

ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

CONJUNTOS NUMÉRICOS

El espacio unidimensional: la recta numérica Breve repaso sobre los distintos conjuntos numéricos: del número natural al número real.

El espacio bidimensional. Sistema de representación Cartesiano. Par ordenado. Producto Cartesiano. Distancia entre dos puntos. Punto que divide un segmento en una razón dada. Sistema de coordenadas polares. Equivalencia entre los sistemas cartesiano y polar.

El número complejo. La unidad imaginaria: sus potencias. Forma binómica de un complejo. Operaciones. Complejo conjugado. Forma polar o trigonométrica de los complejos: producto, potencia (Fórmula de De Moivre) y cociente. Raíz n -ésima de un complejo. Forma exponencial de los complejos. Logaritmos en complejos.

año 2006

Carlos Alfredo López

CONJUNTOS NUMÉRICOS (del número Natural al Número Complejo)

carlos alfredo lópez

El espacio unidimensional: la recta numérica Breve repaso sobre los distintos conjuntos numéricos: del número natural al número real.

EL NÚMERO NATURAL:

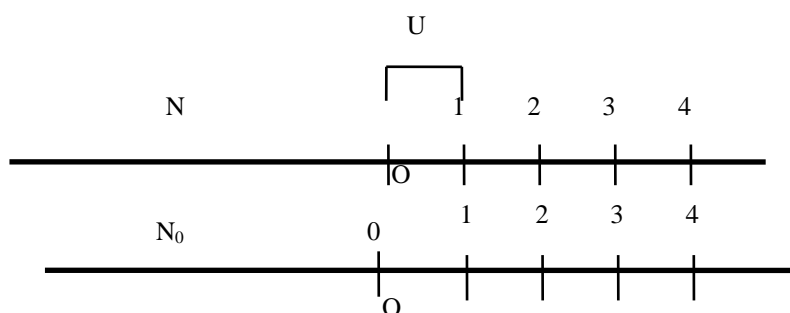
Un conjunto de elementos que comenzamos a utilizar desde la infancia es el de los Números Naturales (1,2,3, etc...), que se simboliza con la letra **N**, y el conjunto de los Números Naturales ampliado, que incluye al cero y que simbolizamos con **N₀ = N U {0}**

Ambos conjuntos cuentan con infinitos elementos, por lo cual no resulta posible expresarlos por extensión; sin embargo, haciendo abuso de notación, podemos escribir:

$$N = \{1,2,3,\dots\}$$

$$N_0 = \{0,1,2,3,\dots\}$$

Estos conjuntos pueden representarse utilizando una recta que denominamos recta numérica, sobre la cual se fija un origen O, un sentido positivo (*hacia la derecha*), y una unidad de medida U.



En el caso del conjunto de los números naturales ampliado, al efectuar la representación gráfica hacemos coincidir el cero con el origen del sistema de referencia. El número que corresponde a cada punto (*marcado sobre la recta a intervalos de longitud U*) se denomina abscisa del mismo

En el conjunto de los números naturales pueden definirse para todo par de elementos cualesquiera que pertenezcan al mismo las operaciones de suma y producto; ambas dan como resultado elementos del mismo conjunto en que se opera, razón por la cual se dice que dichas operaciones son cerradas en el conjunto que tratamos, o bien que son operaciones internas o que se trata de una ley interna de dicho conjunto.

CONJUNTOS NUMÉRICOS

(del número Natural al Número Complejo)

carlos alfredo lópez

Axiomas de Peano (1858-1932).

Toda la teoría del número natural se fundamenta en tres conceptos primitivos

- a) El Conjunto **N** cuyos elementos se designan con el nombre de números naturales.
- b) Un objeto matemático llamado uno (**1**).
- c) Una relación denominada “**siguiente de:**” **sg x = x+1**

y cinco **AXIOMAS:**

- 1) "El uno es un número natural" (**1 ∈ N**).
- 2) "A todo número natural le sigue otro número natural."
(**Si x ∈ N → sg x ∈ N**)
- 3) "El uno no sigue a ningún número" (**Si x ∈ N → sg x ≠ 1**)
- 4) "Si los siguientes de dos números son iguales, dichos números son iguales" (**Si sg x = sg y → x = y**)
- 5) **PRINCIPIO DE INDUCCIÓN COMPLETA.**

Si queremos demostrar que una cierta propiedad es válida para todos los elementos de un conjunto finito, bastará con verificar la validez de la misma para cada uno ellos. La verificación de una determinada propiedad no resulta posible siguiendo esta metodología cuando el número de elementos del conjunto es infinito. Sin embargo, podemos aproximar una idea de solución al problema, pensando que en otras ciencias, la Física por ejemplo, se aceptan como verdaderas algunas observaciones que no han sido controvertidas por la experiencia.

Como ejemplo, la propiedad de los cuerpos de “**caer en el vacío**” bajo la acción de su propio peso, verificada para un número finito de objetos, permite inducir que todos los cuerpos, en ese medio caen.

Al pretender extrapolar este razonamiento para probar la propiedad descrita en un conjunto infinito, resultaría imprescindible realizar la comprobación en un gran número de elementos del conjunto y aún así, no podríamos asegurar la validez de la propiedad para la totalidad de los elementos del conjunto estudiado.

Pensemos, en este esquema de razonamiento, que si una persona realiza la misma jugada del “**LOOOOTO**” desde que este juego está en vigencia y aún no ha ganado el mismo, nada nos autoriza a afirmar que nunca

ganará, o bien lo contrario. Siguiendo este razonamiento, veamos un ejemplo sencillo de aplicación matemática:

CONJUNTOS NUMÉRICOS

(del número Natural al Número Complejo)

carlos alfredo lópez

Sea la expresión $P(n) = n^2 - n + 11$ y establezcamos la proposición: $P(n)$ es un número primo. Con el objeto de verificar si la proposición es verdadera, sustituimos n por la sucesión de los números naturales:

$$P_{(1)} = 1^2 - 1 + 11 = 11 \text{ que es un número primo.}$$

$$P_{(2)} = 2^2 - 2 + 11 = 13 \text{ que es un número primo.}$$

$$P_{(3)} = 3^2 - 3 + 11 = 17 \text{ que es un número primo.}$$

.....

.....

$$P_{(10)} = 10^2 - 10 + 11 = 101 \text{ que es un número primo.}$$

$$P_{(11)} = 11^2 - 11 + 11 = 121 \text{ que NO es un número primo.}$$

Vemos que nuestra proposición no resulta verdadera cuando calculamos $P_{(11)}$; en consecuencia, **INDUCIR** que una propiedad se verifica para todos los elementos de un conjunto infinito, considerando un número finito de observaciones, **puede conducirnos a una conclusión incorrecta.**

Enunciado del Principio de Inducción Completa.

El quinto Axioma de PEANO, llamado **PRINCIPIO DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA** o **PRINCIPIO DE INDUCCIÓN COMPLETA**, que permite demostrar la validez de una propiedad, bajo ciertas restricciones, para todos los elementos de un determinado conjunto; puede enunciarse, entre otras, de las siguientes maneras:

"Una propiedad es válida para todos los números naturales, si podemos demostrar que:

a) **1** posee esa propiedad.

b) Supuesto que un número natural k (cualquiera) tiene esa propiedad, entonces, **sg $k = (k+1)$** , también la tiene.

o bien:

"Una cierta propiedad vale para todos los números naturales, si son verdaderas las siguientes proposiciones:

a) **$P_{(1)}$ es verdadera.**

b) **Si $\forall k \in \mathbb{N}$, $P_{(k)}$ es V $\rightarrow P_{(k+1)}$ es V.**

Las dos etapas de este razonamiento nos permiten afirmar que si $P_{(1)}$ es verdadera, también lo será $P_{(2)}$; que si $P_{(2)}$ es verdadera, lo será $P_{(3)}$ y así sucesivamente.

Ambas definiciones, equivalen a la siguiente:

"Si una propiedad de los números naturales se verifica para el número 1 y sí, supuesta válida para un número k cualquiera ($P_{(k)}$ se supone verdadera) se verifica para el siguiente, es decir para $k+1$, dicha propiedad es válida para todos los números naturales"

CONJUNTOS NUMÉRICOS

(del número Natural al Número Complejo)

carlos alfredo lópez

La suposición $P(k)$ es verdadera, recibe el nombre de **HIPÓTESIS INDUCTIVA**.

Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1:

Trataremos de demostrar por Inducción Matemática que la suma de los n primeros números naturales verifica:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Para aplicar el Principio de Inducción Completa, procedemos de la siguiente manera:

- 1) Verificamos la validez de la expresión para $n = 1$.
- 2) **HIPÓTESIS INDUCTIVA:** Suponemos válida la expresión para $n = k$ (cualquiera).
- 3) Verificamos la validez para $n = k+1$.

Operando con esta secuencia resulta:

1) $1 = \frac{1(1+1)}{2} = 1$; por lo tanto $P(1)$ es V

2) : **HIPÓTESIS INDUCTIVA :** $1 + 2 + 3 + \dots + k = \frac{k(k+1)}{2}$

3) : $1 + 2 + 3 + \dots + k + (k+1) = \frac{(k+1)(k+1+1)}{2}$

La suma de los k primeros términos de la expresión anterior es, de acuerdo con la **Hipótesis Inductiva** igual a $\frac{k(k+1)}{2}$;

reemplazando:

$$k \frac{(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

sacando denominador común en el primer miembro:

$$\frac{k(k+1) + 2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

En el numerador del primer miembro el término $(k+1)$ es factor común; en consecuencia:

$$\frac{(k+1)(k+2)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$$

Hemos demostrado en consecuencia, que $P(k+1)$ es verdadera.

Ejemplo 2:

Consideremos la sucesión de los números impares 1,3,5,7,9,... Puede observarse en la misma que se verifica:

CONJUNTOS NUMÉRICOS (del número Natural al Número Complejo)

carlos alfredo lópez

$$1 = 1^2; 1 + 3 = 2^2; 1 + 3 + 5 = 3^2; 1 + 3 + 5 + 7 = 4^2$$

Podemos pensar entonces, en la validez del siguiente enunciado:

"La suma de los n primeros números impares es igual a n^2 ", que se expresa simbólicamente:

$$1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$$

Repitiendo el procedimiento del ejercicio anterior:

- 1) $1 = 1^2$; entonces $P_{(1)}$ es Verdadera.
- 2) $1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) = k^2$ **HIPÓTESIS INDUCTIVA**
- 3) $1 + 3 + 5 + \dots + (2k-1) + (2k+1) = (k+1)^2$

Teniendo en cuenta la Hipótesis Inductiva, el primer miembro de 3) con exclusión del último término puede reemplazarse por k^2

$$k^2 + (2k+1) = (k+1)^2$$

igualdad en la cual el primer miembro es un trinomio cuadrado perfecto, equivalente al desarrollo del segundo miembro; se verifica, entonces, que **$P_{(k+1)}$ es verdadera.**

EL NÚMERO ENTERO:

En el conjunto \mathbf{N}_0 no pueden resolverse las operaciones de resta o diferencia en el caso en que el minuendo de la operación sea menor que el sustraendo. Por ello que resulta imprescindible, *(a los efectos de dar solución a una operación como **(3 - 5)**)*, definir un nuevo conjunto numérico; el de los números enteros que simbolizamos con la letra **Z**. Este conjunto tiene la particularidad de no poseer ni primer ni último elemento y se define de tal manera que:

- 1) Al conjunto **Z** pertenecen todos los elementos de \mathbf{N}_0 .
- 2) Las operaciones de resta con minuendo menor que el sustraendo, siempre tienen solución en **Z**.
- 3) Las operaciones en **Z** conservan las propiedades establecidas para el conjunto \mathbf{N}_0 , con excepción de las propiedades de la **radicación en el caso de radicando negativo y exponente par, operación para la cual no existe solución en este conjunto.**

Para conformar el conjunto **Z** debemos definir para cada número $n \in \mathbf{N}$, un nuevo número **(-n)** que se denomina "*opuesto de n*"

El conjunto **Z** podrá definirse entonces, haciendo abuso de notación como:

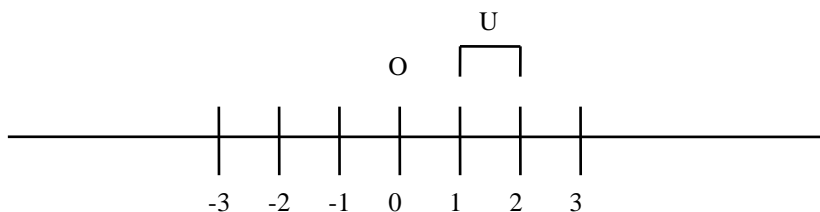
$$\mathbf{Z} = \{\dots -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \dots\}$$

CONJUNTOS NUMÉRICOS

(del número Natural al Número Complejo)

carlos alfredo lópez

y se representa en la recta numérica como indica el siguiente gráfico,



en el cual observamos que a cada número entero le corresponde un único punto sobre la recta numérica, **existiendo, en consecuencia, infinitos puntos de la misma que no corresponden a ningún número entero.**

A los efectos de precisar posteriores conceptos, **convenimos** en designar:

$\mathbb{Z}^+ = \mathbb{N}$ (conjunto de los números naturales, también llamado de los enteros positivos)

$\mathbb{Z}_0^+ = \mathbb{N}_0$ (enteros positivos ,incluido el cero, o enteros no negativos).

