = 1$. Luego se itera quedándose con los polos del semiplano izquierdo hasta alcanzar la tolerancia deseada en ω_{RGN} y se procede a desnormalizar también de la misma forma.

3.2.3. Lugar de singularidades

A diferencia con la aproximación de Bessel, en este caso es más sencillo trabajar con el módulo cuadrado de la transferencia, por lo que se obtienen los polos de esta función para un orden dado, se conservan los del semiplano izquierdo y finalmente se evalúa al retardo de grupo en la frecuencia de interés. Se itera hasta que se cumplen con las condiciones de la plantilla de retardo de grupo y finalmente se desnormaliza. Lamentablemente, este proceso de generar la función transferencia a partir del módulo cuadrado y evaluar el retardo de grupo iterativamente puede resultar computacionalmente bastante más costoso que si se contase con una fórmula cerrada.

3.2.4. Características

- Fase lineal para un intervalo de frecuencias.
- Retardo de grupo menor que Bessel para un mismo orden.
- Respuesta al escalón sin sobrepicos.
- Respuesta al impulso Gaussiana (ideal).
- Su respuesta al escalón no tiene overshoot y minimizan el tiempo de rise y de fall.

4. Método para Diseñar Aproximaciones

Se presenta a continuación un método mediante el cual se pueden diseñar aproximaciones para plantilla pasabajos normalizada que contengan sólo polos.

4.1. Transferencia Genérica

Para realizar el diseño de una aproximación, se puede partir de la forma normalizada del módulo cuadrado de la transferencia como se observa en la siguiente ecuación.

$$|H(j\omega_N)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon^2 P_n^2(\omega_N)} \quad (86)$$

donde $P_n(\omega_N)$ es el n -ésimo polinomio del conjunto de polinomios definido por el diseñador. Se evaluará a continuación que condiciones debe satisfacer este conjunto de polinomios

4.2. Condiciones de los polinomios

1. $P_n(1) = 1 \forall n$

Es importante que para todo polinomio dentro del conjunto, su valor en la unidad sea constante (por simplicidad se puede tomar la unidad de forma tal que ε mantenga un mismo sentido físico para todas las aproximaciones que se diseñen). De esta forma la atenuación en $\omega_{pN} = 1$ siempre será la misma independientemente del orden del filtro y se podrá diseñar filtros de esta aproximación de forma sistemática.

2. Los coeficientes de $P_n^2(-js)$ deben ser reales

Esta condición es necesaria ya que se desea que $|H(s)|^2$ tenga todos sus coeficientes reales de forma tal de que $H(s)$ sea realizable. Habrá términos con parte imaginaria si el polinomio $P_n^2(\omega_N)$ tiene potencias impares de ω_N , por lo que el polinomio $P_n(\omega_N)$ deberá tener tan sólo potencias pares o tan sólo potencias impares de ω_N . Es decir que se puede definir a $P_n(\omega_N)$ de acuerdo a dos posibilidades:

$$\begin{cases} P_{2n}(\omega_N) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \cdot \omega_N^{2k} \\ P_{2n+1}(\omega_N) = \sum_{k=0}^n \alpha_k \cdot \omega_N^{2k+1} \end{cases} \quad (87)$$

3. Monótonos crecientes en banda de atenuación y transición.

Si bien esta condición no es estrictamente necesaria, el uso de polinomios monótonos en banda de atenuación y transición simplifica el cálculo para cumplir con los requerimientos de la plantilla.

4. $P_n(\omega_N) \leq P_n(1) \forall n, \omega_N < 1$

Esta condición asegura que eligiendo correctamente el valor de ε se cumplirá la plantilla en toda la banda de paso.

4.3. Ejemplo de aplicación

De forma ilustrativa, se procederá a diseñar una aproximación con el método explicado. Para hacerlo se hará uso de la *sucesión de Fibonacci*.

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad (88)$$

con $F_1 = 1$ y $F_2 = 1$.

De esta forma se definen los polinomios de aproximación de Fibonacci de la siguiente manera.

$$Fip_n(x) = \frac{F_n \cdot x^n - Fip_{n-2}(x)}{\alpha_n} \quad (89)$$

donde

$$\begin{cases} \alpha_{2n} = \sum_{k=1}^n F_{2k} \\ \alpha_{2n+1} = \sum_{k=1}^n F_{2k+1} \end{cases} \quad (90)$$

$$Fip_0(x) = 0 \text{ y } Fip_1(x) = x.$$

α_n es una constante de normalización y permite cumplir la condición de que $Fip_n(1) = 1 \forall n$. El hecho de que en la ecuación recursiva del enésimo polinomio se reste el polinomio $n-2$ permite que los coeficientes de $P_n^2(-js)$ sean reales. Los polinomios son monótonos crecientes en las tres bandas por lo que se cumplen la condición de monotonía en banda de atenuación y transición y la de que estén acotados por arriba en banda de paso. Para el caso de esta aproximación, al aumentar el orden, la aproximación se asemeja cada vez más a Butterworth, pero sin embargo, mantiene el polo con mayor factor de calidad casi en el mismo lugar mientras que tienen una menor componente real los polos con menor factor de calidad. Esto permite que la aproximación sea un poco más selectiva que un Butterworth sin comprometer la posición de los polos con mayor factor de calidad.

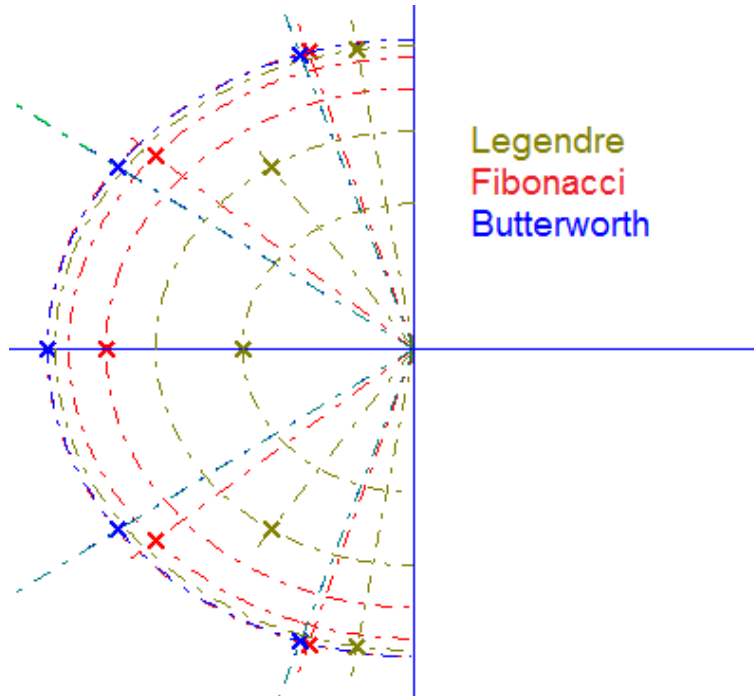


Figura 28: Ejemplo de Atenuación - Polos

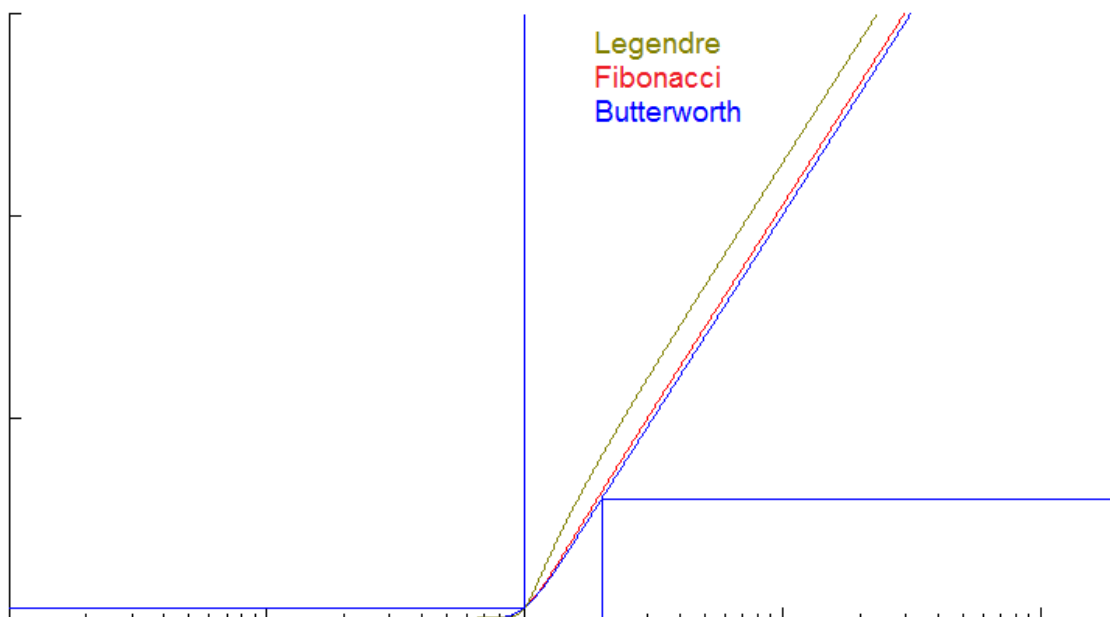


Figura 29: Ejemplo de Aplicación - Atenuación

5. Aproximación Elíptica

5.1. Motivación

Como se ha visto con las aproximaciones de Butterworth y Chebycheff 1, la aparición del ripple en la banda de paso permite elaborar filtros más selectivos con ordenes menores a un costo de pérdida de linealidad en la fase y un aumento del factor de calidad. Este hecho se ilustra en las figuras 30 y 31.

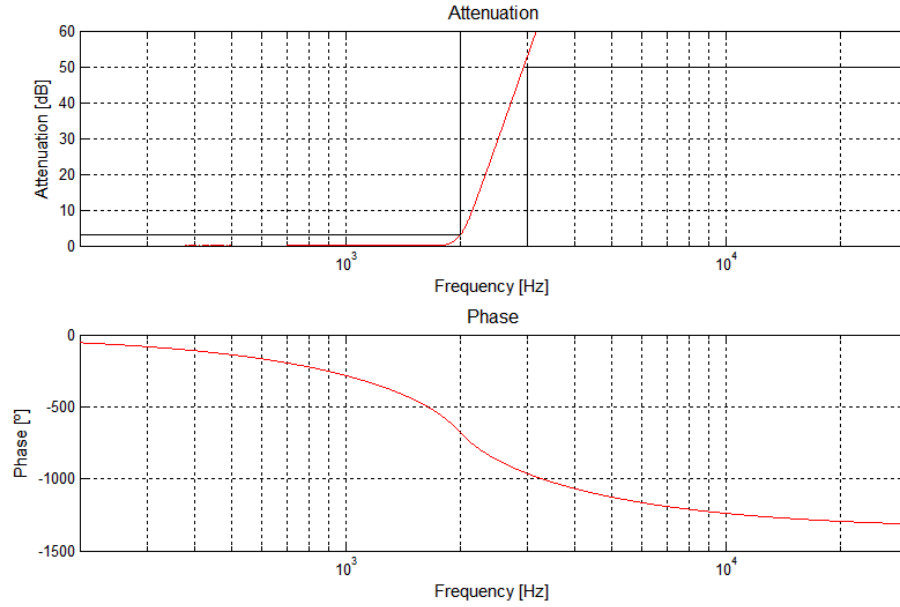


Figura 30: Pasa bajos Butterworth de orden 15. $Q_{max} = 4,8$. $Sel = \frac{2}{3}$.

