UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
Facultad Regional Córdoba
Dpto. Ciencias Básicas - Análisis Matemático II

16. INTEGRALES CURVILÍNEAS

Ing. Rocha, Victoria.-

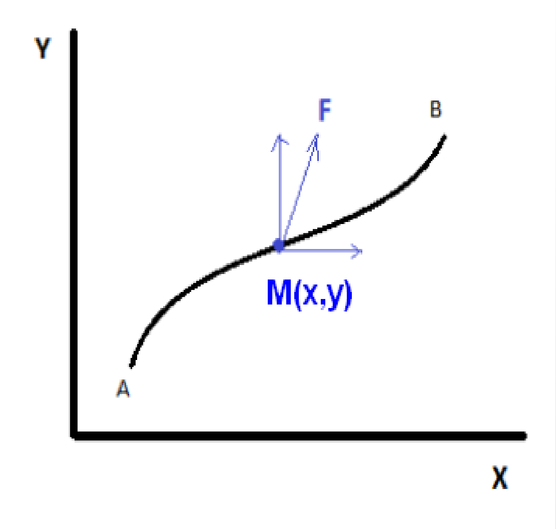
Integrales Curvilíneas

Se define una integral que es similar a la integral simple, solo que en lugar de integrar sobre un intervalo [a,b], lo hacemos sobre una curva L.

Fueron creadas para resolver problemas relacionados con el flujo de fluídos, fuerzas, electricidad y magnetismo.

Sea un campo vectorial F definido a lo largo de una curva plana L: $F(x, y) = P(x, y)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + Q(x, y)\hat{\boldsymbol{\jmath}}$

Para facilitar el concepto se asocia al cálculo de ***trabajo***. Si consideramos que F es una fuerza aplicada sobre un punto M(x,y) que se desplaza a lo largo de la curva L desde el punto A al punto B, y que dicha fuerza varia de magnitud y dirección a medida que el punto M se desplaza.



El trabajo de la fuerza al desplazarse el punto M desde A hacia B, está dado por la integral curvilínea:

$$W = \int_L \vec{F}\overrightarrow{dS} = \int_A^B [P(x,y)\hat{\boldsymbol{\imath}} + Q(x,y)\hat{\boldsymbol{\jmath}}][dx\hat{\boldsymbol{\imath}} + dy\hat{\boldsymbol{\jmath}}] = \int_{\boldsymbol{A}}^{\boldsymbol{B}} \boldsymbol{P(x,y)dx + Q(x,y)dy}$$

Siendo P(x,y) y Q(x,y) funciones de dos variables independientes definidas en un cierto dominio D que contiene a la curva L.

Integrales Curvilíneas

Una integral curvilínea queda definida por:

- el elemento de integración,
- la curva de integración
- y el sentido de integración.

Lo definido es válido también cuando la curva L es cerrada. El origen y el extremo de la curva coinciden, por lo tanto para integrar se debe subdividir la curva y además se debe indicar el sentido de integración. El sentido positivo es el sentido antihorario. En estos casos se suele indicar:

$$\oint \boldsymbol{P(x,y)dx + Q(x,y)dy}$$

PROPIEDADES

- Al cambiar el sentido de integración, cambia el signo de la integral curvilínea. Al invertir el sentido cambia el signo del vector ΔS y por lo tanto cambia el signo de sus proyecciones Δx y Δy.

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{P(x,y)dx + Q(x,y)dy} = -\int_{B}^{\mathrm{A}} \mathrm{P(x,y)dx + Q(x,y)dy}$$

- Si se divide la curva L por algún punto intermedio C:

$$\int_{A}^{B} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{A}^{C} P(x,y)dx + Q(x,y)dy + \int_{B}^{C} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Cálculo de Integral Curvilínea

Si la ecuación de la curva es conocida y tiene la forma y=f(x) o x=f(y) o la forma paramétrica x=f(t), y=f(t), entonces por sustitución se puede reducir la integral curvilínea a una integral definida de una sola variable.