\mathbb{Z}^- = Conjunto de los enteros negativos.

resultando:

$$\mathbb{Z}^+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}^- = \mathbb{Z}$$

o bien:

$$\mathbb{Z}_0^+ \cup \mathbb{Z}^- = \mathbb{Z}.$$

Operaciones en \mathbb{Z} .

Para el conjunto \mathbb{Z} se definen las mismas operaciones vistas para \mathbb{N}_0 , debiendo cumplirse las siguientes reglas:

1) El producto o el cociente de dos números enteros positivos o de dos números enteros negativos da como resultado un número entero positivo.

2) Si se multiplican o dividen un número entero positivo y uno negativo, obtenemos como resultado un número entero negativo.

Se verifica entonces, la siguiente "**regla de los signos**":

$++ = +$	$-- = +$	$+:+ = +$	$-:- = +$
$+ \cdot - = -$	$- \cdot + = -$	$+: - = -$	$-: + = -$

CONJUNTOS NUMÉRICOS

(del número Natural al Número Complejo)

carlos alfredo lópez

NÚMEROS RACIONALES.

Definición, representación gráfica, expresión decimal periódica. Operaciones y propiedades.

La operación de división entre números enteros se define como hemos visto, a partir de la operación de producto:

$$\frac{a}{b} = c \Leftrightarrow a = b \cdot c \quad (1)$$

Para que esta operación arroje resultados en el conjunto \mathbb{Z} , es necesario que **a sea múltiplo de b**.

Si en (1) tenemos por ejemplo:

$$a = 5 \text{ y } b = 3, \text{ el cociente será } 5 / 3 = c \Leftrightarrow 5 = 3 \cdot c$$

y no existe ningún número entero que satisfaga la última igualdad.

Esta circunstancia genera la necesidad de ampliar nuestro campo numérico, introduciendo el concepto de número fraccionario, definido como el cociente entre dos números enteros.

Conformamos de esta manera, un nuevo conjunto numérico: el de los **Números Racionales**; sus elementos son tales que, al simplificar los factores comunes de numerador y denominador, nos queda un número entero, o bien una fracción irreducible.

$$\frac{20}{4} = \frac{2 \cdot 2 \cdot 5}{4} = 5 \quad ; \quad \frac{33}{6} = \frac{3 \cdot 11}{3 \cdot 2} = \frac{11}{2}$$

El conjunto de los números racionales se denomina **Q** y puede expresarse simbólicamente:

$$Q = \left\{ \frac{a}{b} / a \in \mathbb{Z} \wedge b \in (\mathbb{Z} - \{0\}) \right\}$$

En consecuencia:

$5/3$ es racional ya que $5 \in \mathbb{Z} \wedge 3 \in \mathbb{Z}$.

$-5/3$ es racional ya que $-5 \in \mathbb{Z} \wedge 3 \in \mathbb{Z}$

2 es racional ya que $2 = 4/2$ y $(4 \wedge 2) \in \mathbb{Z}$.

$0,2$ es racional ya que $0,2 = 2/10$ y $(2 \wedge 10) \in \mathbb{Z}$.

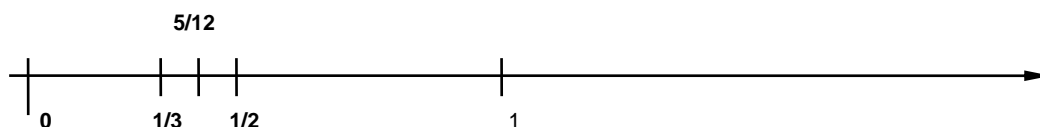
$0,55\dots$ es racional ya que $0,55 = 5/9$ y $(5 \wedge 9) \in \mathbb{Z}$.

CONJUNTOS NUMÉRICOS (del número Natural al Número Complejo)

carlos alfredo lópez

Densidad de los números Racionales.

Los números racionales tienen la propiedad de constituir un conjunto **DENSO**; en efecto, se puede demostrar fácilmente que entre dos números racionales existen infinitos números racionales; por ejemplo entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$ se puede colocar el racional $\frac{5}{12}$, que se obtiene efectuando el promedio verificándose $\frac{1}{3} < \frac{5}{12} < \frac{1}{2}$ es decir que entre $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{2}$ colocamos el promedio, y así sucesivamente



El hecho de que el conjunto de los números racionales **Q** sea “denso”, puede llevarnos a pensar que por sucesiva inserción de números racionales obtenidos efectuando el promedio entre dos números racionales conocidos habremos agotado todos los puntos de la recta; ello no es así pues, como veremos, existen números que no pueden ser expresados como razón o cociente de dos enteros.

El número irracional:

Si construimos un cuadrado de lado igual a la unidad y pretendemos medir su diagonal, la misma resulta ser la hipotenusa de un triángulo rectángulo. Como sabemos, para los triángulos rectángulos vale el Teorema de Pitágoras: "El cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos".

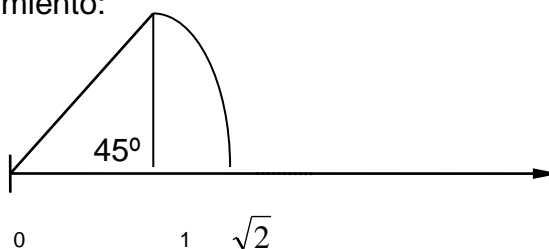
$$d^2 = 1^2 + 1^2$$

$$d = \sqrt{2}$$

$\sqrt{2}$ no es un número racional ya que no es posible expresarlo como cociente entre dos números enteros, y por ello se lo llama **IRRACIONAL**.

Resulta también irracional (como puede demostrarse fácilmente) $\sqrt{3}$, (razón de la longitud de la diagonal de un cubo a la longitud de su lado).

Geométricamente pueden obtenerse con facilidad los irracionales y efectuar su representación sobre la recta numérica; la figura siguiente ilustra el procedimiento:



CONJUNTOS NUMÉRICOS (del número Natural al Número Complejo)

carlos alfredo lópez

En general se demuestra que si la raíz n -ésima (se lee *raíz enésima o de orden n*) de un número entero no es otro número entero, tampoco es fraccionario (es decir, no es racional), resultando, en consecuencia un irracional; esto nos indica que la radicación nos provee infinitos números irracionales. Son también irracionales: la razón entre la longitud de una circunferencia y su diámetro:

$$l/d = \pi = 3,141592653589...$$

y el número $e = 2,718281828459045...$ que aparece en muchos modelos matemáticos de procesos naturales: desintegración radiactiva, crecimiento de poblaciones celulares, espiral de los caracoles, etc., y es utilizado como base de los logaritmos Neperianos, también llamados logaritmos naturales.

Los logaritmos y las funciones trigonométricas nos proveen asimismo de infinitos números irracionales.

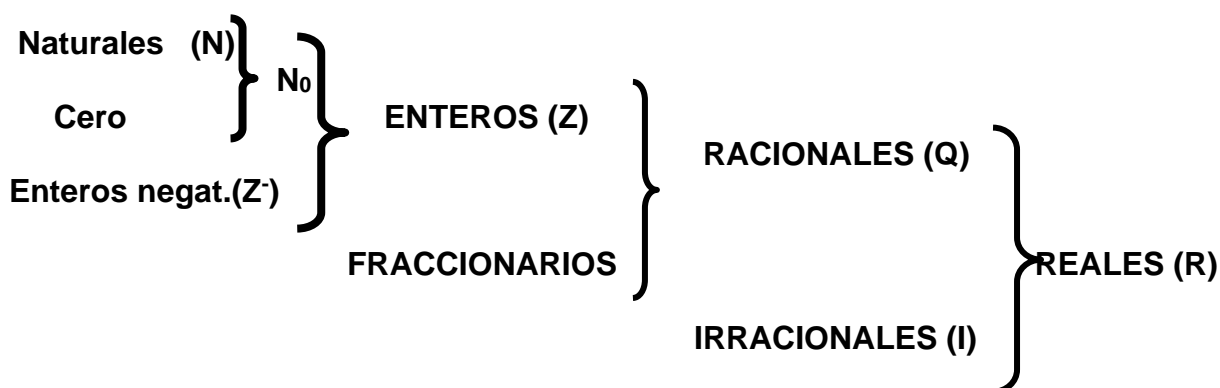
Los números irracionales se caracterizan por presentar infinitas cifras no periódicas, lo que justifica que no puedan expresarse mediante una fracción.

NÚMEROS REALES. Definición, representación gráfica, operaciones y propiedades.

Los números racionales ya definidos y los irracionales que terminamos de ver, conforman un nuevo conjunto, llamado de los números **REALES**, que se simboliza con la letra **R**. De este conjunto podemos decir que "cubre" la recta numérica; es decir, para el conjunto "**R**" puede establecerse una correspondencia biunívoca con los puntos de la recta numérica; esta correspondencia se expresa:

"A cada punto de la recta le corresponde un único número real y recíprocamente".

Hemos ampliado de esta manera el campo numérico, desde los números más elementales (los números naturales) hasta el conjunto recién definido; esta ampliación puede esquematizarse en el siguiente cuadro:



CONJUNTOS NUMÉRICOS (del número Natural al Número Complejo)

carlos alfredo lópez

Logaritmos:

Definición: Llamamos logaritmo en base **b** de un número **x** a un número **y**, si **y** es el exponente al que hay que elevar **b** para obtener **x**

$$\log_b x = y \Leftrightarrow b^y = x \quad ; \quad b \in \mathbb{R}^+ \wedge b \neq 1$$

Ejemplos:

$$\log_2 8 = 3 \quad \text{porque } 2^3 = 8$$

$$\log_2 \frac{1}{16} = -4 \quad \text{porque } 2^{-4} = \frac{1}{16}$$

Debe tenerse en cuenta que:

- Se verifica que el logaritmo de **1**, cualquiera sea la base es igual a **0**. (Se comprueba porque cualquier número elevado a la potencia cero da **1**).
- Cualquiera sea la base en que se opera, el logaritmo de la base es igual a **1**. (Efectuar la comprobación).
- Los números negativos no tienen logaritmo en el conjunto de los números reales. (Verificarlo).
- El logaritmo de cero no existe (Verificarlo).
- La operación de logaritmación no es distributiva respecto de ninguna operación:
- El logaritmo de un producto es igual a la suma de los logaritmos de los factores: $\log_a (x \cdot y) = \log_a x + \log_a y$.
- El logaritmo de un cociente es igual a la diferencia entre los logaritmos del numerador y del denominador: $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.
- El logaritmo de una potencia es igual al producto del exponente por el logaritmo de la base: $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$.
- El logaritmo de la raíz n-sima (se lee enésima) de un número es igual a la inversa del índice multiplicado por el logaritmo de la cantidad sub-radical:

$$\log_a \sqrt[n]{x} = \frac{1}{n} \log_a x$$

Los logaritmos más usuales en matemática son los que se expresan en las bases **10** (logaritmos decimales) y en base **e** (logaritmos naturales o Neperianos). Cuando se trata de trabajar con logaritmos decimales se omite escribir la base: $\log 100$, debe entenderse logaritmo en base 10; los logaritmos naturales se expresan, por ejemplo: $\ln 10$.

Si bien en todas las calculadoras científicas pueden obtenerse los logaritmos decimales y los naturales, puede presentarse la necesidad de calcular el logaritmo de un número en otra base cualquiera.

CONJUNTOS NUMÉRICOS
(del número Natural al Número Complejo)

carlos alfredo lópez

Sea el caso de tener que calcular $y = \log_b x$ para lo cual contamos con la calculadora que nos provee los logaritmos en base **10** o en base **e**. Generalizando, sea **a** la base en la cual podemos calcular los logaritmos. Teniendo en cuenta la equivalencia:

$$y = \log_b x \Leftrightarrow b^y = x$$

aplicando logaritmos en la base **a** conocida a la expresión $b^y = x$ obtenemos:

$$\log_a b^y = \log_a x$$

que de acuerdo con las propiedades de la potencia para los logaritmos, resulta :

$$y \cdot \log_a b = \log_a x ; \text{ o bien}$$

$$y = \frac{\log_a x}{\log_a b}$$

lo que significa que el logaritmo de un número **x** en una base cualquiera **b** puede obtenerse cuando se conocen los logaritmos respecto de una base **a**, dividiendo el logaritmo del número **x** calculado en base **a** por el logaritmo en base **a** de la base **b**.

CONJUNTOS NUMÉRICOS (del número Natural al Número Complejo)

carlos alfredo lópez

El espacio bidimensional. Sistema de representación Cartesiano. Par ordenado. Producto Cartesiano. Distancia entre dos puntos. Punto que divide un segmento en una razón dada. Sistema de coordenadas polares. Equivalencia entre los sistemas cartesiano y polar.

PAR ORDENADO.

