

---

# TEORÍA DE CIRCUITOS

## RETARDOS DE FASE Y GRUPO

GARDELLA, Pablo Jesús

23 de septiembre de 2015

## MOTIVACIÓN

Una señal ingresa a un sistema, ¿Cuánto se demora en salir? ¿De qué depende este “*retardo*”? ¿De la frecuencia? ¿Del sistema? ¿Qué consecuencias acarrearán sus dependencias?

## LAS EXPONENCIALES COMPLEJAS SON AUTOFUNCIONES DE SISTEMAS LTI

Una senoidal puede ser descompuesta en una suma de exponenciales complejas según la identidad de Euler:

$$\sin(x) = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j} \quad (1)$$

Debido a esta propiedad y a la condición de linealidad que se requiere de los sistemas que serán analizados, puede hacerse el desarrollo para exponenciales complejas y el mismo será válido para señales senoidales por el principio de superposición.

Ahora bien, sea  $x(t)$  una señal exponencial compleja de frecuencia  $\omega_0$ , amplitud  $A$  y una fase arbitraria  $\theta$ :

$$x(t) = A \cdot e^{j(\omega_0 t + \theta)} \quad (2)$$

Se pretende demostrar qué ocurre si la misma es aplicada a un sistema LTI caracterizado por su respuesta al impulso  $h(t)$ , cuya respuesta en frecuencia es  $H(j\omega)$ : su transformada de Fourier.

Para ello se plantea a la salida del sistema como la convolución entre la señal de entrada y la respuesta al impulso del sistema:

$$y(t) = x(t) * h(t) \quad (3)$$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot x(t - \tau) d\tau \quad (4)$$

Reemplazando a la señal  $x(t - \tau)$  por su definición de la ecuación 2:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot A \cdot e^{j\omega_0(t - \tau)} \cdot e^{j\theta} d\tau \quad (5)$$

$$y(t) = \underbrace{A \cdot e^{j(\omega_0 t + \theta)}}_{x(t)} \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau) \cdot e^{-j\omega_0 \tau} d\tau \quad (6)$$

Se observa que la señal  $x(t)$  sale afuera de la integral, la cual resulta en un escalar complejo.

Es otras palabras, se ve que la salida de un sistema LTI ante una exponencial compleja es **la misma exponencial compleja, pero escalada por un número complejo**. La cuestión ahora es ver cuál es ese número.

Si se recuerda la definición de la transformada de Fourier, se puede notar que la integral anterior no es más que la transformada de Fourier de la respuesta al impulso del sistema, i.e. la respuesta en frecuencia del mismo evaluada en  $\omega_0$ , o lo que es lo mismo: **el autovalor asociado a la autofunción correspondiente**.

$$H(j\omega) = F\{h(t)\}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) \cdot e^{-j\omega t} dt \quad (7)$$

Si se lo reemplaza esto en la ecuación precedente, se llega a:

$$y(t) = \underbrace{H(j\omega_0)}_{\in \mathbb{C}} \cdot x(t) \quad (8)$$

A modo de notación se tomará de ahora en más:

$$\text{ARG}\{H(j\omega_0)\} = \phi(\omega_0) \quad (9)$$

Expresado con módulo y fase resulta:

$$y(t) = |H(j\omega_0)| \cdot e^{j\cdot\phi(\omega_0)} \cdot x(t) \quad (10)$$

$$y(t) = |H(j\omega_0)| \cdot A \cdot e^{j(\omega_0 t + \theta + \phi(\omega_0))} \quad (11)$$