Si la curva L esta dada de la forma *y=f(x)*, por lo tanto $dy = f'(x)dx$, se sustituye:

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{x_1}^{x_2} \left[P(x,f(x)) + Q\big(x,f(x)\big)f'(x)\right]dx$$

Si la curva L esta dada de la forma *x=g(y)*, por lo tanto *dx=g'(y)dy*, se sustituye:

$$\int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{y_1}^{y_2} [P(g(y),y))g'(y) + Q(g(y),y)]dy$$

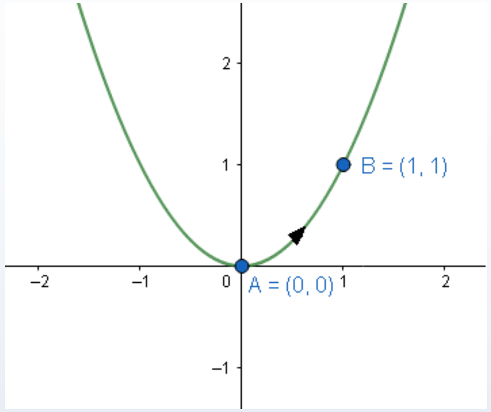
Si la curva L está dada por la función vectorial $r(t) = [f(t), g(t)] = f(t)\,\hat{\boldsymbol{\imath}} + g(t)\hat{\boldsymbol{\jmath}}$, o en su forma paramétrica:

$$\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases} \text{por lo tanto} \begin{cases} dx = f'(t)dt \\ dy = g'(t)dt \end{cases}$$

$$\int_A^B P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int_{t_1}^{t_2} \left[P(f(t),g(t)))f'(t) + Q\big(f(t),g(t)\big)g'(t)\right]dt$$

Ejemplo 1

Calcular la integral curvilínea $\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x+y^2)dx+2xydy$ a lo largo de la parábola y=x²



Como tenemos que calcular la integral curvilínea a lo largo de la parábola que se define como *y=f(x)*, entonces derivamos la expresión:

dy=2xdx

Luego, reemplazamos en la integral con $y=x^2$ y dy=2xdx, el integrando es en función de x en este caso, por lo tanto los límites de integración serán los correspondientes a dicha variable:

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}(x+y^2)dx+2xydy=\int_0^1[x+x^4+(2xx^2)2x]dx=\int_0^1[5x^4+x]dx=\left|x^5+\frac{x^2}{2}\right|_0^1=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$$

También se podría haber planteado que $x=\sqrt{y}$, entonces $dx=\frac{1}{2\sqrt{y}}dy$ y al reemplazar deberíamos integrar con respecto a y, entonces los límites de integración deben corresponder con dicha variable.

Ejemplo 2

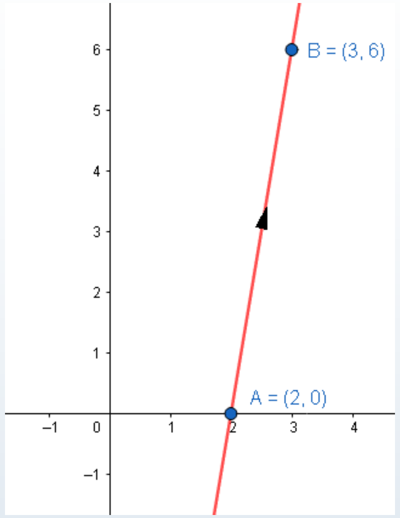
Calcular la integral curvilínea $\int_L \frac{1}{2} y dx + x^2 dy$ siendo L el segmento de la recta de (2,0) a (3,6).

Debemos encontrar la ecuación de la recta definida por los dos puntos.

