

75:12 ANÁLISIS NUMÉRICO**FACULTAD DE INGENIERIA
UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES****TRABAJO PRÁCTICO N° 1**
*2do Cuatrimestre 2020***Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales
“Conducción de calor 2D en un anillo”****INTRODUCCIÓN**

Vaca Muerta es la principal formación Shale con recursos no convencionales en nuestro país. Se ubica en la Cuenca Neuquina y cuenta con una superficie de 30 mil km², convirtiendo a la Argentina en el segundo país del mundo en gas no convencional, y en el cuarto, de petróleo.

A diferencia de los Yacimientos Convencionales (pozo vertical), en los No Convencionales de tipo Shale (pozo horizontal), la roca madre es de muy baja permeabilidad requiriendo estimulación hidráulica para poder producir. Este procedimiento se lo conoce como Fracking, y por medio de la inyección de agua (95%), arena (4,5%) y aditivos (0,5%), se fractura la roca generando canales de alta permeabilidad, permitiendo a los hidrocarburos fluir hacia el pozo y luego hacia la superficie.

La operación en Vaca Muerta consiste, en forma simplificada, de tres procesos centrales;

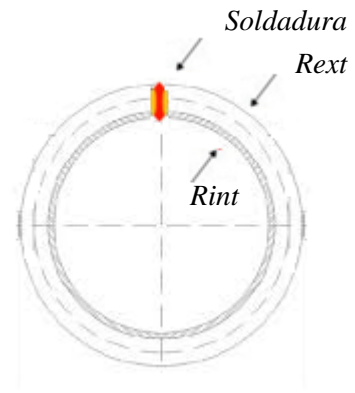
- Perforación (con equipos, herramientas y secuencias operativas similares a la de yacimientos convencionales),
- Completación o terminación (incluye el Fracking para drenar el hidrocarburo entrampado en la formación),
- Producción (los hidrocarburos fluyen desde aproximadamente unos 2.500 m de profundidad por presión natural hacia la superficie).

Los hidrocarburos producidos, son transportados por medio de tuberías hacia los centros de tratamiento. Para esta operación, se pueden utilizar los llamados *tubos soldados o con costuras*. La distribución de Temperaturas generada en los mismos por la soldadura durante la fabricación, será el objeto de análisis del presente trabajo.

El proceso de fabricación de estos tubos, requiere tener modelos térmicos de la costura soldada, como control de calidad para minimizar fallas y permitir que cumplan los ensayos de presión, temperatura y esfuerzo que impone la industria de aplicación.

El problema real de fabricación, es de alta complejidad y a los fines del presente trabajo práctico se utilizará un modelo simplificado, que se limita a una sección transversal del tubo ya soldado, donde las temperaturas de la superficie exterior e interior del tubo se van a considerar conocidas (T_{amb}).

MODELADO



Fabricación de un tubo mediante el proceso ERW (Electric Resistance Welded)- Sección transversal del tubo

La ecuación diferencial que describe la distribución de temperaturas dentro de la sección anular es (ecuación de conducción):

$$\nabla \cdot (k \nabla T) + \dot{q} = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1)$$

Donde T es la temperatura, k la conductividad térmica, q es el término fuente o sumidero de calor volumétrico, ρ la densidad del medio, y C_p es el calor específico a presión constante. Si suponemos que k no varía con la temperatura y que $q=0$:

$$\nabla^2 T = \frac{\rho C_p}{k} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2)$$

Si para simplificar aún más el problema suponemos estado estacionario, es decir que T llegó al equilibrio y la derivada temporal se anula, la ecuación se reduce al laplaciano de T :

$$\nabla^2 T = 0 \quad (3)$$

Debido a la geometría del problema resulta natural utilizar un sistema de coordenadas polares para el análisis, donde T va a depender de la coordenada angular θ y de la coordenada radial r , es decir $T=f(\theta, r)$. El laplaciano de T en coordenadas polares es:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0 \quad (4)$$

Se dispone de un código (ver Anexo I) que plantea el sistema de ecuaciones $Ax=b$ resultante de aplicar el método de las diferencias finitas a la ecuación (4).