## EXTENSIÓN A SENOIDALES

A continuación se extiende el resultado de la ecuación 11 para el caso de señales senoidales paso por paso:

$$x(t) = A \cdot \sin(2\pi f_0 t + \theta) = A \cdot \frac{e^{j(2\pi f_0 t + \theta)} - e^{-j(2\pi f_0 t + \theta)}}{2j} \quad (12)$$

$$y(t) = h(t) * x(t) = h(t) * \left\{ A \cdot \frac{e^{j(2\pi f_0 t + \theta)} - e^{-j(2\pi f_0 t + \theta)}}{2j} \right\} \quad (13)$$

$$y(t) = h(t) * \left\{ A \cdot \frac{e^{j(2\pi f_0 t + \theta)}}{2j} \right\} - h(t) * \left\{ A \cdot \frac{e^{-j(2\pi f_0 t + \theta)}}{2j} \right\} \quad (14)$$

$$y(t) = h(t) * \left\{ A \cdot \frac{e^{j(2\pi f_0 t + \theta)}}{2j} \right\} - h(t) * \left\{ A \cdot \frac{e^{-j(2\pi f_0 t + \theta)}}{2j} \right\} \quad (15)$$

$$y(t) = \left\{ |H(j\omega_0)| \cdot A \cdot \frac{e^{j(2\pi f_0 t + \theta + \phi(\omega_0))}}{2j} \right\} - \left\{ |H(-j\omega_0)| \cdot A \cdot \frac{e^{-j(2\pi f_0 t + \theta - \phi(-\omega_0))}}{2j} \right\} \quad (16)$$

Como las respuestas al impulso son reales, el módulo de la función transferencia es una función par en  $\omega$  y la fase es una función impar en  $\omega$ , por lo tanto:

$$y(t) = |H(j\omega_0)| \cdot A \cdot \left\{ \frac{e^{j(2\pi f_0 t + \theta + \phi(\omega_0))} - e^{-j(2\pi f_0 t + \theta + \phi(\omega_0))}}{2j} \right\} \quad (17)$$

$$y(t) = |H(j\omega_0)| \cdot A \cdot \sin(2\pi f_0 t + \theta + \phi(\omega_0)) \quad (18)$$

## RETARDO DE FASE

El retardo de fase es un escalar que cuantifica el retardo en segundos que sufre una señal senoidal al entrar a un sistema.

Partiendo del resultado de la ecuación 18, donde se demuestra la expresión de salida para un sistema LTI ante una señal senoidal genérica a la entrada.

$$y(t) = |H(j\omega_0)| \cdot A \cdot \sin(2\pi f_0 t + \theta + \phi(\omega_0)) \quad (19)$$

Si se normaliza el defasaje introducido por el filtro para independizarlo de la frecuencia, se llega a:

$$y(t) = |H(j\omega_0)| \cdot A \cdot \sin\left(2\pi f_0 \left(t + \frac{\phi(\omega_0)}{2\pi f_0}\right) + \theta\right) \quad (20)$$

Donde el término que se suma a la variable  $t$  es lo que se define como retardo de fase:

$$\tau_f(\omega_0) \triangleq -\frac{\phi(\omega_0)}{\omega_0} \quad (21)$$

De esta forma resulta:

$$y(t) = |H(j\omega_0)| \cdot A \cdot \sin(2\pi f_0 (t - \tau_f(f_0)) + \theta) \quad (22)$$

## EJEMPLOS

A modo de ejemplo se presenta el retardo que sufre una señal senoidal de  $1V_P @ 2kHz$  ante distintos filtros cuando la salida del circuito ya se encuentra en régimen estacionario. El código de Matlab que se utilizó para los ejemplos que se presentan en este escrito define la señal de la siguiente forma:

```
% Señal
Ts = 1e-7;
f0 = 2e3;
w0 = 2*pi*f0;
t = 0:Ts:15/f0;
x = sin(w0*t+2);
```

Cuadro 1: Definición de la señal en Matlab.

### 1º Ejemplo:

La señal ingresa a un filtro pasa bajos de primer orden cuya frecuencia de corte coincide con la frecuencia de la señal.

$$H_1(s) = \frac{\omega_0}{s + \omega_0} \Big|_{s=j\omega_0} = \frac{\omega_0}{j\omega_0 + \omega_0} = \frac{1}{1+j} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot e^{-j\frac{\pi}{4}} \quad (23)$$

$$\tau_f(\omega_0) = \frac{\pi/4}{\omega_0} = \frac{\pi/4}{2\pi \cdot 2kHz} = \frac{1}{16} ms = 62,5 \mu s$$

```

%%Filtro

s = tf('s');
H = w0/(s+w0);
y = lsim(H,x,t);

plot(t,x,'b',t,y,'r','LineWidth',2)
legend('Entrada','Salida','Location','NorthEast')
xlabel('Tiempo [s]','fontsize',12)
ylabel('Amplitud [V]','fontsize',12)
grid on; hold on
xlim([9/f0, 12/f0])

```

Cuadro 2: Filtro pasabajos de primer orden con ganancia unitaria y frecuencia de corte  $2kHz$ .