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{6 - 0}{3 - 2}(x - 2)$$

$$y = 6x - 12$$



Derivamos esta expresión para luego poder reemplazar:

dy = 6 dx

Como vamos a integrar con respecto a x, entonces los límites de integración son de 2 a 3, de acuerdo al enunciado del ejercicio.

$$\int_L \frac{1}{2} y dx + x^2 dy = \int_2^3 \left[\frac{1}{2}(6x - 12) + 6x^2\right] dx$$

$$= \int_2^3 [3x - 6 + 6x^2] dx = \left|2x^3 + \frac{3x^2}{2} - 6x\right|_2^3 = \left(54 + \frac{27}{2} - 18\right) - (16 + 6 - 12) = \frac{79}{2}$$

Ejemplo 3

Calcular la integral curvilínea de $\mathbf{F}(x,y) = x^2y\hat{\imath} + (x^2+y^2)\hat{\jmath}$ a través de la curva L, siendo ésta conformada por $y = x^2$, y=0, x=3

La integral curvilínea entonces es la suma de las integrales curvilíneas a lo largo de cada tramo:

$$\int_L x^2ydx + (x^2+y^2)dy = \int_{L_1} x^2ydx + (x^2+y^2)dy + \int_{L_2} x^2ydx + (x^2+y^2)dy + \int_{L_3} x^2ydx + (x^2+y^2)dy$$

Recta L_1: y=0 → dy=0

Los límites de integración podemos observarlos a través de las intersecciones de las curvas. En este caso como vamos a integrar con respecto a x, entonces 0 y 3 son los límites inferior y superior respectivamente de acuerdo al sentido de integración.

$$\int_0^3 [x^2.0 + (x^2+0)0]dx = 0$$

Recta L_2: x=3 → dx=0

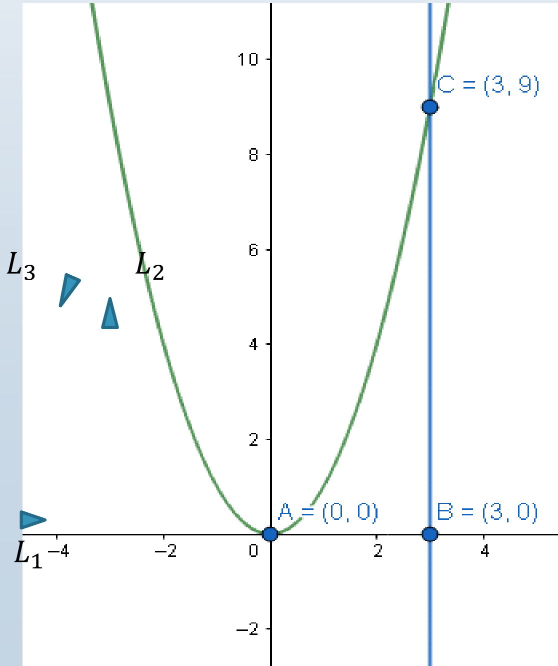
$$\int_0^9 [3^2.y.0 + (3^2+y^2)]dy = \int_0^9 (9+y^2)dy = \left|9y + \frac{y^3}{3}\right|_0^9 = 81 + 243 = 324$$

Curva L_3: y=x² → dy=2xdx

$$\int_3^0 [x^2x^2 + (x^2+x^4)2x]dx = \int_3^0 [x^4 + 2x^3 + 2x^5]dx = \left|\frac{x^5}{5} + \frac{1}{2}x^4 + \frac{1}{3}x^6\right|_3^0$$

$$= -\left(\frac{243}{5} + \frac{81}{2} + 243\right) = -\frac{3321}{10}$$

$$\boxed{I_c = 0 + 324 - \frac{3321}{10} = -\mathbf{\frac{81}{10}}}$$



En este caso partimos del punto A en sentido antihorario, que es el sentido positivo de integración. Si el enunciado hubiera indicado calcular en sentido horario, los límites de integración se invierten y el resultado es el mismo con signo opuesto

Ejemplo 4

Calcular la integral curvilínea $\int_L (x+y)dx+(y-x)dy$ **con** $f(t)=(\cos t; 2sen\, t)\,, 0 \le t \le 2\pi$