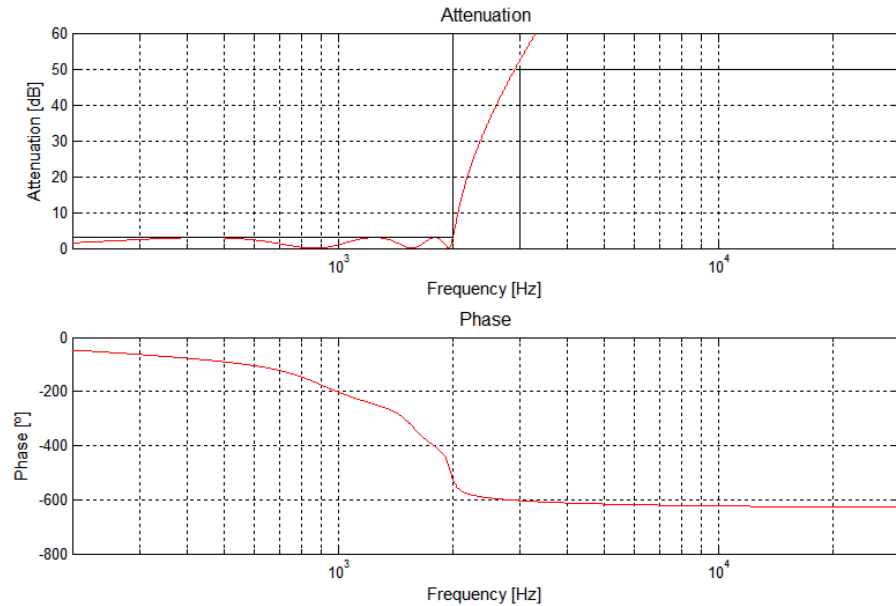


Figura 31: Pasa bajos Chebycheff de orden 7. $Q_{max} = 17,5$. $Sel = \frac{2}{3}$.

También se sabe que con la aparición de los ceros de transmisión se consiguen filtros aún más selectivos que con ripple en la banda de paso, sin aumentar demasiado el factor de calidad para ordenes menores. En la figura 32 se observa este hecho, exhibiendo una aproximación Chebycheff Inverso para el mismo pasabajos de los casos anteriores.

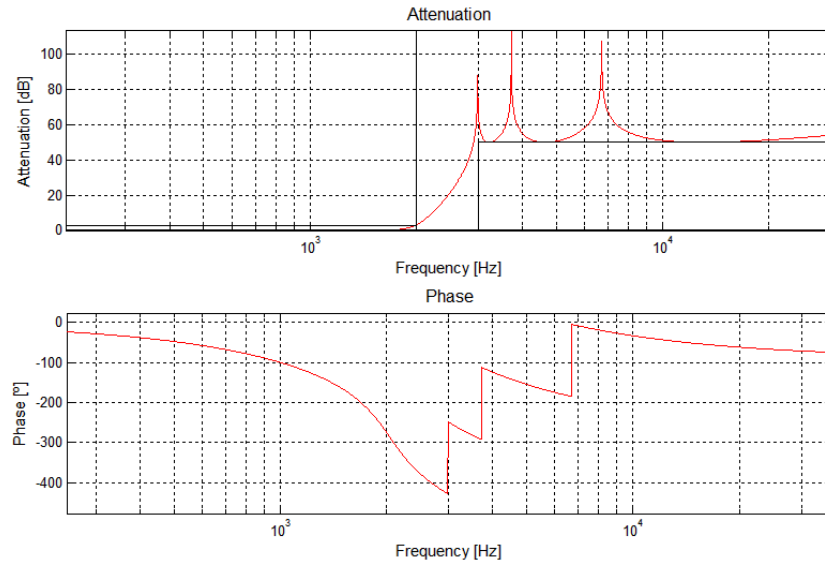


Figura 32: Pasa bajos Chebycheff inverso de orden 7. $Q_{max} = 3,1$. $Sel = \frac{2}{3}$.

Ahora bien, si una función de aproximación dispone de ripple en la banda de paso y de ceros de transmisión en la banda atenuada (o incluso en la de transición) es de esperar que se consiga el menor orden posible para realizar dicha aproximación. En esto consisten las aproximaciones Cauer, se basan en las ventajas de tener ripple y ceros de transmisión para cumplir con plantillas muy selectivas. El problema de estas aproximaciones además de los altos Q , es el comportamiento de la fase ya que los ceros producen cambios abruptos de 180° y los polos de la banda pasante producen el mismo efecto de ripple que ocurría en los Chebycheff 1. En la figura 33 se muestra una aproximación de Cauer para la plantilla que se presentó en las aproximaciones anteriores.

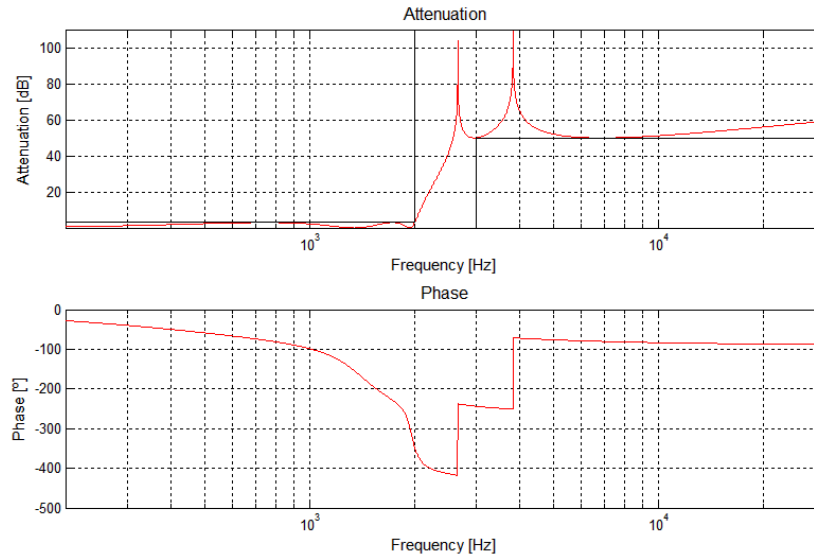


Figura 33: Pasa bajos Cauer de orden 5. $Q_{max} = 13,9$. $Sel = \frac{2}{3}$.

5.2. Aproximación Cauer

La aproximación de Cauer o aproximación elíptica a diferencia de las anteriores tiene riple constante tanto en la banda de paso como en la de atenuación, los cuales no tienen porque ser iguales entre sí.

Una propiedad sumamente importante de esta aproximación es que para un orden y selectividad dados, esta contiene el mínimo error de ponderación de Chebycheff[3]. Esto quiere decir que *la aproximación de Cauer es de todas las aproximaciones la que tiene la menor banda de transición para un orden dado*. Y por ende a partir de una plantilla, la aproximación de Cauer será la que permita realizar el filtro de menor orden, ya que por su característica de riple en ambas bandas se pueden alcanzar selectividades muy estrechas sin un aumento desmedido del orden, como si ocurre por ejemplo con la aproximación de Butterworth.

La función de transferencia $H(j\omega)$ de la aproximación Cauer, al igual que todas las funciones de aproximación presentadas cumple con el siguiente modelo:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon_p^2 \cdot F_n^2(\omega)} \quad (91)$$

Donde ε_p es el coeficiente de riple de la banda de paso y $F_n(\omega)$ es una función a la que se le deben imponer ciertas condiciones para conseguir la condición de equi-ripple en ambas bandas.

5.2.1. Restricciones

Para imponer las condiciones mencionadas, en primer lugar se recuerda que la frecuencia normalizada $\omega = 1$ corresponde a la frecuencia más alta de la banda pasante, es decir a ω_p , mientras que la menor frecuencia de la banda atenuada, ω_a , se corresponde la frecuencia normalizada $\frac{\omega_a}{\omega_p} = \frac{1}{k}$, siendo $k \in (0, 1)$ la *Selectividad de la plantilla*.

$$\frac{1}{k} = \frac{\omega_a}{\omega_p} \quad (92)$$

Entonces se evalúa la función transferencia en las frecuencias normalizadas $\omega = 1$ y $\omega = 1/k$, restringiendo las amplitudes del riple de la transferencia entre $\left[\frac{1}{1+\varepsilon_p^2}, 1\right]$ para la banda pasante y $\left[0, \frac{1}{1+\varepsilon_a^2}\right]$ para la banda de atenuación.

$$|H(j1)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon_p^2 \cdot F_n^2(1)} \triangleq \frac{1}{1 + \varepsilon_p^2} \quad (93)$$

$$\left|H\left(j\frac{1}{k}\right)\right|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon_p^2 \cdot F_n^2\left(\frac{1}{k}\right)} \triangleq \frac{1}{1 + \varepsilon_a^2} \quad (94)$$

Lo que conduce a $F_n^2(1) = 1$ y a la *Ecuación del Orden*:

$$F_n\left(\frac{1}{k}\right) = \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_p} = \frac{1}{k_1} \quad (95)$$

Siendo $1/k_1$ el *Factor Discriminante de la plantilla*, que en función de las atenuaciones permitidas A_p y A_a (en decibels) se calcula de la siguiente manera:

$$\frac{1}{k_1} = \sqrt{\frac{10^{A_a/10} - 1}{10^{A_p/10} - 1}} \quad (96)$$

El comportamiento de riple constante en ambas bandas puede ser alcanzado si la función $F_n(\omega)$ **tiene riple constante en la banda pasante y además** cumple la siguiente condición de simetría:

$$|H(j\omega)|^2 = \frac{1}{1 + \varepsilon_p^2 \cdot F_n^2\left(\frac{\omega}{\omega_p}\right)} = \frac{1}{1 + \frac{\varepsilon_a^2}{F_n^2\left(\frac{\omega_a}{\omega}\right)}} = \frac{F_n^2\left(\frac{\omega_a}{\omega}\right)}{F_n^2\left(\frac{\omega_a}{\omega}\right) + \varepsilon_a^2} \quad (97)$$

Que despejada en términos de la frecuencia normalizada se puede escribir como:

$$F_n(\omega) = \frac{1}{k_1 \cdot F_n\left(\frac{1}{k \cdot \omega}\right)} \quad (98)$$

Esta última ecuación será denominada *Identidad de Cauer*, ya que de cumplirse es la que permite hallar la función $F_n(\omega)$ que define la transferencia de la aproximación. Vale destacar que la aproximación de Butterworth ($F_n(\omega) = \omega^n$ y $k_1 = k^n$) cumple con la ecuación 98 pero no es una aproximación de Cauer debido a que por su comportamiento monótono carece de riple.

Para encontrar la función $F_n(\omega)$ dada una selectividad k , se le pedirá también a la función las siguientes propiedades:

1. $F_n^2(\omega) \leq 1$, $|\omega| \leq 1$: Con esta condición se asegura que en la banda de paso la función transferencia se encuentre comprendida en el intervalo $\left[\frac{1}{1+\varepsilon_p^2}, 1\right]$.
2. $F_n^2(\omega) = 1$, $|\omega| = 1$: Esta propiedad es un caso particular de la condición anterior.
3. $F_n^2(\omega) = F_n^2(-\omega)$: Este requisito es necesaria para que la función transferencia sea realizable.
4. $F_n^2(\omega) > 1$, $|\omega| > 1$: Esta imposición garantiza la estructura pasa-bajos de la función transferencia normalizada.
5. $F_n(\omega) = a_0 \frac{\prod_{i=1}^n (\omega - \omega_{zi})}{\prod_{i=1}^n (\omega - \omega_{pi})}$: La función debe poder ser expresada como cociente de polinomios para que la transferencia sea sintetizable
6. Pendiente en $\omega = 1$ mayor que la correspondiente pendiente para una aproximación de Chebycheff del mismo orden para asegurar mayor selectividad en la plantilla.
7. Riple constante en cada una de las bandas (de paso y atenuación).

5.2.2. Función Racional Elíptica

La única función que satisface las propiedades anteriores y la Identidad de Cauer, es la *Función Racional Elíptica*[9] $R_n(\omega, k)$, definida de la siguiente forma:

$$F_n(\omega) = R_n(\omega, k) = Cd\left(n \cdot u \cdot K\left(\frac{\pi}{2}, k_1\right), k_1\right) \quad (99)$$

Siendo u :

$$\omega = Cd\left(u \cdot K\left(\frac{\pi}{2}, k\right), k\right) \iff u = \frac{Cd^{-1}(\omega, k)}{K\left(\frac{\pi}{2}, k\right)} \quad (100)$$

Donde $Cd(\cdot)$ es el *Coseno Elíptico de Jacobi Normalizado*, $K(\cdot)$ es la *Integral Elíptica Completa de Primera Especie*, k_1 se denomina *factor discriminante*, k es el *factor de selectividad* y n es el grado de la función elíptica $R_n(\omega, k)$.