Un par ordenado es un conjunto formado por dos elementos y un cierto criterio de ordenación que permite decidir cual es el primer elemento y cual es el segundo.

Si el primer elemento es **a** y el segundo es **b**, el par ordenado se notará entre paréntesis **(a, b)**.

Igualdad de Pares Ordenados: decimos que:

$$(a,b) = (c,d) \Leftrightarrow (a = c \text{ y } b = d)$$

En general se verifica $(a,b) \neq (b,a)$, pero $\{a,b\} = \{b,a\}$, se verifica siempre.

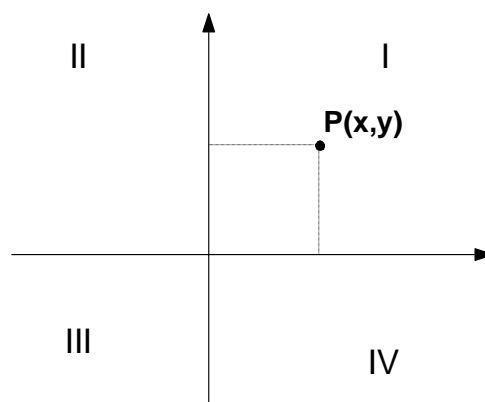
SISTEMA DE COORDENADAS CARTESIANAS ORTOGONALES.

Del mismo modo que se establece una correspondencia biunívoca entre el conjunto de los números reales y los puntos de la recta numérica, que denominamos espacio unidimensional, extendiendo la idea al espacio de dos dimensiones o bidimensional (el plano), podemos establecer una correspondencia entre sus puntos y un conjunto formado por pares ordenados de números reales (x,y) . Para ello utilizamos el llamado Sistema de Coordenadas Cartesianas Ortogonales (Descartes, siglo XVI) constituido por un par de ejes (rectas orientadas) perpendiculares entre sí, que dividen al plano en cuatro cuadrantes, debiendo definirse para cada uno de los ejes la correspondiente unidad de medida:

salvo en casos especiales, en general se adopta para ambos ejes la misma unidad.-

El eje horizontal (eje x) se denomina eje de las abscisas y el vertical (eje y), eje de las ordenadas.

El punto O, intersección de los ejes es el origen del sistema y las componentes de los pares ordenados (x,y) son las coordenadas del punto P considerado (abscisa y ordenada respectivamente).



Actividad: Un triángulo equilátero OAB cuyo lado tiene una longitud **a** está colocado de manera tal que el vértice O está en el origen de coordenadas, el vértice A sobre el eje de las abscisas y sobre el semieje positivo y el vértice B

CONJUNTOS NUMÉRICOS (del número Natural al Número Complejo)

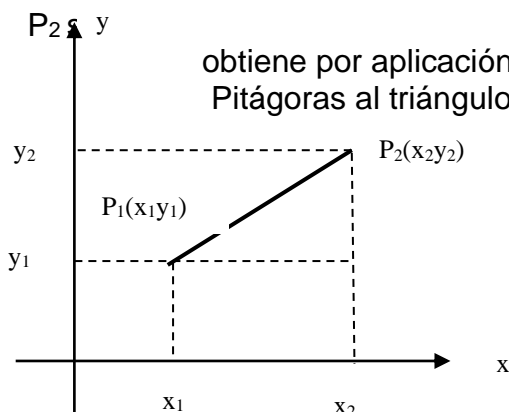
carlos alfredo lópez

está ubicado en el primer cuadrante (o sea, encima del eje x). Escribir las coordenadas de los vértices A y B y el área del triángulo.

Distancia entre dos puntos en el plano.

Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos cualesquiera del plano

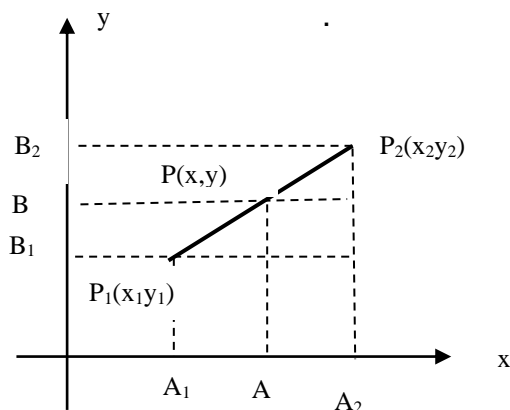
La distancia entre los puntos P_1 y



$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Actividad: Demostrar que los puntos $P_1(3,3)$; $P_2(-3, -3)$ y $P_3(-3\sqrt{3}, 3\sqrt{3})$ son vértices de un triángulo equilátero. Graficar en escala.

División de un segmento en una razón dada.



CONJUNTOS NUMÉRICOS
(del número Natural al Número Complejo)

carlos alfredo lópez

Sea el problema de dividir el segmento establecido entre P_1 y P_2 en una razón dada $r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$. Si establecemos una relación de proporcionalidad entre los triángulos de la figura, podemos escribir: $\frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{\overline{A_1A}}{\overline{AA_2}}$; siendo $\overline{A_1A} = x - x_1$ y $\overline{AA_2} = x_2 - x$ de lo que resulta:

$$r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}} = \frac{\overline{A_1A}}{\overline{AA_2}} = \frac{x - x_1}{x_2 - x};$$

$$r(x_2 - x) = x - x_1 \quad ; \quad r \cdot x_2 - r \cdot x = x - x_1 \quad ; \quad r \cdot x_2 + x_1 = x + r \cdot x \quad ; \quad x_1 + r \cdot x_2 = x(1 + r)$$

$$x = \frac{x_1 + r \cdot x_2}{1 + r}$$

debiendo ser $r \neq -1$ a efectos de que no se anule el denominador.

Actividad: demostrar la validez de $y = \frac{y_1 + r \cdot y_2}{1 + r}$

Observación: cuando P es el punto medio del segmento considerado, la razón que corresponde es $r = 1$; en estas condiciones los valores de los resultados anteriores se reducen a:

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \quad ; \quad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

expresiones que nos dicen: las coordenadas del punto medio de un segmento resultan iguales a las semisumas de cada una de ellas.

Ejercicios:

- 1) Hallar el perímetro del cuadrilátero cuyos vértices son $(-3, -1)$; $(0,3)$; $(3,4)$; $(4, -1)$
- 2) Demostrar que los puntos $(-2,-1)$; $(2,2)$; $(5, -2)$ son los vértices de un triángulo isósceles.
- 3) Demostrar que los puntos $(2, -2)$; $(-8,4)$; $(5,3)$ son los vértices de un triángulo rectángulo y hallar su área.
- 4) Demostrar que los puntos $(12,1)$; $(-3, -2)$; $(2, -1)$ son están ubicados sobre una misma recta.
- 5) Hallar los puntos de trisección y el punto medio del segmento cuyos extremos son los puntos $(-2,3)$ y $(6, -3)$.
- 6) Uno de los puntos extremos de un segmento es el punto $(7,8)$ y su punto medio es $(3,4)$. Hallar el otro extremo.
- 7) Los extremos de un segmento son los puntos $(7,4)$; $(-1, -4)$; hallar la razón en que el punto $(1, -2)$ divide al segmento.

CONJUNTOS NUMÉRICOS
(del número Natural al Número Complejo)

carlos alfredo lópez

- 8) Los puntos medios de los lados de un triángulo son (2,5) ; (4,2) y (1,1). Hallar las coordenadas de los vértices.
- 9) En un sistema coordenado lineal (espacio unidimensional) hallar la distancia entre los puntos (-5) y (3) ; (6) y (-7) ; (-7) y (-11). La distancia entre dos puntos es 7. Si uno de los puntos es (-3) hallar las dos soluciones posibles.
- 10) En un sistema coordenado unidimensional $P_1(x_1)$ y $P_2(x_2)$ son los puntos extremos de un segmento. Demostrar que la coordenada x de un punto P que divide al segmento P_1P_2 en una razón dada: $r = \frac{P_1P}{PP_2}$ es:

$$x = \frac{x_1 + rx_2}{1 + r} \text{ con } r \neq -1$$

- 11) Haciendo $r=1$ en la fórmula obtenida en el ejercicio anterior, demostrar que la coordenada del punto medio de un segmento rectilíneo es la media aritmética de las coordenadas de sus puntos extremos.
- 12) Hallar los puntos de trisección del segmento cuyos extremos son (-7) y (-19).
- 13) Un extremo de un segmento es el punto (-8) y su punto medio es (3). Hallar las coordenadas del otro extremo.
- 14) Un cuadrado de lado 2 a tiene su centro en el origen de coordenadas y sus lados paralelos a los ejes coordenados. Hallar las coordenadas de sus cuatro vértices.
- 15) Tres vértices de un rectángulo son los puntos (2,-1) ; (7, -1) y (7,3). Hallar el cuarto vértice y el área del rectángulo.

PRODUCTO CARTESIANO.

Llamamos Producto Cartesiano del conjunto **A** por el conjunto **B** (en ese orden), al conjunto cuyos elementos son todos los pares ordenados que se pueden formar, de modo tal que el primer elemento pertenezca a **A** y el segundo a **B**. Esta definición se simboliza:

$$\mathbf{A \times B = \{ (a,b) / a \in A \wedge b \in B \}}$$

Ejemplo 1: (para conjuntos finitos)

$$\text{Sean: } \mathbf{A = \{1,2\} \quad B = \{1,2,3\}}$$

$$\mathbf{A \times B = \{ (1,1);(1,2);(1,3);(2,1);(2,2);(2,3) \}}$$

El número de elementos del conjunto Producto Cartesiano es igual al producto de los números de elementos de los conjuntos **A** y **B**; en nuestro caso $2 \times 3 = 6$ elementos.

Si ahora construimos el producto **B x A**, resulta:

CONJUNTOS NUMÉRICOS (del número Natural al Número Complejo)

carlos alfredo lópez

$$B \times A = \{(1,1);(1,2);(2,1);(2,2);(3,1);(3,2)\}$$

De la comparación entre $A \times B$ y $B \times A$ se concluye:

"El Producto Cartesiano NO ES CONMUTATIVO".

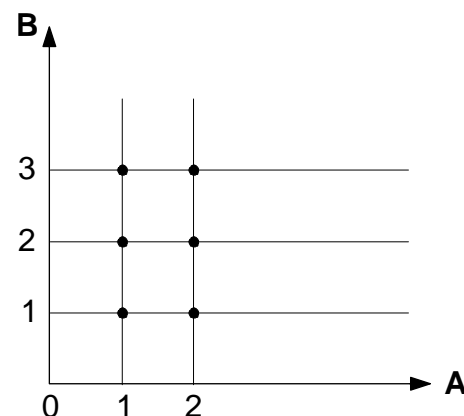
El Producto Cartesiano $A \times B$ resultará el conjunto vacío si y solo si al menos uno de los factores es el vacío, o sea:

$$A \times B = \emptyset \iff A = \emptyset \vee B = \emptyset$$

Puede efectuarse una representación del Producto Cartesiano utilizando el sistema de coordenadas cartesianas ortogonales descrito en 2.

$$A \times B = \{(1,1);(1,2);(1,3);(2,1);(2,2);(2,3)\}$$

Por los puntos 1 y 2 correspondientes al eje horizontal (conjunto A), trazamos paralelas al eje vertical en el que se representan los elementos del conjunto B y por los puntos 1,2 y 3 correspondientes al conjunto B paralelas al eje horizontal, formando una cuadrícula cuyas intersecciones son los elementos (pares ordenados) del producto cartesiano.

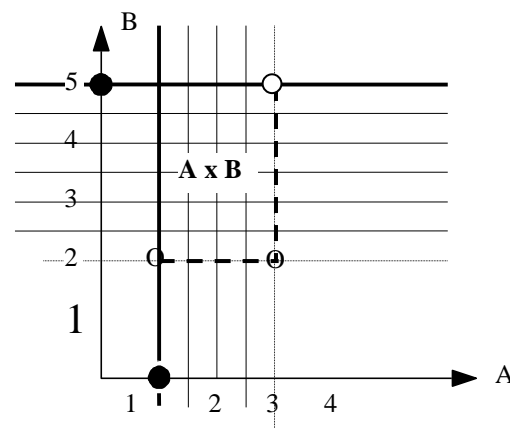


Ejemplo 2: Sean: $A = [1, 3[$ $B =]2, 5]$

En este caso los conjuntos son intervalos (subconjuntos del conjunto de los números reales) y el Producto Cartesiano que tiene infinitos elementos no puede escribirse por extensión.

Sin embargo, como veremos, puede efectuarse la correspondiente representación cartesiana.

En el espacio de dos dimensiones el conjunto A estará representado por una faja vertical que se extiende indefinidamente hacia arriba y hacia abajo (rayada verticalmente en la figura) limitada por dos rectas paralelas al eje vertical que pasan respectivamente por 1 y 3 (extremos del intervalo) del eje horizontal. Por ser A abierto a derecha, para diferenciarlo del extremo cerrado, graficamos mediante línea de trazos la recta vertical que pasa por 3.



