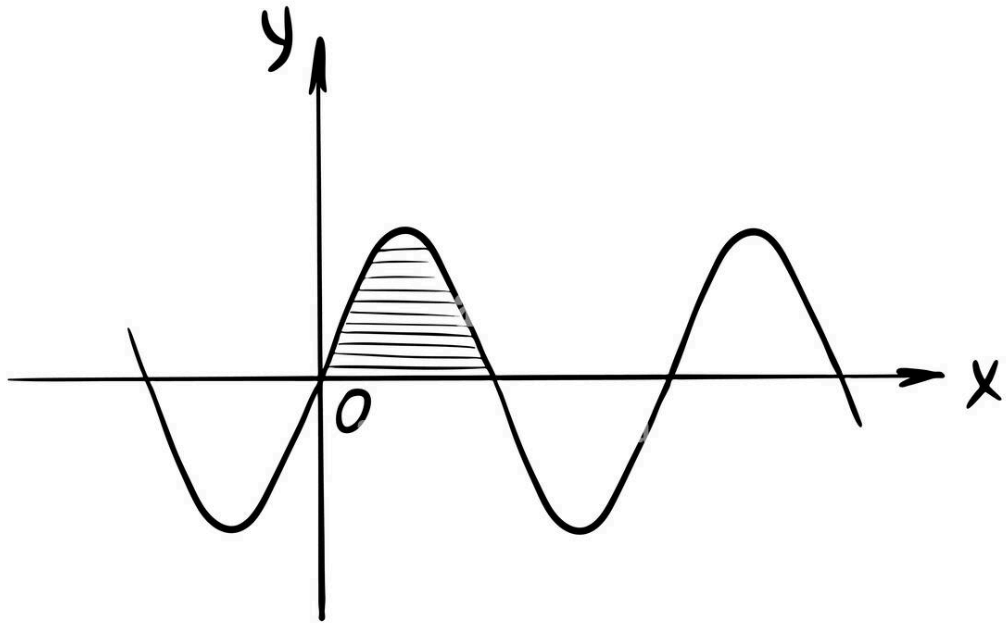
FUNCIONES



FUNCIONES

> Esta noción es uno de los conceptos matemáticos más utilizados por otras disciplinas para modelizar situaciones.
> Pueden expresarse mediante tablas, gráficas o fórmulas.

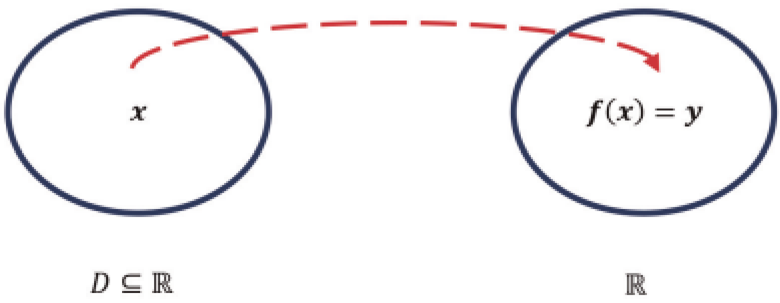
Una **función** es una relación entre dos o más variables. Nos abocaremos a recordar aquellas que sólo involucran dos: una variable independiente y una dependiente, a las que generalmente identificamos con las letras x e y respectivamente. Esta relación, en particular, **asigna a cada valor de x un único valor de y**. Por convención, cuando graficamos en coordenadas cartesianas, ubicamos la variable independiente x en el eje horizontal (o de las abscisas) y la variable dependiente y en el eje vertical (o de las ordenadas). Por lo tanto, la función queda representada por todos los puntos o pares ordenados (x; y) que cumplen con esa relación, donde x es el valor de la primera coordenada del punto, e y, el de la segunda.

Generalmente, anotamos una función real f(x) mediante los símbolos:

$$f: D \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

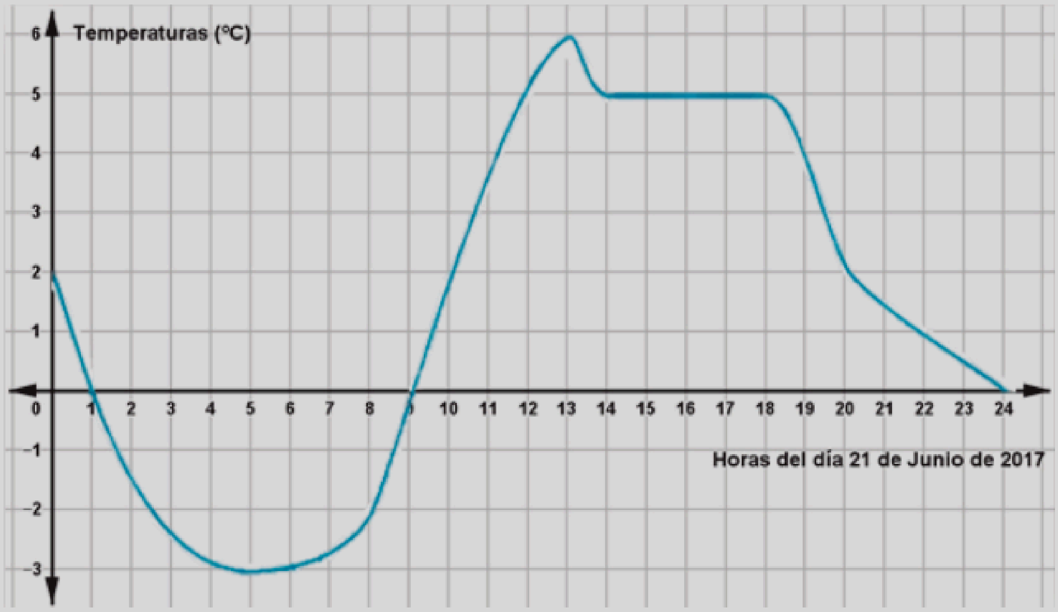
> Una función real es una relación que asocia a cada número real x un único número real $f(x)$.