Notese que si se hace $k = k_1 = 0$, según los resultados del cuadro 10, $F_n(\omega)$ se reduce a la expresión de Chebycheff:

$$F_n(\omega) = \cos(n \cdot \arccos^{-1}(\omega)) \quad (101)$$

5.2.3. Orden

Para cumplir la ecuación del orden, en este caso no se trabajarán con funciones inversas como en las demás aproximaciones debido a su considerable complejidad algebraica sino que se hará un planteo alternativo que conduce a la misma ecuación del orden. En primer lugar se plantea lo siguiente que surge de la definición de ω en la ecuación 100 (por simplicidad de notación se tomara $K\left(\frac{\pi}{2}, k\right) = K$ y $K\left(\frac{\pi}{2}, k_1\right) = K_1$),

$$\frac{1}{k \cdot \omega} = \frac{1}{k \cdot Cd(u \cdot K, k)} \quad (102)$$

Luego, haciendo uso de la propiedad 211:

$$\frac{1}{k \cdot \omega} = \frac{1}{k \cdot Cd(u \cdot K, k)} = Cd(u \cdot K + jK', k) = Cd\left(\left(u + j\frac{K'}{K}\right)K, k\right) \quad (103)$$

Por otra parte, partiendo de la definición de $F_n(\omega)$ en la ecuación 99 se calcula:

$$F_n\left(\frac{1}{k \cdot \omega}\right) = Cd(n \cdot u \cdot K_1, k_1), \quad u = \frac{Cd^{-1}\left(\frac{1}{k \cdot \omega}, k\right)}{K} \quad (104)$$

Pero haciendo uso de la expresión 103 resulta:

$$F_n\left(\frac{1}{k \cdot \omega}\right) = Cd\left(n\left(u + j\frac{K'}{K}\right) \cdot K_1, k_1\right) = Cd\left(n \cdot u \cdot K_1 + j \cdot n \cdot \frac{K'}{K} \cdot K_1, k_1\right) \quad (105)$$

Finalmente se vuelve a hacer uso de la ecuación 211:

$$\frac{1}{k_1 F_n(\omega)} = \frac{1}{k_1 \cdot Cd(n \cdot u \cdot K_1, k_1)} = Cd(n \cdot u \cdot K_1 + jK'_1, k_1) \quad (106)$$

Para poder satisfacer la Identidad de Cauchy:

$$F_n\left(\frac{1}{k \cdot \omega}\right) = \frac{1}{k_1 \cdot F_n(\omega)} \quad (107)$$

La siguiente identidad se debe cumplir para todo u (surge de reemplazar las ecuaciones 105 y 106 en la identidad de Cauchy):

$$Cd\left(n \cdot u \cdot K_1 + j \cdot n \cdot \frac{K'}{K} \cdot K_1, k_1\right) = Cd(n \cdot u \cdot K_1 + jK'_1, k_1) \quad (108)$$

Es decir:

$$j \cdot n \cdot \frac{K'}{K} \cdot K_1 = jK'_1 \rightarrow n = \frac{K'_1}{K_1} \cdot \frac{K}{K'} \quad (109)$$

Lo que conduce a:

$$n_{MIN} = \left[\frac{K(k'_1)}{K(k_1)} \cdot \frac{K(k)}{K(k')} \right] = \left[\frac{K(\sqrt{1-k_1^2})}{K(k_1)} \cdot \frac{K(k)}{K(\sqrt{1-k^2})} \right] \quad (110)$$

Donde $K(\cdot)$ es la integral elíptica completa de primera especie. Matlab también dispone de una función para resolver la ecuación del orden en los filtros elípticos, es decir en contrar el valor de k que satisface esta ecuación dado un n y un factor discriminante k_1 , ella es *ellipdeg()*.

5.2.4. Comportamiento

Para determinar los valores de $F_n(\omega)$ a lo largo del camino $C \rightarrow S \rightarrow N \rightarrow D$ se procede a hacer el mapeo de cada curva:

Para el primer trayecto se debe tener en cuenta la definición de $F_n(\omega)$ en la ecuación 99 y 100, donde $F_n(\omega) = Cd(n \cdot K_1 u, k_1)$ siendo $u = Cd^{-1}(\omega, k) / K$:

$$C \rightarrow S, \quad 0 \leq z \leq 1, \quad \omega = Cd(K - Kz, k) \Rightarrow F_n(\omega) = Cd(n \cdot K_1 - n \cdot K_1 z, k_1), \quad 0 \leq \omega \leq 1 \quad (111)$$

$$S \rightarrow N, \quad 0 \leq z \leq 1, \quad \omega = Cd(jK'z, k) \Rightarrow F_n(\omega) = Cd(jzK'_1, k'_1) = \frac{1}{Dn(zK'_1, k'_1)}, \quad 1 \leq \omega \leq \frac{1}{k} \quad (112)$$

$$N \rightarrow D, 0 \leq z \leq 1, \omega = Cd(Kz + jK', k) \Rightarrow F_n(\omega) = Cd(n \cdot K_1 z + jK'_1, k_1) = \frac{1}{k_1 Cd(n \cdot K_1 z, k_1)}, \frac{1}{k} \leq \omega \quad (113)$$

Entonces se concluye:

- Para el camino $C \rightarrow S$, es decir, la banda de paso, $F_n(\omega)$ tiene ripple constante y esta acotada por $|F_n(\omega)| \leq 1$, osea que $\frac{1}{1+\varepsilon_p^2} \leq |H(\omega)| \leq 1$
- Para el camino $S \rightarrow N$, es decir, la banda de transición se sabe lo siguiente:

$$\omega = Cd(jK'z, k) \Rightarrow F_n(\omega) = Cd(jzK'_1, k'_1) = \frac{1}{Dn(zK'_1, k'_1)} \quad (114)$$

entonces cuando $z = 0$ se tiene que $F_n(\omega) = 1$ y cuando $z = 1$, $F_n(\omega) = \frac{1}{k_1}$. En el intervalo $[0, j \cdot K]$ la función $Cd(x, k)$ es estrictamente creciente (corresponde a un cuarto del período). Por lo tanto, la función $F_n(\omega)$ es estrictamente creciente y está acotada por $1 \leq |F_n(\omega)| \leq \frac{1}{k_1} = \frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_p}$. Así resulta que la transferencia es estricta y monotamente decreciente y está acotada por:

$$\frac{1}{1+\varepsilon_a^2} \leq |H(\omega)| \leq \frac{1}{1+\varepsilon_p^2} \quad (115)$$

- Para el camino $N \rightarrow D$, es decir, la banda de atenuación se tiene un comportamiento equiripple como en la banda de paso:

$$F_n(\omega) = Cd(n \cdot K_1 u + jK'_1, k_1) = \frac{1}{k_1 Cd(n \cdot K_1 u, k_1)} \quad (116)$$

Salvo que esta vez $F_n(\omega)$ está acotada sólo inferiormente según:

$$\frac{\varepsilon_a}{\varepsilon_p} = \frac{1}{k_1} \leq |F_n(\omega)| \quad (117)$$

Es decir que la transferencia resulta acotada según:

$$0 \leq |H(\omega)| \leq \frac{1}{1+\varepsilon_a^2} \quad (118)$$

5.2.5. Expresión racional

Así como se podía expresar a las funciones de Chebycheff como polinomios de grado N , la definición de $F_n(\omega)$ permite expresarla como una función racional de ω y orden n . La paridad del orden dividirá el análisis en los casos *par* e *impar*.

En primer lugar, partiendo de la definición de $F_n(\omega)$ y de la ecuación 214 con $i = 1$ y también $i = n$:

$$-\omega = -Cd(uK, k) = Cd(uK + 2K, k) = Cd((u+2)K, k) \quad (119)$$

$$F_n(-\omega) = Cd(n \cdot (u+2)K_1, k_1) = Cd(n \cdot u \cdot K_1 + 2n \cdot K_1, k_1) = (-1)^n Cd(n \cdot u \cdot K_1, k_1) = (-1)^n F_n(\omega) \quad (120)$$

Los ceros de $F_n(\omega)$ se obtienen de igualarla a cero:

$$F_n(\omega) = Cd(n \cdot u \cdot K_1, k_1) = 0 \Rightarrow n \cdot u_i \cdot K_1 = (2 \cdot i - 1) K_1, i = 1, 2, \dots, L \quad (121)$$

Por lo tanto, para hallar *las frecuencias de los ceros de $F_n(\omega)$* se reemplaza la condición anterior en la definición de u :

$$\zeta_i = Cd\left(\frac{(2 \cdot i - 1)}{n} K, k\right), i = 1, 2, \dots, L \quad (122)$$

Debido a la *Identidad de Cauer*, las frecuencias $\omega_i = \frac{1}{k \cdot \zeta_i}$ serán los polos de $F_n(\omega)$. Por esto, se puede construir a $F_n(\omega)$ como una función racional de sus polos y ceros con una normalización tal que $F_n(1) = 1$:

$$F_n(\omega) = \omega^r \prod_{i=1}^L \left\{ \left(\frac{\omega^2 - \zeta_i^2}{1 - \omega^2 k^2 \zeta_i^2} \right) \cdot \left(\frac{1 - k^2 \zeta_i^2}{1 - \zeta_i^2} \right) \right\} \quad (123)$$

Esta expresión se conoce como función racional elíptica o función racional de Chebycheff.

Se obtiene la solución de la ecuación de grado haciendo $\omega = 1/k$ y $F_n(\omega) = 1/k_1$:

$$\frac{1}{k_1} = \left(\frac{1}{k} \right)^r \prod_{i=1}^L \left\{ \left(\frac{k^{-2} - \zeta_i^2}{1 - k^{-2} k^2 \zeta_i^2} \right) \cdot \left(\frac{1 - k^2 \zeta_i^2}{1 - \zeta_i^2} \right) \right\} = (k^{-1})^{2L+r} \prod_{i=1}^L \left(\frac{1 - k^2 \zeta_i^2}{1 - \zeta_i^2} \right)^2 \quad (124)$$

Donde se sacó factor común k^{-2} en cada término del numerador, por eso aparece el $2L$ en el exponente de k^{-1} . Notando que $n = 2L + r$, la expresión anterior puede ser reacomodada como:

$$k_1 = k^n \prod_{i=1}^L Sn^4(u_i K, k) \quad (125)$$

Donde se usó la propiedad $\frac{1 - \zeta_i^2}{1 - k^2 \zeta_i^2} = Sn^2(u_i K, k)$ que se deriva de la propiedad 187.

También se puede obtener de la misma forma para k_1 :

$$k' = k_1'^n \prod_{i=1}^L Sn^4(u_i K', k_1') \quad (126)$$

El valor de k puede ser calculado a partir del desarrollo en series de las funciones elípticas:

$$k = 4\sqrt{q} \left(\frac{\sum_{m=0}^{\infty} q^{m(m+1)}}{1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} q^{m^2}} \right)^2 \quad (127)$$

donde $q = e^{-\pi K'/K}$ y $q_1 = q^n$. La serie converge rápido, para $m = 7$ se obtienen buenos resultados.