A partir del enunciado:

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = 2sen\, t \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} dx = -\text{sen}\, t\, dt \\ dy = 2\cos t dt \end{cases}$$

Reemplazamos en la integral:

$$\int_L (x+y)dx+(y-x)dy = \int_0^{2\pi} [(\cos t + 2sen\, t)(-sen\, t) + (2sen\, t - \cos t)(2\cos t)]\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} [-\cos t\, sent - 2sen^2 t + 4\cos t\, sent - 2\cos^2 t]\, dt$$

$$= \int_0^{2\pi} [3\cos t\, sent - 2(sen^2 t + \cos^2 t)]\, dt = \int_0^{2\pi} [3\cos t\, sent - 2]\, dt = \left| \frac{3}{2} sen^2 t - 2t \right|_0^{2\pi}$$

$$= (0 - 4\pi) - (0) = -\boldsymbol{4\pi}$$

Cálculos auxiliares:

Identidad trigonométrica $sen^2 t + \cos^2 t = 1$

Sustitución: $m = \text{sen}\, t \Rightarrow dm = costdt$

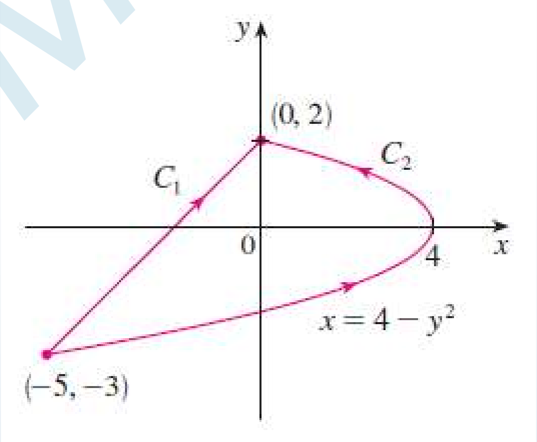
$$\int 3mdm = \frac{3}{2} m^2 = \frac{3}{2} sen^2 t$$

Ejemplo 5

Evalúe $\int_C \; y^2dx + xdy$ para

a) C=C_1 es el segmento rectilíneo desde (-5,-3) hasta (0, 2)

b) C=C_2 es el arco de la parábola x = 4 – y^2 desde (-5,-3) hasta (0, 2)



Inciso a:

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y + 3 = \frac{2+3}{0+5}(x+5)$$

$$y = x + 2 \Rightarrow \mathrm{dy} = \mathrm{dx}$$

$$\int_{-5}^{0} [(x+2)^2 + x]dx = \int_{-5}^{0} [x^2 + 4x + 4 + x]dx = \int_{-5}^{0} [x^2 + 5x + 4]dx$$

$$= \left| \frac{x^3}{3} + \frac{5}{2}x^2 + 4x \right|_{-5}^{0} = 0 - \left(-\frac{125}{3} + \frac{125}{2} - 20 \right) = -\frac{5}{6}$$

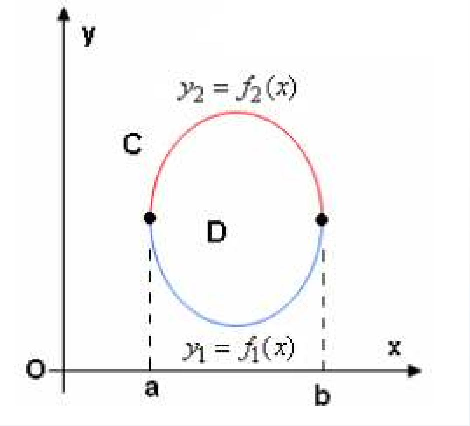
Inciso b: x = 4 – y^2 →dx=-2ydy

$$\int_{-3}^{2} [y^2(-2y) + (4 - y^2)]dy = \int_{-3}^{2} [-2y^3 - y^2 + 4]dy = \left| -\frac{y^4}{2} - \frac{y^3}{3} + 4y \right|_{-3}^{2} = \left(-8 - \frac{8}{3} + 8 \right) - \left(-\frac{81}{2} + 9 - 12 \right)$$

$$= \frac{245}{12}$$

Observemos que las respuestas de los incisos a) y b) son diferentes aún cuando las dos curvas tienen los mismos puntos extremos. Por lo tanto, el valor de una integral curvilínea depende, en general, no sólo de los puntos extremos de la curva, sino también de la trayectoria. Veremos más adelante en que ocasiones es independiente de la trayectoria.