Interpretamos que la función f "sale" o toma valores del conjunto D (valores reales) y "llega" al conjunto IR o produce valores reales. ¿Qué representa el conjunto D?



Veamos la siguiente situación:

En una estación meteorológica se registraron las temperaturas del 21 de junio de 2017 durante todo el día. La estación tiene un sensor que registra valores cada 1 segundo y, mediante un software, proporciona el siguiente gráfico:

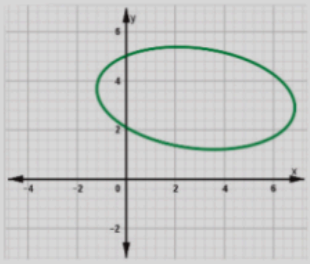


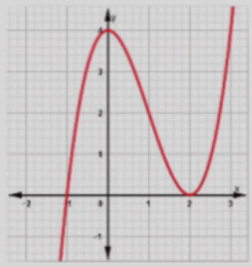
¿Qué variables se relacionan? ¿Cómo caracterizarían esa relación?

En la situación dada, en la representación del gráfico, podemos observar que intervienen dos variables, es decir, dos magnitudes que pueden variar. Una de ellas representa las horas del día 21 de junio de 2017 (variable independiente t) y la otra, la temperatura (medida en ºC) en cada instante (variable dependiente T). Vemos, además, que a cada instante de tiempo le corresponde una única temperatura.

Asumimos que esa curva es un "modelo" de la situación que plantea el problema, por lo tanto, es una aproximación. Es decir, el sensor detecta valores cada un segundo, por lo cual la variable independiente "tiempo", en este caso, no es continua sino discreta. Entonces, desde un punto de vista estrictamente matemático, no podríamos "unir los puntos de la curva"; sin embargo, es útil hacerlo para poder visualizar mejor el comportamiento de las temperaturas durante ese día y así poder predecir aproximadamente qué ocurrió en puntos intermedios.

¿Cuáles de las siguientes gráficas representan funciones? ¿Por qué?





En la situación inicial, ¿qué valores puede tomar x? ¿Y la variable dependiente y?

ALGUNOS ELEMENTOS PARA ANALIZAR UNA FUNCIÓN

DOMINIO E IMAGEN

Cuando nos preguntamos sobre el conjunto de valores que "puede tomar" la variable independiente, estamos hablando del **dominio** de la función: son aquellos valores para los cuales la función está definida; se simboliza: **Dom (f)**. El **dominio** es el conjunto de "salida" de la función. Denominamos al conjunto de "llegada" codominio. Esto es, el conjunto de todos los valores que "puede tomar" la función. En cambio, si nos preguntamos sobre el conjunto de valores que "toma" la variable dependiente, al aplicarle la función a los elementos del dominio, estamos en presencia de su **imagen**. Se simboliza: **Im (f)**. Como estos valores son parte del codominio de la función, decimos que la imagen está incluida en él.

EJEMPLO

Considerando la situación inicial, la función representada es T(t). Su dominio e imagen son:

$$Dom\ (T) = [0; 24]$$

$$Im\ (T) = [-3; 6]$$

Cuando se trata de una situación en contexto real, estos conjuntos suelen presentar restricciones de acuerdo con las variables que estén involucradas.

Siguiendo con la situación inicial, ¿se registró en algún momento del día una temperatura de 0°C? Si fue así, ¿cuándo?

INTERSECCIÓN DE LA CURVA CON LOS EJES COORDENADOS

Decir que la temperatura registrada fue de 0ºC es pensar para qué valores de t la función T toma el valor cero; es decir, en qué valores de x la curva que la representa interseca (corta) al eje de las abscisas. ¿Qué significa esto?

Estudiar la **intersección** de la gráfica de una función con el **eje x** es determinar **para qué valores de x se cumple que f(x) = 0**. En otras palabras, es preguntarnos sobre los valores del dominio que anulan la función. Se denomina a estos valores **raíces o ceros de la función**. Y a su conjunto se lo simboliza **Cº**. ¿Cuánto vale la coordenada y de este punto? Pensemos ahora qué sucede con la **intersección de una curva con el eje de las ordenadas**. Se denomina a este punto de intersección **ordenada al origen** de la función. ¿Cuánto vale la coordenada x de este punto?

En síntesis:

CORTES DE f CON LOS EJES COORDENADOS	
RAÍCES O CEROS	$f(x) = 0$
ORDENADA AL ORIGEN	$f(0) = y$

EJEMPLO

Los valores del Dom T(t) que denominamos raíces son t = 1 y t = 9. Es decir que el día 21 de junio de 2017 se registraron temperaturas de 0ºC en dos momentos, a la 1 y a las 9 de la mañana.

La ordenada al origen de T(t) es T = 2. A las 0 hs del día 21 de junio de 2017 se registró una temperatura de 2ºC.

Podemos escribir estos elementos como puntos porque representan intersecciones de la curva con los ejes coordenados:
Raíces (1; 0) y (9; 0) Ordenada al origen (0; 2)
Y a su vez, podemos escribir el conjunto de los ceros: C^0 = { 0; 9 }.