Con similar razonamiento, el conjunto B (rayado horizontalmente), en el espacio bidimensional es una faja horizontal de longitud infinita, limitada superiormente por una recta (extremo cerrado, línea llena) que pasa por 5 e inferiormente por una recta (extremo abierto, línea de trazos) que pasa por 2.

CONJUNTOS NUMÉRICOS

(del número Natural al Número Complejo)

carlos alfredo lópez

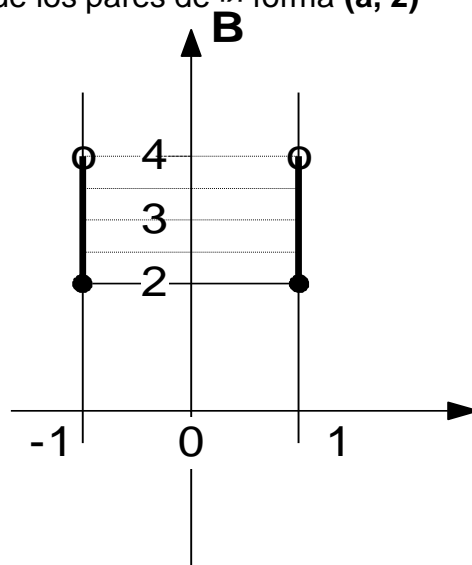
El Producto Cartesiano $A \times B$ resulta entonces representado por el rectángulo doblemente rayado limitado por las paralelas a los ejes trazadas por los extremos de los intervalos.

Se observa en la figura, que los bordes derecho e inferior del rectángulo doblemente rayado no pertenecen al mismo (línea de trazos), lo que significa que ningún punto ubicado sobre la paralela al eje vertical trazada por 3 pertenece al producto cartesiano: (no existe par $(3,b)$ que pertenezca a dicho producto).

Idéntico análisis justifica que los pares de la forma $(a, 2)$ no pertenecen a $A \times B$.

Ejemplo 3: Sean: $A = \{-1, 1\}$ $B = [2, 4[$

El conjunto A es finito y está formado únicamente por los elementos -1 y 1 , en tanto el conjunto B es un intervalo. La representación del producto cartesiano $A \times B$ es la de la figura de la derecha, de la cual puede deducirse fácilmente que los



pares ordenados de $A \times B$ son de la forma:

$$(-1 ; 2 \leq b < 4) \text{ y } (1 ; 2 \leq b < 4)$$

Cuando los elementos del producto cartesiano constituyen un conjunto finito, resulta posible representarlo mediante una tabla a doble entrada (también llamada matriz). El ejemplo 2 puede representarse:

		B		
		1	2	3
A x B =	A	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)
	2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)

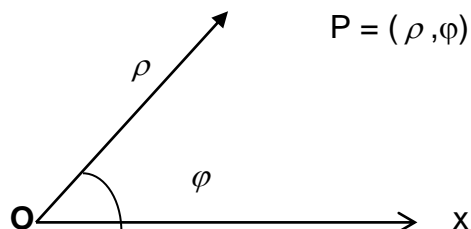
Ejercicios: Graficar los productos cartesianos $A \times B$ y $B \times A$:

- 1) $A = [-3, 2[$ $B = [-2, 2]$
- 2) $A = \{-3, 2\}$ $B = [-2, 2[$
- 3) $A =]-2, 3[$ $B = \{-2, 2\}$
- 4) $A = \{1, 2, 3\}$ $B = \{1, 2, 3\}$

CONJUNTOS NUMÉRICOS
(del número Natural al Número Complejo)

carlos alfredo lópez

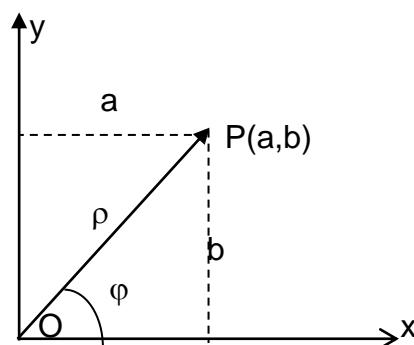
Sistema de coordenadas polares:



Una manera distinta de referenciar puntos del plano es conformar un sistema de coordenadas constituido por un polo **O** y un eje polar **x**. En este sistema llamado sistema polar, la posición de un punto queda determinada trazando un segmento que una dicho punto con el polo **O**. Las coordenadas que permiten identificar al punto son el ángulo φ que forman la dirección positiva del eje polar con el segmento trazado desde **P** hasta **O** que recibe el nombre de argumento y la longitud del segmento **OP** que recibe el nombre de radio vector ρ

Equivalencia entre los sistemas cartesiano y polar:

Definido el sistema de coordenadas polares, puede establecerse una equivalencia con el sistema de coordenadas cartesianas ortogonales dibujando los sistemas superpuestos (orígenes coincidentes y eje **x** como eje polar) mediante la utilización de las siguientes fórmulas de transformación:



a) Si se conocen las coordenadas cartesianas **a** y **b**

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \text{ siendo su valor la longitud del segmento } \overline{OP}.$$

El ángulo φ , que forma el semieje positivo de **x** con la dirección del segmento **OP** se obtiene de la relación trigonométrica:

CONJUNTOS NUMÉRICOS
(del número Natural al Número Complejo)

carlos alfredo lópez

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{b}{a}$$

que puede escribirse

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a}$$

NOTA IMPORTANTE: Si bien para las coordenadas polares hemos tomado una única solución es necesario destacar que, desde un punto de vista estrictamente matemático tienen la misma posición sobre el plano todos los pares ordenados de la forma $(\rho ; \varphi + 2k\pi)$, siendo k un número entero (que puede tomar valores positivos o negativos) y $\pi = 3,14\dots$

b) Si se conocen las coordenadas polares ρ, φ , estableciendo las correspondientes relaciones trigonométricas:

$$\text{De } \cos \varphi = \frac{a}{\rho} \quad ; \quad \operatorname{sen} \varphi = \frac{b}{\rho} ;$$

obtenemos:

$$a = \rho \cdot \cos \varphi \quad ; \quad b = \rho \cdot \operatorname{sen} \varphi$$

Ejemplo 1: Hallar las coordenadas polares del punto P, si sus coordenadas cartesianas ortogonales son $a=3$; $b=-5$

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3^2 + (-5)^2} = \pm \sqrt{34}$$

$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{b}{a} = \operatorname{arctg} \left(-\frac{5}{3} \right)$ (por ser a positivo y b negativo, el punto estará ubicado en el cuarto cuadrante, resultando $\varphi = 300^\circ 58'$

Ejemplo 2: Hallar las coordenadas cartesianas ortogonales del punto P cuyas coordenadas polares son $\rho=4$; $\varphi=120^\circ$

$$a = \rho \cos \varphi = 4 \cos 120^\circ = 4 \left(-\frac{1}{2} \right) = -2$$

$$b = \rho \operatorname{sen} \varphi = 4 \operatorname{sen} 120^\circ = 4 \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

en consecuencia las coordenadas cartesianas de P son $(-2 ; 2\sqrt{3})$

Ejemplo3:

Hallar la ecuación polar del lugar geométrico cuya ecuación cartesiana es:

$$x^2 + y^2 - 4x - 2y + 1 = 0$$

Solución:

CONJUNTOS NUMÉRICOS (del número Natural al Número Complejo)

carlos alfredo lópez

Podemos reemplazar $x^2 + y^2$ por r^2 , x por $r \cdot \cos \varphi$; y por $r \cdot \sin \varphi$, resultando la ecuación polar buscada:

$$r^2 - 4r \cdot \cos \varphi - 2r \cdot \sin \varphi + 1 = 0$$

Ejemplo 4:

Hallar la ecuación cartesiana del lugar geométrico cuya ecuación polar es:

$$r = \frac{2}{1 - \cos \varphi}$$

Solución: es conveniente, antes de sustituir, eliminar denominadores:

$$r - r \cdot \cos \varphi = 2$$

que puede reemplazarse por:

$$\pm \sqrt{x^2 + y^2} - x = 2$$

$$\pm \sqrt{x^2 + y^2} = x + 2$$

elevando al cuadrado ambos miembros, se llega a:

$$y^2 = x + 4$$

Ejercicios:

- 1) En un sistema de coordenadas polares, dibujar los siguientes puntos:
 $P_1 (1, 135^\circ)$; $P_2 (-3, \pi/3)$; $P_3 = (-3, 2\pi/3)$
- 2) Construir un triángulo cuyos vértices son:
 $P_1 (5, 60^\circ)$; $P_2 (-2, 7\pi/4)$; $P_3 (-4, 150)$
- 3) Un cuadrado de lado **2.a** tiene su centro en el polo y dos de sus lados son paralelos al eje polar. Hallar las coordenadas polares de cada uno de sus cuatro vértices.
- 4) Un punto se mueve de tal manera que para todos los valores de su argumento, su radio vector permanece constante e igual a 2. Identificar y dibujar el lugar geométrico.
- 5) Un punto se mueve de tal manera que para todos los valores de sus radios vectores su argumento permanece constante e igual a $\pi/4$. Identificar y dibujar.
- 6) Hallar las coordenadas polares de $(-2, 4)$ y $(4, -2)$.
- 7) En cada uno de los casos siguientes, pasar la ecuación dada a la forma polar:
 $x^2 + y^2 = 4$; $5x - 4y + 3 = 0$; $2x^2 + 2y^2 + 2x - 6y + 3 = 0$; $x \cdot y = 2$
- 8) En cada uno de los casos siguientes, pasar la ecuación polar a la forma rectangular:
 $r \cdot \cos \varphi - 2 = 0$; $r = 2 \sin \varphi$; $r = 6 \cos \varphi = 0$; $r - r \cdot \cos \varphi = 2$

CONJUNTOS NUMÉRICOS (del número Natural al Número Complejo)

carlos alfredo lópez

El número complejo. La unidad imaginaria: sus potencias. Forma binómica de un complejo. Operaciones. Complejo conjugado. Forma polar o trigonométrica de los complejos: producto, potencia (Fórmula de De Moivre) y cociente. Raíz n-ésima de un complejo. Forma exponencial de los complejos. Logaritmos en complejos.

EL NÚMERO COMPLEJO.

La imposibilidad de resolver con los números reales problemas tales como la radicación de índice par y radicando negativo, la logaritmicación con base positiva de números negativos, la resolución de ecuaciones que carecen de raíces reales y otros de gran importancia en diversas ramas de la matemática, ha dado lugar a la creación de los números complejos, con los cuales encuentran adecuadas respuestas aquellos problemas.

Ecuaciones sin solución en el campo Real:

El ejemplo de una ecuación sin solución en el campo de los Números Reales es:

$$x^2 + 1 = 0$$

ya que cualquiera sea $x \in \mathbb{R}$ se verifica $x^2 \neq -1$ y por lo tanto: $x^2 + 1 > 0$.

De un modo más general, la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$, cuya solución se obtiene:

a) pasando el término independiente al segundo miembro: $ax^2 + bx = -c$

b) dividiendo todos los términos por a: $x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$

c) completando cuadrados para obtener un trinomio cuadrado perfecto:

$$x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

d) escribiendo el primer miembro como cuadrado de un binomio y sacando en el segundo miembro común denominador:

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

e) sacando raíz cuadrada en ambos miembros:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad ; \quad \text{resulta: } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

no tiene solución en \mathbb{R} si $b^2 - 4ac$ es negativo.

CONJUNTOS NUMÉRICOS (del número Natural al Número Complejo)

carlos alfredo lópez

Resulta necesario, entonces, ampliar el campo numérico definiendo un nuevo conjunto en el cual pueda resolverse este tipo de ecuaciones. Tal conjunto es el de los Números Complejos.

Definición:

Número Complejo es todo par ordenado de números reales.

$$C = \{(a,b) / a \in R \wedge b \in R\}$$

la notación usual es: $z = (a,b)$.

La primera componente se denomina parte real: $\text{Re}(z) = a$ y la segunda, parte imaginaria: $\text{Im}(z) = b$

Las partes real e imaginaria de un complejo son números reales.

Son números complejos:

$$(2,1) ; (-3,0) ; (0,3) ; (3, \sqrt{2})$$

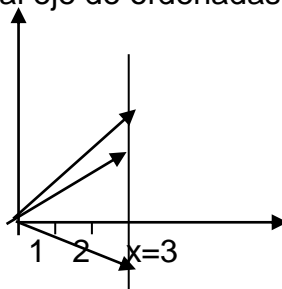
En un sistema de coordenadas cartesianas ortogonales, los números complejos se corresponden con los puntos del plano. La abscisa de cada punto es la parte real y la ordenada es la parte imaginaria. A cada complejo le está asociado un vector con origen en el origen del sistema, cuyo extremo es el punto que tiene como coordenadas las componentes del par ordenado correspondiente.

Los complejos de parte imaginaria nula, de la forma $(a,0)$ son puntos del eje de las abscisas y los complejos de parte real nula $(0,b)$ están ubicados sobre el eje de las ordenadas.

Un complejo es real si y sólo si su parte imaginaria es nula y un complejo es imaginario puro si y sólo si su parte real es nula.