Área de un dominio limitado por una curva cerrada



Considerando el dominio D limitado por una curva cerrada C. Por integrales simples sería:

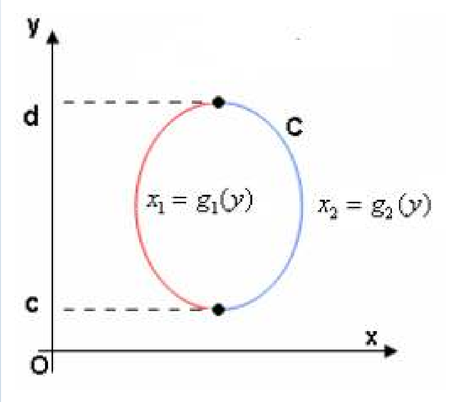
$$A = \int_a^b f_2(x)dx - \int_a^b f_1(x)dx = \int_a^b y_2 \cdot dx - \int_a^b y_1 \cdot dx$$

Intercambiando el sentido de integración de la función y_2:

$$A = -\int_b^a y_2 \cdot dx - \int_a^b y_1 \cdot dx = -[\int_a^b y_1 \cdot dx + \int_b^a y_2 \cdot dx]$$

Expresión que indica que se está recorriendo el circuito cerrado C, en sentido positivo, por lo que puede indicarse mediante una integral curvilínea cerrada:

$$A = -[\int_a^b y_1 \cdot dx + \int_b^a y_2 \cdot dx] = -\oint_c [y_1 \cdot dx + y_2 \cdot dx] = -\oint_c [y_1 + y_2] \cdot dx = -\oint_c y \cdot dx$$



Podemos proceder de manera similar y llegar a:

$$A = \int_c^d g_2(y) \cdot dy - \int_c^d g_1(y) \cdot dy = \oint_c x \cdot dy$$

Si sumamos miembro a miembro las dos expresiones de área obtenidas, se tiene:

$$A + A = -\oint_c y \cdot dx + \oint_c x \cdot dy = \oint_c (-y \cdot dx + x \cdot dy) = \oint_c (x \cdot dy - y \cdot dx) = 2A$$

$$\boxed{A = \frac{1}{2} \cdot \oint_c (x \cdot dy - y \cdot dx)}$$

Ejemplo 6

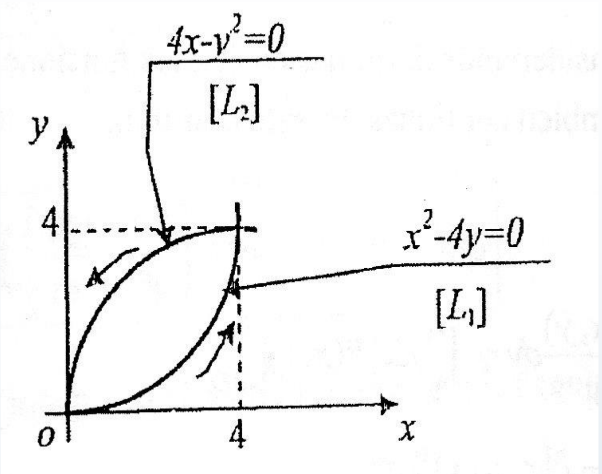
Calcular el área comprendida entre las curvas x^2-4y=0 y 4x-y^2=0

