Universidad Tecnológica Nacional
Facultad Regional Córdoba

GEOMETRÍA EN EL PLANO Y EN LA SUPERFICIE

-REPASO-

ING. ROCHA, VICTORIA.-

OBJETIVO:

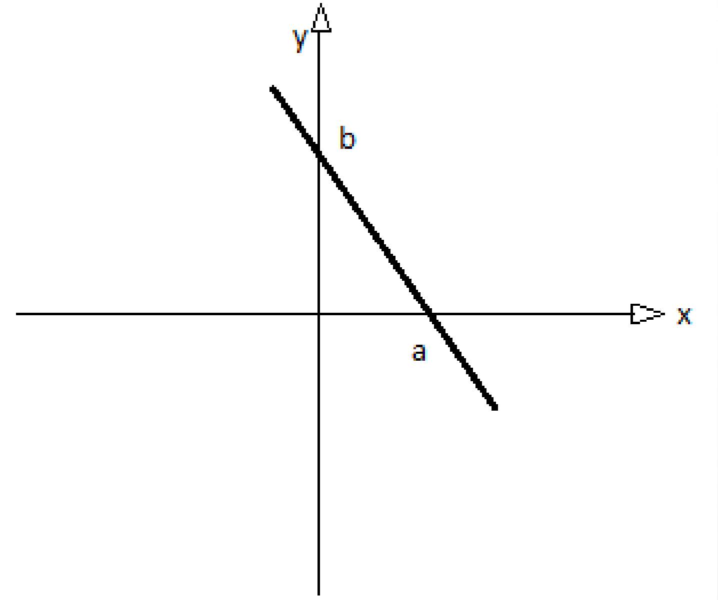
- *Repasar fórmulas y gráficas correspondientes a geometría en el plano y en la superficie, temas ya abordados por otras cátedras, para la resolución de ejercicios en temas posteriores que desarrollaremos en análisis matemático II.*

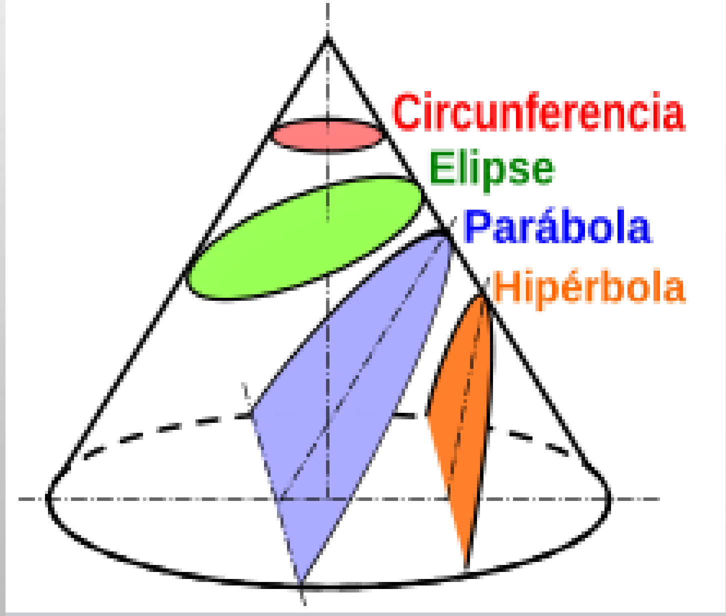
- *Para realizar las gráficas se utilizaron los siguientes programas: Calculadora gráfica y Geogebra 3D, disponibles online.*

- *Avanzamos…*

ECUACIÓN LINEAL EN EL PLANO : **RECTA**

- Ec. General de la Recta: $Ax + By + C = 0 \rightarrow y = f(x)$
- Ec. Segmentada de la Recta : $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$





ECUACIONES CUADRÁTICAS : **CÓNICAS**

- Ec. General de Cónicas:

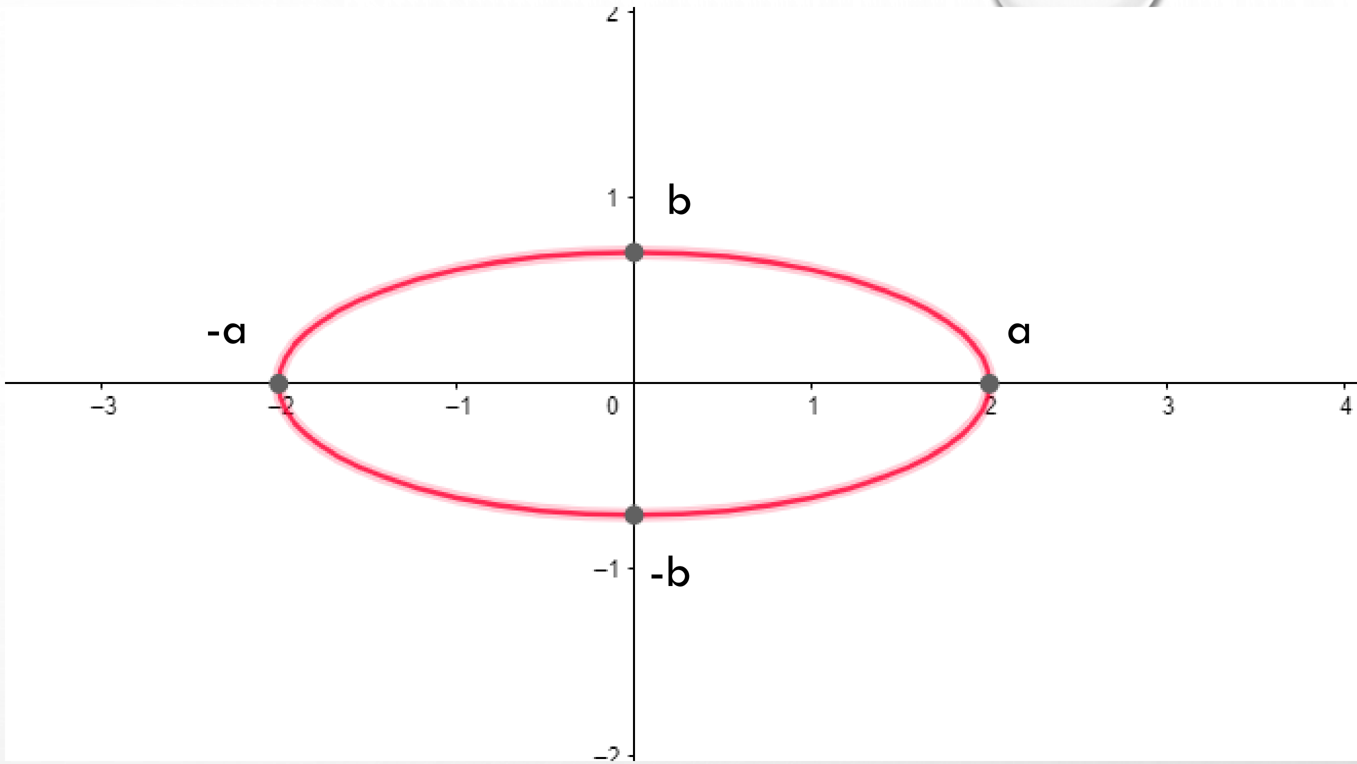
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

- Ec. Segmentada de Cónicas:

$$\pm\frac{(x-h)^2}{a^2} \pm \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

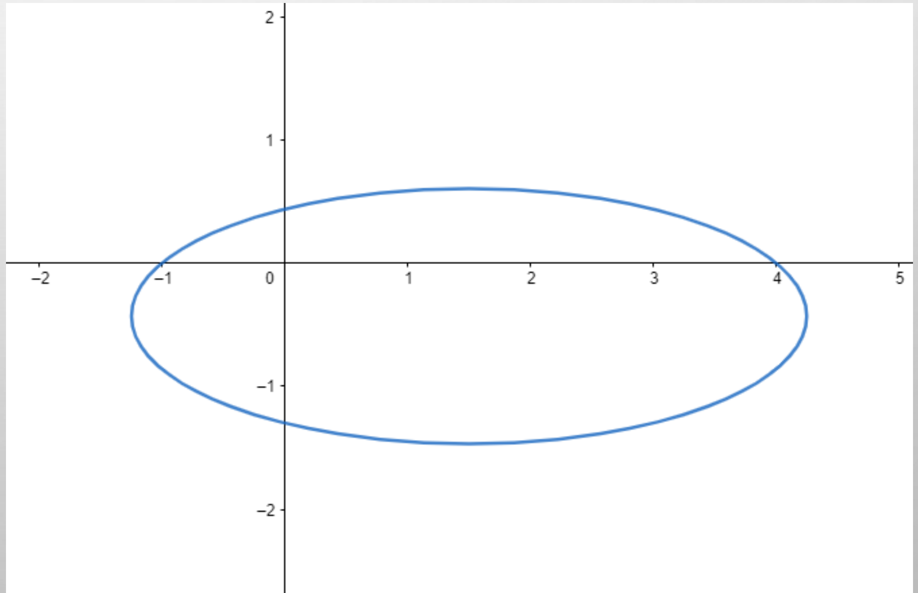
ELIPSE → $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

- Los puntos correspondientes (a,0) y (-a,0) se llaman **vértices** de la elipse y el segmento de recta que une los vértices se llama **eje mayor.** la distancia $\overline{0a}$ es el **semieje mayor.** El eje mayor, es la mayor distancia entre dos puntos opuestos de la elipse, es el eje focal de la elipse.
- El segmento de recta que une (0,b) y (0,-b) es el **eje menor.**