5.2.6. Funciones Matlab

Matlab dispone de las siguientes funciones que pueden resultar útiles al trabajar con funciones elípticas:

Prototipo	Función
$[K, E] = \text{ellipke}(m)$	Integral elíptica completa de primera y segunda especie
$[Sn, Cn, Dn] = \text{ellipj}(u, m)$	Funciones elípticas de Jacobi para elemento de argumento u y parámetro m
$k = \text{ellipdeg}(N, k_1)$	Encuentra el k que cumple la ecuación del orden para filtro Cauer de orden N y discriminante k_1
$k_1 = \text{ellipdeg1}(N, k)$	Encuentra el k_1 que cumple la ecuación del orden para filtro Cauer de orden N y selectividad k
$w = \text{cde}(u, k)$	Coseno elíptico normalizado (Cd) con argumento complejo normalizado
$w = \text{sne}(u, k)$	Seno elíptico (Sn) con argumento complejo normalizado
$u = \text{asne}(w, k)$	Seno elíptico inverso
$u = \text{acde}(w, k)$	Coseno elíptico inverso

Cuadro 6: Funciones de Matlab relacionadas a las integrales elípticas

Para ver un listado más completo de las funciones elípticas de Matlab visitar la página de Mathwors

5.3. Recetario

Definir la plantilla del pasa bajos normalizo y validar todos los parámetros.

5.3.1. Orden

1. Calcular el *Factor Discriminante de Plantilla* k_1 en función de las atenuaciones permitidas en las bandas de paso y atenuación:

$$k_1 = \sqrt{\frac{10^{A_p[dB]/10} - 1}{10^{A_a[dB]/10} - 1}} \quad (128)$$

2. Calcular la *Selectividad* k de la plantilla según:

$$k = \frac{\omega_p}{\omega_a} \quad (129)$$

3. Calcular el orden mínimo según la ecuación del orden para una aproximación Cauer:

$$n_{MIN} = \left\lceil \frac{K(\sqrt{1-k_1^2})}{K(k_1)} \cdot \frac{K(k)}{K(\sqrt{1-k^2})} \right\rceil \quad (130)$$

Donde $K(\cdot)$ es la integral elíptica completa de primera especie. Matlab dispone de una función $[K] = \text{ellipke}(m)$ que devuelve el valor de las integral completa de primera especie para cada elemento de m , estando limitados estos entre 0 y 1, donde **m es el parámetro, es decir, a la función se ingresa con k^2** .

5.3.2. Singularidades

1. Definir la ganancia en banda pasante según:

$$G_p = 10^{-\frac{A_p[dB]}{20}} \quad (131)$$

2. Calcular el *Factor Discriminante de Plantilla* k_1 en función de las atenuaciones permitidas en las bandas de paso y atenuación:

$$k_1 = \sqrt{\frac{10^{A_p[dB]/10} - 1}{10^{A_a[dB]/10} - 1}} \quad (132)$$

3. Dado un orden n y el factor k_1 calculado en el paso anterior, se debe encontrar un valor de selectividad k que cumple la ecuación del orden para una aproximación Cauer, es decir se debe encontrar un $0 \leq k < 1$ que cumpla la siguiente ecuación implícita:

$$n = \frac{K(\sqrt{1-k_1^2})}{K(k_1)} \cdot \frac{K(k)}{K(\sqrt{1-k^2})} \quad (133)$$

4. Si la aproximación es de orden n , entonces se tendrán $L = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ etapas de segundo orden y $r = n - 2 \cdot L$ etapas de primer orden (una o ninguna).
5. El siguiente paso consiste en encontrar los ceros de la función racional elíptica, que según la expresión 122 son:

$$\zeta_i = Cd \left(\frac{(2 \cdot i - 1)}{n}, k \right), i = 1, 2, \dots, L \quad (134)$$

6. Con los ceros de la función racional elíptica se pueden hallar sus polos (debido a la identidad de Cauer), que no serán más que los ceros de la transferencia. Por lo tanto:

$$z_i = \frac{j}{k \cdot \zeta_i}, i = 1, 2, \dots, L \quad (135)$$

7. Los polos del filtro estarán en $p_i = j\omega_i$ y surgen de hacer $1 + \varepsilon_p^2 F_n(\omega_i) = 0$, o bien, $F_n(\omega) = \pm \frac{j}{\varepsilon_p}$, para eso:

$$p_i = j \cdot \underbrace{Cd((u_i - j \cdot V_0), k)}_{=\omega_i}, i = 1, 2, \dots, L \quad (136)$$

$$p_0 = j \cdot Cd(1 - jV_0, k) = j \cdot Sn(j \cdot V_0, k) \quad (137)$$

Donde $u_i = \frac{2 \cdot i - 1}{n}$ y V_0 es la solución real de la ecuación:

$$Sn(j \cdot V_0 \cdot n, k_1) = \frac{j}{\varepsilon_p} \quad (138)$$

8. La función transferencia puede ser expresada de cualquiera de las siguientes formas:

$$H(s) = H_0 \cdot \left(\frac{1}{\frac{s}{p_0} + 1} \right)^r \cdot \prod_{i=1}^L \left[\frac{\left(\frac{s}{z_i} + 1 \right) \left(\frac{s}{z_i^*} + 1 \right)}{\left(\frac{s}{p_i} + 1 \right) \left(\frac{s}{p_i^*} + 1 \right)} \right] = H_0 \cdot \left(\frac{1}{A_{01}s + 1} \right)^r \cdot \prod_{i=1}^L \left[\frac{1 + B_{i1}s + B_{i2}s^2}{1 + A_{i1}s + A_{i2}s^2} \right] \quad (139)$$

Donde los coeficientes están dados por:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 1 & B_{i1} & B_{i2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \cdot Re \left\{ \frac{1}{z_i} \right\} & \frac{1}{|z_i|^2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & A_{i1} & A_{i2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \cdot Re \left\{ \frac{1}{p_i} \right\} & \frac{1}{|p_i|^2} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & A_{01} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{-1}{p_0} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (140)$$

y donde L es la cantidad de etapas de segundo orden, el orden del filtro es $n = 2L + r$ y la ganancia en continua H_0 se calcula de la siguiente forma:

$$H_0 = \begin{cases} 1 & \text{Butterworth y Chebby 2} \\ G_p^{1-r} & \text{Chebby 1 y Cauer} \end{cases} \quad (141)$$

Por último, para verificar que los polos de frecuencia $\omega_i = Cd((u_i - j \cdot V_0)K, k)$ cumplen la condición $1 + \varepsilon_p^2 F_n(\omega_i) = 0$ se cita la definición de $F_n(\omega)$ y se realiza lo siguiente:

$$F_n(\omega) = Cd \left(n \cdot \frac{Cd^{-1}(\omega)}{K} \cdot K_1, k_1 \right) \quad (142)$$

Evaluando en $\omega = \omega_i$:

$$F_n(\omega_i) = Cd(n \cdot (u_i - j \cdot V_0) \cdot K_1, k_1) = Cd(n \cdot u_i \cdot K_1 - j \cdot n \cdot V_0 \cdot K_1, k_1) \quad (143)$$

Usando la definición de u_i :

$$F_n(\omega_i) = Cd((2 \cdot i - 1) \cdot K_1 - j \cdot n \cdot V_0 \cdot K_1, k_1), i = 1, 2, \dots, L \quad (144)$$

Empleando la ecuación 213:

$$F_n(\omega_i) = (-1)^n \cdot Sn(-j \cdot n \cdot V_0 \cdot K_1, k_1), i = 1, 2, \dots, L \quad (145)$$

$$F_n(\omega_i) = (-1)^{n+1} \cdot Sn(j \cdot n \cdot V_0 \cdot K_1, k_1), i = 1, 2, \dots, L \quad (146)$$

Y por 138:

$$F_n(\omega_i) = \pm \frac{j}{\varepsilon_p}, i = 1, 2, \dots, L \quad (147)$$

Lo que completa la prueba.

6. Anexo: Funciones elípticas

Las aproximaciones de Cauer requieren el uso de funciones elípticas[5]. En esta sección se las presentará desde un enfoque exclusivamente matemático para que en la siguiente sección se las aplique al cálculo de una aproximación Cauer.

6.0.3. El problema del péndulo

Para motivar aún más el estudio de estas funciones se propone el siguiente caso de estudio[12]:

Dado un péndulo vertical de cuerda inextensible, largo L y masa despreciable; que sostiene una bolita de masa m . Esta se desplaza de la posición de equilibrio formando un ángulo θ con la vertical, entonces se plantean las ecuaciones de Newton en la dirección tangencial para describir la oscilación de esta, despreciando todo tipo de rozamiento con el aire.

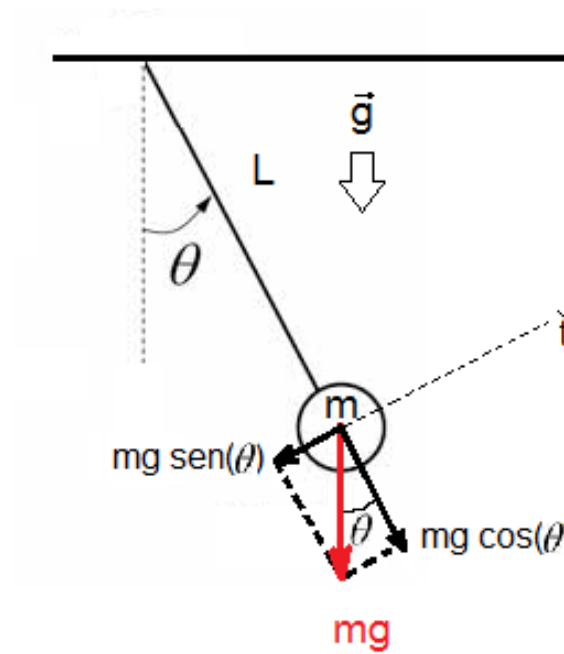


Figura 34: Diagrama de cuerpo libre del péndulo.

$$\sum \vec{F}_t = m \cdot \vec{a}_t \quad (148)$$

Recordando que la aceleración es la derivada segunda de la posición respecto del tiempo dos veces, y que la posición de la bolita se relaciona con su ángulo de oscilación según: $x = L \cdot \theta$ se llega a:

$$-mg \cdot \text{sen}(\theta) = m \cdot L \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad (149)$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L} \cdot \text{sen}(\theta) = 0 \quad (150)$$

Si las oscilaciones del péndulo son lo suficientemente chicas como para poder aproximar al seno con su polinomio de Maclaurin de grado 1, es decir: $\text{sen}(\theta) \approx \theta$. Esto ocurre para $\theta \ll 1\text{rad} \cong 57^\circ$. En estas condiciones, la ecuación 150 se convierte en una ecuación diferencial lineal de segundo orden (ecuación 151) cuya solución (ecuación 152) consiste en un movimiento armónico simple como se estudió oportunamente en cursos de Física.

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0 \quad (151)$$

$$\theta(t) = \theta_0 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}} \cdot t + \phi\right) \quad (152)$$

Esta aproximación se hace porque la ecuación 150 es una ecuación diferencial de segundo orden *no lineal*. Cuya solución formal requiere el uso de funciones elípticas.

A modo de resumen podemos destacar que la solución aproximada del problema del péndulo conduce a unas oscilaciones de período:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}} \quad (153)$$

Mientras que su solución formal conduce a unas oscilaciones de período:

$$T = 4\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}} \cdot F\left(\frac{\theta}{2}, \csc\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \cdot \csc\left(\frac{\theta}{2}\right) \quad (154)$$

Donde F es la integral elíptica incompleta de primera especie:

$$F(\varphi, k) = \int_0^\varphi \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(u)}} du \quad (155)$$

También existen soluciones polinómicas de Legendre a esta ecuación que conducen a un período:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{L}{g}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{(2n)!}{2^n \cdot n!} \right)^2 \cdot \sin^{2n}\left(\frac{\theta}{2}\right) \right] \quad (156)$$

Donde se observa que si se aproxima la serie por su primer término (para $n = 0$ ésta vale 1), se llega al período aproximado de la ecuación 153.

6.0.4. Funciones meromórficas

Las funciones meromórficas (en griego, *meros* significa parte) son funciones de variable compleja holomorfas a tramos. Es decir, satisfacen las ecuaciones de *Cauchy-Riemann* en un conjunto del plano, excepto en una cantidad finita de puntos aislados internos a ese conjunto; i.e. los polos de la función. Entonces, bajo esta definición, las funciones meromórficas tienen un desarrollo en serie de Laurent alrededor de cada uno de los polos.