Ejemplo 1: Determinar analítica y gráficamente los complejos $z = (x;y)$ que verifican $\text{Re}(z) = 3$.

Corresponden todos los pares ordenados para los cuales $x = 3$, es decir todos los complejos de la forma $z = (3;y)$. La ecuación $x = 3$ corresponde a la recta paralela al eje de ordenadas que pasa por el punto de abscisa 3.-

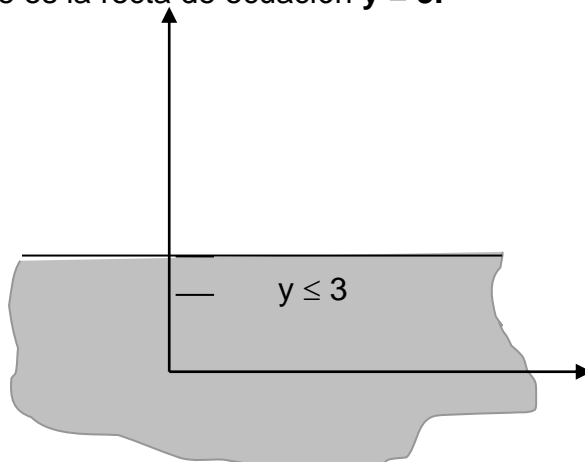


CONJUNTOS NUMÉRICOS (del número Natural al Número Complejo)

carlos alfredo lópez

Ejemplo 2: Determinar analítica y gráficamente los complejos $z = (x;y)$ que verifican $\text{Im}(z) \leq 3$.

Analíticamente corresponde $y \leq 3$, es decir los pares $z = (x; y \leq 3)$. Los puntos pertenecen al semiplano que contiene al origen de coordenadas y cuyo borde es la recta de ecuación $y = 3$.



Ejemplo 3: $\text{Re}(z) + \text{Im}(z) = 1$.

Se trata de los complejos $z = \{(x,y)/(x+y)=1\}$.

Queda así definida la recta que pasa por (1;0) y (0;1), cuyos puntos corresponden a los complejos pedidos.

Actividad: Efectuar la representación gráfica del ejemplo nº 3.

Algebra de Complejos.

Igualdad de complejos:

$$(a;b) = (c;d) \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$$

Suma de complejos:

$$(a;b) + (c;d) = (a + c ; b + d)$$

lo cual significa que la suma de dos números complejos es un número complejo cuya parte real es la suma de las partes reales de los complejos sumandos y la parte imaginaria, la suma de las correspondientes partes imaginarias.

Propiedades de la suma de complejos:

- 1) La suma de complejos es una ley interna: (se suman elementos de un determinado conjunto y el resultado se obtiene en el mismo conjunto)
- 2) La suma es conmutativa, como consecuencia de la propiedad de la suma entre números reales.
- 3) La suma es asociativa, por las mismas consideraciones que en 2).
- 4) Existe elemento neutro en la operación: el complejo nulo (0,0), que verifica

CONJUNTOS NUMÉRICOS (del número Natural al Número Complejo)

carlos alfredo lópez

$$(a,b) + (0,0) = (a+0, 0+b) = (a,b)$$

- 5) Cada complejo $z = (a,b)$ tiene un inverso aditivo u opuesto: el complejo $(-a,-b)$, que verifica: $(a,b) + (-a,-b) = (a-a, b-b) = (0,0)$. *(la suma de un complejo con su inverso aditivo da como resultado el elemento neutro de la operación).*

Producto de complejos:

Se define

$$(a;b) \bullet (c;d) = (a \bullet c - b \bullet d ; a \bullet d + b \bullet c)$$

Propiedades del producto de complejos.

1) Propiedad conmutativa:

$$\begin{aligned} (a;b) \bullet (c;d) &= (a \bullet c - b \bullet d ; a \bullet d + b \bullet c) \\ (c;d) \bullet (a;b) &= (c \bullet a - d \bullet b ; c \bullet b + d \bullet a) \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la propiedad conmutativa de la suma y producto de los números reales será:

$$\begin{aligned} a \bullet c - b \bullet d &= c \bullet a - d \bullet b \\ a \bullet d + b \bullet c &= d \bullet a + c \bullet b = c \bullet b + d \bullet a \end{aligned}$$

2) Propiedad asociativa:

$$[(a;b) \bullet (c;d)] \bullet (e;f) = (a;b) \bullet [(c;d) \bullet (e;f)]$$

Desarrollando el primer miembro, obtenemos:

$$\begin{aligned} [(a;b) \bullet (c;d)] \bullet (e;f) &= (a \bullet c - b \bullet d ; a \bullet d + b \bullet c) \bullet (e;f) = \\ &= [(a \bullet c - b \bullet d) \bullet e - (a \bullet d + b \bullet c) \bullet f ; (a \bullet c - b \bullet d) \bullet f + (a \bullet d + b \bullet c) \bullet e] = \\ &= [a \bullet c \bullet e - b \bullet d \bullet e - a \bullet d \bullet f - b \bullet c \bullet f ; a \bullet c \bullet f - b \bullet d \bullet f + a \bullet d \bullet e + b \bullet c \bullet e]. \end{aligned}$$

mientras que, operando en el segundo miembro

$$\begin{aligned} (a;b) \bullet [(c;d) \bullet (e;f)] &= (a;b) \bullet [c \bullet e - d \bullet f ; c \bullet f + d \bullet e] = \\ &= [a \bullet (c \bullet e - d \bullet f) - b \bullet (c \bullet f + d \bullet e) ; a \bullet (c \bullet f + d \bullet e) + b \bullet (c \bullet e - d \bullet f)] = \\ &= [a \bullet c \bullet e - a \bullet d \bullet f - b \bullet c \bullet f - b \bullet d \bullet e ; a \bullet c \bullet f + a \bullet d \bullet e + b \bullet c \bullet e - b \bullet d \bullet f] \end{aligned}$$

comparando ambos resultados, se verifica que la propiedad se cumple.

3) Existencia del elemento neutro:

Si $z = (x,y)$ es neutro para la multiplicación, deber cumplirse:

$$(a;b) \bullet (x;y) = (x;y) \bullet (a;b) = (a;b)$$

$$(a;b) \in C^* \quad / \quad C^* = C - \{(0;0)\}$$

Efectuando el producto del primer miembro:

$$(ax - by ; ay + bx) = (a;b)$$

por igualdad de componentes

$$\begin{cases} ax - by = a \\ ay + bx = b \end{cases} \quad \text{o bien} \quad \begin{cases} ax - by = a \\ bx + ay = b \end{cases}$$

Resolviendo el sistema *(realizarlo como actividad)*, obtenemos $(x;y) = (1;0)$ el elemento neutro de la multiplicación entre complejos.

CONJUNTOS NUMÉRICOS (del número Natural al Número Complejo)

carlos alfredo lópez

4) Existencia de inverso multiplicativo:

Dado $z = (a;b) = (0;0)$

Si $z^{-1} = \frac{1}{z} = (x, y)$ existe, debe cumplirse:

$$(a;b) \bullet (x;y) = (x;y) \bullet (a;b) = (1;0)$$

Planteando la multiplicación del primer miembro, igualando componentes con $(1,0)$ y resolviendo el sistema de ecuaciones lineales resultante (*hacerlo como actividad*) se obtiene el inverso multiplicativo de z :

$$z^{-1} = (x, y) = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2} \right)$$

5) La multiplicación de complejos es distributiva con respecto a la suma.

$$\begin{aligned} [(a;b) + (c;d)] \bullet (e;f) &= [a+c ; b+d] \bullet (e;f) = \\ &= [(a+c) \bullet e - (b+d) \bullet f ; (a+c) \bullet f + (b+d) \bullet e] = \\ &= [a \bullet e + c \bullet e - b \bullet f - d \bullet f ; a \bullet f + c \bullet f + b \bullet e + d \bullet e]. \quad (1) \end{aligned}$$

aplicando la propiedad distributiva:

$$\begin{aligned} [(a;b) + (c;d)] \bullet (e;f) &= (a;b) \bullet (e;f) + (c;d) \bullet (e;f) = \\ &= [(a \bullet e - b \bullet f ; a \bullet f + b \bullet e) + (c \bullet e - d \bullet f ; c \bullet f + d \bullet e)] = \\ &= [a \bullet e - b \bullet f + c \bullet e - d \bullet f ; a \bullet f + b \bullet e + c \bullet f + d \bullet e]. \quad (2) \end{aligned}$$

Siendo iguales (1) y (2), queda verificada la validez de la propiedad.

Diferencia de Números Complejos.

Dados dos complejos:

$$z_1 = (a;b) \text{ y } z_2 = (c;d)$$

resulta $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$ es decir que podemos expresar la diferencia como la suma de z_1 y el inverso aditivo de z_2 :

$$\begin{aligned} z_1 - z_2 &= (a;b) - (c;d) = (a;b) + (-c;-d) \\ z_1 - z_2 &= (a-c ; b-d) \end{aligned}$$

Conjugado de un Número Complejo.

Si $z = (a;b)$ definimos como conjugado de z al número complejo \bar{z} que tiene la misma componente real y opuesta la componente imaginaria.

$$\bar{z} = (a;-b)$$

Ejemplo:

CONJUNTOS NUMÉRICOS (del número Natural al Número Complejo)

carlos alfredo lópez

$$\text{Si } z = (1,3) \quad ; \quad \bar{z} = (1;-3)$$

$$\text{Si } z = (-1;3) \quad ; \quad \bar{z} = (-1;-3)$$

Cociente de Números Complejos.

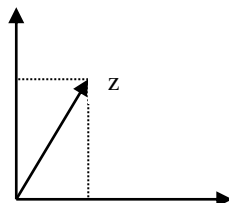
$$\text{Si } z_1 = (a;b) \quad \text{y} \quad z_2 = (c;d) \neq (0;0)$$

Entonces:

$$\frac{z_1}{z_2} = z_1 \cdot z_2^{-1} = (a,b) \cdot \left(\frac{c}{c^2 + d^2}, \frac{-d}{c^2 + d^2} \right) = \left(\frac{ac + bd}{c^2 + d^2}, \frac{bc - ad}{c^2 + d^2} \right)$$

Forma binómica de los números complejos.

Representamos un complejo geoméricamente por un punto $z = (a;b)$ del plano al que llamamos imagen o afijo del mismo.



Los complejos de la forma $(a,0)$ que corresponden al eje de abscisas tienen su parte imaginaria nula; para ellos se cumple:

$$(a;0) + (b;0) = (a+b;0)$$

$$(a;0) \cdot (b;0) = (a \cdot b ; 0)$$

o sea que, los complejos que tienen la parte imaginaria igual a cero se suman y multiplican entre sí, igual que los números reales; por la razón expuesta podemos escribir:

$$(a;0) = a$$

es decir que puede expresarse el número real como un caso particular de número complejo; el que tiene $\text{Im}(z) = 0$.

En particular, entonces:

$$(1;0) = 1 \quad ; \quad (0;0) = 0$$

Para resolver ecuaciones como la planteada al comienzo de este capítulo, es decir, ecuaciones del tipo: $x^2 + 1 = 0$ basta encontrar un número cuyo cuadrado sea igual a -1.

Consideremos para ello el número complejo $(0;1)$ definido como la unidad imaginaria y designado por convención mediante la letra i .

$$(0;1) = i$$

$$(0;1) \cdot (0;1) = i \cdot i = (-1,0) = -1$$

$$i \cdot i = i^2 = -1$$

CONJUNTOS NUMÉRICOS (del número Natural al Número Complejo)

carlos alfredo lópez

entonces, si $x = i$ o $x = -i$

$$x^2 = i \cdot i = (-i) \cdot (-i) = -1$$

y $x^2 + 1 = 0$ tiene como solución $x = \pm i$.

Teníamos que

$$(a;0) = a \quad \text{y} \quad (0;1) = i$$

efectuando el producto

$$(b;0) \cdot (0;1) = (0;b)$$

o lo que es igual:

$$b \cdot i = (0;b)$$

que expresamos:

$$(0;b) = bi.$$

Consideremos ahora los pares ordenados $(a;0)$ y $(0;b)$; sumando ambos:

$$(a;0) + (0;b) = (a+0 ; 0+b) = (a;b)$$

$$a + bi = (a;b) ,$$

o bien

$$z = a + bi$$

Potencias sucesivas de la unidad imaginaria.

Las sucesivas potencias de la unidad imaginaria, pueden calcularse con relativa facilidad, si se tiene en cuenta que:

$$i^0 = 1$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \cdot (-1) = 1 = i^0$$

de i^4 en adelante se repiten los valores

$$i^4 = 1 \quad i^5 = i \quad i^6 = -1 \quad i^7 = -i$$

Si el exponente es de la forma $4k$ con $k \in \mathbb{Z}$ (enteros), será :

$$i^{4k} = (i^4)^k = 1^k = 1$$

En general, si el exponente de i es $a \in \mathbb{N}$ efectuando la división por cuatro se tendrá:

$$a = 4q + r \quad \text{con } r < 4$$

$$i^a = i^{(4q+r)} = i^{4q} \cdot i^r = 1 \cdot i^r = i^r$$

Ejemplo:

$$\text{Calcular } i^{97} = i^{24 \cdot 4} \cdot i^1 = (i^4)^{24} \cdot i^1 = i$$

Operaciones con números complejos expresados en forma binómica.