> Durante el día 21 de junio de 2017, ¿hubo temperaturas por debajo de los 0ºC? ¿Y por encima? De haber sido así, ¿entre qué horas del día sucedieron tales acontecimientos?

CONJUNTOS DE POSITIVIDAD Y NEGATIVIDAD

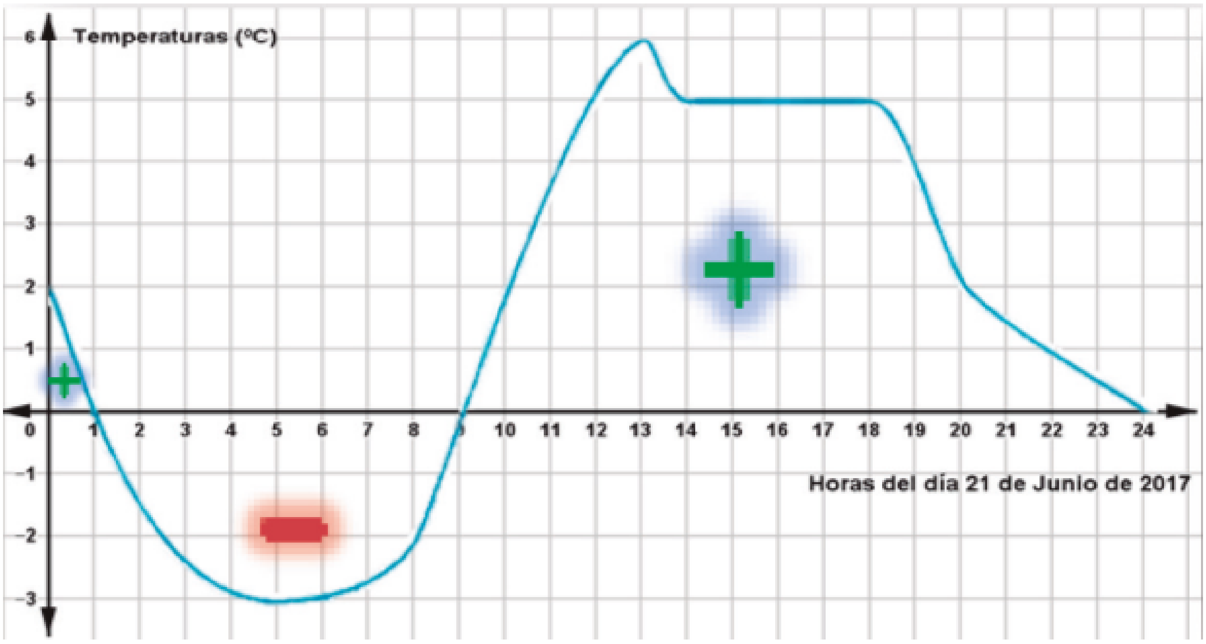
Analizar si la gráfica de la función está por debajo o encima del eje es establecer para qué valores del dominio la función es positiva y para cuáles es negativa. Se denomina al conjunto de todos los valores del dominio para los que la función es positiva **conjunto de positividad**, y al conjunto de todos los valores del dominio para los que la función es negativa, **conjunto de negatividad**. Se denotan respectivamente: C+ y C– . En símbolos:

$$C^+ = \{\forall x \in Dom\, f \,/\, f(x) > 0\} \qquad C^- = \{\forall x \in Dom\, f \,/\, f(x) < 0\}$$

EJEMPLO

Entre la 1 hs y las 9 hs del día 21 de junio de 2017 se registraron temperaturas por debajo de los 0ºC. Y el resto del día se registraron temperaturas por encima de los 0ºC. En símbolos:

$$C^- = (1;9) \qquad C^+ = [0;1) \cup (9;24)$$



¿Se registraron aumentos en la temperatura? ¿Y disminuciones? Si fue así, ¿entre qué horas del día sucedieron?

INTERVALOS DE CRECIMIENTO Y DECRECIMIENTO

Otros elementos que podemos analizar de una función son los intervalos de crecimiento (I↑) y de decrecimiento (I↓). ¿Recuerdan cómo se obtienen?

Si a medida que aumenta la variable independiente también lo hace la variable dependiente, decimos que la función es creciente para esos valores del dominio. En cambio, si a medida que aumenta x la variable y disminuye, decimos que la función es decreciente para esos valores del dominio.

Consideremos un intervalo I ∈ Dom(f):

- La función $f(x)$ será creciente en I si $\forall x_1, x_2 \in I \;\; x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$
- La función $f(x)$ será decreciente en I si $\forall x_1, x_2 \in I \; x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$

Si f (x) es creciente (o decreciente) en todo su dominio, diremos que f (x) es estrictamente creciente (o decreciente).

