UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
Facultad Regional Córdoba
Dpto. Ciencias Básicas - Análisis Matemático II

20. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE SEGUNDO ORDEN

PRIMERA PARTE

Ing. Rocha - Ing. Ortenzi

Ecuaciones Diferenciales

En el mundo real ocurren cambios y se desea predecir el comportamiento futuro con respecto a cómo cambian los valores actuales sobre algún problema, acerca de algún fenómeno o una ley física en función de la evidencia de experimentos (*Ejemplos: crecimiento poblacional, movimiento de un resorte*).

Esto se puede representar con un modelado matemático que con frecuencia toma la forma de una ***ecuación diferencial***, es decir, una ecuación que contiene una función desconocida y algunas de sus derivadas.

Una ecuación diferencial es toda ecuación que establece una relación entre la variable independiente x, la función buscada y=f(x) y sus derivadas y', y'', etc.

Si la función buscada es de una variable independiente es una ***Ecuación Diferencial Ordinaria (EDO)***. Si la función buscada es de dos o más variables independientes, es una ***Ecuación Diferencial en Derivadas Parciales.***

Una ED es ***lineal*** si es de primer grado respecto a la función desconocida "y" y sus derivadas (es decir, el exponente de $y, y', y'', \ldots y^{[n]}$ es igual a 1).

El ***orden*** de una ED, es la derivada superior que interviene en la ecuación.

Nuestro objeto de estudio son:

Ecuaciones Diferenciales Ordinarias Lineales de Segundo Orden

EDO de Segundo Orden

El formato general de estas ecuaciones es:

$$\boxed{\boldsymbol{a y'' + b y' + c y = f(x)}}$$

Donde ***a***$(\neq 0)$, ***b*** y ***c*** pueden ser ***coeficientes variables*** (es decir, son funciones de la variable independiente x), o pueden ser ***coeficientes constantes.***

Si f(x) = 0, entonces tenemos una ***EDO de Segundo Orden Homogénea***.

Si f(x) ≠ 0, entonces tenemos una ***EDO de Segundo Orden No Homogénea***.

Nuestro objeto de estudio son:

EDO de segundo orden Homogéneas con Coeficientes Constantes y EDO de segundo orden No Homogéneas con Coeficientes Constantes

EDO de Segundo Orden Homogénea con Coeficientes Constantes

Son de la forma:

$$\boxed{ay'' + by' + cy = 0}$$

donde a, b y c son constantes.

Para obtener la solución general, es suficiente con encontrar dos soluciones particulares linealmente independientes. Se propone: $y = e^{kx}$ donde k es una constante. Derivándola dos veces:

$$y' = ke^{kx}$$

$$y'' = k^2e^{kx}$$

Reemplazamos:

$$ak^2e^{kx} + bke^{kx} + ce^{kx} = 0$$

$$e^{kx}\ (\ ak^2 + bk + c\ ) = 0$$

Como $e^{kx} \neq 0$ (es asintótica a 0), para que $y = e^{kx}$ sea solución de la ED entonces:

$$ak^2 + bk + c = 0$$

Esta ecuación recibe el nombre de ***ecuación característica***, es de segundo grado y tiene dos raíces: k_1 y k_2.

Puede presentarse 3 casos: que las raíces sean ***reales y distintas***, que sean ***reales e iguales*** o ***raíces complejas conjugadas***.

Ing. Rocha - Ing. Ortenzi

EDL de Segundo Orden Homogénea con Coeficientes Constantes

Raíces Reales y Distintas: $k_1 \neq k_2$

Por lo tanto existen dos soluciones particulares:

$$y_1 = e^{k_1 x}$$

$$y_2 = e^{k_2 x}$$

Las soluciones son linealmente independientes y la solución general de la ED será:

$$y = C_1\, e^{k_1 x} + C_2\, e^{k_2 x}$$

Ejemplo 1

Hallar la solución particular de y'' – 4y' + 3y = 0 , para y(0)=6, y'(0)=10

Ecuación característica: $k^2 - 4k + 3 = 0$

$$k = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4.3}}{2} = \frac{4 \pm 2}{2} \Rightarrow k_1 = 1 \wedge k_2 = 3$$

Raíces reales y distintas, la solución general entonces: $\mathbf{y_G = C_1\, e^x + C_2\, e^{3x}}$

Reemplazamos en la solución general por los valores iniciales y obtenemos ecuación (1):

$y = C_1\, e^x + C_2\, e^{3x}$

$6 = C_1 + C_2$ (1)

Derivamos la solución general, reemplazamos y obtenemos ecuación (2):

$y' = C_1\, e^x + 3\, C_2\, e^{3x}$

$10 = C_1 + 3\, C_2$ (2)

Sistema de ecuaciones, dos ecuaciones con dos incógnitas.

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 10 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{18 - 10}{3 - 1} = 4 \qquad C_2 = 6 - 4 = 2$$

Reemplazamos en la solución general para obtener la solución particular:

$$\mathbf{y_P = 4\, e^x + 2\, e^{3x}}$$

EDL de Segundo Orden Homogénea con Coeficientes Constantes

<u>Raíces Reales e Iguales:</u> $k_1 = k_2 = k$

En este caso tenemos una sola solución particular: $y_1 = e^{kx}$.