DESARROLLO DEL PRÁCTICO

- a) Implementar una función llamada $x=solver_SOR(A,b)$ que resuelva el sistema planteado en el anexo 1 por el método iterativo SOR.
- b) Determine de forma experimental el $\varpi_{\text{óptimo}}$. Grafique los resultados.
- c) Utilizando el $\varpi_{\text{óptimo}}$ hallado en b) resolver el sistema para $n_i=360$ y $n_j=50$ con un error relativo $RTOL = 0,00001$.

$$R^k \leq RTOL \quad \text{donde} \quad R^k = \frac{\|\underline{x}^k - \underline{x}^{k-1}\|_{\infty}}{\|\underline{x}^k\|_{\infty}}$$

- d) Construya un cuadro donde compare el tiempo requerido para resolver el sistema para los valores:

Valores	Tiempo de procesamiento
$n_i = 90 \quad n_j = 10$	
$n_i = 180 \quad n_j = 20$	
$n_i = 360 \quad n_j = 50$	

- e) Graficar la temperatura a mitad del espesor del tubo en función de la coordenada angular, es decir $T(i,j)$ para $i=1..n_i$ y $j=n_j/2$.
- f) Graficar la solución del problema resuelto $T(\theta,r)$ en coordenadas polares. (Opcional)
- g) Resolver el ítem d) utilizando el método de Gauss Seidel.
- h) Analizar y comparar de forma experimental la velocidad de convergencia de ambos métodos para cada sistema. Para ello, calcule el orden de convergencia y el radio espectral de la matriz T en cada caso y comente sobre los valores obtenidos. Grafique el error k+1 en función del error k.
- i) ¿Qué tipo de método numérico visto durante el curso es más utilizado para resolver este tipo de sistemas lineales y por qué?

CONCLUSIONES

Presente sus conclusiones del Trabajo Práctico. En particular, comente sobre:

- La aplicación del método utilizado y los resultados obtenidos respecto a la teoría conocida;
- Los tipos de errores involucrados en la resolución del problema numérico y la importancia/efecto de cada uno;
- La convergencia y la velocidad de convergencia de cada caso resuelto

Anexo I

```

clear all;
clc;

Padron=99999;    % Padrón de un integrante del grupo

Thot=Padron/100+300; %°C
Tamb=20;        % temperatura ambiente en °C

ni=360;         %nodos coordenada angular
nj=50;          %nodos coordenada radial
n=ni*nj;        % nodos totales

rext=0.250;      % radio externo del tubo en metros
wt=0.015;        % espesor de la pared del tubo en metros
rint=rext-wt;    % radio interno del tubo en metros
dr=wt/(nj-1);    % delta r de la malla en metros

ncc=round(0.04*(ni-1)/(2*pi*rint)); %variable entera auxiliar

T=zeros(ni,nj);
b=zeros(n,1);
A=zeros(n,n);

for i=1:ni

    % Aplico condiciones de contorno
    % j=1 - nodos internos
    kx=1+nj*(i-1);
    A(kx,kx)=1;
    if (i<=ncc || i>ni-ncc+1)
        b(kx)=Thot*0.931;
    else

        b(kx)=Tamb;

    end

    for j=2:nj-1

        % Índices de los coeficientes de las ecuaciones
        kx=j+nj*(i-1);
        kn=j+1+nj*(i-1);
        ks=j-1+nj*(i-1);
        ke=j+nj*i;
        kw=j+nj*(i-2);
        if (ke>n)
            ke=ke-n;
        end
        if (kw<0)
            kw=kw+n;
        end

        % Coeficientes de las ecuaciones
        rj=rint+dr*(j-1);
        df=2*pi*rj/(ni-1);
        cn=1/dr^2+1/(2*dr*rj);

```

```

ce=1/(rj^2*df^2); cs=1/dr^2-
1/(2*dr*rj); cw=1/(rj^2*df^2);
cx=-2/dr^2-2/(rj^2*df^2);
ci=0;

%Matriz del sistema
if (ke<kx)
    A(kx,ke)=ce;
end
if (kw<kx)
    A(kx,kw)=cw;
end

A(kx,ks)=cs;
A(kx,kx)=cx;
A(kx,kn)=cn;

if (ke>kx)
    A(kx,ke)=ce;
end
if (kw>kx)
    A(kx,kw)=cw;
end

%Vector terminos independientes
b(kx)=ci;

end

% Aplico condiciones de contorno
% j=nj - nodos externos
kx=nj+nj*(i-1);
A(kx,kx)=1;
if (i<=ncc || i>ni-ncc+1)
    b(kx)=Thot;
else
    b(kx)=Tamb;
end

end

% Resuelvo el SEL A*x=b por el método SOR
x=solver_SOR(A,b);

% Resuelvo el SEL A*x=b por el método Gauss Seidel
x=solver_GS(A,b);

% Recupero la solución del sistema
for i=1:ni
    for j=1:nj
        kx=j+nj*(i-1); %fila-columna
        T(i,j)=x(kx);
    end
end
end

```