Teorema:

- Toda función meromórfica puede ser expresada como el cociente de 2 funciones holomorfas.

Propiedades:

- Eliminando singularidades evitables las funciones meromórficas pueden ser sumadas, restadas, multiplicadas y divididas (siempre y cuando el denominador sea distinto de 0).

Ejemplos:

- Un cociente de polinomios en z es una función meromórfica
- e^z/z es una función meromórfica
- La función Γ es una función meromórfica
- La exponencial $e^{1/z}$ no es meromórfica porque la singularidad en 0 es esencial
- El $\ln(z)$ no es una función meromórfica porque sus singularidades no son aisladas

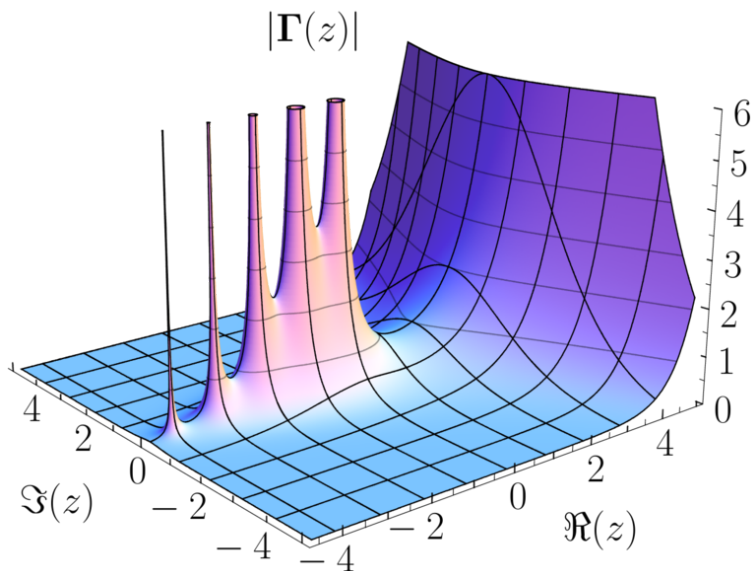


Figura 35: La función Γ es una función meromórfica en todo el plano complejo.

6.0.5. Definición

Las funciones elípticas son funciones meromórficas que presentan periodicidad en 2 direcciones. Así como una función periódica de variable real puede ser definida por sus valores en el intervalo. Una función elíptica puede ser definida según sus valores en un paralelogramo llamado *paralelogramo fundamental* (pensar en una función periódica en las direcciones de los vectores 1 e i , y que mediante un cambio de variable se los reemplaza por 2 vectores linealmente independiente u y v que forman el paralelogramo).

Teoremas:

- Si una función de variable compleja es meromórfica y doblemente periódica (funciones elípticas):
 - a) No puede ser acotada.
 - b) Como es meromórfica, no tiene singularidades esenciales y sus polos están aislados.
 - Entonces según el teorema de los residuos la función ***no puede tener un único polo simple dentro del paralelogramo*** puesto que la integral de línea alrededor de él es cero (como la función es doblemente periódica la integral vale lo mismo en los lados enfrentados y como las direcciones de circulación son opuestas, se cancelan entre sí para que la integral valga 0).
 - Si la función tiene al menos 2 polos de orden 1 dentro del paralelogramo se tiene una función elíptica de *Jacobi*. Si al menos uno de los polos (puede tener estrictamente un polo) es de orden superior a 1 se tiene una función elíptica de *Weierstrass*.
 - c) Si se invierte una función elíptica f tal que $g = 1/f$. Como los ceros de f se vuelven polos en g , y viceversa. Para que g siga siendo elíptica, por el teorema anterior se llega a que ***f no puede tener un único cero en el paralelogramo***, o debe tener un cero de multiplicidad mayor a 1.
 - d) Las funciones elípticas con inversa elíptica no son inyectivas ya que si lo fueran, para un valor k de la imagen de f sólo lo alcanzarían una vez. Y la función $f(z)-k$ que es elíptica tendría un único cero. Entonces de la generalidad de k se prueba que ***f no puede alcanzar una única vez a cualquier valor***.

Definición formal: Una función elíptica $f(z)$ es una función meromórfica en \mathbb{C} para la que existen 2 complejos no nulos z_1 y z_2 tales que z_1/z_2 no pertenezca a los reales (es decir, uno no es múltiplo real del otro) y se cumple que:

$$f(z) = f(z + z_1) = f(z + z_2) \quad (157)$$

para todo z en el dominio de $f(z)$.

Una función elíptica debe tener al menos 2 polos en su paralelogramo fundamental (contando su multiplicidad) y surgen como funciones inversas de las integrales elípticas que se explicarán a continuación.

Propiedad: La derivada de una función elíptica es una función elíptica.

6.0.6. Integral elíptica

Como se concluyó en la sección anterior, una función elíptica debe tener al menos 2 polos en su paralelogramo fundamental (contando su multiplicidad). Ahora se tratarán a las integrales elípticas, integrales cuyas funciones inversas son las funciones elípticas.

Una integral elíptica es una función f que puede ser expresada como:

$$f(c, x) = \int_c^x R(t, \sqrt{P(t)}) dt \quad (158)$$

Donde R es una función racional de sus 2 argumentos, P es un polinomio con raíces de multiplicidad 1 y c es una constante. En general estas integrales no pueden ser expresadas en términos de funciones elementales. No obstante eso, estas integrales se pueden *reducir*.

¿Qué es reducir una integral? ¿Nunca se preguntaron como se calcula la integral indefinida de $\sin^n(x)$? Si se encuentra la expresión general, quizás se pueda hacer por inducción. No obstante eso, existe un método iterativo que es bastante intuitivo para encontrar la solución. Este es un método de resolución de integrales que no se estudia formalmente en Mate 1 pero que consiste en lo siguiente:

- 1) Encontrar un parámetro en el integrando (puede ser un exponente n-ésimo por ejemplo)
- 2) Sin alterar la integral, reducir el parámetro, para esto se debe establecer una relación de recurrencia entre el n -ésimo y el $(n-1)$ -ésimo (generalmente mediante integración por partes)

Para clarificar la presentación, a modo de ejemplo se estudia el caso de la integral del $\cos^n(x)$:

$$I_n = \int \cos^n(x) dx \quad (159)$$

Primero se encuentra el parámetro, en este caso este es $\cos(x)$. Luego se separará el $\cos^n(x)$ en $\cos^{n-1}(x)$ y $\cos(x)$ para poder realizar una integración por partes y dejar expresada a la integral n-ésima original en función de una integral con menor orden.

$$I_n = \int \cos^{n-1}(x) \cdot \cos(x) dx \quad (160)$$

Ahora integrando por partes y operando algebraicamente se puede llegar a lo siguiente:

$$\int \cos^n(x) dx = \frac{1}{n} \cdot \cos^{n-1}(x) \cdot \sin(x) + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2}(x) dx \quad (161)$$

Entonces, a partir de este método de reducción de integrales, todas las integrales elípticas pueden ser reducidas a las siguientes tres formás básicas, denominadas las *tres formas canónicas de Legendre*.

La *Integral Elíptica Incompleta de Primera Especie en la Forma Trigonométrica*¹:

$$K(\phi, k) = \int_0^\phi \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\theta)}} d\theta \quad (162)$$

La *Integral Elíptica Incompleta de Segunda Especie en la Forma Trigonométrica*:

$$E(\phi, k) = \int_0^\phi \sqrt{1 - k^2 \sin^2(t)} dt \quad (163)$$

Y la *Integral Elíptica Incompleta de Tercera Especie en la Forma Trigonométrica*:

¹En este apunte se llamará $K(\phi, k)$ en vez de $F(\phi, k)$ a la *Integral Elíptica Incompleta de Primera Especie en la Forma Trigonométrica* para no confundir con la función F que será utilizada cuando se estudie la aproximación de Cauchy.

$$\Pi(\phi, n, k) = \int_0^\phi \frac{1}{(1 - n \cdot \sin^2(t)) \cdot \sqrt{1 - k^2 \sin^2(t)}} dt \quad (164)$$

Las respectivas integrales elípticas completas se obtienen de hacer $\phi = \pi/2$.

Una aplicación del segundo tipo de las integrales elípticas se encuentra para calcular el arco de una elipse con semi eje unitario y excentricidad k . Elipse definida parametricamente por las siguientes expresiones:

$$\begin{cases} x = \sqrt{1 - k^2} \cdot \cos(t) & , t \in [0, 2\pi] \\ y = \sin(t) & , t \in [0, 2\pi] \end{cases} \quad (165)$$

La excentricidad k es un parámetro de toda sección cónica que mide la desviación respecto a un círculo[8]. En la siguiente tabla se detallan los cuatro casos básicos para distintos tipos de excentricidades:

Sección cónica	Ecuación	Excentricidad (k)
Círcunferencia	$x^2 + y^2 = r^2$	0
Elipse	$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$	$\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$
Parábola	$y^2 = 4ax$	1
Hipérbola	$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1$	$\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$

Cuadro 7: Excentricidades de las 4 secciones cónicas básicas

Para el caso particular de las elipses, se definen 4 tipos distintos de excentricidades, todos equivalentes entre sí según indica la siguiente tabla:

Nombre	Símbolo	$f(a, b)$	$f(k)$
Primera excentricidad	k	$\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$	k
Segunda excentricidad	k'	$\sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}$	$\frac{k}{\sqrt{1 - k^2}}$
Tercera excentricidad	k''	$\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$	$\frac{k}{\sqrt{2 - k^2}}$
Excentricidad angular	α	$\arcsin\left(\frac{b}{a}\right)$	$\arcsin(k)$

Cuadro 8: Excentricidades de una elipse

Volviendo a las integrales, y recordando que se llaman integrales elípticas incompletas a las funciones de 2 argumentos y completas a las que sólo tienen un argumento (asumen $\phi = \pi/2$). Estos argumentos se pueden expresar de distintas pero equivalentes maneras entre sí. En general se sigue la siguiente convención:

- α - *Ángulo modular o excentricidad angular*: Es un parámetro equivalente a la excentricidad clásica de una elipse según indica la tabla anterior.
- $k = \sin(\alpha)$ es el *módulo elíptico* o más conocido como *excentricidad de la elipse*.
- $m = k^2 = \sin^2(\alpha)$ es el *parámetro* (Sí, se llama así).

Cualquiera de las magnitudes anteriores está completamente determinada dada una sola de ellas, por eso son trivialmente intercambiables ya que todas son no negativas. Con estos parámetros se pueden redefinir a las integrales elípticas según convenga de la siguiente forma:

<i>Integral Elíptica</i>	<i>Símbolo</i>	<i>Forma Trigonométrica</i>	<i>Forma de Jacobi</i>
<i>Primera Especie</i>	$K(\phi, k)$	$\int_0^\phi \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2(\theta)}} d\theta$	$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}} dt$
<i>Segunda Especie</i>	$E(\phi, k)$	$\int_0^\phi \sqrt{1-k^2 \sin^2(t)} dt$	$\int_0^x \frac{\sqrt{1-k^2 t^2}}{\sqrt{1-t^2}} dt$
<i>Tercera Especie</i>	$\Pi(\phi, n, k)$	$\int_0^\phi \frac{1}{(1-n \sin^2(t)) \cdot \sqrt{1-k^2 \sin^2(t)}} dt$	$\int_0^x \frac{1}{\sqrt{(1-n t^2)(1-k^2 t^2)}} dt$

Cuadro 9: Integrales elípticas. El cambio de variable es $t = \sin(\theta)$, lo que provoca: $x = \sin(\phi)$.

Matlab dispone de una función $[K, E] = \text{ellipke}(\mathbf{m})$ que devuelve el valor de las integrales completas de primera y segunda especie para cada elemento de \mathbf{m} , estando limitados estos entre 0 y 1, donde \mathbf{m} es el **parámetro**, es decir, a la función se ingresa con k^2 .

