UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
Facultad Regional Córdoba
Dpto. Ciencias Básicas - Análisis Matemático II

21. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE SEGUNDO ORDEN

SEGUNDA PARTE

Ing. Rocha - Ing. Ortenzi

EDO de Segundo Orden No Homogénea con Coeficientes Constantes

Son de la forma:

$$\boxed{ay'' + by' + cy = f(x)}$$

donde a, b y c son constantes.

Su solución general se puede expresar como: $\mathbf{y = y_H + y_{NH}}$, donde y_{NH} es una solución particular de la EDL No Homogénea e y_H es la solución general de la EDL Homogénea auxiliar: ay'' + by' + cy = 0.

En la bibliografía pueden encontrar dos métodos para obtener la solución particular y_{NH}, el ***método de los coeficientes indeterminados*** y el ***método de la variación de los parámetros***.

Para resolver de manera práctica se verá el primero de ellos. Este método se aplica cuando *f(x)* tiene la forma de un polinomio, o una exponencial, o seno, o coseno, o una combinación de ellos. Este es más simple de aplicar pero para un número restringido de *f(x)*, el segundo es más difícil de aplicar pero es válido para cualquier *f(x)*.

Método de los Coeficientes Indeterminados

Polinomio de Enésimo grado: ***Si $f(x) = P_n(x)$***

La solución particular y_{NH} es un polinomio del mismo grado:

$$y_{NH} = U_n(x) = A_0 x^n + A_1 x^{n-1} + \dots + A_{n-1} x + A_n$$

Función Exponencial: ***Si $f(x) = Ce^{\alpha x}$***

La solución particular es de la forma:

$$y_{NH} = A e^{\alpha x}$$

Función Trigonométrica: ***Si $f(x) = C\cos(\alpha x)$***

Si $f(x) = C\,\text{sen}(\alpha x)$

Si $f(x) = C\cos(\alpha x) + D\,\text{sen}(\alpha x)$

Se propone la solución particular:

$$y_{NH} = A\cos ax + B\,\text{sen}\,ax$$

Producto de funciones: Se propone una solución particular y_{NH} con la forma de un producto de funciones del mismo tipo.

Suma de funciones: Se propone una solución particular y_{NH} con la forma de la suma de funciones del mismo tipo.

Si la solución particular propuesta es solución de la EDL Homogénea auxiliar: En estos casos esta solución particular no puede ser solución de la EDL No Homogénea planteada, entonces se multiplica la solución particular por "x" o "x^2".

Ejemplo 4

Hallar la solución particular de $y''-\frac{1}{2}y'-\frac{1}{2}y=2xe^{2x}$ para $y_0=2, y'_0=1, x_0=0$

Ecuación característica: $k^2-\frac{1}{2}k-\frac{1}{2}=0\begin{cases}k_1=1\\k_2=-\frac{1}{2}\end{cases}$

Raíces reales y distintas, la solución general de la Homog. Auxiliar: $\boldsymbol{y_H=C_1e^{x}+C_2e^{-\frac{1}{2}x}}$

f(x) tiene una estructura de producto de funciones, entonces se propone:

$$y_{NH}=(Ax+B)e^{2x}$$

Derivamos hasta el orden dos:

$$y'_{NH}=Ae^{2x}+2(Ax+B)e^{2x}$$

$$y''_{NH}=2Ae^{2x}+2Ae^{2x}+4(Ax+B)e^{2x}=4Ae^{2x}+4(Ax+B)e^{2x}$$

Reemplazamos en la ED:

$$4Ae^{2x}+4(Ax+B)e^{2x}-\frac{1}{2}[Ae^{2x}+2(Ax+B)e^{2x}]-\frac{1}{2}[(Ax+B)e^{2x}]=2xe^{2x}$$

$$\frac{7}{2}Ae^{2x}+\frac{5}{2}Axe^{2x}+\frac{5}{2}Be^{2x}=2xe^{2x}$$

Comparamos términos semejantes para encontrar los coeficientes y luego reemplazamos en la solución propuesta:

$\frac{5}{2}A=2\rightarrow A=\frac{4}{5}$

$\frac{7}{2}A+\frac{5}{2}B=0\rightarrow B=-\frac{28}{25}$

$$\boldsymbol{y_{NH}=\left(\frac{4}{5}x-\frac{28}{25}\right)e^{2x}}$$

La <u>solución general</u> es:

$$\boldsymbol{y_G = C_1 e^{x} + C_2 e^{-\frac{1}{2}x} + \left(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25}\right)e^{2x}}$$