Para poder medir el retardo en la simulación se extrajo de la señal un solo período y se aplicó el siguiente código de Matlab:

```

%%Búsqueda del mínimo de la entrada y la salida

Inicio = (10/f0)/Ts;      % Se analiza unicamente entre el período 10 y 11
Fin = (11/f0)/Ts;        %

% Se desprecian los primeros períodos por el transitorio.
[~,minX] = min( x(Inicio:Fin) );
[~,minY] = min( y(Inicio:Fin) );
minX = minX + Inicio - 1;
minY = minY + Inicio - 1;

TfSimulation = (minY - minX)*Ts      % Simulado = 6.2500e-05
Tf = atan(w0/w0)/w0                 % Teórico = 6.2500e-05

```

Cuadro 3: Determinación del retardo de fase en la simulación.

Las señales desfasadas se ven en la siguiente figura:

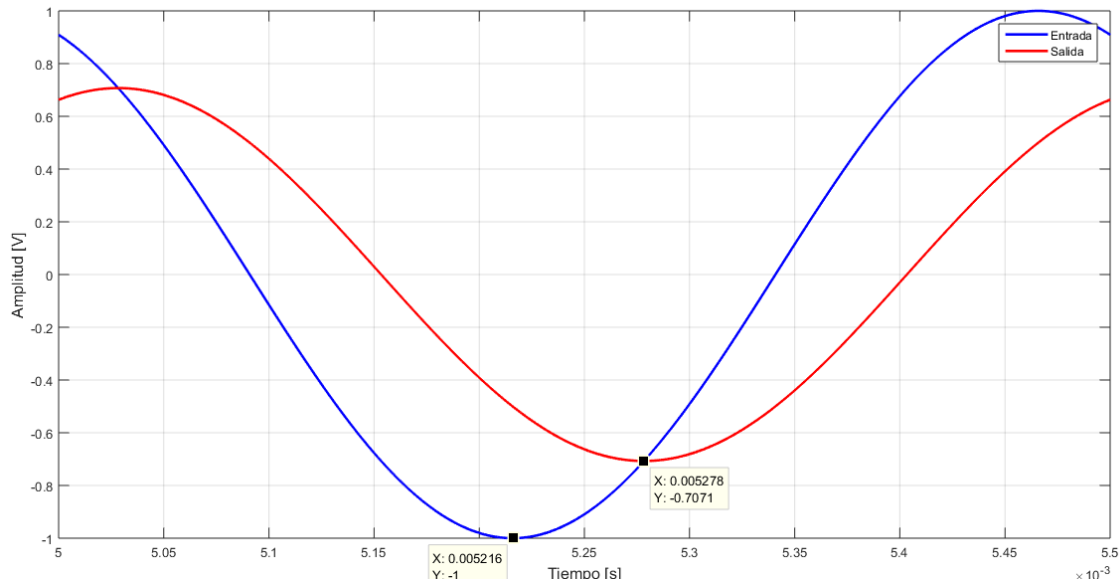


Figura 1: El retardo de fase que se observa como respuesta al filtro  $H_1$  es de  $62,5 \mu s$ .

## 2º Ejemplo:

Se aproxima una señal cuadrada a partir de sus primeros armónicos del desarrollo en series de Fourier. Los armónicos presentes son los impares del 1 al 9 inclusive.

```
%Señal

Ts = 1e-7;
f0 = 2e3;
w0 = 2*pi*f0;
t = 0:Ts:15/f0;
x = zeros(size(t));
for n=1:2:9
    x = x + 4/(pi*n) * sin(w0*n*t);
end
```

Cuadro 4: Definición de la aproximación a la señal cuadrada en Matlab.