<u>Curva L_1:</u> $x^2 - 4y = 0 \Rightarrow y = \frac{x^2}{4}$

$$dy = \frac{1}{2}xdx$$

<u>Curva L_2:</u> $4x - y^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{y^2}{4}$

$$dx = \frac{1}{2}ydy$$



$$\boldsymbol{A = \frac{1}{2}\int_L -ydx + xdy = \frac{1}{2}\int_{L_1} -ydx + xdy + \frac{1}{2}\int_{L_2} -ydx + xdy}$$

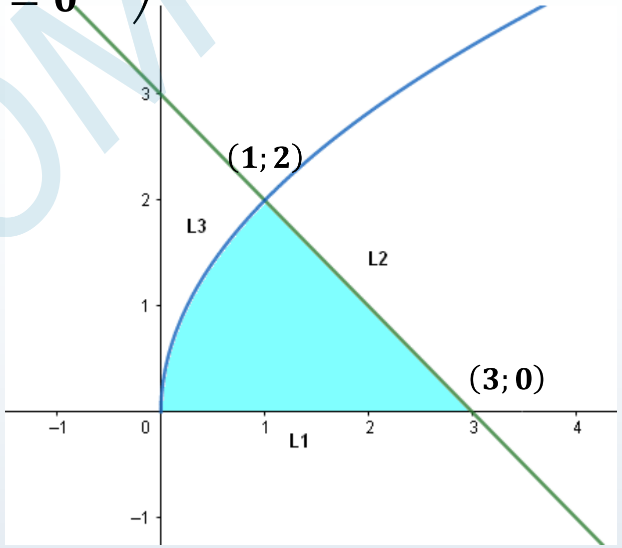
$$A = \frac{1}{2}\int_0^4 \left(-\frac{x^2}{4} + x\frac{x}{2}\right)dx + \frac{1}{2}\int_4^0 \left(-y\frac{y}{2} + \frac{y^2}{4}\right)dy = \frac{1}{8}\int_0^4 x^2 dx - \frac{1}{8}\int_4^0 y^2\,dy$$

$$= \frac{1}{24}|x^3|_0^4 - \frac{1}{24}|y^3|_4^0 = \frac{8}{3} - \left(-\frac{8}{3}\right) = \boldsymbol{\frac{16}{3}UA}$$

Se puede corroborar el resultado calculando el área por integrales dobles.

Ejemplo 7

Calcular el área comprendida $A = \begin{pmatrix} y = \sqrt{4x} \\ y = -x + 3 \\ y = 0 \end{pmatrix}$



<u>Curva L_1:</u> $y = 0 \Rightarrow dy = 0$

<u>Curva L_2:</u> $y = -x + 3 \Rightarrow dy = -dx$

<u>Curva L_3:</u> $x = \dfrac{y^2}{4} \Rightarrow dx = \dfrac{1}{2} y dy$

<u>Intersecciones:</u>

L_1 con L_2

Si y=0 $\rightarrow x = 3$

L_1 con L_3

Si y=0 $\rightarrow$x =0

L_2 con L_3

$$\frac{y^2}{4} = -y + 3$$

$$\frac{y^2}{4} + y - 3 = 0 \Rightarrow y = 2 \wedge y = -6$$

Si y=2 $\rightarrow$x = 1

$$A = \frac{1}{2}\int_{\bar{L}_1} -ydx + xdy + \frac{1}{2}\int_{\bar{L}_2} -ydx + xdy + \frac{1}{2}\int_{\bar{L}_3} -ydx + xdy$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^3 -0.dx + x.0 + \frac{1}{2}\int_3^1 (-(-x+3) + x(-1))\, dx + \frac{1}{2}\int_2^0 \left(-y\frac{1}{2}y + \frac{y^2}{4}\right) dy$$