Se puede demostrar que la expresión $y_2 = xe^{kx}$ también es solución de la ED.

Si hacemos $y_1/y_2 = 1/x \neq$ constante, por lo tanto las soluciones son linealmente independientes y la solución general resulta:

$$y = C_1\, e^{kx} + C_2\, x\, e^{kx}$$

Ejemplo 2

Hallar la solución particular de y'' – 2y' + y = 0 , para y(0)=2, y'(0)=5

Ecuación característica: $k^2 - 2k + 1 = 0$

$$k = \frac{-a_1 \pm \sqrt{{a_1}^2 - 4a_2}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.1}}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

Raíces reales e iguales, la <u>solución general</u> entonces: $\mathbf{y_G = C_1\, e^x + C_2\, x\, e^x}$

Reemplazamos en la solución general por los valores iniciales y obtenemos ecuación (1):

$y = C_1\, e^x + C_2\, x\, e^x$

$2 = C_1 \quad (1)$

Derivamos la solución general, reemplazamos y obtenemos ecuación (2):

$y' = C_1\, e^x + C_2\, e^x + C_2\, x\, e^x \qquad 5 = C_1 + C_2 \ (2)$

Si $C_1 = 2$, entonces: $\quad C_2 = 5 - 2 = 3$

Reemplazamos en la solución general para obtener la <u>solución particular</u>:

$$\mathbf{y_P = 2\, e^x + 3\, x\, e^x}$$

EDL de Segundo Orden Homogénea con Coeficientes Constantes

<u>Raíces Complejas conjugadas:</u> ***$k_1 = \alpha + i\beta$, $k_2 = \alpha - i\beta$***

Las soluciones particulares serán:

$$y_1 = e^{(\alpha+i\beta)x}$$

$$y_2 = e^{(\alpha-i\beta)x}$$

Estas soluciones son linealmente independientes. Luego de aplicar la fórmula de Euler que relaciona funciones trigonométricas con exponenciales, la solución general es:

$$\boldsymbol{y = e^{\alpha x}(C_1 \cos \beta x + C_2 \operatorname{sen} \beta x)}$$

Ejemplo 3

Hallar la solución particular de y'' – 2y' + 2y = 0 , para y(0)=4, y'(0)=1

Ecuación característica: $k^2 - 2k + 2 = 0$

$$k = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4.2}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2} = 1 \pm i \Rightarrow k_1 = 1 + i \wedge k_2 = 1 - i$$

Raíces complejas conjugadas, la solución general entonces: $\boldsymbol{y_G = e^x(C_1 \cos x +}$

$4 = C_1$ (1)

$y' = e^x (C_1 \cos x + C_2 \text{ sen } x) + e^x (- C_1 \text{ sen } x + C_2 \cos x)$ $1 = C_1 + C_2$ (2)

Si $C_1 = 4$, entonces: $C_2 = -3$

Reemplazamos en la solución general para obtener la solución particular:

$$\boldsymbol{y_P = e^x(4 \cos x - 3 \text{ sen } x)}$$

Ejemplo 4

Hallar la solución general para y'' + 4 y' – 5 y = 0

y'' + 4 y' – 5 y = 0

$k^2 + 4k - 5 = 0$

$k_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4.(-5)}}{2} = \frac{-4 \pm 6}{2}$ $k_1 = 1$, $k_2 = -5$

Solución General

$$y = C_1 e^{x} + C_2 e^{-5x}$$

Ejemplo 5

Hallar la solución general para y'' - 5 y = 0

y'' - 5 y = 0

$k^2 - 5 = 0$

$k_{1,2} = \pm\sqrt{5}$

Solución General

$$y = C_1 e^{\sqrt{5}x} + C_2 e^{-\sqrt{5}x}$$

Ejemplo 5

Hallar la solución particular para 4y'' + 25 y = 12y' ,siendo x_0=0 ; $f(x_0)$=1 ; $f'(x_0)$=2

4y'' + 25 y = 12y' x_0=0 ; $f(x_0)$=1 ; $f'(x_0)$=2

4y'' - 12y' + 25 y = 0

$4k^2 - 12\,k + 25 = 0$

$$k_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4.4.25}}{2.4} = \frac{12 \pm \sqrt{-256}}{8} = \frac{12 \pm 16i}{8}$$

$$k_1 = \frac{3}{2} + 2i \quad k_2 = \frac{3}{2} - 2i$$

$$\begin{cases} y = e^{\frac{3}{2}x}(C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x) \\ y' = \frac{3}{2} e^{\frac{3}{2}x}(\cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x) + e^{\frac{3}{2}x}(-2 \operatorname{sen} 2x + 2C_2 \cos 2x) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1 = C_1 \\ 2 = \frac{3}{2} + 2C_2 \end{cases} \therefore \frac{1}{4} = C_2$$

Solución General

$$y = e^{\frac{3}{2}x}(C_1 \cos 2x + C_2 \operatorname{sen} 2x)$$

Solución Particular

$$y = e^{\frac{3}{2}x}\left(\cos 2x + \frac{1}{4} \operatorname{sen} 2x\right)$$