Como apenas se disponen de 5 armónicos, la señal resulta como la de la siguiente figura, donde se la contrasta con su equivalente señal de 50 armónicos.

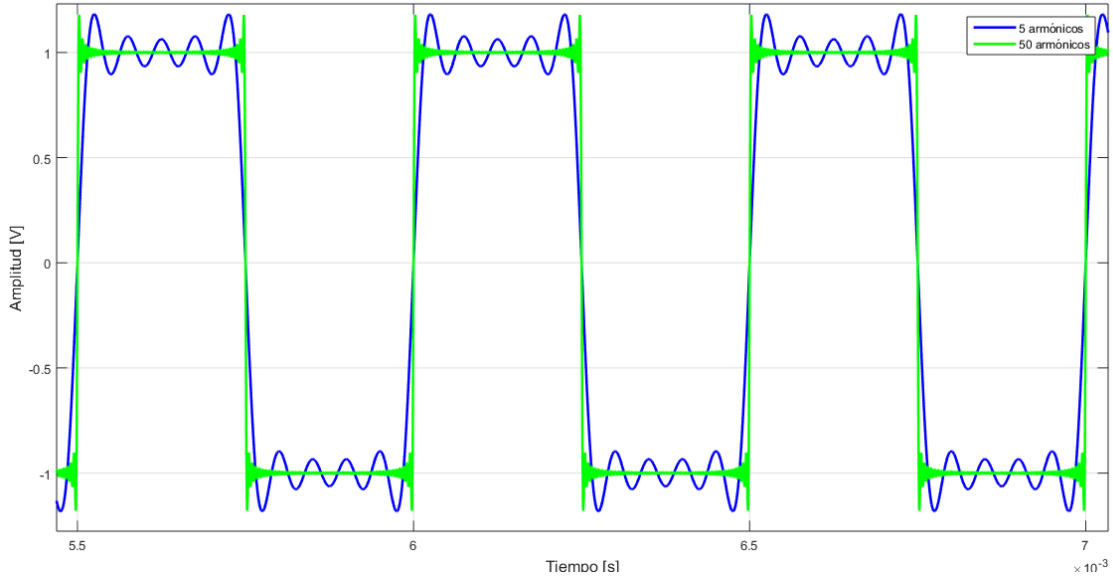


Figura 2: Comparación de señales cuadradas con 5 y 50 armónicos *presentes* en la señal.

Nótese que antes y después de los puntos de discontinuidad de la señal cuadrada se observa un sobrepico. Este sobrepico se llama Fenómeno de Gibbs y se debe a que la señal presenta un cambio abrupto y por lo tanto la serie no puede converger uniformemente a la señal. Nótese que por más que se aumentan la cantidad de armónicos y que la convergencia mejora en el resto de la señal, dónde se presenta el fenómeno de Gibbs, la serie presenta una discrepancia que no disminuye conforme aumenta la cantidad de armónicos.

La señal de los 5 armónicos ingresa a un filtro pasa bajos de primer orden cuya frecuencia de corte es de 10 veces la frecuencia de la cuadrada. No se miden los retardos de fase de cada armónico porque sería repetir el ejemplo anterior.

$$H_2(s) = \frac{10\omega_0}{s + 10\omega_0} \Big|_{s=jk\omega_0} = \frac{10\omega_0}{jk\omega_0 + 10\omega_0} = \frac{10}{10 + jk} = \frac{1}{\sqrt{100 + k^2}} \cdot e^{-j\arctg(\frac{k}{10})} \quad (24)$$

$$\tau_f(\omega_0) = \frac{\arctg(\frac{1}{10})}{\omega_0} \approx \frac{5,71^\circ}{2\pi \cdot 2kHz} \approx 0,45 ms \quad (25)$$

$$\tau_f(3\omega_0) = \frac{\arctg(\frac{3}{10})}{\omega_0} \approx \frac{16,70^\circ}{2\pi \cdot 2kHz} \approx 1,33 ms \quad (26)$$

$$\tau_f(5\omega_0) = \frac{\arctg(\frac{5}{10})}{\omega_0} \approx \frac{26,56^\circ}{2\pi \cdot 2kHz} \approx 2,11 ms \quad (27)$$

$$\tau_f(7\omega_0) = \frac{\arctg(\frac{7}{10})}{\omega_0} \approx \frac{34,99^\circ}{2\pi \cdot 2kHz} \approx 2,78 ms \quad (28)$$

$$\tau_f(9\omega_0) = \frac{\arctg(\frac{9}{10})}{\omega_0} \approx \frac{41,99^\circ}{2\pi \cdot 2kHz} \approx 3,34 ms \quad (29)$$

