Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Córdoba

18. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Primer Orden
Segunda parte

Ing. Rocha, Victoria.-

3. Ecuaciones diferenciales lineales

Estas ecuaciones diferenciales tienen la siguiente estructura:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = Q(x)$$

donde P(x) y Q(x) son funciones continuas de x.

La solución la constituyen todas las funciones y = f (x) que satisfagan la ecuación. Para resolverla se recurre a un cambio de variables: y = u.v, donde u y v son funciones de x. Debemos calcular u(x) y v(x), luego efectuando su producto se obtiene la función "y" que es la solución general.

La solución general se encuentra realizando los pasos (método 2) mencionados a continuación o planteando la siguiente resolución (método 1):

Método 1:

$$y = e^{\int -P(x)dx}\left[\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right]$$

Para su resolución sigo los siguientes pasos (Método 2):

1) Presentar en su formato: $y` + P(x)y = Q(x)$

2) Realizar cambio de variable (*Objetivo: encontrar u y v*): $y = uv$

$$y' = u'v + uv' \quad (\boldsymbol{B})$$

$u'v + uv' + P(x)uv = Q(x)$Sacar factor común u ó v: $v(u' + P(x)u) + uv' = Q(x) \quad (\boldsymbol{C})$

3) Realizamos la siguiente hipótesis para obtener una EDVS: $u' + P(x)u = 0 \therefore u' = -P(x)u$

$$\frac{du}{dx} = -P(x)u$$

5) Integro y obtengo u: $u = f(x) \quad (\boldsymbol{D})$

6) Reemplazamos D en C : $uv' = Q(x)$

7) Integro y obtengo v: $v = f(x) + C \quad (\boldsymbol{E})$

8) Reemplazo y=u.v y obtengo la solución General.

Ejercicio 6

Resolver la siguiente EDO: $y' + 3x^2y = 6x^2$. Encontrar la solución particular para $y(0)$=5.

Método 1

1) Dejar expresado en su formato: $\frac{dy}{dx} + 3x^2y = 6x^2$ Donde P(x)=$3x^2$ y Q(x)=$6x^2$
2) Aplico fórmula : $y = e^{-3\int x^2dx}\left[\int 6x^2e^{3\int x^2dx}dx + C\right] = e^{-x^3}\left[\int 6x^2e^{x^3}dx + C\right] = e^{-x^3}\left[2e^{x^3} + C\right]$

$\boxed{y = 2 + \frac{C}{e^{x^3}}}$ S.G.

3) La solución particular : $5 = 2 + \frac{C}{e^{0^3}} \Rightarrow C = 3$

$\boxed{y = 2 + \frac{3}{e^{x^3}}}$ S.P.

Método 2

1) formato: $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}} + 3\mathrm{x}^2\mathrm{y} = 6\mathrm{x}^2$ (A)
2) $y = uv$

$$y' = u'v + uv' \quad (\boldsymbol{B})$$

$$u'v + uv' + 3x^2uv = 6x^2$$

3) $v(u' + 3x^2u) + uv' = 6x^2 \quad (\boldsymbol{C})$

4) $u' + 3x^2v = 0 \therefore u' = -3x^2u$

$$\frac{du}{dx} = -3x^2u$$

5) $\int \frac{du}{u} = -3\int x^2dx$

$lnu = -x^3$

$u = e^{-x^3} \quad (\boldsymbol{D})$

6) $uv' = 6x^2$

$$e^{-x^3}\frac{dv}{dx} = 6x^2$$

7) $\int dv = \int 6x^2e^{x^3}\,dx$

$v = 2e^{x^3} + C \quad (\boldsymbol{E})$

8) $y = e^{-x^3}\left[2e^{x^3} + C\right]$

$\boxed{y = 2 + \frac{C}{e^{x^3}}}$ S.G.

9) $5 = 2 + \frac{C}{e^{0^3}} \Rightarrow C = 3$

$\boxed{y = 2 + \frac{3}{e^{x^3}}}$ S.P.

