Clase 06

Análisis de Sistemas

Materia:
Elementos de Matemática

Docente contenidista: GARCÍA BONELLI, Silvia Cristina

Revisión: Coordinación

Contenido

CLASE 6

Matrices

Les damos la bienvenida a la clase 6 de la materia **"Elementos de Matemática".**

En esta clase vamos a ver los siguientes temas:

- Matrices.
- Matriz Identidad.
- Operaciones con matrices.

Arreglos, matrices

Son utilizados para representar la información de manera estructurada y poder operar con ella de forma ordenada.

Se usan en las técnicas gráficas por computadora y algoritmos de optimización, como por ejemplo la búsqueda de un camino óptimo.

Una matriz es un ordenamiento rectangular de números. Veamos dos ejemplos:

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{2}{3} \\ -1 & 0 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ \pi \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

ORDEN 3x2 **ORDEN** 4 x 1

A las líneas horizontales de números de una matriz se las denomina filas.
Las líneas verticales de números de una matriz se las denomina columnas.

En el caso anterior la primera matriz tiene 3 filas y 2 columnas, a esta matriz se la denomina de **3x2.**

La segunda matriz tiene 4 filas y 1 columna, y se la denomina de **4x1.**

Orden de la matriz **(mxn)**

Las matrices de 1 x n son llamadas vectores filas. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & -9 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Las matrices de m x 1 son llamadas vectores columnas. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una matriz de n x n ó m x m se dice que es una matriz cuadrada. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & -9 & 2 \\ 1 & 3 & -4 \\ 0 & 5 & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$ **orden 3x3**

$$\begin{pmatrix} 3 & -6 & 6 & -5 \end{pmatrix}$$

Orden 2x2

Una matriz de 1x1 es un número. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{5} \end{pmatrix}$$ orden 1x1

El número que aparece en la ***fila i*** y en la ***columna j*** es llamado el ***elemento ij*** de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

El primer subíndice indica la **fila (i)** y el segundo (**j) la columna.**

Matriz identidad (unidad)

La matriz unidad (identidad) de orden n×n es la matriz I en la cual todos los componentes son cero excepto los de la diagonal principal, que son 1. En símbolos nos queda la siguiente definición $I_{ij} = 1$ si $i = j$ y $I_{ij} = 0$ si $i \neq j$.
Por ejemplo:

$$I_{3,3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Operaciones con matrices

Adición de Matrices

Sólo es posible cuando tienen igual cantidad de filas y columnas. Por ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 7 \\ -5 & 9 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 1 \\ 4 & -2 & -2 \end{pmatrix},\ A + B = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 8 \\ -1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$$

Sustracción de Matrices

A - B

Primera forma de restar

$A = (7\ \ -2\ 4\ \ -1)$ $B = (-5\ \ -2\ 4\ 1)$ $A - B = (12\ 0\ 0\ \ -2)$

otra forma

Segunda forma de restar

Hallamos la **opuesta** de B que es – B y sumamos

$A = (7\ \ -2\ 4\ \ -1)$ $-B = (5\ 2\ \ -4\ \ -1)$ $A - B = (12\ 0\ 0\ \ -2)$

Producto de un número por una matriz

Se aplica a cualquier matriz, el número por el cual se multiplica afecta a cada uno de los elementos que componen la matriz. Por ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix},\ 3A=\begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 9 & -3 \\ 15 & 12 \end{pmatrix},\ -A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \\ -5 & -4 \end{pmatrix}$$

-A es la matriz opuesta de A

-2 A =

$$-2\cdot\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -6 & 2 \\ -10 & -8 \end{pmatrix}$$

Resolveremos ahora algunos ejercicios

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad C=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) Hallar 3B
2) Hallar - A
3) Hallar 2A – C
4) Hallar A + B - C
5) Hallar 3B - 2A – C
6) A + B + C

Respuestas

Ejercicio 3

2A - C

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 6 \\ 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 4

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 8 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 5

3 B

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 9 & 12 \\ 15 & 18 \end{pmatrix}$$

-2A

$$-2 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

-C

$$-1 \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

3B -2A-C =

$$= \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 7 & 19 \\ 17 & 15 \end{pmatrix}$$

Ejercicio 6

A + B +C

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 4 & -2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