Nótese que mientras el  $\arctg(\cdot)$  pueda aproximarse por una recta, el retardo de fase será aproximadamente constante, pero conforme aumente la frecuencia, la aproximación dejará de ser válida.

Por ejemplo el retardo para  $\omega_0$  es de  $0,45\text{ ms}$ , y el retardo para  $10\omega_0$  será de  $\frac{45^\circ}{2\pi \cdot 2\text{kHz}} \approx 3,58\text{ ms}$ . Es decir, que para un aumento en frecuencia de 10 veces, el retardo aumenta 8 veces. Ahora el armónico  $9\omega_0$  se retrasa  $3,34\text{ ms}$ , pero llegado el caso del armónico  $99\omega_0$ , este experimentará un retardo de  $\frac{84,23^\circ}{2\pi \cdot 2\text{kHz}} \approx 6,70\text{ ms}$ , donde se observa que la frecuencia aumentó 10 veces, pero la fase solo se duplicó. Este comportamiento se debe a la forma asintótica del  $\arctg(\cdot)$ .

Las señales de entrada y salida se ven en la siguiente figura:

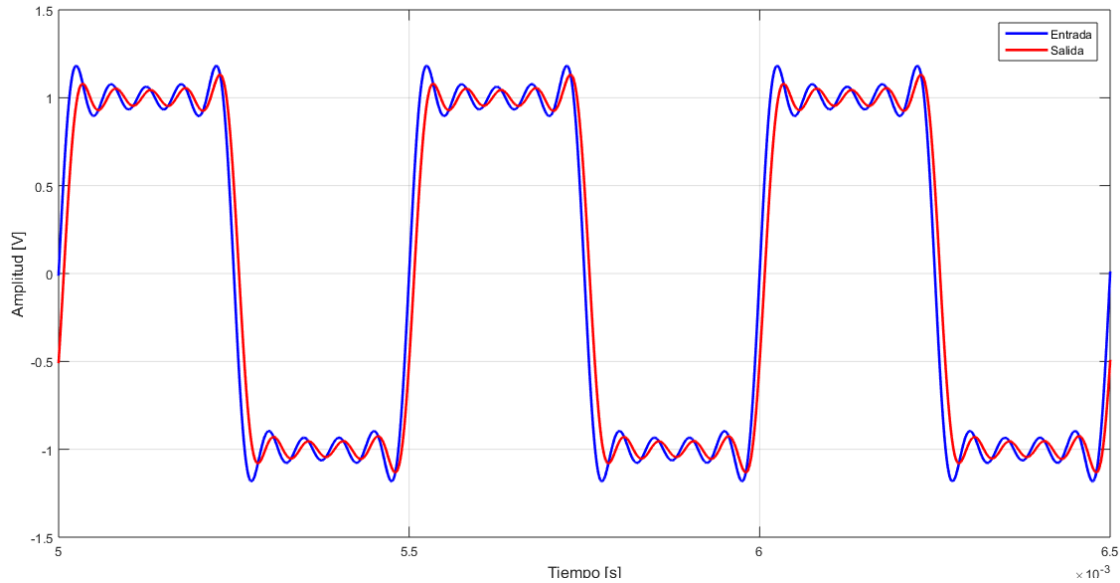


Figura 3: Como cada frecuencia no está defasada en una proporción lineal hay distorsión en la forma de onda. Esto se manifiesta como una falta de simetría en las oscilaciones de Gibbs.