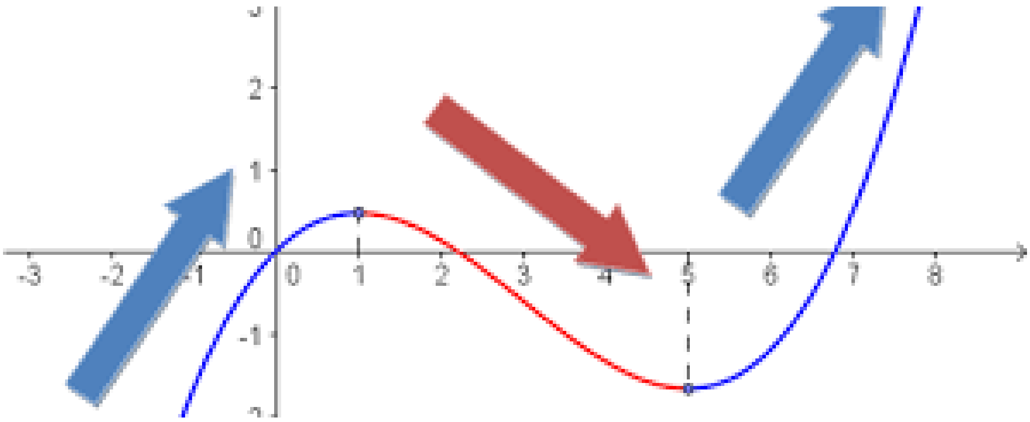
EJEMPLO

Entre la 0 hs y la 5 hs del día 21 de junio de 2017 "bajó" la temperatura, luego "subió" desde las 5 hs hasta las 13 hs y bajó durante una hora más. A partir de las 14 hs y hasta las 18 hs se mantuvo aproximadamente la misma temperatura, momento en el que comenzó a bajar nuevamente hasta terminar el día. Los intervalos de crecimiento y decrecimiento para la función T(t) son:

$I^{\downarrow} = (0;5) \cup (13;14) \cup (18;24)$ $\qquad$ $I^{\uparrow} = (5;13)$

EJEMPLO 2:

Una función podría tener un dominio de todos los números reales:



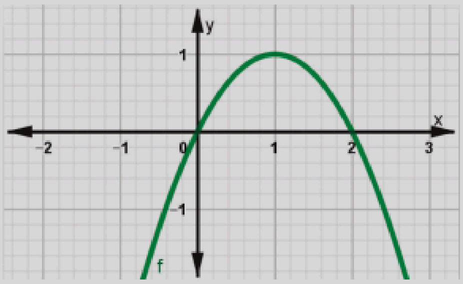
CRECIENTE $(-\ \infty; 1)U(5; \infty)$ $\qquad$ DECRECIENTE $(1; 5)$

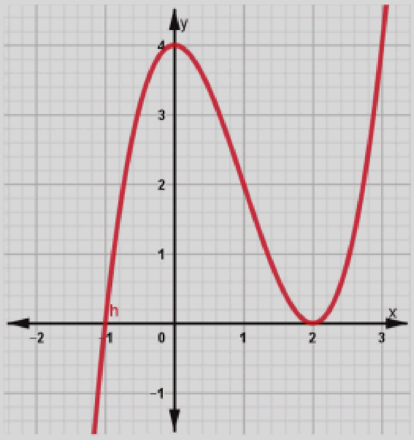
(Siempre los intervalos se limitan desde un valor del eje X a otro del mismo)

¿Por qué la positividad y la negatividad, el crecimiento y el decrecimiento se escriben como intervalos abiertos o semiabiertos?

¿Qué ocurrió con la temperatura entre las 14 hs y las 18 hs del 21 de junio de 2017?

Para cada una de las siguientes gráficas, indicar:





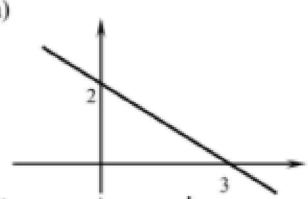
A) DOMINIO E IMAGEN.

B) RAÍCES Y ORDENADA AL ORIGEN.

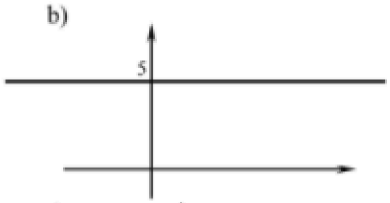
C) CONJUNTOS DE POSITIVIDAD Y NEGATIVIDAD.

Indicá cuáles de los siguientes gráficos representan funciones.

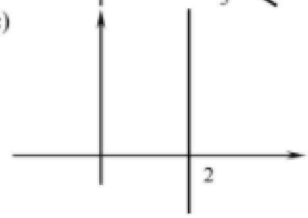
a)



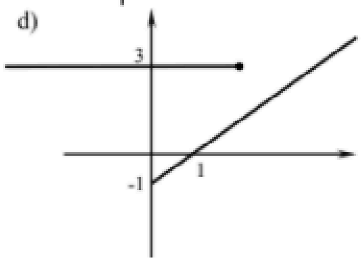
b)



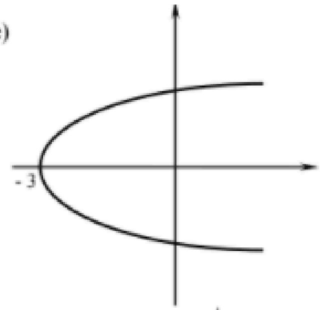
c)



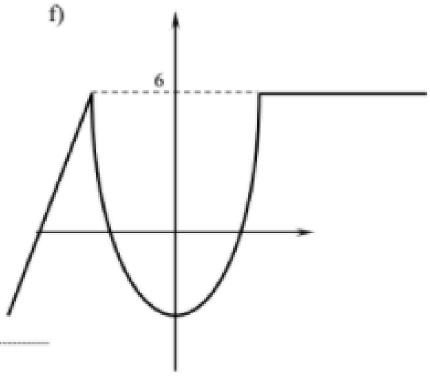
d)