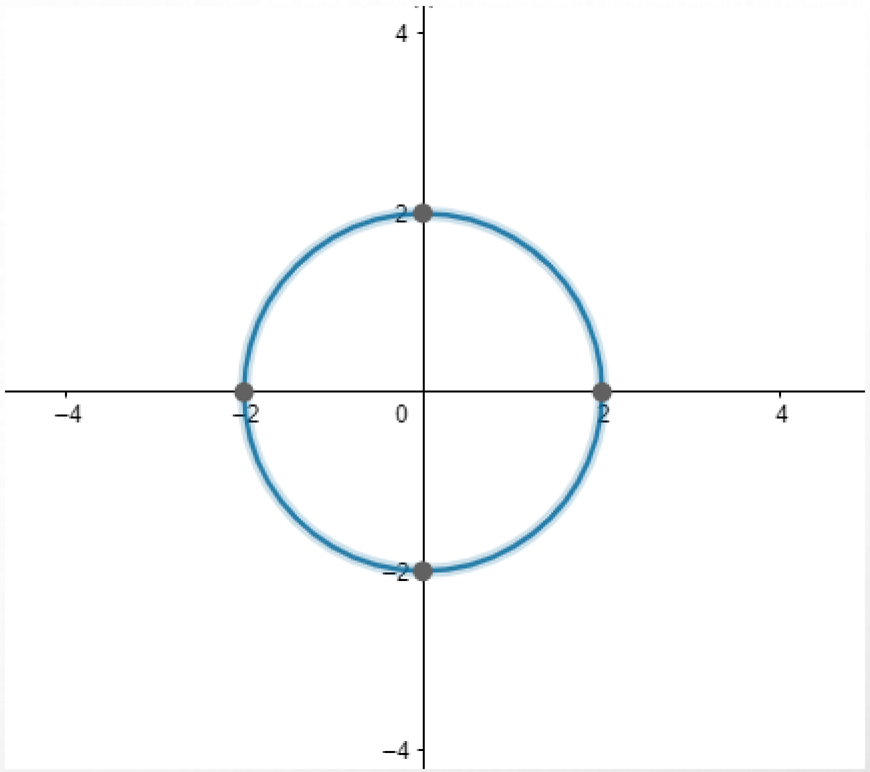
Desplazamiento de la grafica

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$



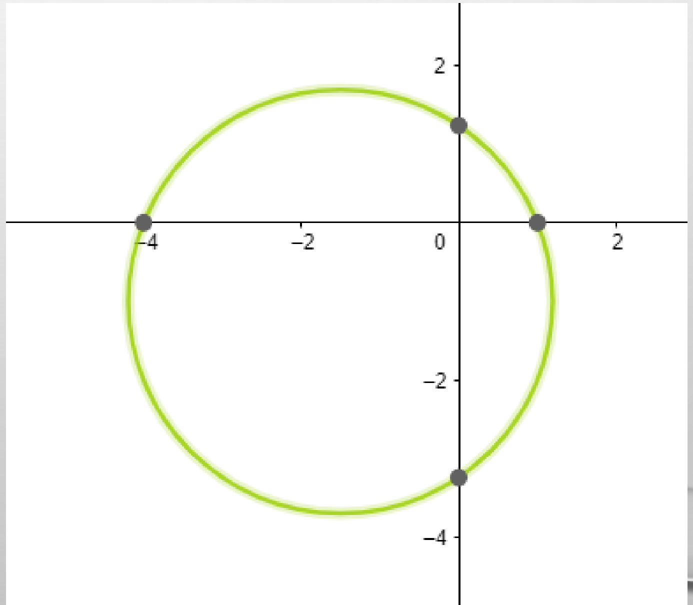
CIRCUNFERENCIA ➔ $x^2 + y^2 = r^2$

Donde a=b



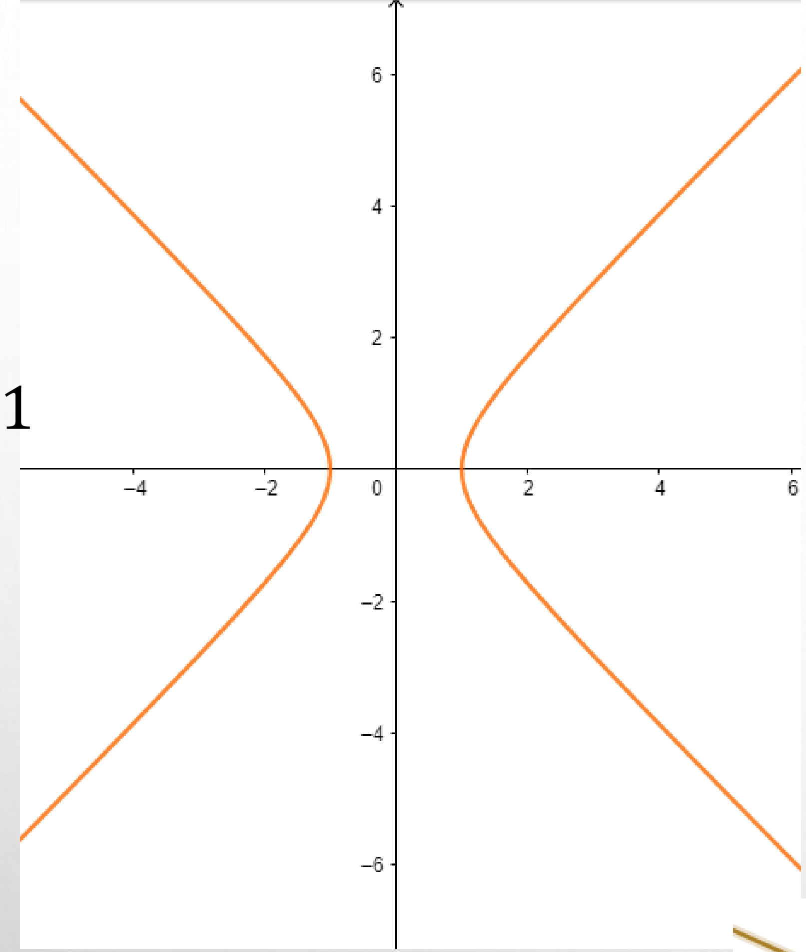
Desplazamiento de la grafica

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$$

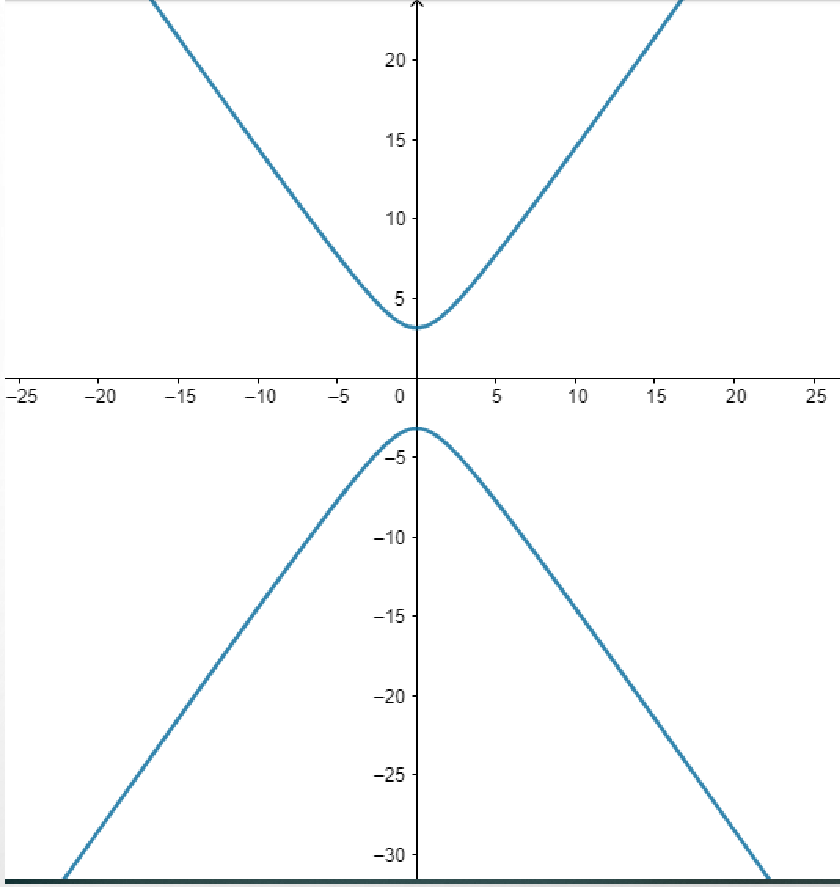


HIPÉRBOLA

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



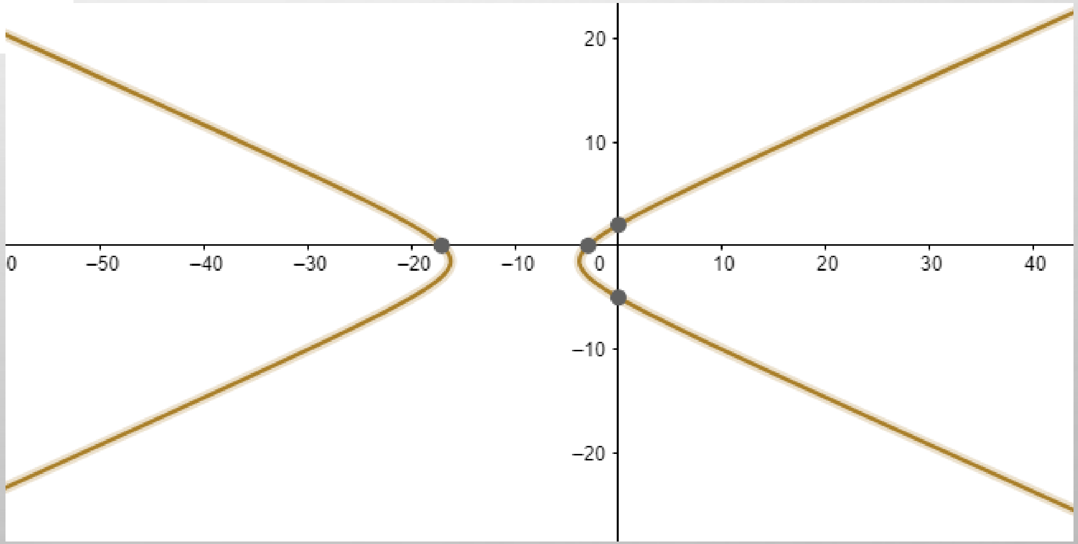
$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Asíntotas ➔ $y = \frac{\mathrm{b}}{a}x$ $\quad y = -\frac{\mathrm{b}}{a}x$