4. Ecuaciones diferenciales Totales exactas

Una ecuación diferencial con la estructura:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

Son ecuaciones diferenciales totales o exactas si P(x,y) y Q(x,y) son funciones continuas y derivables que verifican la igualdad:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

Suponiendo que la ecuación es el diferencial total de cierta función u(x,y):

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

Por lo tanto: $P = \frac{\partial u}{\partial x}$ $\qquad Q = \frac{\partial u}{\partial y}$

Derivando la primera con respecto a y, y la segunda con respecto a x: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial u^2}{\partial x \partial y}$ $\qquad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial u^2}{\partial y \partial x}$

Si las segundas derivadas son continuas: $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

Para obtener la solución general, si: $\frac{\partial u}{\partial x} = P(x,y)$

Integrando: $u = \int P dx + \varphi(y)$

La solución general se encuentra realizando los pasos (método 2) mencionados a continuación o planteando la siguiente resolución (método 1):

Método 1:

$$\int Qdy + \int \left(P - \frac{\partial\left(\int Qdy\right)}{\partial x} \right) dx = C$$

Método 2:

1) Aplico su formato: $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$

2) Verifico la igualdad $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$

3) Suponiendo que la ecuación es el diferencial total de cierta función u(x,y).

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy \Rightarrow P = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\boldsymbol{A}) \qquad Q = \frac{\partial u}{\partial y} \quad (\boldsymbol{B})$$

4) Integro A Para Obtener u: $\int \partial u = \int P\partial x$

$$u = f(x, y) + \varphi(y) \quad (\boldsymbol{C})$$

5) Derivo a u respecto de la otra variable: $\frac{\partial u}{\partial y} = f'(x, y) + \varphi'(y)$

6) Igualamos 3) y 5): $\frac{\partial u}{\partial y} = f'(x, y) + \varphi'(y) = Q$

7) Integro: $\int d\varphi(y) = \int (Q - f')\partial y$

$$\varphi(y) = g(y) + C_1 \qquad (\boldsymbol{D})$$

8) Reemplazo D en C y obtengo la solución general: $u = f(x, y) + g(y) + C_1$

$$C = f(x, y) + g(y)$$

Ejercicio 7

Resolver la siguiente EDO: $-\frac{y^3}{x^2}dx + \left(\frac{3y^2}{x} + 3\right)dy = 0$**. Encontrar la solución particular para P(1,-1).**

Método 1

1) Verifico el formato: $-\frac{y^3}{x^2}dx + \left(\frac{3y^2}{x} + 3\right)dy = 0$

2) Verifico que sea exacta: $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{3y^2}{x^2} \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{3y^2}{x^2}$

3) Aplico fórmula: $\int -\frac{y^3}{x^2}dx + \int \left(\frac{3y^2}{x} + 3 - \frac{\partial\left(\int -\frac{y^3}{x^2}dx\right)}{\partial y}\right) dy = C$

$$\frac{y^3}{x} + \int \left(\frac{3y^2}{x} + 3 - \frac{\partial\left(\frac{y^3}{x}\right)}{\partial y}\right) dy = C \;\rightarrow\; \frac{y^3}{x} + \int \left(\frac{3y^2}{x} + 3 - \frac{3y^2}{x}\right) dy = C \;\rightarrow\; \frac{y^3}{x} + 3\int dy = C$$

$\boxed{\frac{y^3}{x} + 3y = C}$ S.G.

Método 2

1) $-\frac{y^3}{x^2}dx + \left(\frac{3y^2}{x} + 3\right)dy = 0$

2) Verifico que sea exacta: $\frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{3y^2}{x^2}$ $\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{3y^2}{x^2}$

3) $P = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{y^3}{x^2}$ $(\boldsymbol{A})$ y $Q = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3y^2}{x} + 3$ $(\boldsymbol{B})$

4) $\int \partial u = -\int \frac{y^3}{x^2}dx$ ➔ $u = \frac{y^3}{x} + \varphi(y)$ $(\boldsymbol{C})$

5) $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{3y^2}{x} + \varphi'(y)$

6) $\frac{3y^2}{x} + 3 = \frac{3y^2}{x} + \varphi'(y)$ ➔ $\varphi'(y) = 3$

7) $\int \varphi'(y)\,dy = \int 3dy$ ➔ $\varphi(y) = 3y + C_1$ $(\boldsymbol{D})$

8) $u = \frac{y^3}{x} + 3y + C_1$ ➔ $\boxed{C = \frac{y^3}{x} + 3y}$ S.G.

9) $\frac{1^3}{1} + 3 = C \Rightarrow C = 4$ ➔ $\boxed{4 = \frac{y^3}{x} + 3y}$ S.P.

5. Ecuaciones diferenciales de Bernoulli

Esta ecuación diferencial tiene la siguiente estructura:

$$y' + P(x)y = Q(x)y^n$$

Si $n = 0$, la ecuación diferencial es lineal, si $n = 1$, la ecuación diferencial es de variables separables. Vemos que la ecuación diferencial lineal es un caso particular de la ecuación diferencial de Bernoulli. Para resolver este tipo de ecuaciones diferenciales se efectúa un cambio de variables y se la transforma en una ecuación diferencial lineal.