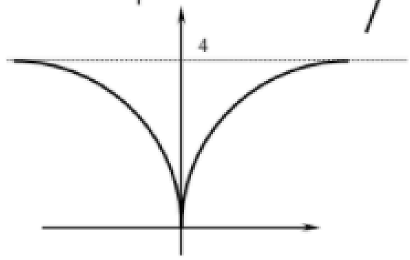
e)



f)

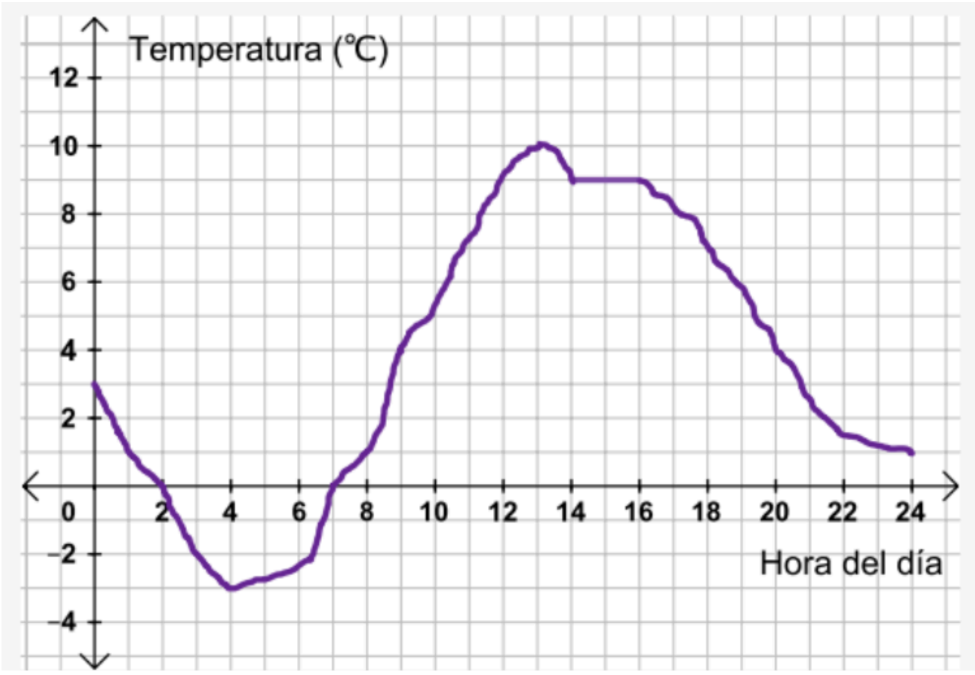


g)



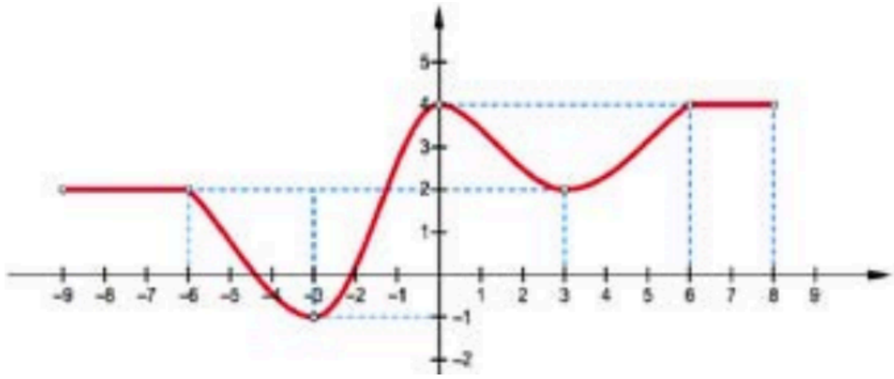
☐ ACTIVIDAD

1) El siguiente gráfico muestra los registros de temperatura realizados en función del tiempo. Observar el siguiente gráfico e indicar