Para hallar la solución particular reemplazamos en y_G y en y'_G con los datos:

$$y'_G = C_1 e^{x} - \frac{1}{2}C_2 e^{-\frac{1}{2}x} + \frac{4}{5}e^{2x} + 2\left(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25}\right)e^{2x}$$

$$2 = C_1 e^{0} + C_2 e^{0} + \left(\frac{4}{5}.0 - \frac{28}{25}\right)e^{0} \rightarrow C_1 + C_2 = \frac{78}{25} \quad (1)$$

$$1 = C_1 e^{0} - \frac{1}{2}C_2 e^{0} + \frac{4}{5}e^{0} + 2\left(\frac{4}{5}.0 - \frac{28}{25}\right)e^{0} \rightarrow C_1 - \frac{1}{2}C_2 = \frac{61}{25} \quad (2)$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} \frac{78}{25} & 1 \\ \frac{61}{25} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}} = \frac{-\frac{39}{25} - \frac{61}{25}}{-\frac{1}{2} - 1} = \frac{-4}{-\frac{3}{2}} = \frac{8}{3}$$

$$C_2 = \frac{78}{25} - \frac{8}{3} = \frac{34}{75}$$

La <u>solución particular</u> es:

$$\boldsymbol{y_P = \frac{8}{3}e^{x} + \frac{34}{75}e^{-\frac{1}{2}x} + \left(\frac{4}{5}x - \frac{28}{25}\right)e^{2x}}$$

Ejemplo 5

Hallar la solución particular de $\boldsymbol{y'' - y = 4x^2 - 2 + 6e^{-2x}}$ $\boldsymbol{para}$ $\boldsymbol{y_0 = 1, y'_0 = -1, x_0 = 0}$

Ecuación característica: $k^2 - 1 = 0$

$$k^2 = 1 \rightarrow \begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = -1 \end{cases}$$

Raíces reales y distintas, la solución general de la Homog. Auxiliar: $\boldsymbol{y_H = C_1 e^{x} + C_2 e^{-x}}$

f(x) tiene una estructura de suma de funciones, entonces se propone:

$$y_{NH} = Ax^2 + Bx + C + De^{-2x}$$

Derivamos hasta el orden dos:

$$y'_{NH} = 2Ax + B - 2De^{-2x}$$
$$y''_{NH} = 2A + 4De^{-2x}$$

Reemplazamos en la ED:

$$2A + 4De^{-2x} - [Ax^2 + Bx + C + De^{-2x}] = 4x^2 - 2 + 6e^{-2x}$$
$$-Ax^2 - Bx + 2A - C + 3De^{-2x} = 4x^2 - 2 + 6e^{-2x}$$

Comparamos términos semejantes para encontrar los coeficientes y luego reemplazamos en la solución propuesta:

$-A = 4 \rightarrow A = -4$

$-B = 0 \rightarrow B = 0$

$2A - C = -2 \rightarrow C = -6$

$3D = 6 \rightarrow D = 2$

$$\boldsymbol{y_{NH} = -4x^2 - 6 + 2e^{-2x}}$$

La solución general es:

$$y_G = C_1 e^x + C_2 e^{-x} - 4x^2 - 6 + 2e^{-2x}$$

Para hallar la solución particular reemplazamos en y_G y en y'_G con los datos iniciales:

$$y'_G = C_1 e^x - C_2 e^{-x} - 8x - 4e^{-2x}$$

$$1 = C_1 + C_2 - 6 + 2 \rightarrow C_1 + C_2 = 5 \ \ (1)$$

$$-1 = C_1 - C_2 - 4 \rightarrow C_1 - C_2 = 3 \ \ (2)$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$C_1 = \frac{\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-5-3}{-1-1} = 4 \therefore C_2 = 1$$

La solución particular es:

$$y_P = 4e^x + e^{-x} - 4x^2 - 6 + 2e^{-2x}$$

Ejemplo 6 **Hallar la solución general de $y'' + 3y = 3\cos(4x) - 2sen(4x)$**

Ecuación característica: $k^2 + 3 = 0$

$$k^2 = -3 \quad \begin{cases} k_1 = -\sqrt{3}i \\ k_2 = \sqrt{3}i \end{cases}$$

Raíces complejas conjugadas, la solución general de la Homog. Auxiliar:

$$\boldsymbol{y_H = C_1\cos(\sqrt{3}x) + C_2 sen(\sqrt{3}x)}$$

f(x) es una combinación de funciones trigonométricas, entonces se propone:

$$y_{NH} = Acos(4x) + Bsen(4x)$$

Derivamos hasta el orden dos:

$$y'_{NH} = -4Asen(4x) + 4Bcos(4x)$$
$$y''_{NH} = -16A\cos(4x) - 16Bsen(4x)$$

Reemplazamos en la ED:

$$-16A\cos(4x) - 16Bsen(4x) + 3[\mathrm{A}cos(4x) + Bsen(4x)] = 3\cos(4x) - 2sen(4x)$$
$$-13A\cos(4x) - 13Bsen(4x) = 3\cos(4x) - 2sen(4x)$$