Los pasos para resolver son:

1) Verifico el formato: $y' + P(x)y = y^n Q(x)$

2) Multiplico ambos miembros por $(1-n)y^{-n}$: $(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} + (1-n)P(x)y^{1-n} = (1-n)Q(x)$ $(\boldsymbol{A})$

3) Realizo un cambio de variable: $Si\ z = y^{1-n}$ $(\boldsymbol{B})$ ➔ $\frac{dz}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$ $(\boldsymbol{C})$

4) Reemplazo B y C en A: $\frac{dz}{dx} + (1-n)P(x)z = (1-n)Q(x)$

5) Resuelvo como una ED Lineal : $Si \begin{cases} (1-n)P(x) = P_1(x) \\ (1-n)Q(x) = Q_1(x) \end{cases} \therefore$

$$\frac{dz}{dx} + P_1(x)z = Q_1(x)$$

6) Sustituyo z y encuentro Solución General

Ejercicio 8

Resolver la siguiente EDO: $\frac{dy}{dx} + 2y = y^3$.

1) $\frac{dy}{dx} + 2y = y^3$

2) Si n=3

$(1-n)y^{-n} = -2y^{-3}$

$2y^{-3}\frac{dy}{dx} - 4y^{-2} = -2 \ \ (A)$

3) $Si\ z = y^{-2} \ \ (B)$

$\frac{dz}{dx} = -2y^{-3}\frac{dy}{dx} \ (C)$

4) $\frac{dz}{dx} - 4z = -2$ EDL

5) $z = e^{\int 4dx}\left[\int -2e^{\int -4dx}dx + C\right] = e^{4x}\left[\int -2e^{-4x}dx + C\right] = e^{4x}\left[\frac{1}{2}e^{-4x} + C\right]$

$z = \frac{1}{2} + e^{4x}C$

6) $y^{-2} = \frac{1}{2} + e^{4x}C \ \rightarrow \ \frac{1}{y^2} = \frac{1}{2} + e^{4x}C \ \rightarrow \ \boxed{y = \sqrt{\frac{1}{\frac{1}{2}+e^{4x}C}}}$ S.G.

Ejercicio 9: $\mathbf{y' - xy' + 3y = (1-x)^3}$

Resolviendo un poco la ED podemos dejarla expresada como EDL. Vamos a resolverla por los 2 métodos.

METODOLOGÍA DE RESOLUCIÓN 1:

PASO 1:

$$\frac{dy}{dx}(1-x)+3y=(1-x)^3$$

$$\frac{dy}{dx}+\frac{3}{1-x}y=(1-x)^2$$

PASO 2:

$$y=e^{-\int\frac{3}{1-x}dx}\left[\int(1-x)^2e^{\int\frac{3}{1-x}dx}dx+C\right]=e^{3ln(1-x)}\left[\int(1-x)^2e^{-3ln(1-x)}dx+C\right]$$

$$=(1-x)^3\left[\int(1-x)^2\frac{1}{(1-x)^3}dx+C\right]=(1-x)^3\left[\int\frac{1}{1-x}dx+C\right]\ \text{S.G.}$$

METODOLOGÍA DE RESOLUCIÓN 2:

PASO 1:

$$\frac{dy}{dx}+\frac{3}{1-x}y=(1-x)^2\quad(\mathbf{A})$$

PASO 2:

$$y=uv$$

$$y'=u'v+uv'\qquad(\mathbf{B})$$

$$u'v+uv'+\frac{3}{1-x}uv=(1-x)^2$$

PASO 3:

$$v\left(u' + \frac{3}{1-x}u\right) + uv' = (1-x)^2 \quad (\mathbf{C})$$

PASO 4:

$$u' + \frac{3}{1-x}u = 0 \therefore u' = -\frac{3}{1-x}u$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{3}{1-x}u$$

PASO 5:

$$\int \frac{du}{u} = -\int \frac{3}{1-x}dx$$

$$\ln u = \ln(1-x)^3$$

$$u = (1-x)^3 \quad (\mathbf{D})$$

PASO 6:

$$uv' = (1-x)^2$$

$$(1-x)^3 \ \frac{dv}{dx} = (1-x)^2$$

PASO 7:

$$\int dv = \int \frac{1}{1-x}dx$$

$$v = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) + C \quad (\mathbf{E})$$

PASO 8:

$$y = (1-x)^3\left[\ln\left(\frac{1}{1-x}\right) + C\right] \ \textbf{S.G.}$$

Ejercicio 10: $\mathbf{y' = (y - 1)sen(x)}$

Es una EDL. Vamos a resolverla por los dos métodos:

METODOLOGÍA DE RESOLUCIÓN 1:

PASO 1:

$$\frac{dy}{dx} - sen(x)y = -sen(x)$$

PASO 2:

$$y = e^{\int senxdx}\left[\int -senxe^{-\int senxdx}dx + C\right] = e^{-cosx}\left[\int -senxe^{cosx}dx + C\right]$$

$$= e^{-cosx}[e^{cosx} + C] = \boxed{1 + \frac{C}{e^{cosx}}}$$

METODOLOGÍA DE RESOLUCIÓN 2:

PASO 1:

$$\frac{dy}{dx} - sen(x)y = -sen(x) \quad (\mathbf{A})$$

PASO 2:

$$y = uv$$

$$y' = u'v + uv' \quad (\mathbf{B})$$

$$u'v + uv' - sen(x)uv = -sen(x)$$

PASO 3:

$$v(u' - sen(x)u) + uv' = sen(x) \quad (\mathbf{C})$$

PASO 4:

$$u' - \text{sen}(x)u = 0 \therefore u' = \text{sen}(x)u$$

$$\frac{du}{dx} = \text{sen}(x)u$$

PASO 5:

$$\int \frac{du}{u} = \int \text{sen}(x)dx$$

$$\ln u = -\cos(x)$$

$$u = \frac{1}{e^{\cos(x)}} \quad (\mathbf{D})$$

PASO 6:

$$uv' = -\text{sen}(x)$$

$$\frac{1}{e^{\cos(x)}}\frac{dv}{dx} = -\text{sen}(x)$$

PASO 7:

$$\int dv = \int -\text{sen}(x)e^{\cos(x)}\,dx$$

$$v = e^{\cos(x)} + C \quad (\mathbf{E})$$

PASO 8:

$$y = \frac{1}{e^{\cos(x)}}\left[e^{\cos(x)} + C\right] = \boxed{1 + \frac{C}{e^{\cos x}}}$$

Ejercicio 11: $y^2 sen(xy^2)dx + (2xysen(xy^2) + 3y^2)dy = 0$

Podemos pensar en una ED Exacta o Total y verificar en primera instancia para luego resolver.

METODOLOGÍA DE RESOLUCIÓN 1:

PASO 1:

$$y^2 sen(xy^2)dx + (2xysen(xy^2) + 3y^2)dy = 0$$

PASO 2:

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2y[sen(xy^2) + xy^2 cos(xy^2)]$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 2y[sen(xy^2) + xy^2 cos(xy^2)]$$

PASO 3:

$$\int y^2 sen(xy^2)dx + \int \left[2xysen(xy^2) + 3y^2 - \frac{\partial\left(\int y^2 sen(xy^2)dx\right)}{\partial y}\right] dy = C$$

$$-cos(xy^2) + \int \left[2xysen(xy^2) + 3y^2 - \frac{\partial\left(-cos(xy^2)\right)}{\partial y}\right] dy = C$$

$$-cos(xy^2) + \int [2xysen(xy^2) + 3y^2 - 2xysen(xy^2)]dy = C$$

$$-cos(xy^2) + \int 3y^2 dy = C$$

$$\boxed{-cos(xy^2) + y^3 = C}$$

METODOLOGÍA DE RESOLUCIÓN 2:

PASO 1: Idem 1

PASO 2: Idem 1

PASO 3:

$$P = \frac{\partial u}{\partial x} = y^2 \operatorname{sen}(xy^2) \quad (A)$$

$$Q = \frac{\partial u}{\partial y} = 2xy\operatorname{sen}(xy^2) + 3y^2 \quad (B)$$

PASO 4:

$$\int \partial u = \int y^2 \operatorname{sen}(xy^2)\, dx$$

$$u = -\cos(xy^2) + \varphi(y) \quad (C)$$

PASO 5:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2xy\operatorname{sen}(xy^2) + \varphi'(y)$$

PASO 6:

$$2xy\operatorname{sen}(xy^2) + 3y^2 = 2xy\operatorname{sen}(xy^2) + \varphi'(y)$$

$$\varphi'(y) = 3y^2$$

PASO 7:

$$\int \varphi'(y)\, dy = \int 3y^2 dy$$

$$\varphi(y) = y^3 + C_1 \quad (D)$$

PASO 8: $u = -\cos(xy^2) + y^3 + C_1$

$$C = -\cos(xy^2) + y^3$$

Ejercicio 12: $\left(\sqrt{y^2+4}-\frac{3x^2}{y}\right)dx+\left(\frac{xy}{\sqrt{y^2+4}}+\frac{x^3}{y^2}\right)dy=0$

Podemos ver que tienen el formato de una ED Exacta, lo verificamos y resolvemos.