Desplazamiento de la grafica

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$



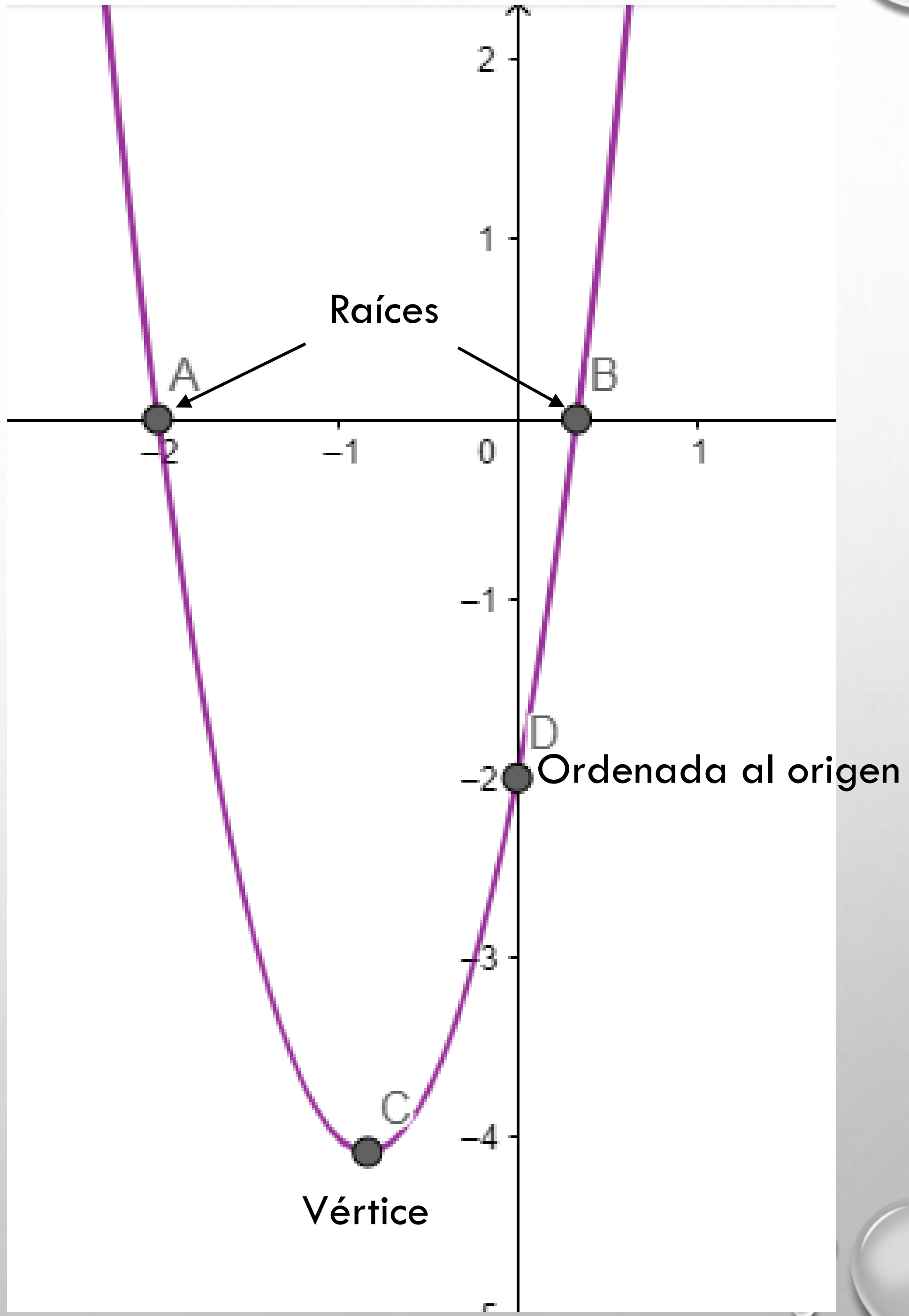
PARÁBOLA ➔ $y = ax^2 + bx + c$

Las raíces de la parábola se encuentran utilizando la ecuación de Bhaskara

Vértice de la parábola:

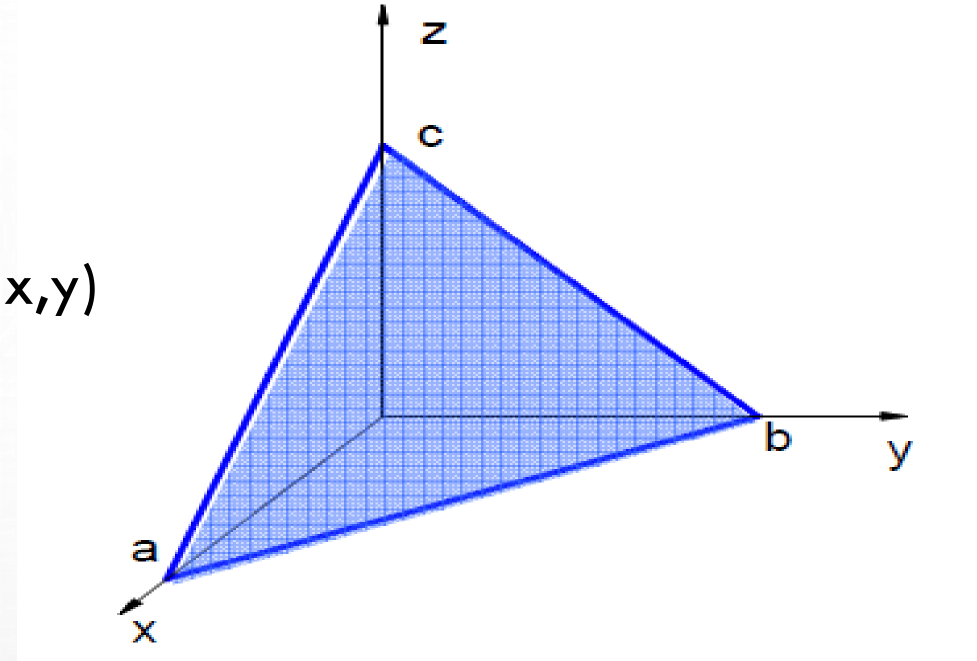
$$x_v = -\frac{\mathrm{b}}{2\mathrm{a}}$$

$$y_v = a(x_v)^2 + bx_v + c$$



Ecuación lineal: **Plano**

- Ec. General: Ax + By + Cz+D = 0 ➔ z = f(x,y)
- Ec. Segmentada: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$



Ecuaciones cuadráticas: **Cónicas**

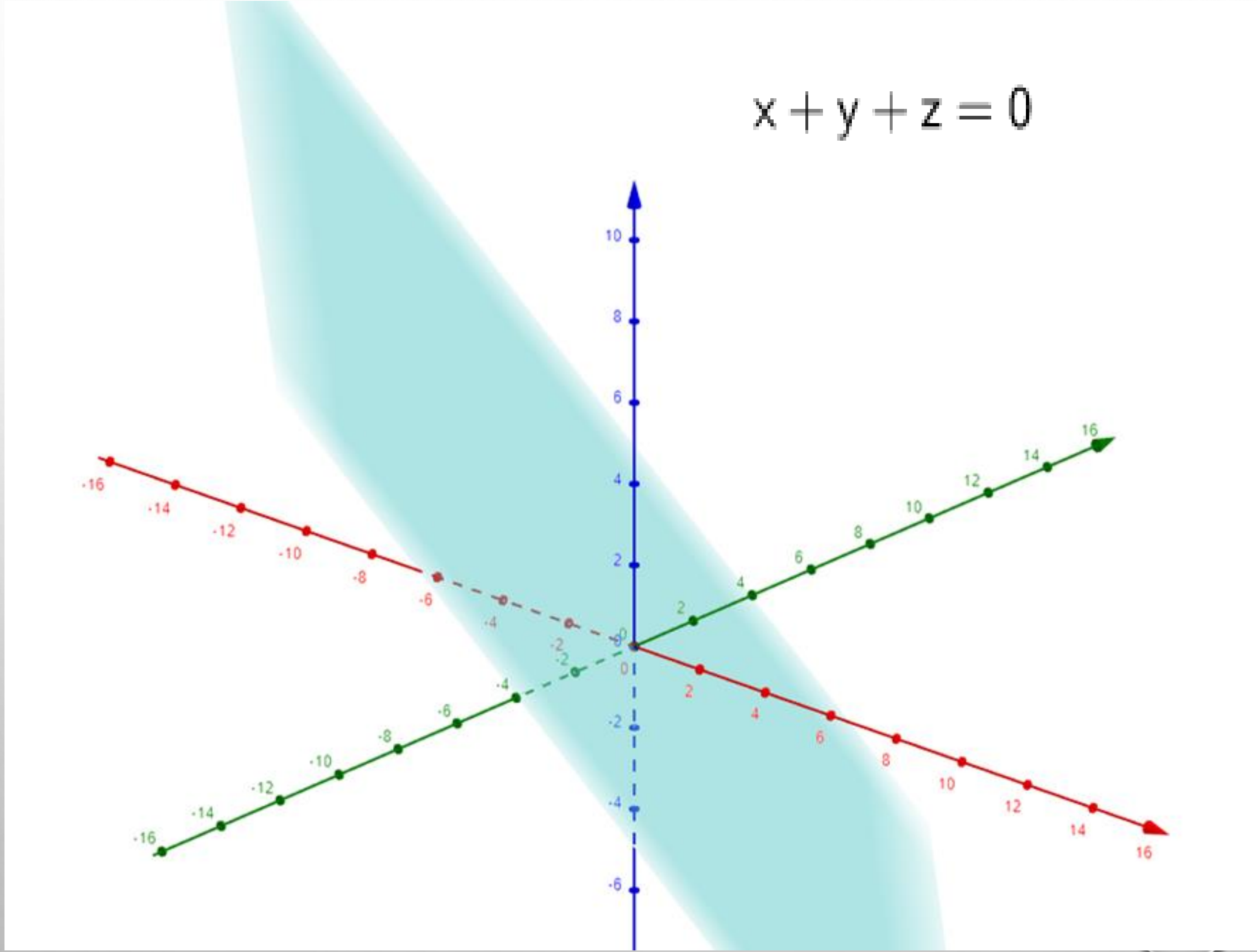
- Ec. General de Cónicas:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0$$