6.0.7. Funciones elípticas de Jacobi

Para introducir a las funciones elípticas de Jacobi se recordará la siguiente integral de tabla:

$$\arcsin(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx \quad (166)$$

Es decir, la integral representa al seno de alguna magnitud. Dicho de otro modo, si $z = \sin(w)$ entonces $w = \arcsin(z)$, lo que a su vez es el resultado la integral anterior. Así se podría definir al seno como la operación inversa a la integral de la ecuación 166.

Entonces, a partir de la integral elíptica incompleta de primera especie (ecuación 162):

$$u = \int_0^\phi \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2(\theta)}} d\theta, k \in [0, 1] \quad (167)$$

Se define al *Seno y Coseno Elíptico*, funciones elípticas con todas las propiedades mencionadas como:

$$Sn(u, k) \triangleq \sin(\phi) \quad (168)$$

$$Cn(u, k) \triangleq \cos(\phi) \quad (169)$$

Y por último se define al *Parámetro Complementario, Módulo Complementario* o *Amplitud Delta* como:

$$Dn(u, k) \triangleq \sqrt{1-k^2 \sin^2(\phi)}, k \in [0, 1] \quad (170)$$

Resulta de utilidad práctica para la aproximación Cauer definir a la siguiente función, que será denominada *Coseno Elíptico Normalizado*:

$$Cd(u, k) \triangleq \frac{Cn(u, k)}{Dn(u, k)} \quad (171)$$

Desde otro punto de vista, el seno y el coseno elípticos son funciones inversas a la integral elíptica de primera especie, por lo que se los podría definir como aquella operación inversa a la integral elíptica:

$$Sn(u, k) = \sin(\phi) \iff u = Sn^{-1}(\sin(\phi), k) = \int_0^\phi \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2(\theta)}} d\theta \quad (172)$$

$$Cn(u, k) = \cos(\phi) \iff u = Cn^{-1}(\cos(\phi), k) = \int_0^\phi \frac{1}{\sqrt{1-k^2 \sin^2(\theta)}} d\theta \quad (173)$$

Por lo tanto, la relación entre las funciones elípticas inversas y las integrales elípticas son las siguientes:

$$Sn^{-1}(u = \sin(\phi), k) = \int_0^{\arcsin(u)} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\theta)}} d\theta = K(\arcsin(u) = \phi, k) \quad (174)$$

$$Cn^{-1}(u = \cos(\phi), k) = \int_0^{\arccos(u)} \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\theta)}} d\theta = K(\arccos(u) = \phi, k) \quad (175)$$

Se destaca el comportamiento de las funciones elípticas cuando el parámetro adquiere el valor límite 0 y cuando se las evalúa en un valor particular de z , siendo z una variable compleja sin restricciones.

	$k = 0$	$z = 0$	$z = K\left(\frac{\pi}{2}, k\right)$
$Sn(z, k)$	$\sin(z)$	0	$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$
$Cn(z, k)$	$\cos(z)$	1	$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$
$Dn(z, k)$	1	1	$k' = \sqrt{1 - k^2}$
$Cd(z, k)$	$\cos(z)$	1	0

Cuadro 10: Comportamientos en el límite de las funciones elípticas.

Por otra parte, recordando las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} \sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta) \\ \cos^2(\theta) = 1 - \sin^2(\theta) \end{cases} \quad (176)$$

Despejando para θ :

$$\theta = \arccos\left(\sqrt{1 - \sin^2(\theta)}\right) = \arcsin\left(\sqrt{1 - \cos^2(\theta)}\right) \quad (177)$$

Y tomando $x = \cos(\theta)$ resulta:

$$\arccos(x) = \arcsin\left(\sqrt{1 - x^2}\right) \quad (178)$$

Esta igualdad será usada en las secciones posteriores.

Interpretación física

Nótese que el seno y el coseno circulares representan las coordenadas de una partícula que gira a una velocidad ω sobre una circunferencia. Análogamente, el seno y el coseno elíptico tienen el mismo significado físico con la salvedad que la partícula se estaría moviendo sobre una elipse, por lo tanto es de esperar que a mayor excentricidad de la elipse el seno y el coseno elíptico experimenten una suerte de “*Soft Clipping*” en su zona superior. En la siguiente figura se exhibe la gráfica del seno y el coseno elíptico para distintos valores de k y se observa como en el caso en que este parámetro se anule, las funciones elípticas se reducen a las circulares (excentricidad de la elipse unitaria).

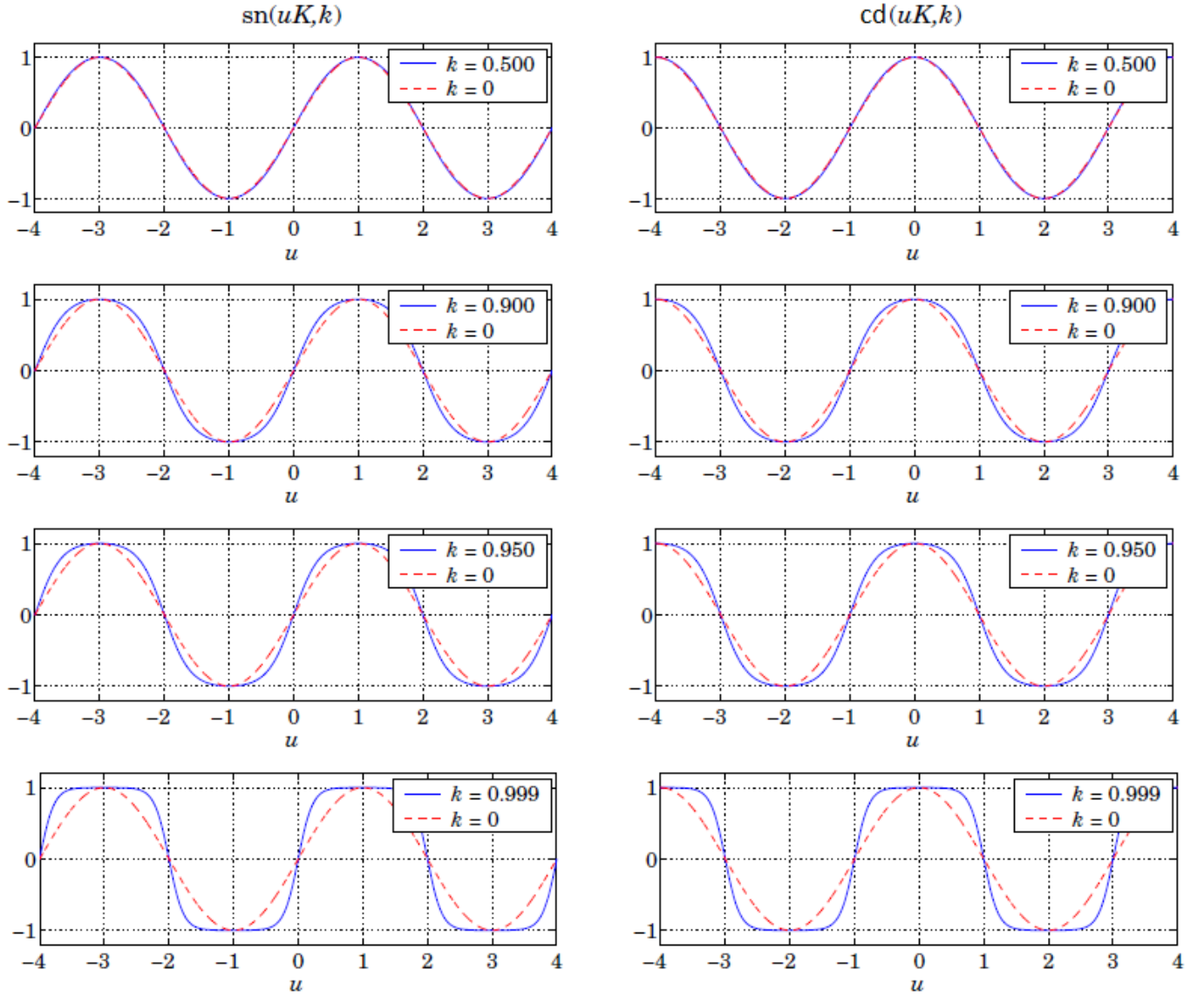


Figura 36: Seno y Coseno elíptico

6.0.8. Fórmulas de adición

Pueden ser demostradas las siguientes propiedades:

$$Sn(z + \omega) = \frac{Sn(z) \cdot Cn(\omega) \cdot Dn(\omega) + Sn(\omega) \cdot Cn(z) \cdot Dn(z)}{1 - k^2 Sn^2(z) Sn^2(\omega)} \quad (179)$$

$$Cn(z + \omega) = \frac{Cn(z) \cdot Cn(\omega) - Sn(\omega) \cdot Sn(z) \cdot Dn(z) \cdot Dn(\omega)}{1 - k^2 Sn^2(z) Sn^2(\omega)} \quad (180)$$

$$Dn(z + \omega) = \frac{Dn(z) \cdot Dn(\omega) - k^2 Sn(\omega) \cdot Sn(z) \cdot Cn(z) \cdot Cn(\omega)}{1 - k^2 Sn^2(z) Sn^2(\omega)} \quad (181)$$

$$Cd(z + \omega) = \frac{Cn(z + \omega)}{Dn(z + \omega)} = \frac{Cn(z) \cdot Cn(\omega) - Sn(\omega) \cdot Sn(z) \cdot Dn(z) \cdot Dn(\omega)}{Dn(z) \cdot Dn(\omega) - k^2 Sn(\omega) \cdot Sn(z) \cdot Cn(z) \cdot Cn(\omega)} \quad (182)$$

$$Sn^2(z, k) + Cn^2(z, k) = 1 \quad (183)$$

$$k^2 Sn^2(z, k) + Dn^2(z, k) = 1 \quad (184)$$

$$k'^2 Sn^2(z, k) + Cn^2(z, k) = Dn^2(z, k) \quad (185)$$

$$Dn^2(z, k) - k^2 Cn^2(z, k) = k'^2 = 1 - k^2 \quad (186)$$

$$Sn^2(z, k) = \frac{1 - Cd^2(z, k)}{1 - k^2 Cd^2(z, k)} \quad (187)$$

6.0.9. Argumento imaginario puro

Se desea poder expresar a las funciones elípticas con argumento imaginario puro (como por ejemplo $Sn(j\omega, k)$) a partir de las funciones elípticas ya presentadas. Para conseguir esto se cita la definición de las funciones elípticas (ecuaciones 172 y 173), pero evaluadas en un argmento imaginario puro:

$$Sn(j\omega, k) = \sin(\psi) \quad (188)$$

$$Cn(j\omega, k) = \cos(\psi) \quad (189)$$

$$Dn(j\omega, k) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\psi)} \quad (190)$$

Luego para poder calcular estas funciones en base a argumentos reales ya conocidos se propone el siguiente, y totalmente natural, cambio de variable en la integral elíptica inversa a la ecuación 188.

$$\begin{cases} \sin(\theta) = j \cdot tg(\theta') \\ \sin(\psi) = j \cdot tg(\psi') \end{cases} \quad (191)$$

Donde derivando implícitamente cada cambio de variable se llega a las siguientes expresiones para los diferenciales:

$$\cos(\theta) = j \cdot \sec^2(\theta') \cdot \frac{d\theta'}{d\theta} \Rightarrow d\theta = j \cdot \frac{\sec^2(\theta')}{\cos(\theta)} \cdot d\theta' \quad (192)$$

$$\cos(\psi) = j \cdot \sec^2(\psi') \cdot \frac{d\psi'}{d\psi} \Rightarrow d\psi = j \cdot \frac{\sec^2(\psi')}{\cos(\psi)} \cdot d\psi' \quad (193)$$

La definición del seno elíptico aplicado a la ecuación 188 es:

$$j\omega = \int_0^\psi \frac{1}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2(\theta)}} d\theta \quad (194)$$

A la que le aplicamos el cambio de variable 191 y se llega a:

$$j\omega = \int_0^{\psi'} \frac{1}{\sqrt{1 + k^2 tg^2(\theta')}} \cdot \left(j \cdot \frac{\sec^2(\theta')}{\cos(\theta)} \cdot d\theta' \right) \quad (195)$$