CONJUNTOS NUMÉRICOS (del número Natural al Número Complejo)

carlos alfredo lópez

La conveniencia de la forma binómica se pone de manifiesto al operar, evitando hacerlo con los pares ordenados, cuyo manejo es más laborioso.

Suma de complejos en forma binómica:

$$\text{Sean } z_1 = (a+bi) \text{ y } z_2 = (c+di)$$

$$z_1 + z_2 = (a+c) + (b+d)i$$

Resta de complejos en forma binómica:

$$\text{Sean } z_1 = (a+bi) \text{ y } z_2 = (c+di)$$

$$z_1 - z_2 = (a+bi) - (c+di) = (a-c) + (b-d)i$$

Producto de complejos expresados en forma binómica:

$$\text{Sean } z_1 = (a+bi) \text{ y } z_2 = (c+di)$$

$$z_1 \cdot z_2 = (a+bi) \cdot (c+di) = a \cdot c + a \cdot di + b \cdot ci + bi \cdot di =$$

$$= a \cdot c + (a \cdot d + b \cdot c)i + b \cdot d i^2 =$$

$$= a \cdot c + (a \cdot d + b \cdot c)i - b \cdot d =$$

$$= (a \cdot c - b \cdot d) + (a \cdot d + b \cdot c)i$$

Cuando operamos con complejos expresados en forma de pares ordenados, definimos la operación de producto como:

$$(a;b) \cdot (c;d) = (a \cdot c - b \cdot d ; a \cdot d + b \cdot c)$$

lo que significa que coinciden esta definición y el resultado de la operación efectuada con los complejos expresados en forma binómica.

Complejo Conjugado:

De acuerdo a lo expresado para la forma de pares ordenados, el conjugado de un complejo $z = a+bi$ es $\bar{z} = a-bi$

Actividad: dibujar el número complejo $z = 3+4i$ y su complejo conjugado

Propiedades del conjugado de un complejo:

- 1) La suma de dos complejos conjugados es igual al duplo de la parte real.

$$z + \bar{z} = (a + bi) + (a - bi) = 2a = 2 \operatorname{Re}(z)$$
- 2) El producto de dos complejos conjugados es un número real positivo e igual a la suma de los cuadrados de sus componentes real e imaginaria.

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = a^2 + b^2 \geq 0$$
- 3) El conjugado de una suma de complejos es igual a la suma de los conjugados:

CONJUNTOS NUMÉRICOS (del número Natural al Número Complejo)

carlos alfredo lópez

$$\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$$

Actividad: verificar la validez de esta propiedad.

- 4) El conjugado de un producto de complejos es igual al producto de los conjugados de los factores:

$$\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$$

Actividad: verificar la validez de esta propiedad.

Producto de un complejo por su conjugado.

En particular, el producto de un complejo por su conjugado, es un número real. En efecto;

$$z \cdot \bar{z} = (a + bi) \cdot (a - bi) = (a^2 + b^2) + (-a \cdot b + b \cdot a)i$$

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$$

Esta propiedad es de utilidad como veremos, para la operación de cociente.

Cociente de complejos expresados en forma binómica.

Sean $z_1 = (a + bi)$ y $z_2 = (c + di)$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di}$$

Con el objeto de eliminar la unidad imaginaria del denominador del segundo miembro, procedemos a multiplicar en el mismo numerador y denominador por el conjugado del denominador:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)(c - di)}{(c + di)(c - di)} = \frac{ac - adi + cbi - bdi}{c^2 + d^2} = \frac{(ac + bd) + (cb - ad)i}{c^2 + d^2}$$

Potenciación de números complejos.

En forma binómica suele calcularse únicamente (por problemas de practicidad) el cuadrado y el cubo de un binomio por el procedimiento de potenciación conocido. Para exponentes mayores, el cálculo se torna engorroso y resulta práctico utilizar la forma trigonométrica que veremos más adelante.

Sea $z = (a + bi)$; recordando que $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

resultará :

$$\begin{aligned} z^3 &= a^3 + 3a^2bi + 3ab^2i^2 + b^3i^3 \\ z^3 &= a^3 + 3a^2bi - 3ab^2 - b^3i \\ z^3 &= (a^3 - 3ab^2) + (3a^2b - b^3)i \end{aligned}$$

CONJUNTOS NUMÉRICOS
(del número Natural al Número Complejo)

carlos alfredo lópez

Ejemplo:

Dado $z = (1-3i)$ Calcular z^3

$$\begin{aligned} z^3 &= (1-3i)^3 = 1^3 - 3 \cdot 1^2 \cdot 3i + 3 \cdot 1 \cdot 3^2 i^2 - 3^3 i^3 \\ &= 1 - 9i + 27i^2 - 27i^3 \\ &= 1 - 9i - 27 + 27i \\ z^3 &= -26 + 18i \end{aligned}$$

Módulo de un Complejo.

Módulo de un complejo es la raíz cuadrada positiva de la suma de los cuadrados de las componentes real e imaginaria.

$$|z| = +\sqrt{a^2 + b^2}$$

y corresponde numéricamente a la distancia del punto al origen,

El producto de cualquier complejo por su conjugado es igual al cuadrado del módulo:

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$$

Propiedades del módulo de un complejo:

1) El módulo de todo complejo es mayor o igual que su parte real y mayor o igual que su parte imaginaria.

$$\operatorname{Re}(z) \leq |z| \quad ; \quad \operatorname{Im}(z) \leq |z|$$

2) El módulo de la suma de dos complejos es menor o igual que la suma de sus módulos.

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

3) El módulo del producto de dos complejos es igual al producto de los módulos.

$$|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$$

4) El módulo de una potencia de exponente natural es igual a la potencia del módulo.

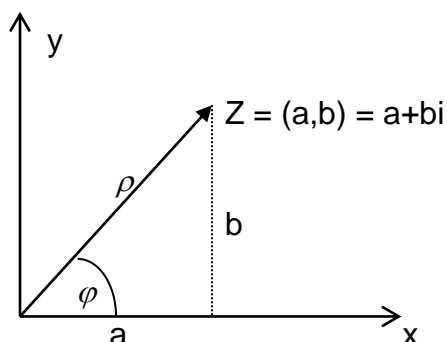
$$|z^n| = |z|^n$$

CONJUNTOS NUMÉRICOS (del número Natural al Número Complejo)

carlos alfredo lópez

Forma polar o trigonométrica de un número complejo.

Cada número complejo puede representarse por uno y sólo uno de los puntos del denominado plano complejo. Esto permite asociar a cada número complejo un vector cuyo origen coincide con el origen de coordenadas y cuyo extremo coincide con el punto que determina el complejo que recibe el nombre de afijo del complejo.



Sea en coordenadas cartesianas un complejo $z = a + bi$, el número real no negativo $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$ recibe el nombre de módulo del complejo y se lo representa de la siguiente manera: $\rho = |z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$, siendo su

valor la longitud del vector asociado al complejo. El ángulo φ , que forma el semieje positivo de x con la dirección del vector recibe el nombre de argumento del número complejo z.

$$\varphi = \arg z$$

Estableciendo las correspondientes relaciones trigonométricas:

$$\begin{aligned} \cos \varphi &= \frac{a}{\rho} & ; & & \sin \varphi &= \frac{b}{\rho} & ; & \text{obtenemos:} \\ a &= \rho \cdot \cos \varphi & ; & & b &= \rho \cdot \sin \varphi \end{aligned}$$

por lo cual el número complejo de la forma $z = a + bi$, puede escribirse:

$$z = a + bi = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

en su forma **trigonométrica o polar**.

Nota: Algunos autores diferencian la forma trigonométrica de la polar, dando a esta última el aspecto $z = \rho_{\varphi}$; a los efectos de nuestro estudio esta diferenciación no se considera de importancia.

CONJUNTOS NUMÉRICOS
(del número Natural al Número Complejo)

carlos alfredo lópez

Ejemplo:

Si $z = 1+i$,

$$\rho = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} ; \cos \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} ; \quad \text{sen } \varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\varphi = \arccos \frac{\sqrt{2}}{2} = \arcsen \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\pi}{4}$$

resultando:

$$z = \sqrt{2} \left[\cos \frac{\pi}{4} + i \text{sen} \frac{\pi}{4} \right]$$

Si k es un número entero, se dice que dos ángulos α y β son congruentes si difieren en $2k\pi$

$$\alpha - \beta = 2k\pi \quad ; \quad \text{con } K = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$$

lo que significa:

$$\alpha = \beta + 2k\pi$$

es decir que la medida de un ángulo α es igual a la de otro β más un número entero cualquiera de giros completos.

Puede entonces escribirse:

$$z = a + bi = \rho(\cos \varphi + i \text{sen } \varphi) = \rho [\cos(\varphi + 2k\pi) + i \text{sen}(\varphi + 2k\pi)] \quad \text{con } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

lo que nos indica que la forma polar o trigonométrica de un complejo puede expresarse de infinitos modos haciendo variar $k \in \mathbb{Z}$ (*conjunto de los números enteros*).

Nota: al valor φ se lo suele llamar argumento principal del complejo

Ejemplo:

Determinar la forma polar del siguiente complejo;

$$z = -2 + 2i$$

$$\rho = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{2}{-2} = -1 \Rightarrow \varphi = \arctg(-1) = \frac{3}{4}\pi \text{ (argumento principal)}$$

resultando entonces:

$$z = -2+2i = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{3}{4}\pi + i \text{sen} \frac{3}{4}\pi \right)$$

CONJUNTOS NUMÉRICOS (del número Natural al Número Complejo)

carlos alfredo lópez

Operaciones con números complejos expresados en forma polar o trigonométrica.

Multiplicación.

Sean:

$$z_1 = \rho_1 (\cos \varphi_1 + i \operatorname{sen} \varphi_1)$$

$$z_2 = \rho_2 (\cos \varphi_2 + i \operatorname{sen} \varphi_2)$$

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= [\rho_1 (\cos \varphi_1 + i \operatorname{sen} \varphi_1)] \cdot [\rho_2 (\cos \varphi_2 + i \operatorname{sen} \varphi_2)] = \\ &= \rho_1 \rho_2 (\cos \varphi_1 + i \operatorname{sen} \varphi_1) \cdot (\cos \varphi_2 + i \operatorname{sen} \varphi_2) = \\ &= \rho_1 \rho_2 [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 - \operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2)] + [i(\operatorname{sen} \varphi_1 \cos \varphi_2 + \cos \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2)] \\ &= \rho_1 \rho_2 [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i(\operatorname{sen}(\varphi_1 + \varphi_2))] \end{aligned}$$

es decir que el producto de dos números complejos dados en forma polar es otro número complejo cuyo módulo es el producto de los módulos y cuyo argumento es la suma de los argumentos de los complejos dados.

Ejemplo:

$$\text{Si } z_1 = 2 (\cos 15^\circ + i \operatorname{sen} 15^\circ)$$

$$z_2 = 3 (\cos 30^\circ + i \operatorname{sen} 30^\circ)$$

$$z_1 \cdot z_2 = 6 (\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ)$$

División:

$$\text{Sean: } z_1 = \rho_1 (\cos \varphi_1 + i \operatorname{sen} \varphi_1)$$

$$z_2 = \rho_2 (\cos \varphi_2 + i \operatorname{sen} \varphi_2) \quad \text{con } z_2 \neq 0$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1 (\cos \varphi_1 + i \operatorname{sen} \varphi_1)}{\rho_2 (\cos \varphi_2 + i \operatorname{sen} \varphi_2)} \quad ; \text{ para realizar la operación es necesario}$$

multiplicar y dividir el segundo miembro por el complejo conjugado del denominador (a menos de su módulo), es decir, multiplicar y dividir por $(\cos \varphi_2 - i \operatorname{sen} \varphi_2)$, resultando:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{\rho_1 (\cos \varphi_1 + i \operatorname{sen} \varphi_1)}{\rho_2 (\cos \varphi_2 + i \operatorname{sen} \varphi_2)} \cdot \frac{(\cos \varphi_2 - i \operatorname{sen} \varphi_2)}{(\cos \varphi_2 - i \operatorname{sen} \varphi_2)} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot \frac{(\cos \varphi_1 + i \operatorname{sen} \varphi_1) \cdot (\cos \varphi_2 - i \operatorname{sen} \varphi_2)}{\cos^2 \varphi_2 + \operatorname{sen}^2 \varphi_2} \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot (\cos \varphi_1 + i \operatorname{sen} \varphi_1) \cdot (\cos \varphi_2 - i \operatorname{sen} \varphi_2) = \\ &= \frac{\rho_1}{\rho_2} \cdot [(\cos \varphi_1 \cos \varphi_2 + \operatorname{sen} \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2) + i(\operatorname{sen} \varphi_1 \cos \varphi_2 - \cos \varphi_1 \operatorname{sen} \varphi_2)] = \end{aligned}$$

CONJUNTOS NUMÉRICOS (del número Natural al Número Complejo)

carlos alfredo lópez

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \bullet [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \operatorname{sen}(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

El cociente de dos números complejos es otro complejo cuyo módulo es el cociente de los módulos dados y cuyo argumento es la diferencia entre los ángulos del dividendo y del divisor.