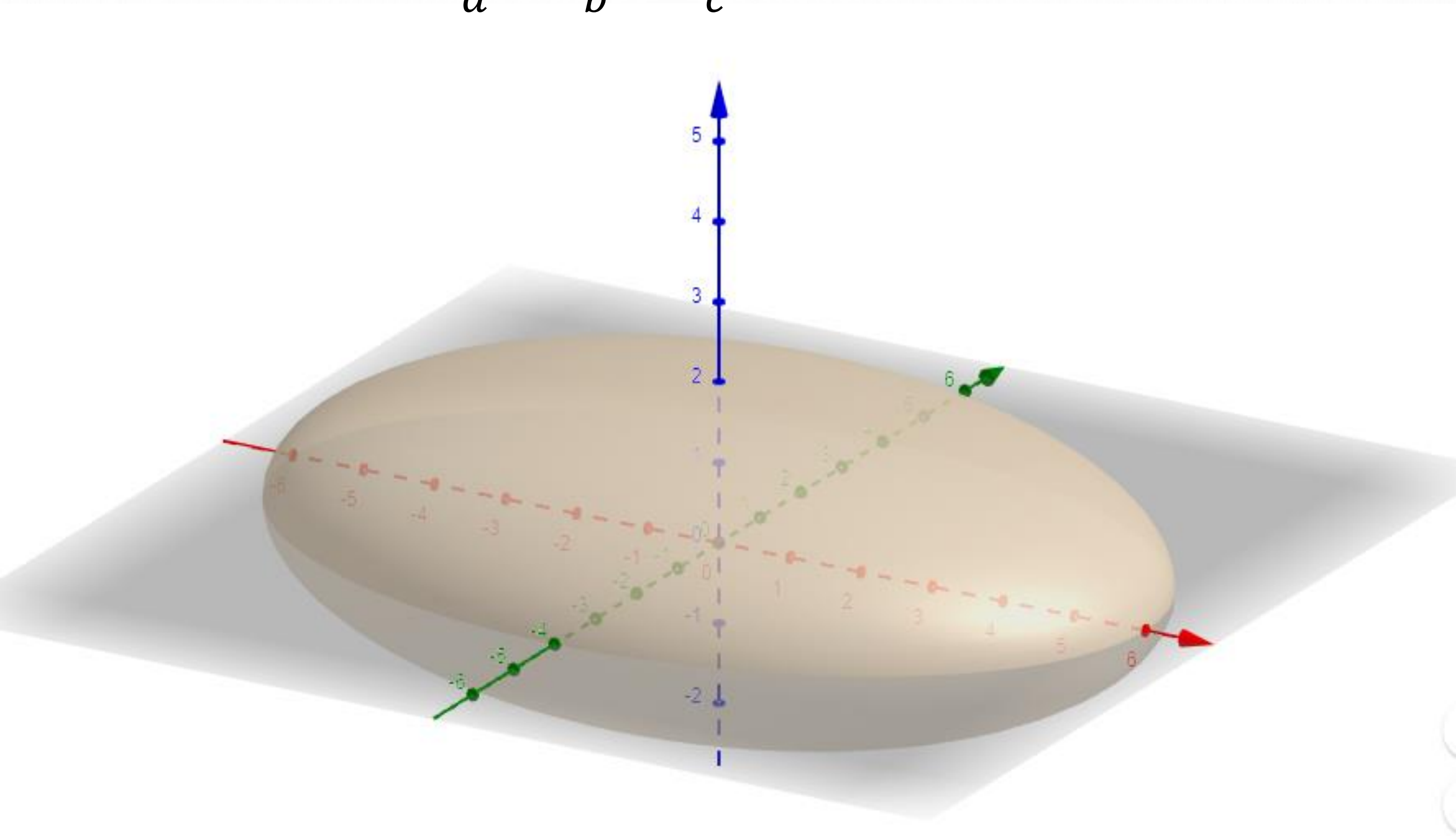
- Ec. Segmentada de Cónicas:

$$\pm\frac{(x-x_0)^2}{a^2}\pm\frac{(y-y_0)^2}{b^2}\pm\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$

PLANOS ➔ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$



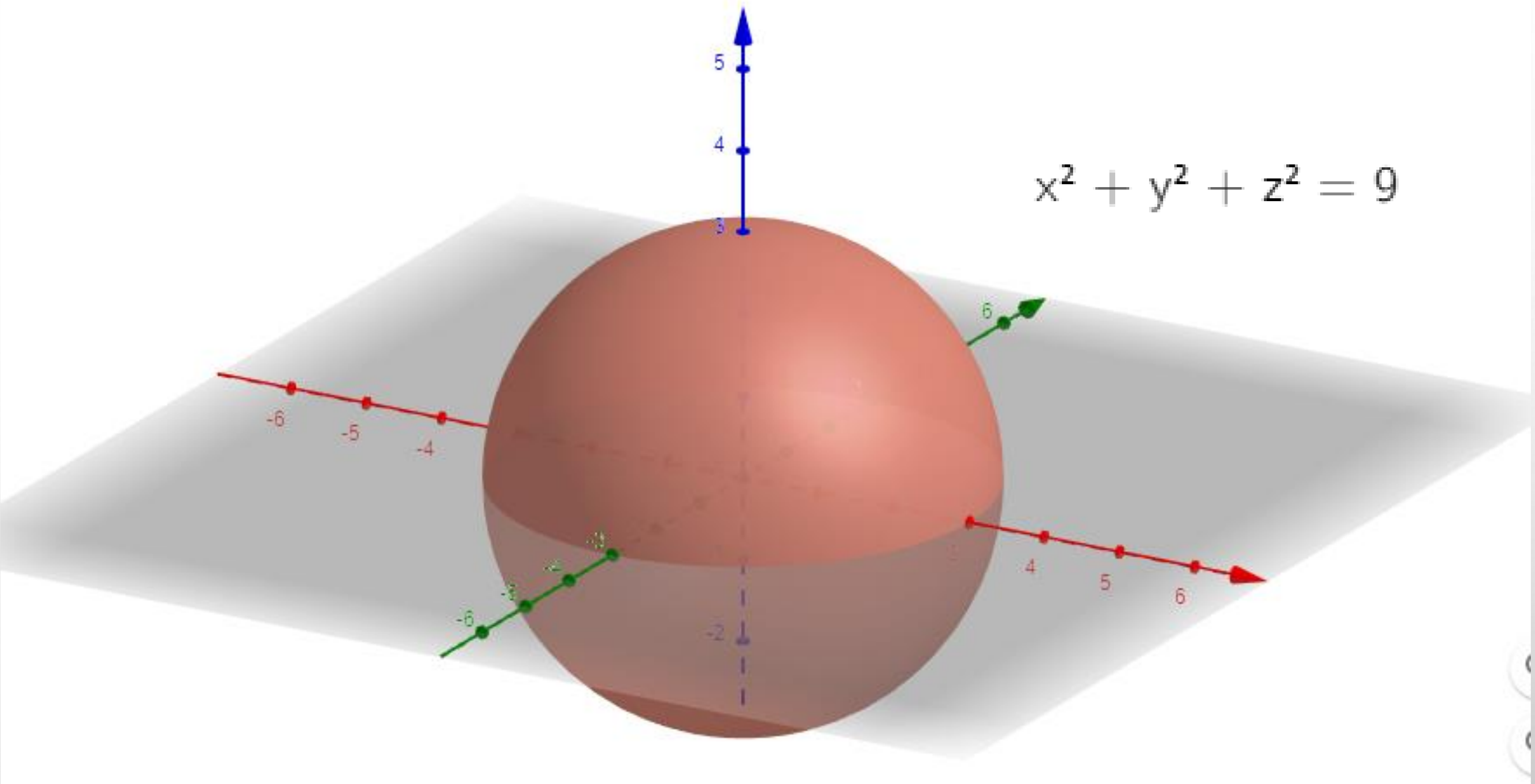
ELIPSOIDE → $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$



Desplazamiento de la grafica

$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}+\frac{(z-z_0)^2}{c^2}=1$$