### 3º Ejemplo:

Este ejemplo es el mismo que el anterior, sólo que se utilizará un filtro de fase lineal en lugar del filtro pasa bajos de primer orden propuesto. El filtro será un retardo de  $\frac{1}{\omega_0}$ :

$$H_3(s) = e^{-j \frac{s}{\omega_0}} \quad (30)$$

$$H_3(j\omega) = e^{-j \frac{\omega}{\omega_0}} \implies \phi(\omega) = -\frac{\omega}{\omega_0} \quad (31)$$

$$\tau_f(\omega) = \frac{1}{\omega_0} \approx 79,58 \mu s, \quad \forall \omega \quad (32)$$

```
% %Filtro
s = tf('s');
H = exp(-s/w0);
y = lsim(H,x,t);
```

Cuadro 5: Definición del retardo en Matlab.

Y finalmente en la comparación entre señal de entrada y de salida se observa que el fenómeno de Gibbs se mantiene igual a la salida respecto a la entrada porque entre ellas sólo hay un retraso temporal.

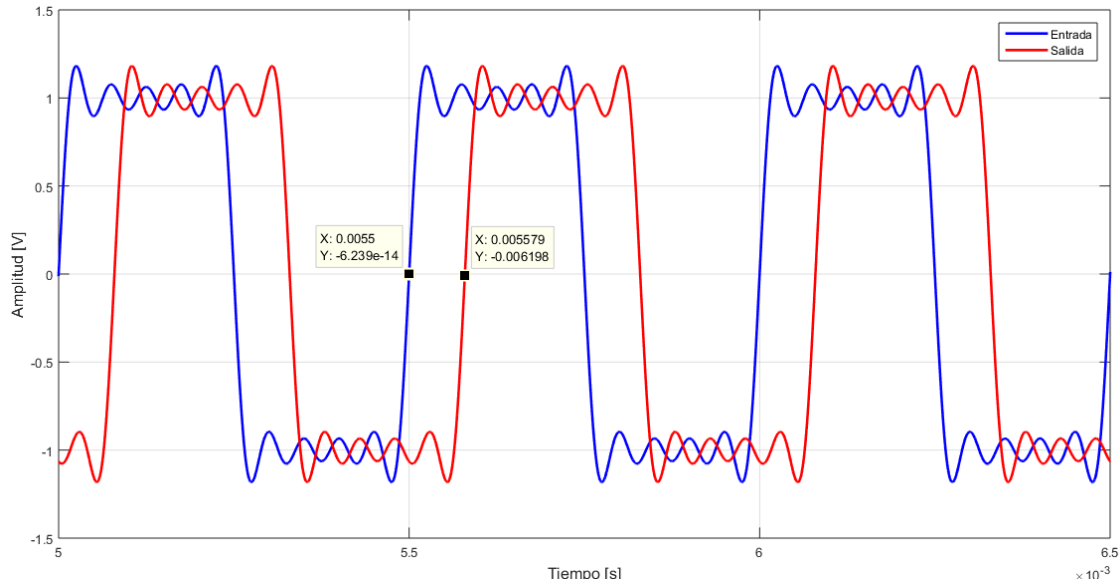


Figura 4: Señales de entrada y salida para el filtro de fase lineal. La salida es simplemente una versión retrazada de la entrada.

## RETARDO DE GRUPO

Sea  $x(t)$  una señal de banda angosta centrada en  $\omega_c$  definida como:

$$x(t) = a(t) \cdot e^{j\omega_c t} \quad (33)$$

Donde  $\omega_c$  es la frecuencia de portadora y  $a(t)$  es una modulación de la amplitud del tipo “pasa bajos”, esto quiere decir que su espectro está concentrado en bajas frecuencias. Matemáticamente esto puede expresarse a partir de la siguiente aproximación de su transformada de Fourier para un  $\varepsilon$  suficientemente chico.

$$a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} A(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \quad (34)$$

Ahora reemplazando la expresión aproximada de la modulación de amplitud (ecuación 34) en la expresión de la señal  $x(t)$  se obtiene:

$$x(t) = \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} A(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \right] \cdot e^{j\omega_c t} \quad (35)$$

Trabajando algebraicamente se puede introducir en la integral a la exponencial compleja de frecuencia  $\omega_c$ .

$$x(t) = \left[ \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} \underbrace{A(\omega) \cdot e^{j(\omega+\omega_c)t}}_{X_\omega(t)} d\omega \right] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} x_\omega(t) d\omega \quad (36)$$

La ecuación anterior está expresando a la señal  $x(t)$  como una superposición continua de armónicos  $x_\omega(t)$  en el intervalo espectral  $[\omega_c - \varepsilon, \omega_c + \varepsilon]$ . En los pasos que sigue se estudiará el comportamiento de un sistema LTI ante cada uno de estos armónicos y luego se realizará la integración de las señales de salida  $y_\omega(t)$  para obtener  $y(t)$  de la siguiente forma.