7.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 \\ -2 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 7 & 9 & 0 \\ -2 & -3 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -3 & -5 \\ -9 & -14 & -4 \\ 2 & 4 & -3 \end{pmatrix}$$

8.

$$\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 \\ -2 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{-5}{2} \\ -1 & \frac{-5}{2} & -2 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

9.

$$\frac{-1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 \\ -2 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & -1 & \frac{5}{2} \\ 1 & \frac{5}{2} & 2 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{-3}{2} \end{pmatrix}$$

10.

$$\frac{4}{3}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 2 & -5 \\ -2 & -5 & -4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{8}{3} & \frac{8}{3} & \frac{-20}{3} \\ \frac{-8}{3} & \frac{-20}{3} & \frac{-16}{3} \\ 0 & \frac{4}{3} & 4 \end{pmatrix}$$

11.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 7 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \\ -6 & -9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Hallar 3A-0,5 B
RTA

$$\begin{pmatrix} 21 & 21 & -6 \\ 0 & 0 & -9 \\ -18 & -27 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ -0,5 & 0 & -1,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 & 19 & -4 \\ 0 & -1 & -8 \\ -18,5 & -27 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

12 . 2 B - 4 A

Rta $\begin{pmatrix} -28 & -20 & 0 \\ 0 & 4 & 8 \\ 26 & 36 & 2 \end{pmatrix}$

Producto de matrices

Sea ***A*** una matriz con ***dimensiones mxn*** y ***B*** una matriz con ***dimensiones nxp***, entonces el producto ***A.B*** está definido, y tiene ***dimensiones mxp***. El elemento $(AB)_{ij}$ se obtiene de sumar todas las multiplicaciones de cada elemento de la fila i de la matriz A por su correspondiente elemento de la columna j de B.

Veamos un ejemplo:

$$A.B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} (2.1)+(0.1)+(1.1) & (2.0)+(0.2)+(1.1) & (2.1)+(0.1)+(1.0) \\ (3.1)+(0.1)+(0.1) & (3.0)+(0.2)+(0.1) & (3.1)+(0.1)+(0.0) \\ (5.1)+(1.1)+(1.1) & (5.0)+(1.2)+(1.1) & (5.1)+(1.1)+(1.0) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 7 & 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

1. <u>B.A =</u>

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \boxed{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 2 \\ 13 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A.B $\neq$ B.A

El producto de matrices no es conmutativo

Resolveremos ahora algunos ejercicios

Realizar los siguientes productos de matrices de 3x3

$$\begin{pmatrix} -1 & 6 & -7 \\ -4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & -6 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -28 \\ -4 & -14 & -6 \\ 5 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

Cálculos auxiliares

-2 +30 -21 =7	-4+7 = 3	1-36+7=-28
-8+10-6 = -4	-16+2 =-14	4-12+2 = -6
5+0+0 =5	0+0+0 = 0	0-6+0 = -6

2.

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -5 & 10 & 8 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -6 & -1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 11 & 1 \\ -32 & 58 & 13 \\ 7 & 13 & 2 \end{pmatrix}$$

3.

$$\begin{pmatrix} 0 & -6 & -1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ -5 & 10 & 8 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & -58 & -47 \\ -2 & 20 & 20 \\ -10 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

4.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -1 \\ 18 & 0 & 10 \\ 25 & 0 & 26 \end{pmatrix}$$

5.

$$\begin{pmatrix} -1 & 6 & -7 \\ -4 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 5 & 0 & -6 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -28 \\ -4 & -14 & -6 \\ 5 & 0 & -6 \end{pmatrix}$$

6.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -3 & 0 & 6 \\ 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 4 \\ 5 & -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 5 & -4 \\ 36 & -15 & 12 \\ 33 & -18 & 24 \end{pmatrix}$$

Hemos llegado así al final de esta clase en la que vimos estos temas:

- Concepto de Matriz.
- Operaciones con Matrices.
- Resolución de operaciones.

Estaremos respondiendo tus dudas y consultas en el aula virtual, y no olvides realizar el desafío semanal.

¡Hasta la próxima clase!

Bibliografía y webgrafía:

Altman, S. Comparatore, C. (2006) Matemática Polimodal Matrices. Editorial Longseller.

https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/algebralineal/matrices/matrices-12.html

https://www.mty.itesm.mx/dtie/deptos/m/ma00-816-1/matrices.htm

https://www.ugr.es/~ahurtado/PDF/Tema1.pdf