Ejemplo:

$$z_1 = 4 (\cos 60^\circ + i \operatorname{sen} 60^\circ)$$

$$z_2 = 2 (\cos 15^\circ + i \operatorname{sen} 15^\circ)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 2 (\cos 45^\circ + i \operatorname{sen} 45^\circ)$$

Potenciación de exponente entero: Fórmula de De Moivre.

Sea el complejo $z = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$; si lo elevamos a una potencia $n > 0$, resulta:

$$\begin{aligned} z^n &= [\rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)]^n = [\rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)] \cdot \dots \cdot [\rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)] \\ z^n &= \rho \bullet \rho \dots \bullet \rho [(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi) \dots (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)] = \\ z^n &= \rho^n (\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi) \end{aligned}$$

esta fórmula se llama de **De Moivre** y permite calcular en forma trigonométrica las potencias de exponente natural de los números complejos.

La potencia n-sima o de orden n de un número complejo z expresado en forma polar, es un número complejo que tiene por módulo la potencia n-sima del módulo de z y por argumento el producto del argumento φ por n.

La validez de la fórmula de **De Moivre** para cualquier exponente n, debe ser demostrada; para ello utilizaremos el Principio de Inducción Completa:

Sea

$$z^n = \rho^n (\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi)$$

1) Verificamos la validez para $n = 1$

$$z^1 = \rho^1 (\cos 1\varphi + i \operatorname{sen} 1\varphi) = \rho (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$$

obtenemos la expresión trigonométrica de un complejo.

CONJUNTOS NUMÉRICOS
(del número Natural al Número Complejo)

carlos alfredo lópez

2) Suponemos que la expresión es verdadera para $n = k$. (cualquiera)

$$z^k = \rho^k (\cos k\varphi + i \operatorname{sen} \varphi) \quad (\text{Hipótesis Inductiva}).$$

3) Debemos demostrar que:

$$z^{k+1} = \rho^{k+1} [\cos(k+1)\varphi + i \operatorname{sen}(k+1)\varphi]$$

Teniendo en cuenta el producto de potencias de igual base:

$$z^k \cdot z = \rho^k (\cos k\varphi + i \operatorname{sen} k\varphi) \cdot \rho (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$$

$$z^k \cdot z = \rho^{k+1} \cdot (\cos k\varphi + i \operatorname{sen} k\varphi) \cdot (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$$

$$z^k \cdot z = \rho^{k+1} \cdot [(\cos k\varphi \cos \varphi - \operatorname{sen} k\varphi \operatorname{sen} \varphi) + i(\cos k\varphi \operatorname{sen} \varphi + \operatorname{sen} k\varphi \cos \varphi)]$$

$$z^k \cdot z = \rho^{k+1} \cdot [\cos(k\varphi + \varphi) + i \operatorname{sen}(k\varphi + \varphi)]$$

$$z^k \cdot z = z^{k+1} = \rho^{k+1} \cdot [\cos(k+1)\varphi + i \operatorname{sen}(k+1)\varphi]$$

En consecuencia queda demostrado que la fórmula de **De Moivre** es verdadera cualquiera sea $n \in \mathbb{N}$.

La formula de De Moivre también es válida si n es negativo o nulo, es decir, cuando $n \in \mathbb{Z}$.

Si $z = \rho (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$

$$z^{-1} = [\rho (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)]^{-1} =$$

$$z^{-1} = \frac{1}{\rho} \cdot \frac{1}{\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi}$$

$$(z^{-1})^n = \frac{1}{\rho^n} \frac{1}{(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)^n} = \frac{1}{\rho^n (\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi)} =$$

$$z^{-n} = \frac{1}{\rho^n} \frac{(\cos n\varphi - i \operatorname{sen} n\varphi)}{(\cos n\varphi + i \operatorname{sen} n\varphi)(\cos n\varphi - i \operatorname{sen} n\varphi)} =$$

recordando que:

$$\cos(-\varphi) = \cos \varphi \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(-\varphi) = -\operatorname{sen} \varphi$$

$$z^{-1} = \rho^{-1} [\cos(-\varphi) + i \operatorname{sen}(-\varphi)]$$

CONJUNTOS NUMÉRICOS
(del número Natural al Número Complejo)

carlos alfredo lópez

$$(z^{-1})^n = \{\rho^{-1} [(\cos(-\varphi) + i \operatorname{sen}(-\varphi))]\}^n$$

$$z^{-n} = \rho^{-n} [\cos(-n\varphi) + i \operatorname{sen}(-n\varphi)]$$

Ejemplo 1:

Dado $z = 1 + i$, Calcular z^6 aplicando la fórmula de **De Moivre**

Llevamos z a la forma polar.

$$a = 1 \quad ; \quad b = 1$$

$$\rho = |z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$z^6 = [2^{\frac{1}{2}} (\cos 6\frac{\pi}{4} + i \operatorname{sen} 6\frac{\pi}{4})]$$

$$z^6 = \left[2^{\frac{1}{2}} \left(\cos \frac{3}{2}\pi + i \operatorname{sen} \frac{3}{2}\pi \right) \right]$$

Ejemplo 2:

$$\text{Si } z = 4 (\cos 70^\circ + i \operatorname{sen} 70^\circ)$$

hallar z^{-3} .

$$z^{-3} = 4^{-3} \bullet [\cos (-3 \cdot 70^\circ) + i \operatorname{sen} (-3 \cdot 70^\circ)]$$

$$z^{-3} = \frac{1}{64} \bullet [\cos (-210^\circ) + i \operatorname{sen} (-210^\circ)]$$

Radicación de Complejos.

Dado un complejo $z = \rho \varphi$ queremos encontrar otro complejo $z_0 = r_w$ cuya potencia n -sima ($n \in \mathbb{N}$) coincida con el primero.

$$z_0^n = z$$

$$[r(\cos w + i \operatorname{sen} w)]^n = \rho (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi) \quad (1)$$

$$r(\cos w + i \operatorname{sen} w) = \sqrt[n]{\rho} (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$$

de (1) según la fórmula de De Moivre

$$r^n (\cos nw + i \operatorname{sen} nw) = \rho (\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$$

CONJUNTOS NUMÉRICOS

(del número Natural al Número Complejo)

carlos alfredo lópez

Teniendo en cuenta la condición de igualdad de dos números complejos (módulos iguales y argumentos iguales o que difieren en múltiplos de 2π , deber ser:

$$r^n = \rho \quad ; \quad nw = \varphi + 2k\pi$$

$$\text{o sea: } r = \sqrt[n]{\rho} \quad ; \quad w = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$$

entonces:

$$r (\cos w + i \sen w) = \sqrt[n]{\rho} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sen \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right)$$

Mientras en esta última expresión, el módulo de la raíz buscada está perfectamente determinado hallando la raíz aritmética n-sima de ρ ; para hallar el argumento, dado que el mismo depende del valor que asignemos a $k \in \mathbb{Z}$;

resultarán infinitos valores para la raíz. En realidad, esto no ocurre, ya que el número de raíces se obtiene, dando a k n valores que van desde 0 hasta $(n-1)$ o desde 1 hasta n ; procediendo de acuerdo a lo indicado;

para $k = 0$ el argumento será: $\frac{\varphi + 2 \cdot 0 \cdot \pi}{n} = \frac{\varphi}{n}$

para $k = 1$ resultará: $\frac{\varphi + 2 \cdot 1 \cdot \pi}{n} = \frac{\varphi + 2\pi}{n}$

" $k = 2$ resultará: $\frac{\varphi + 2 \cdot 2 \cdot \pi}{n} = \frac{\varphi + 4\pi}{n}$

" $k = 3$ " $\frac{\varphi + 2 \cdot 3 \cdot \pi}{n} = \frac{\varphi + 6\pi}{n}$

" $k = n-1$ " $\frac{\varphi + 2 \cdot (n-1) \cdot \pi}{n}$

si k toma el valor n : $\frac{\varphi + 2 \cdot n \cdot \pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + \frac{2 \cdot n \cdot \pi}{n} = \frac{\varphi}{n} + 2\pi = \frac{\varphi}{n}$; es decir el mismo argumento que para $k = 0$

En consecuencia; todo número complejo no nulo ρ_φ tiene n raíces que se obtienen: el módulo común a todas como $\sqrt[n]{\rho}$ y los argumentos para cada una de ellas, dando valores a k desde 0 hasta $n-1$. Los argumentos, para valores sucesivos de k , difieren en $\frac{2\pi}{n}$. Por lo expuesto, las

CONJUNTOS NUMÉRICOS

(del número Natural al Número Complejo)

carlos alfredo lópez

raíces tienen sus afijos sobre la circunferencia de radio $\sqrt[n]{\rho}$ y son los vértices de un polígono regular de n lados

Ejemplo:

Si $z = 8\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$; calcular $\sqrt[3]{z}$.

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{8}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{3}\right); \text{ para } k = 0, 1, 2$$

$$\text{para } k=0 \quad \sqrt[3]{z} = 2\left(\cos\frac{\pi}{9} + i\sin\frac{\pi}{9}\right)$$

$$\text{para } k=1 \quad \sqrt[3]{z} = 2\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{7}{9}\pi + i\sin\frac{7}{9}\pi\right)$$

$$\text{para } k=2 \quad \sqrt[3]{z} = 2\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3} + 4\pi}{3} + i\sin\frac{\frac{\pi}{3} + 4\pi}{3}\right) = 2\left(\cos\frac{13}{9}\pi + i\sin\frac{13}{9}\pi\right)$$

Para representarlas, trazamos una circunferencia de centro O y radio 2. Las tres raíces son los vértices del triángulo equilátero correspondiente.

Actividad: (Realizar la representación)

Raíces primitivas de la unidad.

Sea el caso de hallar las raíces de orden 3 del complejo $z = 1 + 0i$ o sea, hallar $\sqrt[3]{(1)}$. Para distinguir la raíz real o raíz aritmética de la raíz general, designamos a ésta entre dobles paréntesis:

Calcularemos entonces:

$$\sqrt[3]{z} \text{ con } z = 1 + 0i$$

siendo $\rho = 1$ $\varphi = 0^\circ$.

$$\text{para } k = 0; z_0 = \cos 0^\circ + i\sin 0^\circ = 1$$

$$\text{para } k = 1; z_1 = \cos\frac{0^\circ + 360^\circ}{3} + i\sin\frac{0^\circ + 360^\circ}{3} = \cos 120^\circ + i\sin 120^\circ$$

CONJUNTOS NUMÉRICOS (del número Natural al Número Complejo)

carlos alfredo lópez

para $k = 2$; $z_2 = \cos \frac{0^\circ + 720^\circ}{3} + i \operatorname{sen} \frac{0^\circ + 720^\circ}{3} = \cos 240^\circ + i \operatorname{sen} 240^\circ$

Puede verificarse que las raíces obtenidas para $k=1$ y $k=2$ no aparecen cuando se calculan las raíces de la unidad de orden menor que 3, pero la primera, obtenida para $k=0$, sí (*realizar como actividad el correspondiente cálculo*); por ese motivo se dice que z_1 y z_2 son raíces primitivas de orden 3.

En consecuencia, definimos como raíces primitivas de la unidad de orden n , a las raíces de ese orden que no son raíces de la unidad para órdenes inferiores a n .

Forma exponencial de los números complejos.

Habiendo definido las operaciones fundamentales de los números complejos, consideremos ahora la potencia de exponente complejo. Para su definición deberá tenerse en cuenta que ella conserve las propiedades de la potenciación.

Como primer paso consideraremos la potencia de base e y exponente imaginario puro, definiéndola de manera tal que satisfaga la propiedad fundamental de la potenciación: el producto de potencias de igual base es otra potencia de la misma base, tal que su exponente es la suma de los exponentes.

Si definimos $e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y$, la propiedad enunciada se verifica. La potencia así definida es un número complejo de módulo igual a la unidad y argumento igual a la parte imaginaria del exponente.

Si nos damos ahora el complejo $e^{iy_1} = \cos y_1 + i \operatorname{sen} y_1$ resultará:

$$e^{iy} \cdot e^{iy_1} = \cos(y + y_1) + i \operatorname{sen}(y + y_1)$$

$$e^{iy} \cdot e^{iy_1} = e^{i(y+y_1)}$$

generalizando la expresión para potencias de base e y exponente complejo:

$$e^z = e^{(x+iy)} = e^x \cdot e^{iy} = e^x (\cos y + i \operatorname{sen} y);$$

si recordamos que $z = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi)$, e^x será el módulo del complejo e^z .

podemos expresar entonces: $z = \rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi) = \rho e^{i\varphi}$;

$z = \rho e^{i\varphi}$ es la forma exponencial de los complejos.