ESFERA → $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ donde a=b=c

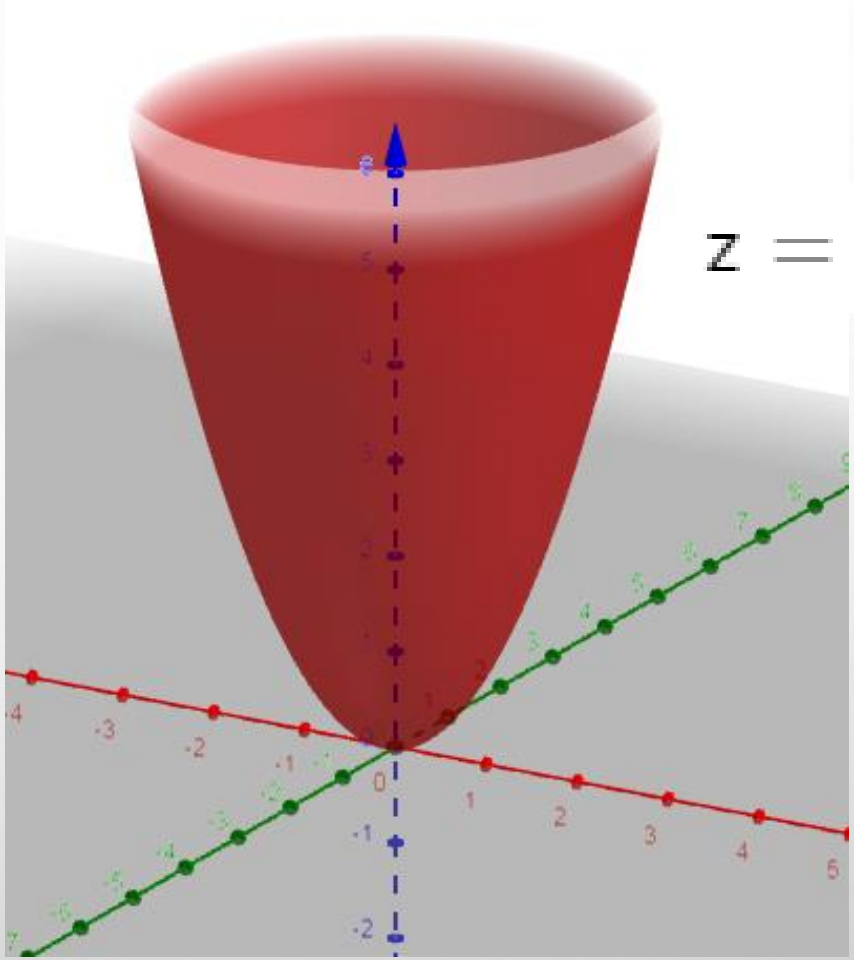


Desplazamiento de la grafica

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

PARABOLOIDE ELÍPTICO ➔ $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

El eje del paraboloide corresponde a la variable elevada a la primera potencia.



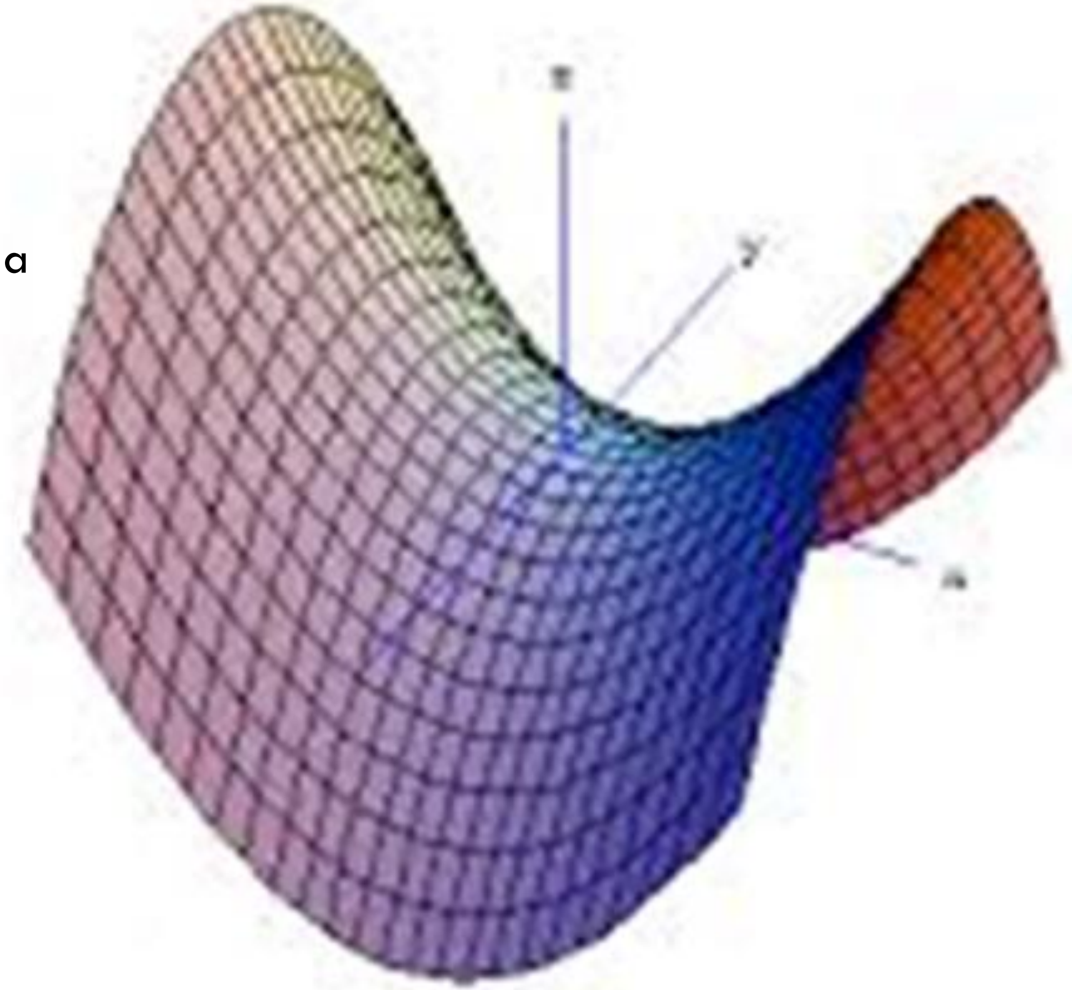
$$z = x^2 + y^2$$

Análogamente, se tendrán los paraboloides:

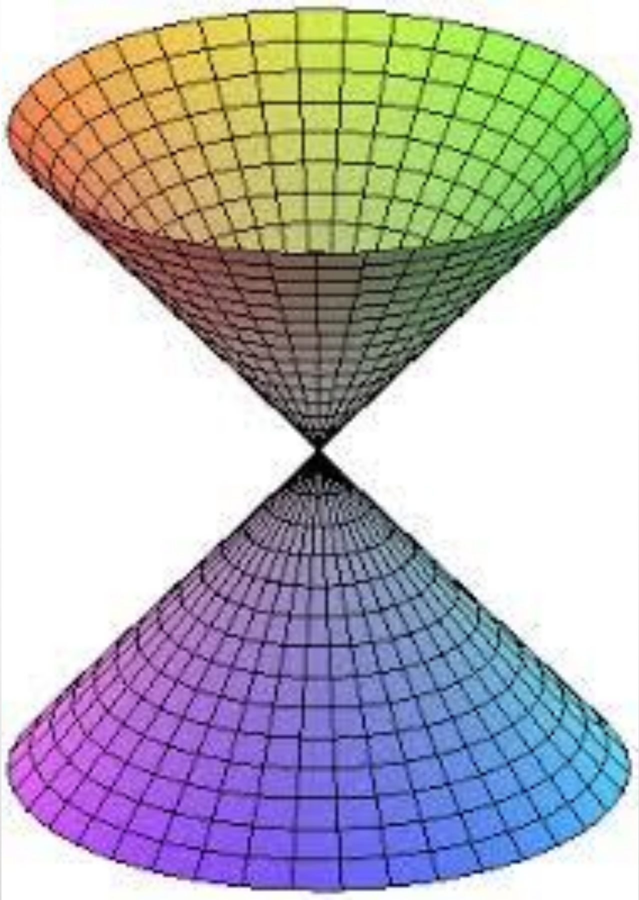
$$\frac{x}{a} = \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \qquad \frac{y}{b} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2}$$

PARABOLOIDE HIPERBÓLICO $\rightarrow \frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ ó $\frac{z}{c} = -\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$

El eje del paraboloide corresponde a la variable elevada a la primer potencia



CONO DE REVOLUCIÓN ➔ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}$

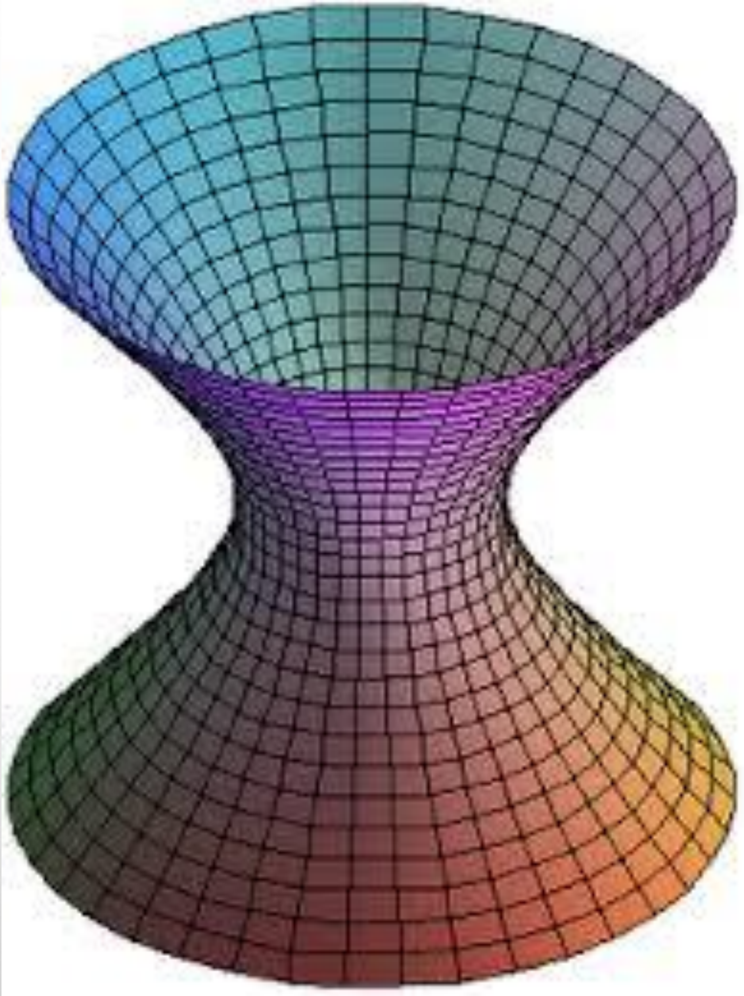


El eje del cono corresponde a la variable cuyo coeficiente es negativo. Las trazas en los planos coordenados paralelos a este eje son rectas que se cortan