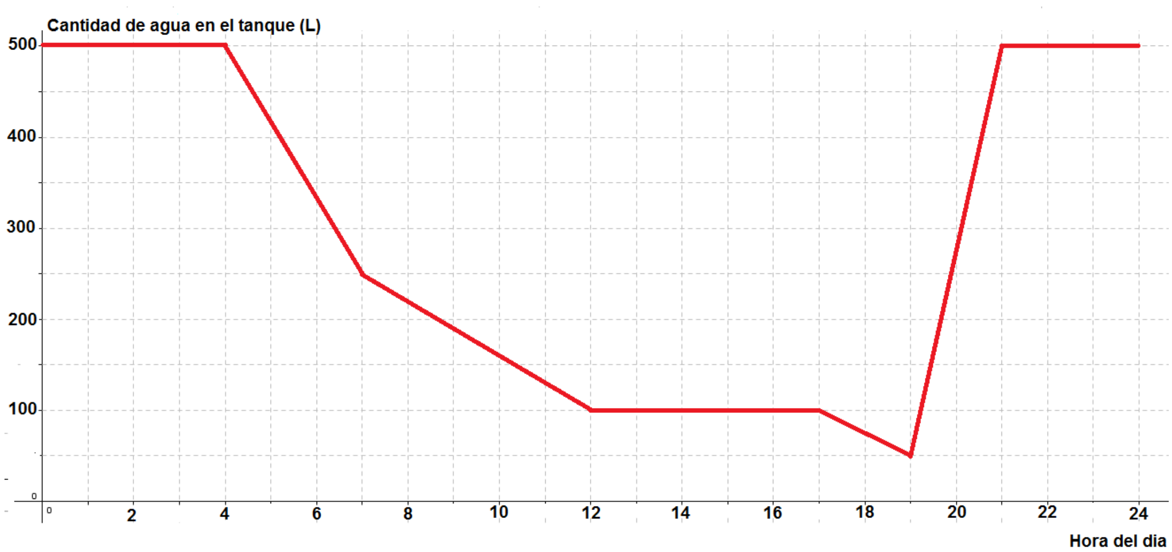


a) Dominio e Imagen de la función
b) ¿Qué temperatura se registró a las 10 h? ¿Y a las 17 h? ¿Y a las 20 h?
c) ¿En qué momentos se registró una temperatura de 6°C? ¿Y de 1°C?
d) En dos momentos hubo 0°C. ¿En qué horarios fue? ¿Dónde lo pueden ver en el gráfico?
e) Identifiquen cuáles fueron las temperaturas máxima y mínima registradas ese día. ¿En qué momentos se alcanzaron?
f) ¿En qué intervalos de tiempo la temperatura disminuyó?
g) ¿En qué intervalos de tiempo la temperatura aumentó?
h) ¿En qué intervalo de tiempo la temperatura fue bajo cero?
i) En qué intervalo se mantuvo constante?
j) ¿Podría, en un mismo momento del tiempo, coexistir dos temperaturas distintas simultáneamente?
k) ¿Podría en algún momento, "no haber" temperatura?

2) Analizar Dominio, Imagen, C+ C- $I\uparrow$ $I\downarrow$, f(3), Ordenada al origen, Raíces, Intervalo constante.

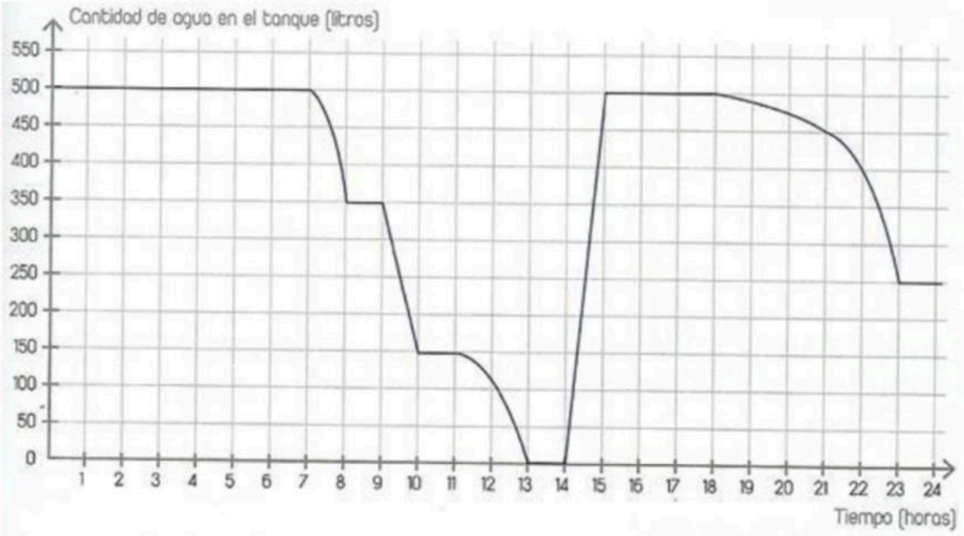


3) El siguiente gráfico representa la cantidad de agua almacenada en un tanque de riego en distintos momentos del dia



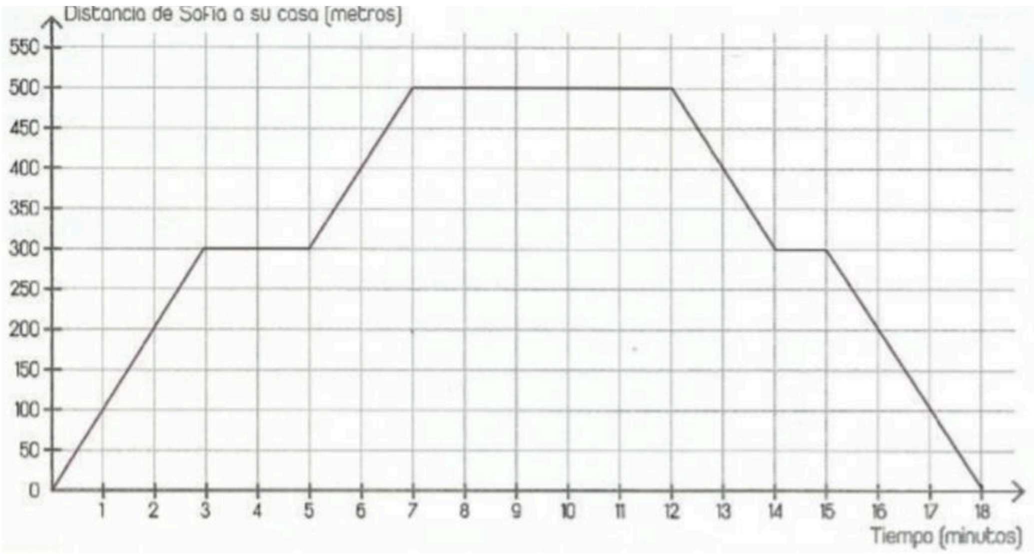
¿En qué momento del día se consume mayor cantidad de agua?
¿En algún momento el tanque se vacía por completo?
¿Cuál es la mayor cantidad de agua que se almacena en ese tanque?
¿En qué momento del día se llena el tanque?
¿Hay algún momento en que no se riega?
¿En qué momento, entre que comenzó y finalizó el vaciamiento, la cantidad de agua por hora que salía fue mayor?