Como $\rho(\cos \varphi + i \operatorname{sen} \varphi) = \rho[\cos(\varphi + 2k\pi) + i \operatorname{sen}(\varphi + 2k\pi)]$ con $k \in \mathbb{Z}$, vale $\rho e^{i\varphi} = \rho e^{i(\varphi + 2k\pi)}$; quedando establecido que dos complejos son iguales, si y solo si, sus módulos son iguales y sus argumentos difieren en un múltiplo entero de 2π .

CONJUNTOS NUMÉRICOS
(del número Natural al Número Complejo)

carlos alfredo lópez

Ejemplo 1:

Si $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$, la forma exponencial será: $z = 2e^{i\pi/3}$

Ejemplo 2:

Si $z = e^{2\pi i}$, la forma trigonométrica será: $z = \cos 2\pi + i\sin 2\pi = 1$

Forma exponencial del producto:

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 e^{i\varphi_1} \cdot \rho_2 e^{i\varphi_2} = \rho_1 \rho_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

Forma exponencial del cociente:

$$z_1 / z_2 = \rho_1 e^{i\varphi_1} / \rho_2 e^{i\varphi_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}$$

Forma exponencial de la potencia:

$$z^n = (\rho e^{i\varphi})^n = \rho^n e^{ni\varphi}$$

Logaritmicación en complejos.

Por definición, el logaritmo natural de un complejo no nulo $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho e^{i\varphi}$, debe ser un complejo de la forma $x + yi$, tal que:

$$\ln z = \ln \rho + \ln e^{i\varphi} = \ln \rho + i\varphi$$

y recordando que $\varphi = \varphi + 2k\pi$

$$\ln z = \ln \rho + i(\varphi + 2k\pi); \text{ con } k \in \mathbb{Z}$$

expresión que nos da los infinitos valores del logaritmo, que coinciden en la parte real y son distintos en su parte imaginaria, dependiendo esta componente del valor de k .

Ejemplo:

Calcular $\ln(1+i)$:

$$\rho = |1+i| = \sqrt{2} \quad ; \quad \varphi = \frac{\pi}{4},$$

$$\ln(1+i) = \ln\sqrt{2} + i\left(\frac{\pi}{4} + 2k\pi\right)$$

CONJUNTOS NUMÉRICOS
(del número Natural al Número Complejo)

carlos alfredo lópez

CUESTIONARIO DE REPASO

- 1.- Definir los distintos conjuntos numéricos que conoce.
- 2.- Enunciar el Principio de Inducción Completa.
- 3.- Describir las operaciones con números reales y las principales propiedades de que gozan.
- 4.- Expresar que se entiende por densidad de los números racionales.
- 5.- Dar ejemplos de números racionales y de números irracionales.
- 6.- Explicar en que consiste la operación de racionalización de denominadores y los distintos casos que pueden presentarse.
- 7.- Dar el concepto de logaritmo, su cálculo y el mecanismo de cambio de base.
- 8.- Decir que tipo de operaciones matemáticas no se pueden resolver en el campo de los números reales.
- 8.- Definir número complejo.
- 10.- Definir complejo conjugado.
- 11.- Definir las operaciones entre complejos expresados en forma de pares ordenados.
- 12.- Definir complejo real y complejo imaginario puro.
- 13.- Describir el procedimiento para obtener la expresión binómica de un complejo.
- 14.- Definir módulo de un complejo.
- 15.- Describir la forma práctica de obtener las sucesivas potencias de la unidad imaginaria.

CONJUNTOS NUMÉRICOS
(del número Natural al Número Complejo)**carlos alfredo lópez**

16.- Describir la manera de obtener la forma trigonométrica de un número complejo.

17.- Explicar como deben ser los módulos y los argumentos de dos complejos, para que los mismos sean iguales?.

18.- Describir las expresiones que permiten hallar el producto y el cociente entre complejos.

19.- Explicar la fórmula de De Moivre y justifique su aplicación utilizando de Principio de Inducción Completa.

20.- Hallar la raíz n -sima de un complejo expresado en forma polar o trigonométrica.

21.- Representar las n raíces de un número complejo.

22.- Definir el concepto de raíces primitivas de la unidad.-

23. Definir las operaciones de complejos expresados en forma exponencial.

24-Explicar el mecanismo para obtener el logaritmo de un complejo.-

CONJUNTOS NUMÉRICOS
(del número Natural al Número Complejo)

carlos alfredo lópez

TRABAJO PRACTICO

CONJUNTOS NUMÉRICOS

1.- Demostrar aplicando el principio de inducción completa, la validez de:

a) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6}$

b) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2 \cdot (n+1)^2}{4}$

2.- Sean N, Z, Q, Q', R y P, respectivamente los conjuntos de los números naturales, enteros, racionales, irracionales, reales y primos. Estudiar las siguientes proposiciones y decir cuales son verdaderas y cuales falsas.

- | | | |
|-------------------------------|--------------------------------|---------------------------------|
| a) $-7 \notin \mathbb{N}$ | d) $-3 \in \mathbb{Q}$ | g) $\sqrt[3]{5} \in \mathbb{Z}$ |
| b) $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}'$ | e) $12 \in \mathbb{P}$ | h) $-6 \in \mathbb{Z}$ |
| c) $8 \in \mathbb{Z}$ | f) $\sqrt{-3} \in \mathbb{Q}'$ | i) $\sqrt{-3} \in \mathbb{R}$ |

3.- Escribir simbólicamente:

- a) a no es mayor que b. c) a es menor que b.
- b) a no es menor o igual que b. d) a es mayor que b.

4.- Escribir utilizando la notación de desigualdad, las siguientes relaciones geométricas:

- | | |
|---------------------------------|-------------------------|
| a) x está a la izquierda de -1. | c) x está entre 2 y 7. |
| b) x está a la derecha de -2. | d) x está entre -3 y 5. |

5. Resolver:

- a) $a^2 + a^2 + a^2 =$
- b) $a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 =$
- c) $a^3 : a =$
- d) $a^3 : a^{-3} =$
- e) $2 \cdot a^2 \cdot 3 \cdot a^3 \cdot a^4$
- f) $60 - \{(5 \cdot 2 + 14) : 8 - 2\} =$
- g) $(1/2)^3 + (5/2) - 1 + (-3/2)^3 =$
- h) $-2 + 3/5 - [-1 - (3/2 + 2)] =$

6) Calcular aplicando la definición de logaritmo:

- | | | | |
|----------------|----------------|-------------------------|---------------|
| a) $\log_2 32$ | b) $\log_3 81$ | c) $\log_2 \frac{1}{2}$ | d) $\log_4 4$ |
|----------------|----------------|-------------------------|---------------|

CONJUNTOS NUMÉRICOS
(del número Natural al Número Complejo)

carlos alfredo lópez

e) $\log_{49} \frac{1}{7}$

f) $\log_3 \sqrt[3]{9}$

g) $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt[4]{16}$

e) $\log_{1000} 10$

7) Aplicando la definición y las propiedades de los logaritmos, calcular:

a) $\log_2(16 \cdot 32)$

b) $\log_3 (81/27)$

c) $\log_2 4^3$

d) $\log_2 \sqrt[3]{8 \cdot a^4}$

8) Sabiendo que $\log_2 5 \cong 2,3$ calcular los siguientes logaritmos aplicando únicamente la definición y las propiedades de los logaritmos:

a) $\log_2 10$

b) $\log_2 40$

c) $\log_2 2,5$

d) $\log_2 25$

9) Calcular los siguientes logaritmos utilizando la fórmula de cambio de base (se suponen conocidos los logaritmos en base 10)

a) $\log_5 237$

b) $\log_{82} 384$

d) $\log_7 1000$

e) $\log_{23} 230$

10) Dados los siguientes números complejos:

$z_1 = 2 + 3i$; $z_2 = 3 - 4i$; $z_3 = -2 + 3i$; $z_4 = 5i$; calcular:

a) $z_2 - z_1 + z_3$

b) $z_4 + (z_3 - z_2)^2$

c) $\frac{2z_1}{3} + \bar{z}_2$

11. Hallar en forma trigonométrica las raíces tercera y cuarta respectivamente de los **COMPLEJOS**: $z_1 = 2 + 3i$; $z_2 = 3 - 4i$; $z_3 = -2 + 3i$

12. Hallar las raíces sextas de la unidad y demostrar que entre ellas están las raíces cuadradas y las raíces cúbicas de la unidad. Decir cuales son las raíces primitivas de orden seis.

13. Calcular los logaritmos de los siguientes complejos: $z_1 = 2 + 3i$; $z_2 = 3 - 4i$; $z_3 = -2 + 3i$

CONJUNTOS NUMÉRICOS
(del número Natural al Número Complejo)

carlos alfredo lópez

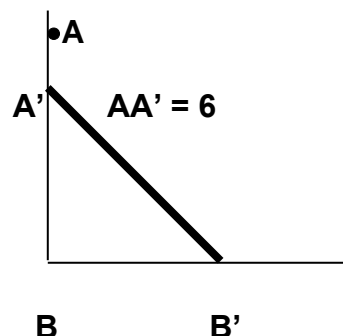
PROBLEMAS.

1. A un recipiente que contiene $\frac{3}{5}$ de litro de alcohol puro se le agrega un litro de agua destilada. Cuanta agua es necesario verter en otro recipiente que contiene $\frac{5}{7}$ litro de alcohol para que las mezclas resulten iguales?
2. Un señor sale a pasear a las 8 de la mañana a una velocidad uniforme de $\frac{4}{5}$ kilómetros/hora. Una hora después sale su hijo desde el mismo lugar y en la misma dirección caminando a una velocidad de $\frac{7}{4}$ kilómetros/hora. Lo habrá alcanzado antes de las 09h 45m?
3. Una máquina de hacer tornillos produce 72 unidades por minuto. Si la producción baja a 60 tornillos por minuto : cuál es el porcentaje de disminución ?
4. Un automóvil parte de la ciudad A recorriendo en línea recta 80 km. hasta la ciudad B. En B gira un ángulo de 90° y recorre en línea recta 60 km. hasta llegar a la ciudad C. Allí se da cuenta que existe un camino recto que une las ciudades A y C. Qué longitud tiene este camino ?
5. En el interior de un pentágono regular cuya apotema mide 3,44 m. se dibuja un cuadrado de 20 m de perímetro ; un lado del cuadrado coincide con uno de los lados del pentágono. Cuántos metros cuadrados de cerámica se necesitan para cubrir la superficie del pentágono que no incluye al cuadrado ?
- 5) Para orientar a los corredores de una regata se colocan a lo largo del canal una boya amarilla cada 150 metros y una boya azul cada 200 metros. Si la carrera es de 2000 metros:
 - a) Cuantas boyas amarillas y cuantas azules encontrarán?
 - b) Cuantas veces encontrarán dos boyas juntas?
- 6) En la Facultad funcionan 5 talleres: inglés, computación, coro, fotografía y deportes. El de inglés funciona día por medio, el de computación una vez cada tres días, el coro una vez cada cuatro días, el de fotografía una vez cada cinco días y el de deportes una vez cada seis días. El día 1º de Marzo de cada año comienzan las actividades conjuntas de todos los talleres y, a partir de esa fecha, comienza cada uno a funcionar con la frecuencia que se ha detallado, en días corridos, sin respetar domingos ni feriados.
Dar la fecha en que se volvieron a reunir todos los talleres simultáneamente.
- 7) Juan le lleva ocho años a su hermano Luis. Dentro de cuantos años la edad de Juan será el doble de la de Luis, si hace tres años era el triple?

CONJUNTOS NUMÉRICOS
(del número Natural al Número Complejo)

carlos alfredo lópez

- 8) Mucho antes que Pitágoras, los babilonios consideraron el siguiente problema. Un palo de longitud $AB = 30$ unidades, está apoyado unidades bre una pared vertical y se desliza de modo tal que su extremo superior desciende 6 unidades. Se desea saber cuanto se habrá deslizado el extremo inferior.



- 9) Si consideramos que la luz por su velocidad (300.000 km/seg) se propaga instantáneamente y la velocidad del sonido es de 340 m/seg; calcular el tiempo que se tardará en escuchar el trueno que acompaña a un rayo que ha caído a 10 km de distancia.
- 10) Si cada 100 unidades monetarias producen 6 de interés anual, calcular el capital que se necesitará para tener una renta anual de 100.000 unidades.
- 11) La sombra de una persona que mide 1,70 m. es de 95 cm. Calcular la altura de un árbol cuya sombra es de 2,60 metros.
- 12) Una persona comienza a caminar a una velocidad constante de 4 km/h.
Un cuarto de hora después sale otra persona caminando más rápido, pero también con velocidad constante y lo alcanza a los 50 minutos. Calcular la velocidad con que camina la segunda persona.
- 13) Si en una persona se ha medido en un cierto momento 81 pulsaciones por minuto; calcular, de mantenerse ese ritmo, el número de latidos del corazón por hora, por día y por año.
- 14) En un triángulo rectángulo, el cateto “b” es el doble del cateto “c”. Calcular cada uno de sus lados y la superficie sabiendo que el perímetro mide cuatro metros.