METODOLOGÍA DE RESOLUCIÓN 1:

PASO 1:

$$\left(\sqrt{y^2+4}-\frac{3x^2}{y}\right)dx+\left(\frac{xy}{\sqrt{y^2+4}}+\frac{x^3}{y^2}\right)dy=0$$

PASO 2:

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{y^2+4}}+\frac{3x^2}{y^2} \quad y \quad \frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y}{\sqrt{y^2+4}}+\frac{3x^2}{y^2}$$

PASO 3:

$$\int\left(\frac{xy}{\sqrt{y^2+4}}+\frac{x^3}{y^2}\right)dy+\int\left[\sqrt{y^2+4}-\frac{3x^2}{y}-\frac{\partial\left(\int\left(\frac{xy}{\sqrt{y^2+4}}+\frac{x^3}{y^2}\right)dy\right)}{\partial x}\right]dx=C$$

$$x\sqrt{y^2+4}-\frac{x^3}{y}\int\left[\sqrt{y^2+4}-\frac{3x^2}{y}-\frac{\partial\left(x\sqrt{y^2+4}-\frac{x^3}{y}\right)}{\partial x}\right]dx=C$$

$$x\sqrt{y^2+4}-\frac{x^3}{y}+\int\left[\sqrt{y^2+4}-\frac{3x^2}{y}-\sqrt{y^2+4}+\frac{3x^2}{y^2}\right]dx=C$$

$$\boxed{x\sqrt{y^2+4}-\frac{x^3}{y}=C}$$

METODOLOGÍA DE RESOLUCIÓN 2:

PASO 1: Idem 1

PASO 2: Idem 1

PASO 3:

$$P = \frac{\partial u}{\partial x} = \sqrt{y^2+4} - \frac{3x^2}{y} \quad (\mathbf{A})$$

$$Q = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{xy}{\sqrt{y^2+4}} + \frac{x^3}{y^2} \quad (\mathbf{B})$$

PASO 4:

$$\int \partial u = \int \left(\sqrt{y^2+4} - \frac{3x^2}{y}\right) dx$$

$$u = -6x + \varphi(y) \quad (\mathbf{C})$$

PASO 5:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \varphi'(y)$$

PASO 6:

$$\frac{xy}{\sqrt{y^2+4}} + \frac{x^3}{y^2} = \varphi'(y)$$

PASO 7:

$$\int \varphi'(y)\, dy = \int \left(\frac{xy}{\sqrt{y^2+4}} + \frac{x^3}{y^2}\right) dy$$

$$\varphi(y) = x\sqrt{y^2+4} - \frac{x^3}{y} + C_1 \quad (\mathbf{D})$$

PASO 8:

$$u = x\sqrt{y^2+4} - \frac{x^3}{y} + C_1 \Rightarrow \boxed{C = x\sqrt{y^2+4} - \frac{x^3}{y}}$$

Ejercicio 13: $x^2y' = xy + \frac{1}{xy}$. ED Bernoulli

PASO 1:

$$y' = \frac{y}{x} + \frac{1}{x^3y}$$

$$y' - \frac{1}{x}y = \frac{1}{x^3}y^{-1}$$

PASO 2: Si n=-1

$$(1-n)y^{-n} = 2y$$

$$2y\frac{dy}{dx} - \frac{2}{x}y^2 = \frac{2}{x^3} \quad (\boldsymbol{A})$$

PASO 3:

$$Si\ z = y^{1-n} = y^2 \ \ (\boldsymbol{B})$$

$$\frac{dz}{dx} = 2y\frac{dy}{dx} \ \ (\boldsymbol{C})$$

PASO 4:

$$\frac{dz}{dx} - \frac{2}{x}z = \frac{2}{x^3}$$

PASO 5:

$$z = e^{\int \frac{2}{x}dx}\left[\int \frac{2}{x^3}e^{\int -\frac{2}{x}dx}dx + C\right] = e^{2lnx}\left[\int \frac{2}{x^3}e^{-2lnx}dx + C\right] = x^2\left[\int \frac{2}{x^3}\frac{1}{x^2}dx + C\right]$$

$$z = x^2\left[-\frac{1}{2x^4} + C\right]$$

PASO 6:

$$y^2 = x^2\left[-\frac{1}{2x^4} + C\right]$$

$$y = x\sqrt{C - \frac{1}{2x^4}}$$