Comparamos términos semejantes para encontrar los coeficientes y luego reemplazamos en la solución propuesta:

$$-13A = 3 \to A = -\frac{3}{13}$$

$$-13B = -2 \to B = \frac{2}{13} \qquad \boldsymbol{y_{NH} = -\frac{3}{13}\cos(4x) + \frac{2}{13}sen(4x)}$$

La <u>solución general</u>:

$$\boldsymbol{y_G = C_1\cos(\sqrt{3}x) + C_2 sen(\sqrt{3}x) - \frac{3}{13}\cos(4x) + \frac{2}{13}sen(4x)}$$

Ejemplo 7 **Hallar la solución general de $y'' - 10y' + 25y = e^{5x}$**

Ecuación característica:$k^2 - 10k + 25 = 0 \rightarrow k_1 = k_2 = 5$

Raíces reales e iguales, la solución general de la Homog. Auxiliar:

$$\boldsymbol{y_H = C_1 e^{5x} + C_2 x e^{5x}}$$

La solución propuesta no puede ser solución de la Homogénea auxiliar entonces se plantea:

$$y_{NH} = Ax^2 e^{5x}$$

Derivamos hasta el orden dos:

$$y'_{NH} = 2Axe^{5x} + 5Ax^2 e^{5x}$$

$$y''_{NH} = 2Ae^{5x} + 10Axe^{5x} + 10Axe^{5x} + 25Ax^2 e^{5x} = 2Ae^{5x} + 20Axe^{5x} + 25Ax^2 e^{5x}$$

Reemplazamos en la ED:

$$2Ae^{5x} + 20Axe^{5x} + 25Ax^2 e^{5x} - 10[2Axe^{5x} + 5Ax^2 e^{5x}] + 25Ax^2 e^{5x} = e^{5x}$$

$$2Ae^{5x} = e^{5x}$$

$$2A = 1 \rightarrow A = \frac{1}{2}$$

Reemplazamos en la solución propuesta:

$$\boldsymbol{y_{NH} = \frac{1}{2} e^{5x}}$$

La <u>solución general</u>:

$$\boldsymbol{y_G = C_1 e^{5x} + C_2 x e^{5x} + \frac{1}{2} x^2 e^{5x}}$$

Ejemplo 8 **Resolver:** $\boldsymbol{y'' - 4y' + 3y = e^{3x}x - e^{3x}}$

$$y'' - 4y' + 3y = e^{3x}(x-1)$$

Ecuación característica: $k^2 - 4k + 3 = 0 \begin{cases} k_1 = 1 \\ k_2 = 3 \end{cases}$

Raíces reales y distintas, la solución general de la Homog. Auxiliar: $\boldsymbol{y_H = C_1 e^x + C_2 e^{3x}}$

La solución propuesta no puede ser solución de la Homogénea auxiliar entonces se plantea:

$$y_{NH} = xe^{3x}(Ax+B) = Ax^2e^{3x} + Bxe^{3x}$$

Derivamos hasta el orden dos:

$$y'_{NH} = 2Axe^{3x} + 3Ax^2e^{3x} + Be^{3x} + 3Bxe^{3x}$$

$$\begin{aligned} y''_{NH} &= 2Ae^{3x} + 6Axe^{3x} + 6Axe^{3x} + 9Ax^2e^{3x} + 3Be^{3x} + 3Be^{3x} + 9Bxe^{3x} \\ &= 2Ae^{3x} + 12Axe^{3x} + 9Ax^2e^{3x} + 6Be^{3x} + 9Bxe^{3x} \end{aligned}$$

Reemplazamos en la ED:

$$\begin{aligned} &2Ae^{3x} + 12Axe^{3x} + 9Ax^2e^{3x} + 6Be^{3x} + 9Bxe^{3x} - 4[2Axe^{3x} + 3Ax^2e^{3x} + Be^{3x} + 3Bxe^{3x}] \\ &+ 3[Ax^2e^{3x} + Bxe^{3x}] = e^{3x}x - e^{3x} \end{aligned}$$

$$2Ae^{3x} + 4Axe^{3x} + 2Be^{3x} = e^{3x}x - e^{3x}$$

$4A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{4}$

$2A + 2B = -1 \Rightarrow B = -\frac{3}{4}$

Reemplazamos en la solución propuesta: $\boldsymbol{y_{NH} = xe^{3x}\left(\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}\right)}$

La solución general:

$$\boldsymbol{y_G = C_1e^x + C_2e^{3x} + xe^{3x}\left(\frac{1}{4}x - \frac{3}{4}\right)}$$