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} y_\omega(t) d\omega \quad (37)$$

Donde el sistema LTI está caracterizado por:

$$H(j\omega) = |H(\omega)| \cdot e^{j\phi(\omega)} \quad (38)$$

Entonces la expresión del armónico de salida  $y_\omega(t)$  será:

$$y_\omega(t) = |H(\omega + \omega_c)| \cdot A(\omega) \cdot e^{j[(\omega + \omega_c)t + \phi(\omega + \omega_c)]} \quad (39)$$

Asumiendo linealidad de la fase  $\phi(\omega)$  en  $[\omega_c - \varepsilon, \omega_c + \varepsilon]$  se la puede aproximar mediante un polinomio de Taylor de primer orden<sup>1</sup>.

$$\phi(\omega + \omega_c) \approx \phi(\omega_c) + \left. \frac{d\phi}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_c} \cdot (\omega + \omega_c - \omega_c) \quad (40)$$

Donde el término que multiplica a la frecuencia  $\omega$  es lo que se define como retardo de grupo:

$$\tau_g(\omega_0) \triangleq - \left. \frac{d\phi}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} \quad (41)$$

---

<sup>1</sup>El desarrollo de Taylor de una función  $f(x)$  holomorfa en el entorno de un punto complejo  $a$  se calcula como:  
 $T[f(x), a] = f(a) + \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=a} \cdot \frac{(x-a)^1}{1!} + \dots$

Y finalmente la aproximación de la fase en el entorno de  $\omega_c$  queda:

$$\phi(\omega + \omega_c) \approx \phi(\omega_c) - \tau_g(\omega_c) \cdot \omega \quad (42)$$

Se reemplaza esta aproximación en la ecuación 39 y se opera como se muestra a continuación.

$$y_\omega(t) = |H(\omega + \omega_c)| \cdot A(\omega) \cdot e^{j[(\omega + \omega_c)t + \{\phi(\omega_c) - \tau_g(\omega_c) \cdot \omega\}]} \quad (43)$$

$$y_\omega(t) = |H(\omega + \omega_c)| \cdot A(\omega) \cdot e^{j[\omega t + \omega_c t + \phi(\omega_c) - \tau_g(\omega_c) \cdot \omega]}$$

$$y_\omega(t) = |H(\omega + \omega_c)| \cdot A(\omega) \cdot e^{j[\omega(t - \tau_g(\omega_c)) + \omega_c(t - \tau_f(\omega_c))]}$$

Ahora si se utiliza el resultado anterior para hallar finalmente la salida  $y(t)$ .

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} |H(\omega + \omega_c)| \cdot A(\omega) \cdot e^{j[\omega(t - \tau_g(\omega_c)) + \omega_c(t - \tau_f(\omega_c))]} d\omega \quad (44)$$

La exponencial compleja que no depende de la frecuencia puede salir de la integral pues simplemente representa un desfase debido al retardo de fase.

$$y(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} |H(\omega + \omega_c)| \cdot A(\omega) \cdot e^{j\omega(t - \tau_g(\omega_c))} d\omega \cdot e^{j\omega_c(t - \tau_f(\omega_c))} \quad (45)$$

En cuanto a la expresión dentro de la integral, se reconoce en ella al **filtrado de fase nula de  $a(t)$** .