Donde los límites de integración se calculan a partir de la primer ecuación del cambio de variable de la expresión 191, donde para $\theta \rightarrow 0 \Rightarrow \theta' \rightarrow 0$ y para $\theta \rightarrow \psi \Rightarrow \theta' \rightarrow \psi'$. Luego, acomodando:

$$j\omega = j \int_0^{\psi'} \frac{d\theta'}{\sqrt{\cos^2(\theta') + k^2 \sin^2(\theta')}} \left(\frac{\sec(\theta')}{\cos(\theta)} \right) \quad (196)$$

Recordando que $\cos(\theta) = \sqrt{1 - \sin^2(\theta)}$ y teniendo en cuenta el cambio de variable 191, resulta $\cos(\theta) = \sqrt{1 + tg^2(\theta')}$, pero como $\sec^2(\theta') = 1 + tg^2(\theta')$ el término entre paréntesis se hace cancela y se vuelve 1.

$$j\omega = j \int_0^{\psi'} \frac{d\theta'}{\sqrt{\cos^2(\theta') + k^2 \sin^2(\theta')}} \quad (197)$$

Ahora reescribiendo a k^2 como $1 - (1 - k^2)$, la suma entre el $\cos^2(\theta')$ y $\sin^2(\theta')$ se vuelve 1 y resulta que la integral vale:

$$j\omega = j \int_0^{\psi'} \frac{d\theta'}{\sqrt{1 + (1 - k^2) \sin^2(\theta')}} \quad (198)$$

Por lo tanto definiendo a $k' = \sqrt{1 - k^2}$ como el módulo complementario de k se llega a:

$$\begin{cases} Sn(\omega, k') = \sin(\psi') \\ Cn(\omega, k') = \cos(\psi') \\ Dn(\omega, k') = \sqrt{1 - k'^2 \sin^2(\psi')} \end{cases} \quad (199)$$

Y por último, empleando las ecuaciones 183 y 185 se llega a las expresiones buscadas:

$$Sn(j\omega, k) = \sin(\psi) = j \cdot tg(\psi') = j \cdot \frac{\sin(\psi')}{\cos(\psi')} = j \cdot \frac{Sn(\omega, k')}{Cn(\omega, k')} \quad (200)$$

$$Cn(j\omega, k) = \cos(\psi) = \sqrt{1 - \sin^2(\psi)} = \sqrt{1 + tg^2(\psi')} = \sqrt{1 + \frac{Sn^2(\omega, k')}{Cn^2(\omega, k')}} = \frac{1}{Cn(\omega, k')} \quad (201)$$

$$Dn(j\omega, k) = \sqrt{1 - k^2 \sin^2(\psi)} = \sqrt{1 + k^2 tg^2(\psi')} = \sqrt{1 + \frac{k^2 Sn^2(\omega, k')}{Cn^2(\omega, k')}} = \frac{Dn(\omega, k')}{Cn(\omega, k')} \quad (202)$$

$$Cd(j\omega, k) \triangleq \frac{Cn(j\omega, k)}{Dn(j\omega, k)} = \frac{1}{Cn(\omega, k')} \frac{Cn(\omega, k')}{Dn(\omega, k')} = \frac{1}{Dn(\omega, k')} \quad (203)$$

A modo de resumen:

$$Sn(j\omega, k) = j \cdot \frac{Sn(\omega, k')}{Cn(\omega, k')} \quad (204)$$

$$Cn(j\omega, k) = \frac{1}{Cn(\omega, k')} \quad (205)$$

$$Dn(j\omega, k) = \frac{Dn(\omega, k')}{Cn(\omega, k')} \quad (206)$$

$$Cd(j\omega, k) = \frac{1}{Dn(\omega, k')} \quad (207)$$

Se define como **Integral Elíptica Incompleta Asociada de Primera Especie** a la siguiente integral, donde simplemente cambia k por k' en la definición de la Integral Elíptica de la ecuación 162:

$$K'(\phi, k') = \int_0^{\phi} \frac{1}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2(\theta)}} d\theta = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{(1 - t^2)(1 - k'^2 t^2)}} dt \quad (208)$$

Siendo $k' = \sqrt{1 - k^2}$ el *módulo complementario* de k .

6.0.10. Periodicidad

El siguiente paso consiste en encontrar los períodos de las funciones elípticas de Jacobi. Para ello se evalúan a las funciones elípticas en $u = u + K \left(\frac{\pi}{2}, k \right)$ teniendo en cuenta los resultados del cuadro 10. Por simplicidad, se notará a $K \left(\frac{\pi}{2}, k \right)$ como K y a $K' \left(\frac{\pi}{2}, k' \right)$ como K' .

$$\begin{cases} Sn(K, k) = Sn(K', k') = 1 \\ Cn(K, k) = Cn(K', k') = 0 \\ Dn(K, k) = k' = \sqrt{1 - k^2} \\ Dn(K', k') = k = \sqrt{1 - k'^2} \end{cases} \quad (209)$$

6.0.11. Períodos fundamentales

Utilizando las fórmulas de adición (ecuaciones 181, 182, 180 y 185) más los resultados anteriores pueden verificarse los siguientes cuadros:

Expresión	Resultado
$Sn(K + j \cdot K', k)$	$\frac{1}{k}$
$Cn(K + j \cdot K', k)$	$-j \frac{k'}{k}$
$Dn(K + j \cdot K', k)$	0

Cuadro 11: Funciones elípticas evaluadas en $K + jK'$

Expresión	Equivalente aditivo	Paso intermedio	Resultado
$Sn(u + K, k)$	$\frac{\overbrace{Sn(u) \cdot Cn(K)}^{=0} \cdot \overbrace{Dn(K)}^{k'} + \overbrace{Sn(K)}^{=1} \cdot \overbrace{Cn(u) \cdot Dn(u)}^{=1}}{1 - \underbrace{k^2 Sn^2(u)}_{=Dn^2(u)} \underbrace{Sn^2(K)}_{=1}}$	$\frac{Cn(u) \cdot Dn(u)}{Dn^2(u)}$	$\frac{Cn(u)}{Dn(u)} = Cd(u)$
$Cn(u + K, k)$	$\frac{\overbrace{Cn(u) \cdot Cn(K)}^{=0} - \overbrace{Sn(K)}^{=1} \cdot \overbrace{Sn(u) \cdot Dn(u) \cdot Dn(K)}^{k'}}{1 - \underbrace{k^2 Sn^2(u)}_{=Dn^2(u)} \underbrace{Sn^2(K)}_{=1}}$	$-\frac{Sn(u) \cdot Dn(u) k'}{Dn^2(u)}$	$-k' \frac{Sn(u)}{Dn(u)}$
$Dn(u + K, k)$	$\frac{\overbrace{Dn(u) \cdot Dn(K)}^{k'} - \underbrace{k^2}_{=1} \overbrace{Sn(K)}^{=1} \cdot \overbrace{Sn(u) \cdot Cn(u) \cdot Cn(K)}^{=0}}{1 - \underbrace{k^2 Sn^2(u)}_{=Dn^2(u)} \underbrace{Sn^2(K)}_{=1}}$	$\frac{k' Dn(u)}{Dn^2(u)}$	$\frac{k'}{Dn(u)}$
$Sn(u + 2K, k)$	$\frac{Cn(u+K)}{Dn(u+K)}$	$\left(-k' \cdot \frac{Sn(u)}{Dn(u)} \right) \cdot \left(\frac{Dn(u)}{k'} \right)$	$-Sn(u)$
$Cn(u + 2K, k)$	$-k' \cdot \frac{Sn(u+K)}{Dn(u+K)}$	$-k' \cdot \left(\frac{Cn(u)}{Dn(u)} \right) \cdot \left(\frac{Dn(u)}{k'} \right)$	$-Cn(u)$
$Dn(u + 2K, k)$	$\frac{k'}{Dn(u+K)}$	$k' \cdot \left(\frac{Dn(u)}{k'} \right)$	$Dn(u)$
$Sn(u + 4K, k)$	$-Sn(u + 2K)$	$-(-Sn(u))$	$Sn(u)$
$Cn(u + 4K, k)$	$-Cn(u + 2K)$	$-(-Cn(u))$	$Cn(u)$
$Dn(u + 2K, k)$	$Dn(u + 2K)$	$Dn(u)$	$Dn(u)$

Cuadro 12: Periodicidad real de las funciones elípticas.

Expresión	Equivalente aditivo	Paso intermedio (<i>ojo con la notación</i>)	Resultado
$Sn(u + jK', k)$	$\frac{Sn(u)Cn(jK')Dn(jK') + Sn(jK')Cn(u)Dn(u)}{1 - k^2 Sn^2(u) \cdot Sn^2(jK')}$	$\frac{\overbrace{Sn(u)}^{=k} \overbrace{Dn(K')}^{=1} + j \overbrace{Sn(K')}^{=0} \overbrace{Cn(K')}^{=0} \overbrace{Cn(u)Dn(u)}^{=-1}}{\overbrace{Cn^2(K')}^{=0} - k^2 Sn^2(u) \cdot \overbrace{(-Sn^2(K'))}^{=-1}}$	$\frac{1}{k \cdot Sn(u)}$
$Cn(u + jK', k)$	$\frac{Cn(u)Cn(jK') - Sn(jK')Sn(u)Dn(u)Dn(jK')}{1 - k^2 Sn^2(u) \cdot Sn^2(jK')}$	$\frac{\overbrace{Cn(u)}^{=0} \overbrace{Cn(K')}^{=1} - j \overbrace{Sn(K')}^{=0} \overbrace{Sn(u)Dn(u)}^{=-1} \overbrace{Dn(K')}^{=k}}{\overbrace{Cn^2(K')}^{=0} - k^2 Sn^2(u) \cdot \overbrace{(-Sn^2(K'))}^{=-1}}$	$-j \frac{Dn(u)}{k \cdot Sn(u)}$
$Dn(u + jK', k)$	$\frac{Dn(u)Dn(jK') - k^2 Sn(jK')Sn(u)Cn(u)Cn(jK')}{1 - k^2 Sn^2(u) \cdot Sn^2(jK')}$	$\frac{\overbrace{Dn(u)}^{=k} \overbrace{Dn(K')}^{=0} \overbrace{Cn(K')}^{=1} - j k^2 \overbrace{Sn(K')}^{=0} \overbrace{Sn(u)Cn(u)}^{=-1}}{\overbrace{Cn^2(K')}^{=0} - k^2 Sn^2(u) \cdot \overbrace{(-Sn^2(K'))}^{=-1}}$	$-j \frac{Cn(u)}{Sn(u)}$
$Sn(u + j2K', k)$	$\frac{1}{k \cdot Sn(u + jK')}$	$\frac{1}{k} \cdot \left(\frac{k \cdot Sn(u)}{1} \right)$	$Sn(u)$
$Cn(u + 2K, k)$	$-k' \cdot \frac{Sn(u + jK')}{Dn(u + jK')}$	$-k' \cdot \left(\frac{Cn(u)}{Dn(u)} \right) \cdot \left(\frac{Dn(u)}{k'} \right)$	$-Cn(u)$
$Dn(u + 2K, k)$	$-j \frac{Cn(u + jK')}{Sn(u + jK')}$	$-j \left(-j \frac{Dn(u)}{k \cdot Sn(u)} \right) \cdot \left(\frac{k \cdot Sn(u)}{1} \right)$	$Dn(u)$

Cuadro 13: Periodicidad imaginaria de las funciones elípticas.