Ejemplo 9 **Hallar la solución general de la siguiente ecuación diferencial:**

$$\boldsymbol{y'' - 4y' = 5x^2}$$

Ecuación característica: $k^2 - 4k = 0 \quad \begin{cases} k_1 = 0 \\ k_2 = 4 \end{cases}$

Raíces reales y distintas, la solución general de la Homog. Auxiliar: $\boldsymbol{y_H = C_1 + C_2 e^{4x}}$

La solución propuesta no puede ser solución de la Homogénea auxiliar entonces se plantea:

$$y_{NH} = x(Ax^2 + Bx + C) = Ax^3 + Bx^2 + Cx$$

Derivamos hasta el orden dos:

$$y'_{NH} = 3Ax^2 + 2Bx + C$$

$$y''_{NH} = 3Ax^2 + 2Bx + C$$

Reemplazamos en la ED:

$$6Ax + 2B - 4[3Ax^2 + 2Bx + C] = 5x^2$$

$$-12Ax^2 + 6Ax - 8Bx + 2B - 4C = 5x^2$$

$-12A = 5 \Rightarrow A = -\dfrac{5}{12}$

$6A - 8B = 0 \Rightarrow B = -\dfrac{5}{16}$

$2B - 4C = 0 \Rightarrow C = -\dfrac{5}{32}$

Reemplazamos en la solución propuesta: $\boldsymbol{y_{NH} = x\left(-\frac{5}{12}x^2 - \frac{5}{16}x - \frac{5}{32}\right)}$

La <u>solución general</u>:

$$\boldsymbol{y_G = C_1 + C_2 e^{4x} + x\left(-\frac{5}{12}x^2 - \frac{5}{16}x - \frac{5}{32}\right)}$$

Ejemplo 10 **Resolver la siguiente ecuación diferencial:** $\boldsymbol{y'' + 4y' + 4y = 5sen(x)}$

Ecuación característica: $k^2+4k+4=0 \Rightarrow k=-2$

Raíces reales e iguales, la solución general de la Homog. Auxiliar: $\boldsymbol{y_H = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x}}$

La solución propuesta:

$$y_{NH} = Asen(x) + Bcos(x)$$

Derivamos hasta el orden dos:

$$y'_{NH} = Acos(x) - Bsen(x)$$
$$y''_{NH} = -Asen(x) - Bcos(x)$$

Reemplazamos en la ED:

$$-Asen(x) - Bcos(x) + 4[Acos(x) - Bsen(x)] + 4[Asen(x) + Bcos(x)] = 5sen(x)$$
$$3Asen(x) + 3Bcos(x) + 4Acos(x) - 4Bsen(x) = 5sen(x)$$

$$\begin{cases} 3A - 4B = 5 \\ 3B + 4A = 0 \end{cases}$$

$$A = \frac{\begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{15}{9+16} = \frac{3}{5}$$

$$B = -\frac{4}{5}$$

Reemplazamos en la solución propuesta: $\boldsymbol{y_{NH} = \frac{3}{5}sen(x) - \frac{4}{5}cos(x)}$

La solución general:

$$\boldsymbol{y_G = C_1 e^{-2x} + C_2 x e^{-2x} + \frac{3}{5}sen(x) - \frac{4}{5}cos(x)}$$

Ejemplo 11 **Resolver la ED que tiene como raíces de la ecuación característica 1 y -2, y f(x)=2x² – 3x**

De acuerdo a los valores de las raíces:

$$(k-1)(k+2)=0$$

$$k^2+k-2=0$$

Entonces la ED es: y'' + y' - 2 y = 2x² – 3x

Raíces reales e iguales, la solución general de la Homog. Auxiliar: $\boldsymbol{y_H = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}}$

La solución propuesta:

$$y_{NH} = Ax^2 + Bx + C$$

Derivamos hasta el orden dos:

$$y'_{NH} = 2Ax + B$$

$$y''_{NH} = 2A$$

Reemplazamos en la ED:

2 A + 2A x + B – 2 Ax² - 2 Bx – 2 C = 2x² – 3x

-2 A x² + x (2 A – 2 B) + 2A – 2 C = 2x² – 3x

– 2 A = 2	2 A - 2 B = -3	2 A – 2 C = 0
A = -1	2 (-1) - 2 B = -3	2 (-1) – 2C = 0
	-2 B = -1	-2 C = 2
	B = ½	C = - 1

Reemplazamos en la solución propuesta: $\boldsymbol{y_{NH} = -x^2 + \frac{x}{2} - 1}$

La solución general:

$$\boldsymbol{y_G = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x} - x^2 + \frac{x}{2} - 1}$$