Se denomina *filtrado de fase nula* a la respuesta en el tiempo de aplicar la señal  $a(t)$  a un filtro que tiene el mismo módulo que el de interés, pero no tiene respuesta en fase, es decir:

$$a^f(t) \triangleq \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |H(\omega)| \cdot A(\omega) \cdot e^{j\omega t} d\omega \quad (46)$$

Por lo tanto, la salida final de aplicar la señal  $x(t) = a(t) \cdot e^{j\omega_c t}$  al sistema LTI caracterizado por  $H(j\omega)$  resulta en:

$$y(t) = a^f(t - \tau_g(\omega_c)) \cdot e^{j\omega_c(t - \tau_f(\omega_c))} \quad (47)$$

Es decir, **el retardo de grupo retrasa a la modulación en amplitud**, que a su vez es filtrada por el módulo de la respuesta en frecuencia. Por esta razón a veces se denomina al retardo de grupo como retardo de envolvente. Mientras que la intervención de la fase del sistema se manifiesta como retardos en la modulación de amplitud y como **el retardo de la componente armónica: el retardo de fase**.

## EXTENSIÓN A SENOIDALES

Tal cual se hizo con las exponenciales en el retardo de fase, el resultado anterior se puede extender fácilmente a señales senoidales de acuerdo a la identidad de Euler.

Partiendo de una señal de entrada como la siguiente:

$$x(t) = a(t) \cdot \sin(2\pi f_0 t + \theta) = a(t) \cdot \frac{e^{j(2\pi f_0 t + \theta)} - e^{-j(2\pi f_0 t + \theta)}}{2j} \quad (48)$$

Se puede demostrar siguiendo los mismos pasos de antes que la salida del sistema LTI caracterizado por  $H(j\omega)$  será:

$$y(t) = a^f(t - \tau_g(\omega_c)) \cdot \sin(2\pi f_0(t - \tau_f(\omega_c)) + \theta) \quad (49)$$

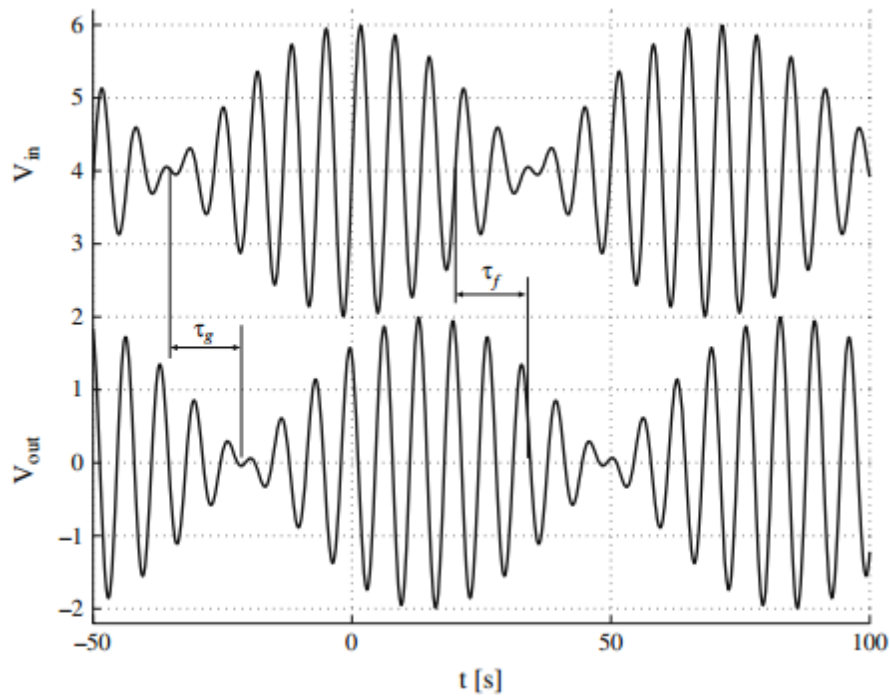


Figura 5: Una señal modulada en amplitud ingresa a un filtro Cauer pasabajos de orden 5.

## REFERENCIAS

**Apuntes** Cursada de GARDELLA, Pablo Jesús - 2013

**Apunte** Simulaciones con retardo de grupo negativo

**Libro** “*Analog Filters Using MATLAB*”, by Lars Wanhammar

**Libro** “Introduction to Digital Filters with Audio Applications”, by Julius O. Smith III