Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Córdoba

18. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden

Primera parte

Ing. Rocha, Victoria.-

Definición

Una **Ecuación Diferencial** contiene una función desconocida y una o más de sus derivadas.

Ecuación diferencial ordinaria

Una ecuación diferencial es ordinaria si hay una sola variable independiente, por lo tanto la derivada es total, no hay derivadas parciales. Las otras ecuaciones diferenciales reciben el nombre de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales.

Orden de una ecuación diferencial

Está dado por el orden de la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación diferencial.

Ejemplos:

$y' - 2xy = 3$ es de 1º orden porque aparece la derivada primera.

$y'' - 4y' = 2y$ es de 2º orden porque aparece la derivada segunda.

Podemos pensar a una ecuación diferencial de orden n como una ecuación del tipo: $F(x; y; y' ;...; y^n) = 0$ (forma implícita) o $y^n = f(x; y; y' ;...; y^n - 1)$ (forma explícita).

Definición

Grado de una ecuación diferencial

Es la potencia a la que está elevada la derivada de mayor orden.

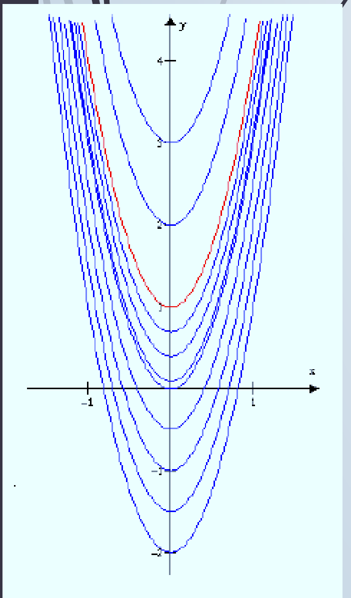
Ejemplos:

$y'' + y'^{2} = 2xy$ es de 2º orden y de 1º grado, la derivada de mayor orden es la 2º que tiene exponente 1.

$2xy'\,2 + 2y''^{3} = 2y$ es de 2º orden y 3º grado.

Solución general de una ecuación diferencial

La solución general de una ecuación diferencial está constituida por todas las funciones que satisfacen la ecuación diferencial. Hay que tener en cuenta que así como en una ecuación algebraica la solución son números, la solución de una ecuación diferencial son funciones.



***Ejemplo:* resolver $y' = x$**

Se trata de encontrar todas las funciones cuyas derivadas sean iguales a x. Para resolverla expresamos la derivada como cociente de diferenciales:

$$\frac{dy}{dx} = x \Rightarrow dy = x.dy \Rightarrow \int dy = \int x.dx \Rightarrow \boxed{y = \frac{x^2}{2} + C}$$

Integrando a ambos miembros se obtiene la solución general, constituida en este caso por una familia de parábolas. Obsérvese que no hay una única función sino que son infinitas que difieren en una constante. Por eso se dice que la solución general de una ecuación diferencial es una familia de funciones.

Definición

Solución particular

Se llama así a la función que además de pertenecer a la solución general cumple con alguna condición adicional, por ejemplo la de pasar por un punto P_0 determinado.

Si en el ejemplo anterior queremos la solución que pasa por $P_0 = (1;1)$, estamos buscando una solución particular. Para obtenerla debemos calcular la constante C:

$$y = \frac{x^2}{2} + C \rightarrow 1 = \frac{1^2}{2} + C \rightarrow \boxed{C = \frac{1}{2}}$$

por lo tanto la solución particular es:

$y = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$, que de todas las parábolas que forman parte de la solución general es la que pasa por el punto $P_0 = (1;1)$.

ECUACIONES DIFERENCIALES DE 1º ORDEN

Podemos pensar en forma genérica a una ecuación diferencial de 1º orden como una ecuación de la forma: F(x; y; y')= 0 o y' = f (x; y). Veremos los siguientes casos: variables separables, homogéneas, lineales, Bernoulli y exactas. En todos los caso se plantean “artilugios” matemáticos para poder resolverlas. Esos algoritmos se plantean en cada una de las ED a continuación.

1. Ecuaciones diferenciales de variables separables

Se llama así a las ecuaciones diferenciales en las cuales se pueden separar las variables, es decir que en cada miembro de la ecuación quede una sola variable con su diferencial de modo que se puedan integrar. Eso ocurre cuando la ecuación diferencial se puede llevar a la siguiente forma:

$$y' = P(x).Q(y)$$

Para resolver seguir los siguientes pasos:

1) Dejar expresado en su formato: $y' = P(x).Q(y)$
2) Despejar para que queden variables separables: $\frac{dy}{dx} = P(x).Q(y) \rightarrow \frac{dy}{Q(y)} = P(x).dx$
3) Aplicar integrales y resolver: $\boxed{\int \frac{dy}{Q(y)} = \int P(x).dx}$

Ejercicio 1

Resolver la siguiente EDO: $3xy' - x^2y = 0$. Encontrar la solución particular para $P_0(1,1)$.

Si despejamos podemos dejar expresada la ecuación en variables separables $y' = \frac{x^2y}{3x}$ ➔ $y' = \frac{x}{3}y$

Si expresamos la derivada como cociente de diferenciales, se pueden separar las variables:

$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{3}y$ ➔ $\frac{dy}{y} = \frac{x}{3}dx$ ➔ $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{x}{3}dx$ ➔ $\boxed{\ln y = \frac{x^2}{6} + C}$ S.G.