4) El tanque de agua de la casa de Pedro tiene 500 litros de capacidad. En este gráfico se muestra la cantidad de agua que había en el tanque el 3 de enero en función de las horas del dia



a. ¿Cuántos litros de agua tenía el tanque a las 10 hr?¿ Y a las 16 hr?
b. ¿A qué hora el tanque tuvo 50 litros de agua? ¿Y 400 litros?
c. ¿En qué momento estuvo lleno?¿En qué momento estuvo vacío?
d. Cuando Pedro se queda sin agua, prende una bomba para que el agua suba al tanque. ¿En cuanto tiempo se llena?

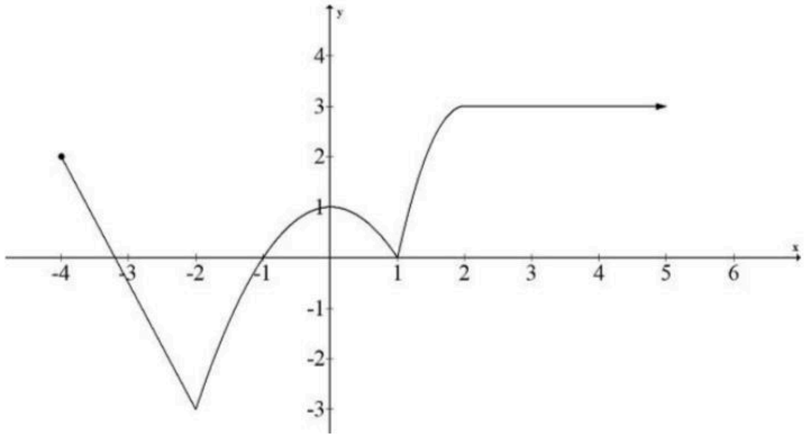
5) Sofía fue en bicicleta desde su casa a la panadería que está sobre la misma calle. El gráfico muestra la distancia de Sofía a su casa en función del tiempo transcurrido desde que salió



a. ¿A qué distancia estaba Sofía a los 2 minutos de haber salido de su casa?¿Y a los 6 minutos?
b. ¿Cuánto tiempo transcurrió desde que Sofia salió de su casa hasta que

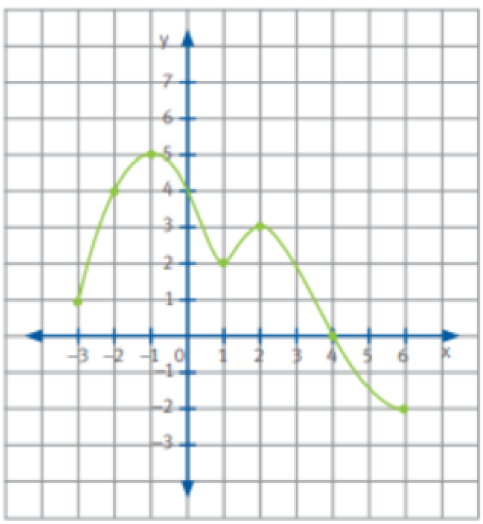
estuvo a 400 metros? y a 300 metros?
c. ¿A qué distancia de Sofía queda la panadería?
d. Tanto a la ida como a la vuelta, Sofía tuvo que esperar a que el semáforo se pusiera en verde ¿A qué distancia de su casa se encontró con dicho semáforo?
e. ¿Cuánto tiempo esperó en el semáforo a la ida y a la vuelta?
f. ¿Cuánto tiempo tardó en hacer las compras?
g. ¿A cuantos metros por minuto andaba Sofia si siempre pedaleo a la misma velocidad?
i. ¿Cuánto tiempo le llevaría a esa velocidad recorrer 600 metros? y 800 metros?

6) Dado el siguiente gráfico

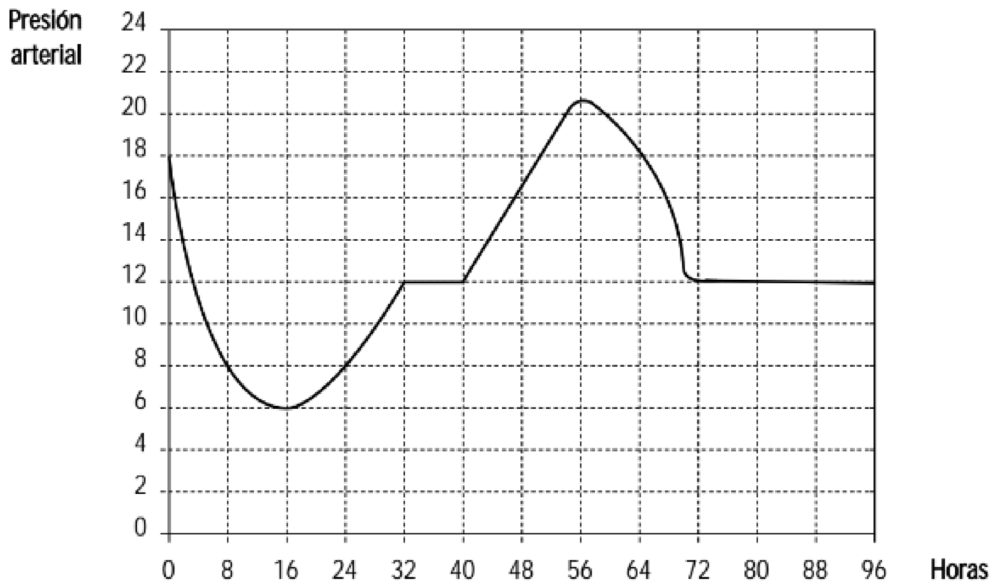


Analizar: Dominio, imagen, Intersecciones con los ejes, C+ y C-

7) Observen el gráfico y respondan.
a. ¿Cuál es el dominio? ¿Y la imagen?
b. ¿Cuál es la imagen de -2? ¿Y la preimagen de 5?
c. ¿El punto (1;2) pertenece a la función?
d. Hallar: Intersecciones con los ejes, extremos, $I\uparrow$ y $I\downarrow$