Análogamente, se tendrán:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{y^2}{b^2} \qquad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=\frac{x^2}{a^2}$$

HIPERBOLOIDE DE UNA HOJA $\rightarrow \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

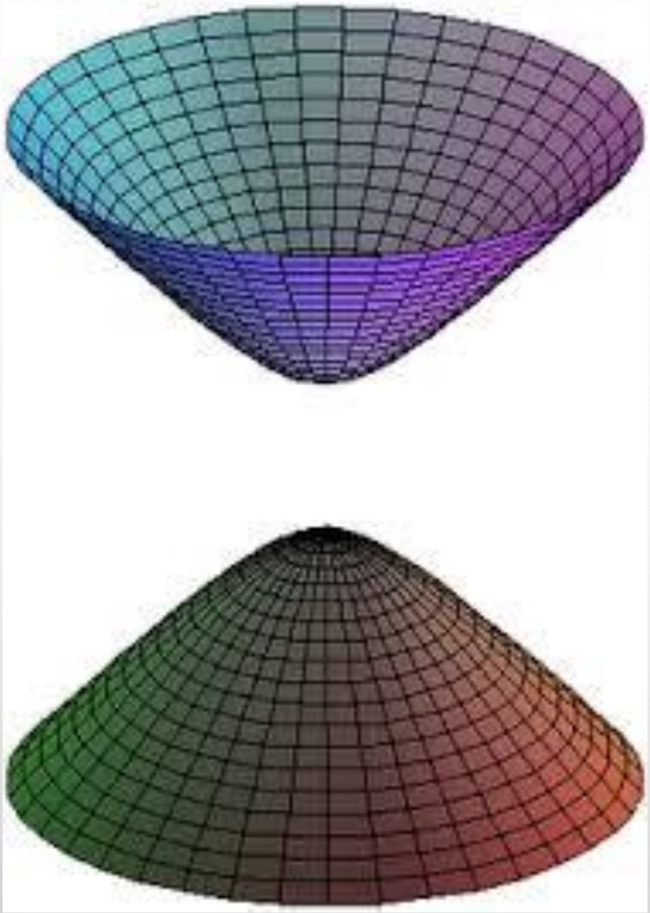


El hiperboloide NO corta al eje de la variable que está en el término negativo, es su eje.

Análogamente, se tendrán:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

HIPERBOLOIDE DE DOS HOJA ➔ $-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$



El hiperboloide NO corta al plano formado por los ejes de las variables que están en los términos negativos

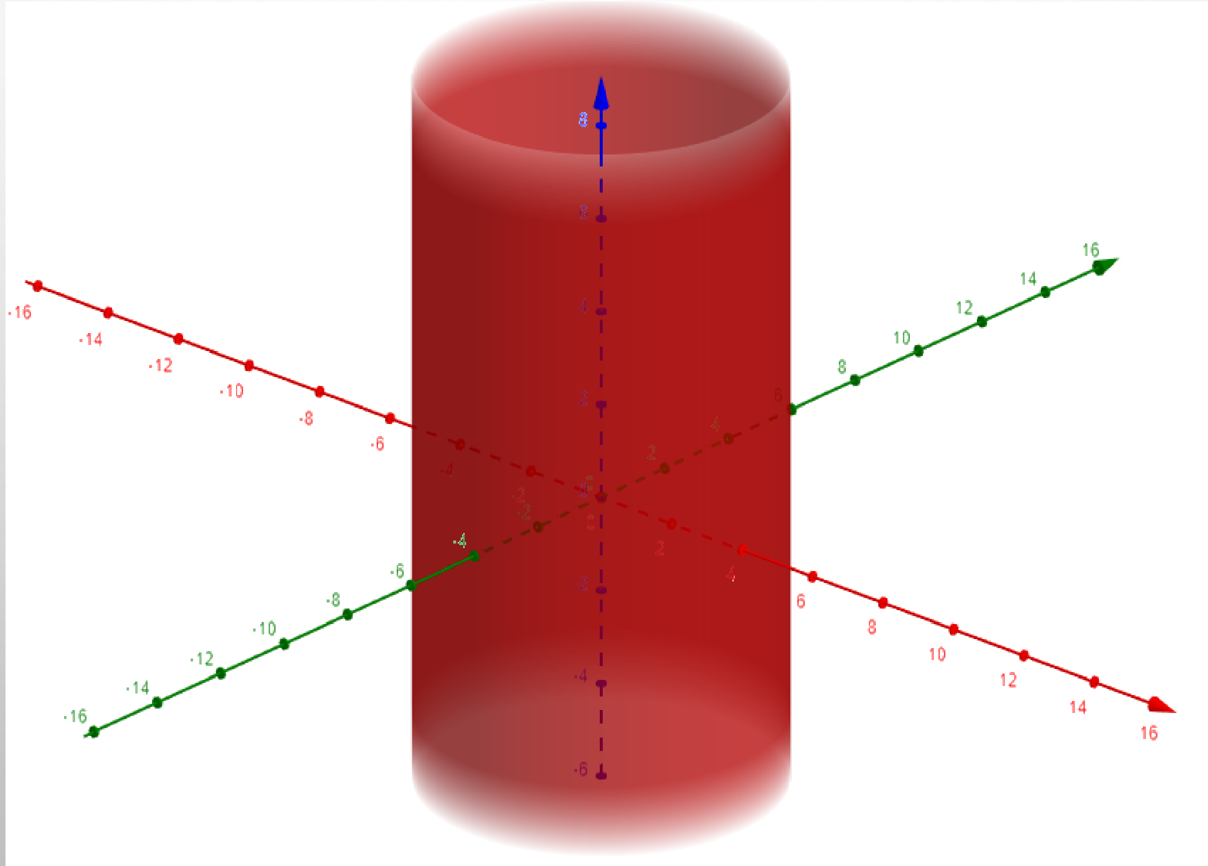
Análogamente, se tendrán:

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

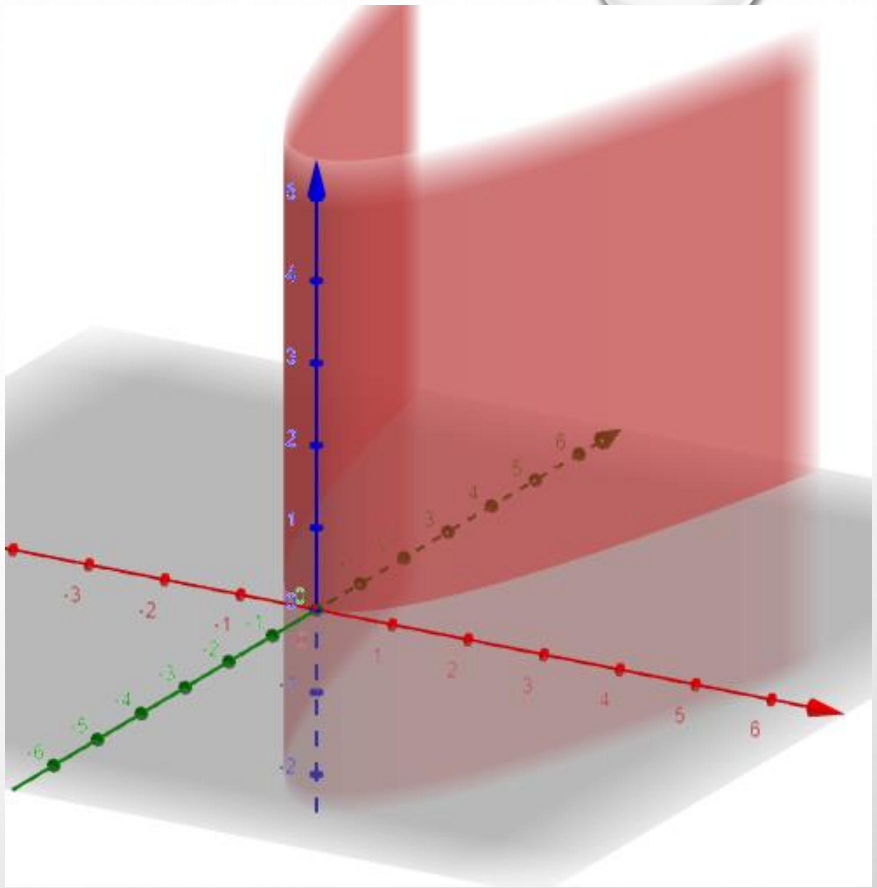
Ecuaciones cuadráticas: **Superficies Cilíndricas**

Son cuádricas formadas por el desplazamiento paralelo de una recta llamada generatriz a lo largo de una curva plana, que puede ser cerrada o abierta, denominada directriz del cilindro.