Reemplazando para encontrar las solución particular:

$\ln 1 = \frac{1^2}{6} + C$ ➔ $0 - \frac{1}{6} = C$ ➔ $C = \frac{1}{6}$ ➔ $\boxed{\ln y = \frac{x^2}{6} - \frac{1}{6}}$ S.P.

Pero no todas las ecuaciones diferenciales se pueden separar las variables. Vemos ahora como se resuelven algunos de esos casos…

2. Ecuaciones diferenciales homogéneas

Las ecuaciones diferenciales homogéneas tienen la siguiente estructura:

$$y` = f(x;y)$$

Para su resolución sigo los siguientes pasos:

1) Presentar en su formato: $y` = f(x;y)$
2) Verificar que sea homogénea: $f(\lambda x;\lambda y) = f(x;y)$
3) Realizar cambio de variable $\lambda = \frac{1}{x} \therefore \frac{dy}{dx} = f\left(1,\frac{y}{x}\right)$ y estableciendo que $u = \frac{y}{x} \therefore \frac{dy}{dx} = \boxed{f(1,u)}$. Entonces x=1, y=u
4) Aplico la fórmula: $\boxed{\int \frac{du}{f(1,u)-u} = \ln x + C}$
5) Vuelvo a la variable original y obtengo Solución General.

Ejercicio 2

Resolver la siguiente EDO: 2y2 – x2y'-2xyy' = 0 . Encontrar la solución particular para $P_0(1,1)$.

1) Presentar en su formato: $-y'(x^2+2xy) = -2y^2$

$$y' = \frac{2y^2}{x^2+2xy}$$

2) Verificar $y' = \frac{2y^2\lambda^2}{x^2\lambda^2+2xy\lambda^2} = \frac{2y^2}{x^2+2xy}$

3) Cambio de variable x=1, y=u : $y' = \frac{2u^2}{1+2u}$

4) Aplico la fórmula: $\int \frac{du}{\frac{2u^2}{1+2u}-u} = \ln x + C$

$\int \frac{1+2u}{2u^2-u-2u^2} du = \ln x + C$ ➔ $-\int \frac{1+2u}{u} du = \ln x + C$ ➔ $-lnu - 2u = \ln x + C$

5) Solución General: $\boxed{-ln\left(\frac{y}{x}\right) - 2\frac{y}{x} = \ln x + C}$ S.G.

6) Solución Particular: $-ln(1) - 2 = \ln 1 + C \Rightarrow C = -2$

$\boxed{-ln\left(\frac{y}{x}\right) - 2\frac{y}{x} - lnx = -2}$ S.P.

Ejercicio 3: $y^2 dx + (x-3)dy = 0$

Lo primero es ver qué tipo de ED es. A simple vista podemos pensar en EDVS. Resolvemos:

PASO 1:

$$y^2 dx = -(x-3)dy$$

$$-\frac{dx}{x-3} = \frac{dy}{y^2}$$

$$\frac{dx}{x-3} + \frac{dy}{y^2} = 0$$

PASO 2:

$$\int \frac{dx}{x-3} + \int \frac{dy}{y^2} = 0$$

Se resuelve integral por sustitución

$$\ln(x-3) - \frac{1}{y} = C \quad \textbf{S.G.}$$

Ejercicio 4: $x + xy^2 + y'\sqrt{1-x^2} = 0 \quad (x_0; y_0) = (0; 0)$

Lo primero es ver qué tipo de ED es. A simple vista podemos pensar en EDVS. Resolvemos:

PASO 1:

$$\frac{(x + xy^2)dx + \sqrt{1-x^2}dy}{dx} = 0$$

$$x(1 + y^2)dx = -\sqrt{1-x^2}dy$$

$$-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \frac{1}{1+y^2}dy$$

$$\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx + \frac{1}{1+y^2}dy = 0$$

PASO 2:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx + \int \frac{1}{1+y^2}dy = 0$$

Se resuelve integral por sustitución y tabla

$$-\sqrt{1-x^2} + \operatorname{arctg}(y) = C \quad \textbf{S. G.}$$

PASO 3:

$$-\sqrt{1-0} + \operatorname{arctg}(0) = C$$

$$-1 = C$$

$$-\sqrt{1-x^2} + \operatorname{arctg}(y) = -1 \quad \textbf{S. P.}$$

Ejercicio 5: $2xydy - x\sqrt{x^2+y^2} - 2y^2dx = 0$

Lo primero es ver qué tipo de ED es. Podríamos pensar que es de VS pero al plantearla se nos complica, por eso probamos verificamos si es homogénea:

PASO 1:

$$2xydy - dx\left(x\sqrt{x^2+y^2} + 2y^2\right) = 0$$

$$y' = \frac{x\sqrt{x^2+y^2} + 2y^2}{2xy}$$

PASO 2:

$$y' = \frac{x\lambda\sqrt{x^2\lambda^2 + y^2\lambda^2} + 2y^2\lambda^2}{2xy\lambda^2} = \frac{x\sqrt{x^2+y^2} + 2y^2}{2xy}$$

PASO 3 y 4:

Se resuelve por sustitución

$$\int \frac{du}{\frac{\sqrt{1+u^2} + 2u^2}{2u} - u} = \ln x + C$$

$$\int \frac{1}{\frac{\sqrt{1+u^2} + 2u^2 - 2u^2}{2u}} du = \ln x + C$$

$$\int \frac{2u}{\sqrt{1+u^2}} du = \ln x + C$$

$$2\sqrt{1+u^2} - \ln x = C$$

PASO 5:

$$2\sqrt{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} - \ln x = C \quad \textbf{S.G.}$$