8) A un paciente internado en un hospital le controlan la presión arterial de manera continua. El siguiente gráfico muestra la evolución de la presión arterial a partir del momento en que fue internado.



a) ¿Durante cuánto tiempo se tomaron los datos de la presión arterial del paciente?
b) ¿Entre qué valores osciló su presión?
c) ¿En qué períodos el valor de la presión estuvo aumentando? ¿Cuándo fue disminuyendo? ¿En algún momento se mantiene constante? Explicá cómo te das cuenta en el gráfico.
d) ¿Cuál fue la máxima presión y cuándo lo alcanzó? ¿Y cuál fue la mínima? ¿A qué hora
del día? Explicá cómo te das cuenta en el gráfico.
e) ¿Cuándo la presión llegó a 8?
f) ¿Cuál era la presión a las 33 horas de internación?
g) ¿Cuál era la presión del paciente al finalizar el tercer día de internación?

9) Dados los siguientes gráficos, analizar en cada caso:

Gráfico A

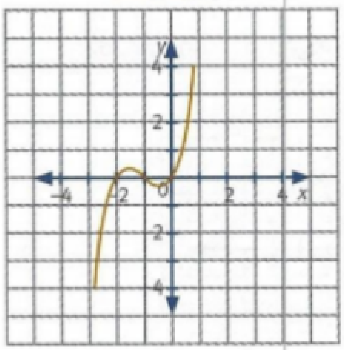


Gráfico B

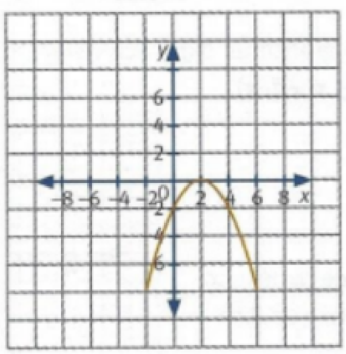
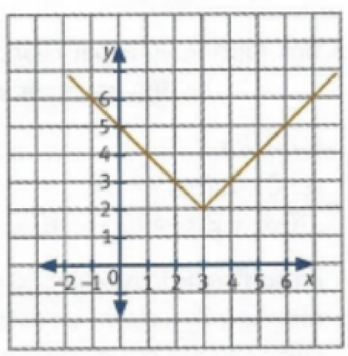


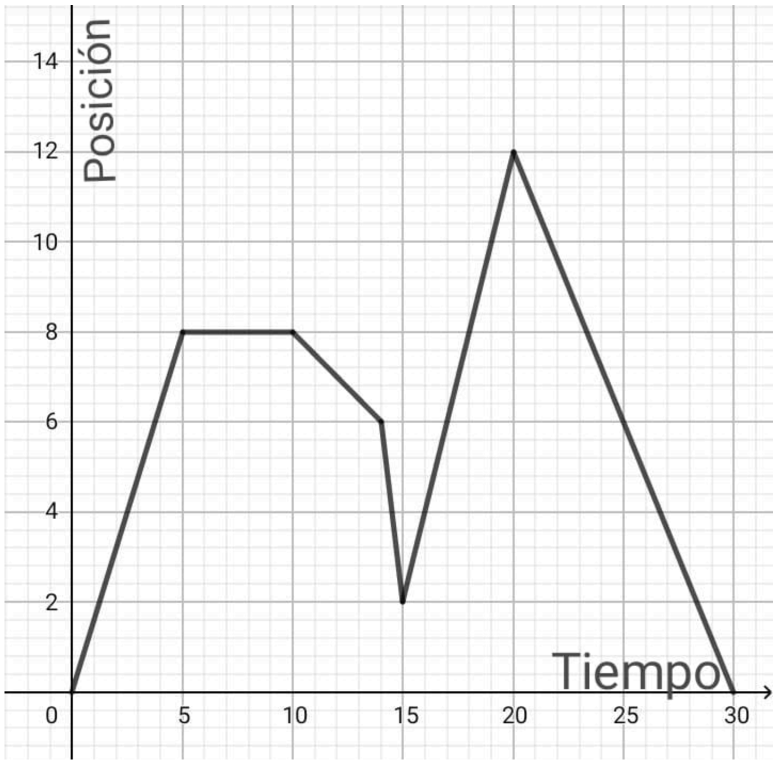
Gráfico C



Ordenada al origen:
Raíces:

Conjunto de positividad y negatividad:
Intervalo de crecimiento y de decrecimiento:

10)
Este gráfico representa el recorrido de una persona en bicicleta desde que salió de su casa



(posición en kilómetros y tiempo en minutos)

a) ¿A cuantos kilómetros de la casa estaba a los 5 minutos? Y a los 20?

b) ¿Entre qué intervalos de tiempo se alejó de la casa y en cuales se acerco?

c) ¿En algún momento dejó de andar?

d) ¿En qué intervalo de tiempo se acercó más rápido de la casa?

e) ¿En qué momento tomó mayor velocidad?