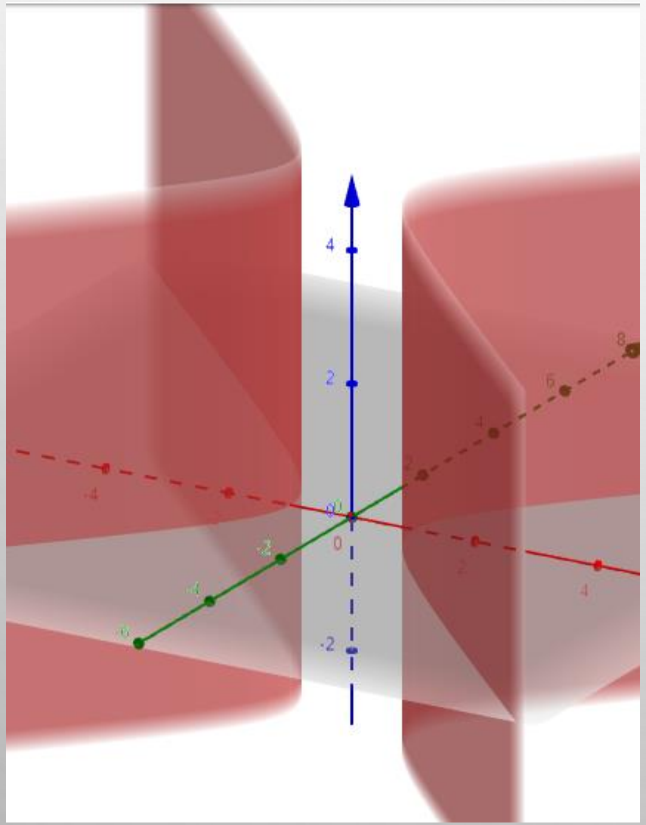
CILINDRO ELÍPTICO ➔ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ si a=b es un cilindro circular



CILINDRO PARABOLOICO ➔ $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y}{b}$



CILINDRO HIPERBOLICO ➔ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$



Ing. Qca. Rocha, Victoria

EJERCICIOS

1. Graficar la siguiente función: $x^2 + 4x + y^2 = 5$

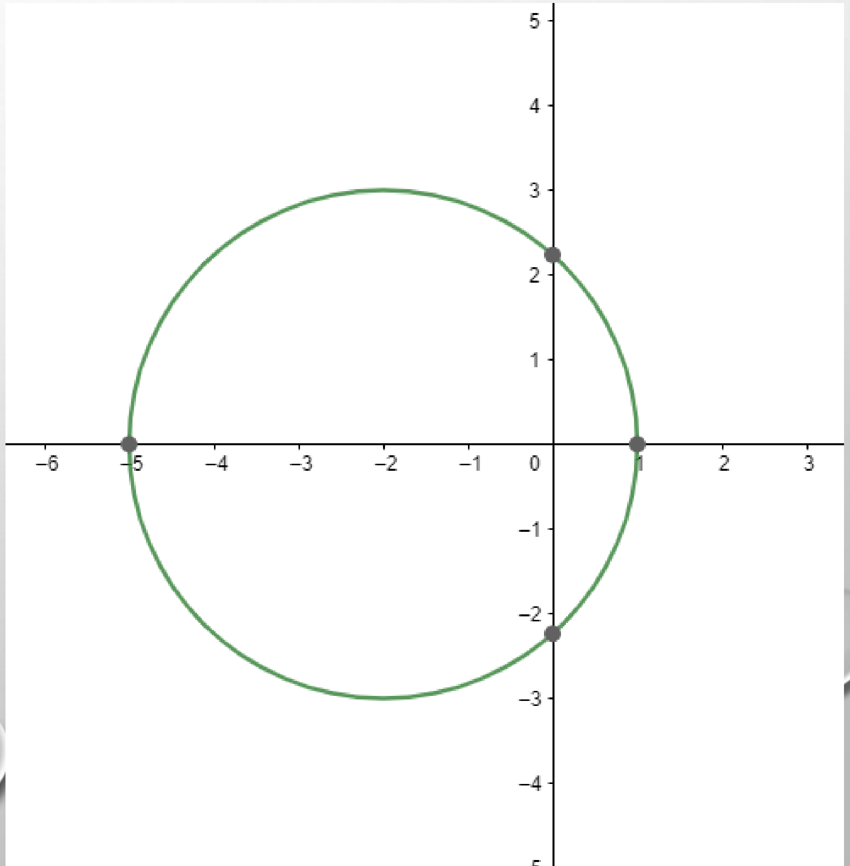
Observamos que corresponde a una circunferencia desplazada sobre el eje "x". Para graficar debemos encontrar centro y radio, por lo que procedemos a completar cuadrado.

$$(x^2+4x + 2^2) - 2^2 + y^2 = 5$$

$$(x + 2)^2+y^2 = 5 + 2^2$$

$$(x + 2)^2+y^2 = 9$$

Centro (-2;0) y radio: 3



$x^2 + 2y^2 - 2x + 8y + 5 = 0$

EJERCICIOS

2. Graficar la siguiente función: $\boldsymbol{x^2 + 2y^2 - 2x + 8y + 5 = 0}$

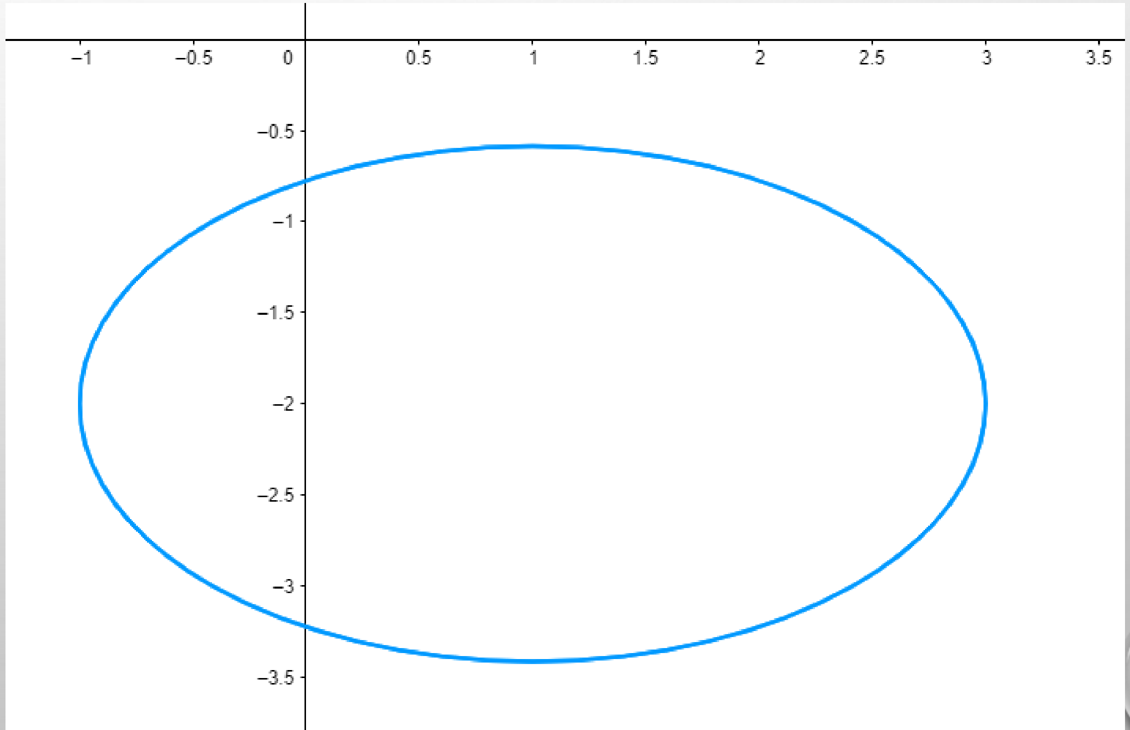
Observamos que corresponde a una elipse que se encuentra desplazada. Para graficar debemos completar cuadrado para dejar expresada la ecuación canónica correspondiente que nos indica los puntos críticos de la función.

$$(x^2 - 2x + 1^2) - 1^2 + 2(y^2 + 4y + 2^2) - 8 + 5 = 0$$

$$(x-1)^2 + 2(y+2)^2 = 4$$

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{(y+2)^2}{2} = 1$$

Centro (1;-2), eje mayor a=2, eje menor b=$\sqrt{2}$



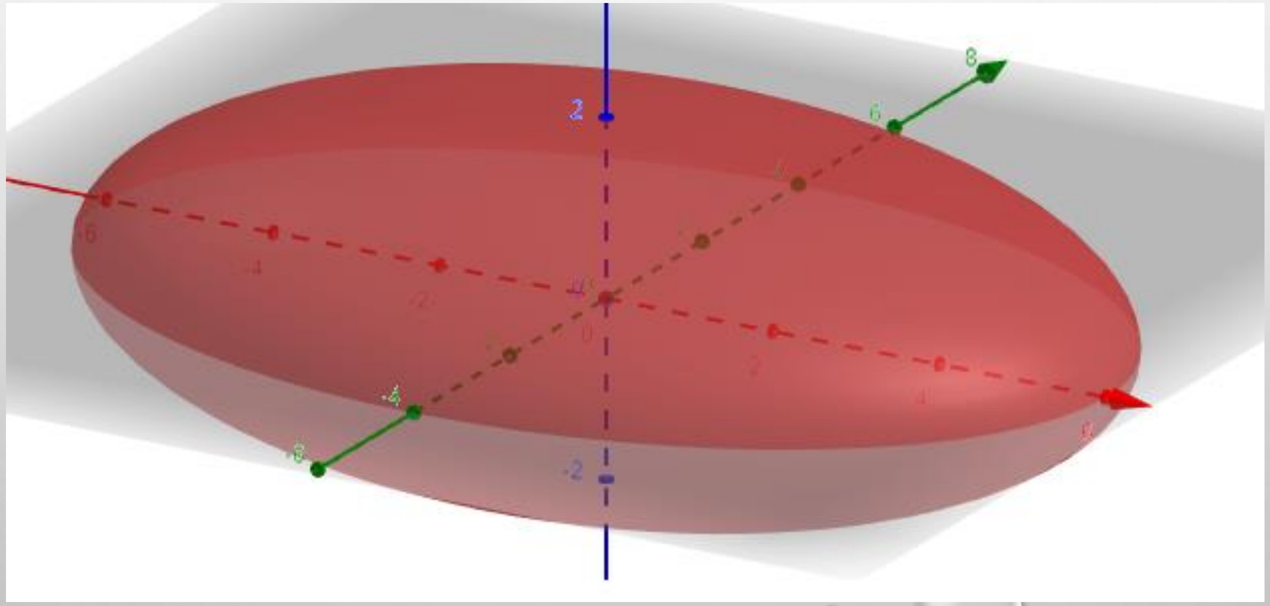
EJERCICIOS

3. Graficar la siguiente función: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}+z^2=4$

Observamos que corresponde a un elipsoide, cuyo eje mayor es el eje “x”. Para graficar dejar expresada la ecuación canónica correspondiente.