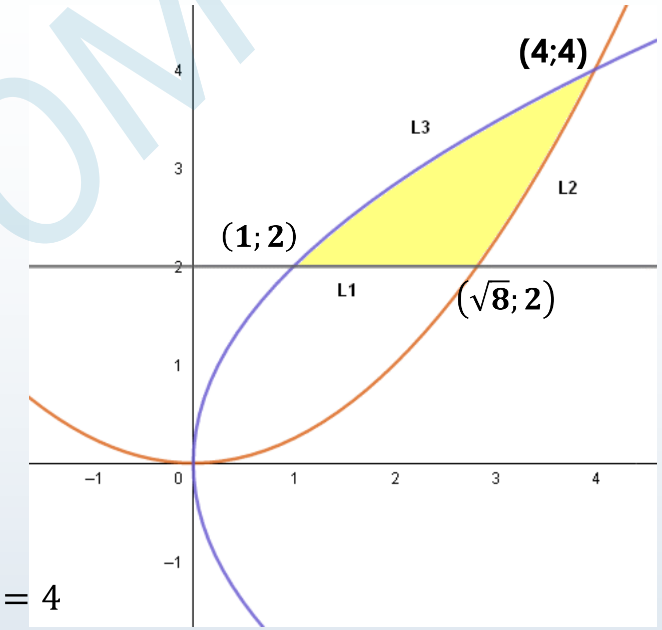
$$= -\frac{3}{2}\int_3^1 dx - \frac{1}{8}\int_2^0 (y^2)\, dy = -\frac{3}{2}|x|_3^1 - \frac{1}{24}|y^3|_2^0 = -\frac{3}{2}(1-3) - \frac{1}{24}(-8) = \frac{\mathbf{10}}{\mathbf{3}}\, \boldsymbol{U.A.}$$

Ejemplo 8 Usando integral curvilínea, calcular el área limitada por $4y=x^2$, $4x=y^2$, $y=2$, $x\epsilon[1,4]$

<u>Curva L_1:</u> $y = 2 \Rightarrow dy = 0$

<u>Curva L_2:</u> $y = \frac{x^2}{4} \Rightarrow dy = \frac{x}{2}dx$

<u>Curva L_3:</u> $x = \frac{y^2}{4} \Rightarrow dx = \frac{y}{2}dy$



<u>Intersecciones:</u>

L_1 con L_2

Si y=2 $\rightarrow x = \pm\sqrt{8}$

L_1 con L_3

Si y=2 $\rightarrow x = 1$

L_2 con L_3

$$\frac{x^4}{16} = 4x$$

$$\frac{x^4}{16} - 4x = 0 \Rightarrow x = 0 \wedge x = 4$$

Si x=4 →y=4

$$A = \frac{1}{2}\left[\int_1^{\sqrt{8}} -2dx + x.0 + \int_{\sqrt{8}}^4 -\frac{x^2}{4}dx + x\frac{x}{2}dx + \int_4^2 -y\frac{y}{2}dy + \frac{y^2}{4}dy\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-2\int_1^{\sqrt{8}} dx + \frac{1}{4}\int_{\sqrt{8}}^4 x^2dx - \frac{1}{4}\int_4^2 y^2dy\right] = \frac{1}{2}\left[-2|x|_1^{\sqrt{8}} + \frac{1}{12}|x^3|_{\sqrt{8}}^4 - \frac{1}{12}|y^3|_4^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-2(\sqrt{8}-1) + \frac{1}{12}(64 - 8\sqrt{8}) - \frac{1}{12}(8-64)\right] = \frac{1}{2}\left[-2\sqrt{8} + 2 + \frac{16}{3} - \frac{2}{3}\sqrt{8} - \frac{2}{3} + \frac{16}{3}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left(-\frac{8}{3}\sqrt{8} + 12\right) = \left(\mathbf{6 - \frac{4}{3}\sqrt{8}}\right)\boldsymbol{U.A.}$$

Realizar los ejercicios de la Guía de Integrales Curvilíneas

Por cualquier duda o consulta dirigirse a vrocha@frc.utn.edu.ar especificando en el ASUNTO del correo: curso, legajo, apellido y nombre.