Haciendo hincapié en el primer resultado del cuadro de periodicidad real:

$$Sn(u + K, k) = \frac{Sn(u, k) \cdot \overbrace{Cn(K, k)}^{=0} \cdot \overbrace{Dn(K, k)}^{=k'} + \overbrace{Sn(K, k)}^{=1} \cdot Cn(u, k) \cdot Dn(u, k)}{\underbrace{1 - k^2 Sn^2(u, k)}_{=Dn^2(u, k)} \cdot \underbrace{Sn^2(K, k)}_{=1}} = \frac{Cn(u, k)}{Dn(u, k)} = Cd(u, k) \quad (210)$$

Por lo tanto se ve que para que el coseno elíptico sea un seno elíptico desplazado debe utilizarse la definición normalizada (Cd). También se demuestra:

$$Cd(u + jK', k) = \frac{Cn(u + jK', k)}{Dn(u + jK', k)} = \left(\frac{-j \cdot Dn(u, k)}{k \cdot Sn(u, k)} \right) \cdot \left(\frac{Sn(u, k)}{-j \cdot Cn(u, k)} \right) = \frac{1}{k \cdot Cd(u, k)} \quad (211)$$

En particular:

$$Cd(jK', k) = \frac{1}{k \cdot Cd(0, k)} = \frac{1}{k} \quad (212)$$

Esta propiedad **es fundamental para los filtros elípticos**. Otras propiedades de interés y fácilmente demostrables son:

$$Cd(z + (2i - 1)K, k) = (-1)^i \cdot Sn(z, k) \quad \forall i \in \mathbb{Z} \quad (213)$$

$$Cd(z + 2iK, k) = (-1)^i \cdot Cd(z, k) \quad \forall i \in \mathbb{Z} \quad (214)$$

$$Cd(z, k) = Sn(z + K, k) = Sn(K - z, k) \quad (215)$$

Las funciones elípticas de Jacobi están definidas en su paralelogramo fundamental en el plano complejo. Sus vértices son los puntos $\{0, K, jK', K + jK'\}$, llamados S, C, D, N .

Una función elíptica de la forma $pq(z, k)$ donde p puede ser cualquiera de las letras $\{s, c, d, n\}$ y la segunda letra q puede ser alguna de las 3 restantes ($4 \times 3 = 12$ combinaciones posibles).

Cada función $pq(z, k)$ tiene un cero simple en la esquina p y un polo simple en la esquina q . Por ejemplo, $Sn(z, k)$ tiene un cero en el punto S ($z = 0$), y un polo en el punto N ($z = jK'$). Similarmente, $Cd(z, k)$ tiene un cero en el punto C ($z = K$) y un polo en el punto D ($z = K + jK'$). Más aún, se cumple la siguiente relación:

$$pq(z, k) = \frac{1}{qp(z, k)}, \quad pq(z, k) = \frac{pr(z, k)}{qr(z, k)} \quad (216)$$

Donde r puede ser cualquiera de las 2 letras restantes.

En particular, los ceros y polos de $Cd(z, k)$ resultan:

$$\text{Ceros : } z = K + 2mK + 2njK' = (2m + 1)K + 2njK' \quad (217)$$

$$\text{Polos : } z = K + jK' + 2mK + 2njK' = (2m + 1)K + j(2n + 1)K' \quad (218)$$

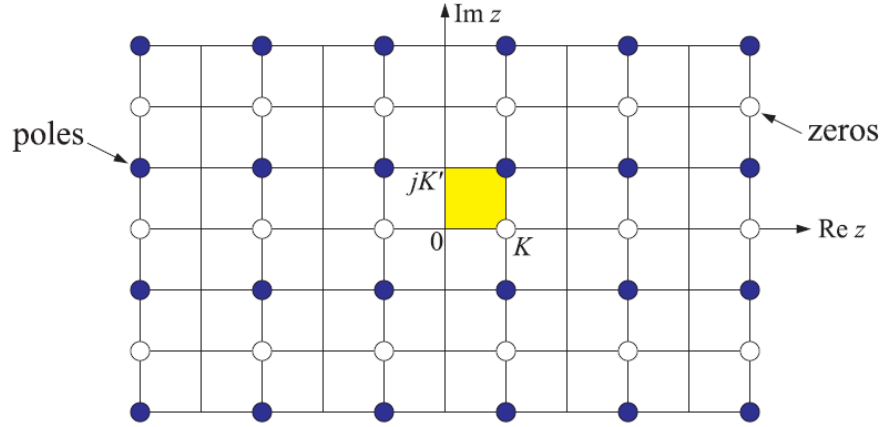


Figura 37: Patrón de polos y ceros de $Cd(z, k)$. Notar que hay un par de polos dentro de cada paralelogramo fundamental.

6.0.12. Mapeo al eje real

Las funciones 219 y 220 mapean el plano z en el plano ω . La pequeña región del plano z que es mapeada en todo el plano ω es llamada región fundamental. Para cada función $pq(z, k)$ una región centrada en el punto p (cero) conformada por 4 regiones fundamentales es mapeada a un cuadrante distinto del plano ω .

$$\omega = Cd(z, k) \quad (219)$$

$$\omega = Sn(z, k) \quad (220)$$

Por ejemplo, las regiones fundamentales del $Cd(z, k)$ y $Sn(z, k)$ están centradas en los puntos C y S, respectivamente y están definidas por:

$$Cd(z, k) : 0 \leq \text{Re}\{z\} \leq 2K, \quad -K' \leq \text{Im}\{z\} \leq K' \quad (221)$$

$$Sn(z, k) : -K \leq \text{Re}\{z\} \leq K, \quad -K' \leq \text{Im}\{z\} \leq K' \quad (222)$$

Se toma la mitad del intervalo en el eje real porque la otra mitad hace que el mapeo deje de ser inyectivo.

Nótese el resultado del mapeo $Cd(z, k)$ cuando se recorre el camino $C \rightarrow S \rightarrow N \rightarrow D$:

$$\begin{cases} C : Cd(K, k) = 0 \\ S : Cd(0, k) = 1 \\ N : Cd(jK', k) = \frac{1}{k} \\ D : Cd(K + jK', k) \rightarrow \infty \end{cases} \quad (223)$$

Por lo tanto los caminos resultan:

$$\text{Camino } C \rightarrow S, 0 \leq u \leq 1, z = K - Ku \Rightarrow 0 \leq \omega \leq 1 \text{ Banda de Paso} \quad (224)$$

$$\text{Camino } S \rightarrow N, 0 \leq u \leq 1, z = jK'u \Rightarrow 1 \leq \omega \leq \frac{1}{k} \text{ Banda de Transición} \quad (225)$$

$$\text{Camino } N \rightarrow D, 0 \leq u \leq 1, z = Ku + jK' \Rightarrow \frac{1}{k} \leq \omega \leq \infty \text{ Banda de Atenuación} \quad (226)$$

Graficamente el mapeo se ilustra en la siguiente figura:

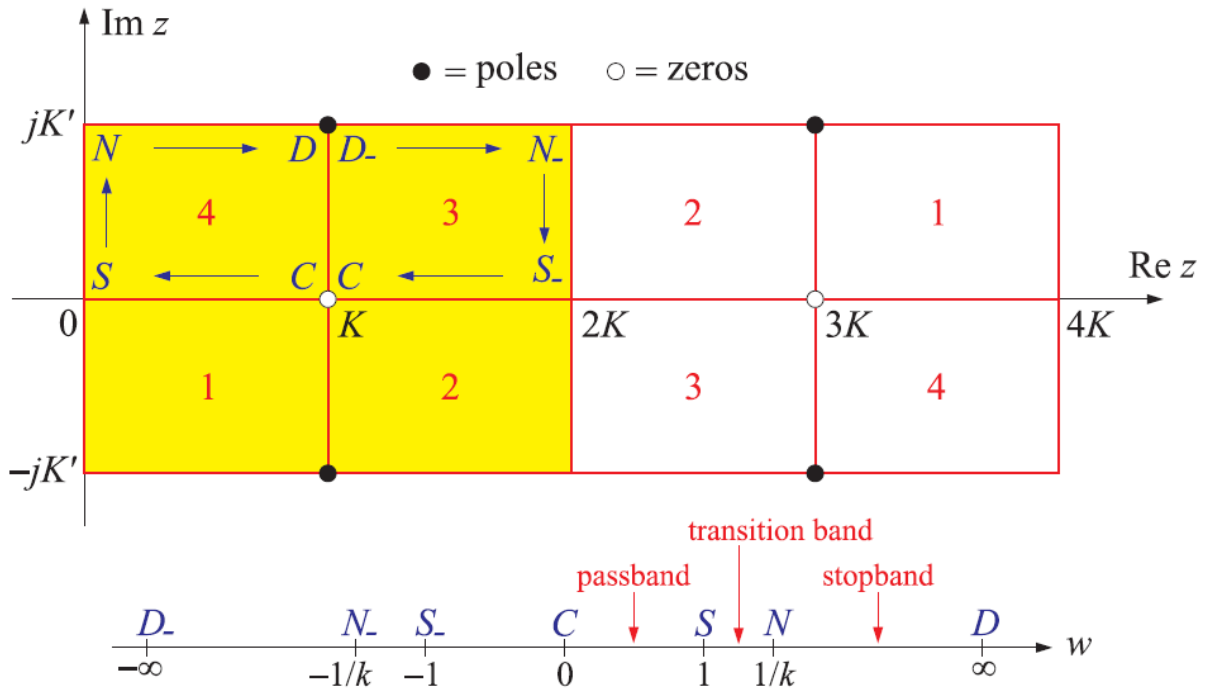


Figura 38: Mapeo del plano z al plano ω

Analogamente, el camino $D \rightarrow N_- \rightarrow S_- \rightarrow C$ cubre el eje ω negativo.

Usando las propiedades del cuadro 12 se puede escribir a la expresión correspondiente a la *banda pasante* como:

$$Cd(K - Ku, k) = Sn(Ku, k) \quad (227)$$

Porque el argumento $K - Ku$ es real. Luego usando la propiedad 207 se puede escribir a la expresión correspondiente a la *banda de transición* como:

$$Cd(jK'u, k) = \frac{1}{Dn(K'u, k')} \quad (228)$$

La cual aumenta desde $\omega = 1$ en $u = 0$ hasta el valor $\omega = Cd(jK', k) = \frac{1}{Dn(K', k')} = \frac{1}{k}$ en $u = 1$.

Por último, usando la propiedad 211 se puede escribir la expresión correspondiente a la *banda de atenuación* como:

$$Cd(Ku + jK', k) = \frac{1}{k \cdot Cd(Ku, k)} \quad (229)$$

Con un valor inicial de k en el denominador (debido a que $Cd(0, k) = 1$), es decir $\omega = 1/k$ y un valor final de $Cd(K, k) = 0$ o bien $\omega = \infty$.

Así se prueba que utilizando un coseno elíptico se consigue un mapeo que reasigna el camino entre el cero C hasta el polo D en todo el eje ω real positivo.

Referencias

- [1] Lars Wanhammar - Analog Filters using MATLAB - Springer, 2009
- [2] <http://www.crbond.com/papers/lopt.pdf>
- [3] Parks, T.W. and Burrus, C.S. Digital Filter Design, JohnWiley & Sons, New York, 1987.
- [4] Sophocles J. Orfanidis, Lecture Notes on Elliptic Filter Design, Rutgers University, 94 Brett Road, Piscataway, 2006
- [5] Cartan, Henri, "Elementary Theory of Analytic Functions of one or Several Complex Variables", Dover Publications, 1995
- [6] Abramowitz, Milton; Stegun, Irene A., eds. (1965), "Chapter 16", Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, New York: Dover, p. 569
- [7] Abramowitz, Milton; Stegun, Irene A., (1965), "Chapter 17", Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables, New York: Dover, p. 587
- [8] Ayoub, Ayoub B., "The eccentricity of a conic section", The College Mathematics Journal 34(2), March 2003, 116-121.
- [9] Lutovac, Miroslav D.; Tasic, Dejan V., Evans, Brian L. (2001). Filter Design for Signal Processing using MATLAB© and Mathematica©. New Jersey, USA: Prentice Hall. ISBN 0-201-36130-2.
- [10] Apuntes de la cátedra de Teoria de Circuitos, ITBA 2013
- [11] <http://www.mathworks.com/help/symbolic/elliptic-integrals.html>
- [12] http://en.wikipedia.org/wiki/Pendulum_%28mathematics%29