$$\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{16}+\frac{y^2}{4}=1$$

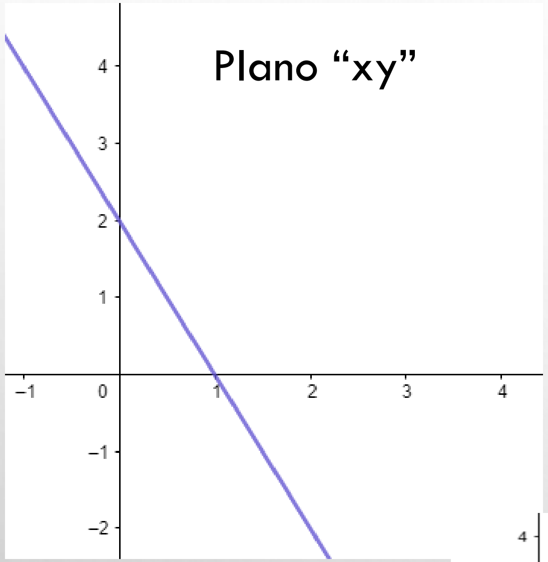
Centro (0;0), Eje a=6, b=4, c=2

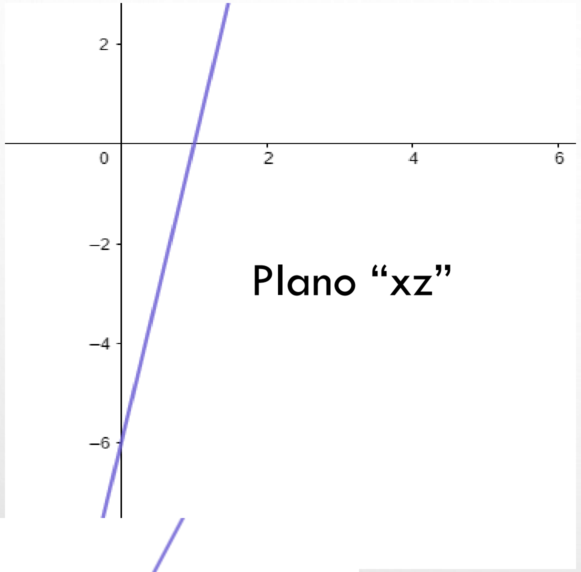


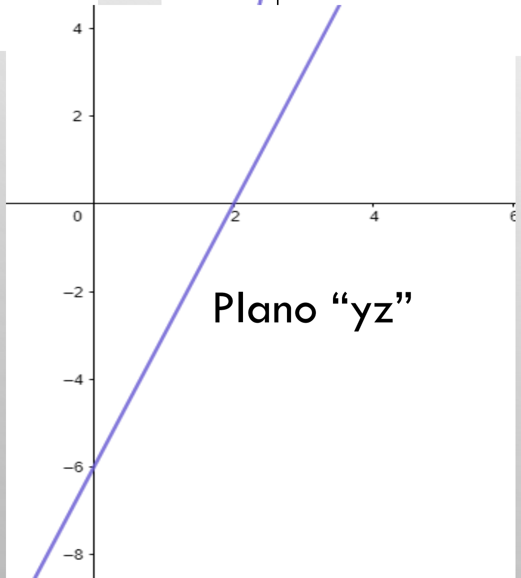
EJERCICIOS

4. Graficar la siguiente función: $z = 6x + 3y - 6$

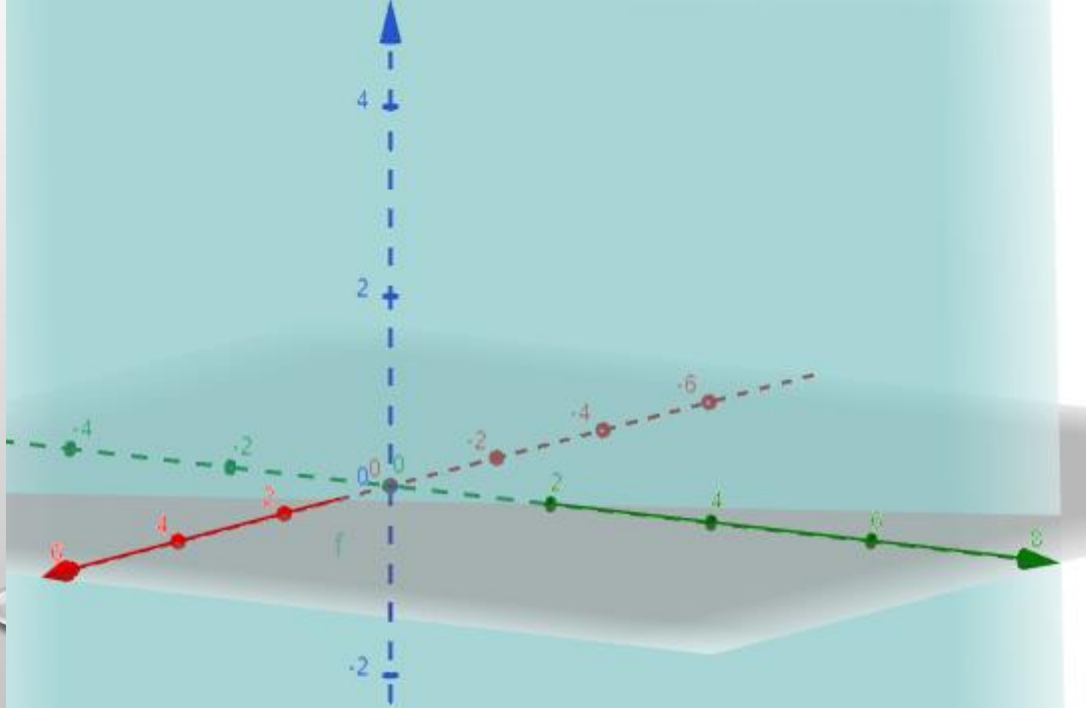
Observamos que corresponde a un plano. Para graficar podemos utilizar los planos “xy”, “xz” y “zy”, para luegograficarlos en r ^{3}.







Trasladando los planos a r ^{3}.



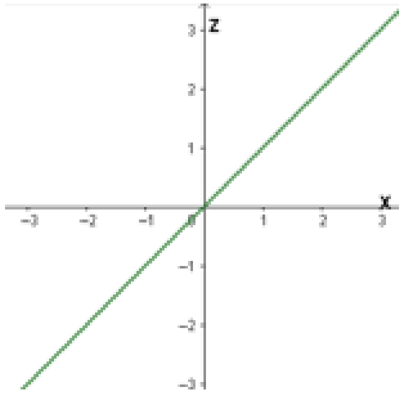
Ing. Qca. Rocha, Victoria

EJERCICIOS

5. Graficar la siguiente función: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

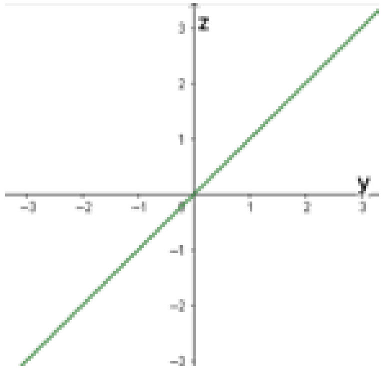
Intersección con el plano zx (y=0)

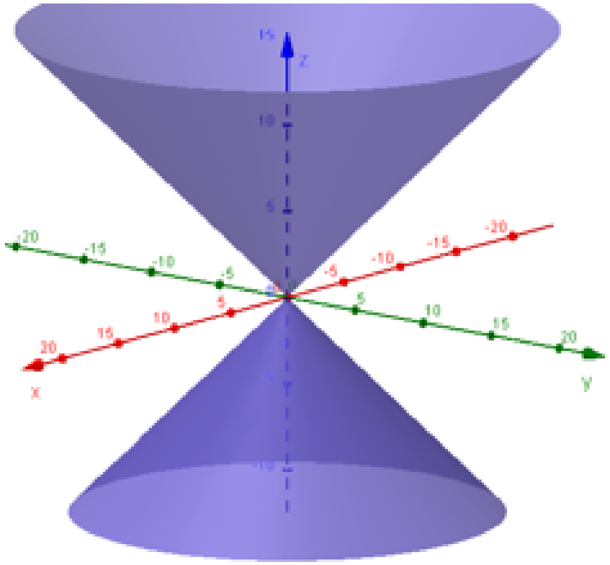
z(x) = x



Intersección con el plano zy (x=0)

z(y) = y





Cono circular

$z^2 = x^2 + y^2$

Intersección con el plano xy (z=0)

$0 = \sqrt{x^2 + y^2}$

$x^2 + y^2 = 0$

Intersección con los ejes

Si x = 0 → y = 0

Si y = 0 → x = 0

(0;0)

EJERCICIOS

Graficar la siguiente función:

a) $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$

b) $2x^2 + 4y^2 - 2x - 2y - 1/2 = 0$

c) $9y^2 - 9x^2 - 12x - 12y - 4 = 0$

d) $2x^2 + 2y^2 + 4x - 6 = 0$

e) $3x^2 - y^2 + 6x = 0$

f) $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 4 = 0$

g) $3x^2 + 2y^2 - 12x - 2y + 12 = 0$

h) $x^2 - 5y^2 + 2x - 24 = 0$

i) $2y^2 - 8x^2 + 4y - 6 = 0$

1. $x^2 + y^2 + z^2 = 16$
2. $2x + y = 4$
3. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1$
4. $z = 100 - x^2 - y^2$
5. $x^2 + y^2 = 4$
6. $2x^2 + 4z^2 - y = 0$
7. $2x^2 + 4z^2 - 6y^2 - 12 = 0$