MATRICES

MATRICES

Las matrices son herramientas valiosas para los analistas de sistemas, y ofrecen diversas utilidades en su trabajo. Aquí tienes algunas formas en las que las matrices pueden ser útiles:

1. Representación de datos tabulares: Las matrices son una forma efectiva de representar datos tabulares en un sistema. Pueden utilizarse para almacenar y organizar información en filas y columnas, lo que facilita el acceso y la manipulación de datos estructurados. Los analistas de sistemas pueden utilizar matrices para almacenar datos de usuarios, registros de transacciones, información de inventario y otros datos similares.

2. Operaciones matemáticas: Las matrices permiten realizar una variedad de operaciones matemáticas útiles para los analistas de sistemas. Se pueden aplicar técnicas matriciales, como multiplicación de matrices, inversión de matrices y descomposición matricial, para realizar cálculos complejos y análisis estadísticos en los datos del sistema. Esto puede ser especialmente útil en áreas como el análisis de datos, la predicción de tendencias y el aprendizaje automático.

3. Modelado de relaciones y dependencias: Las matrices también se pueden utilizar para modelar relaciones y dependencias entre elementos del sistema. Por ejemplo, una matriz de adyacencia puede representar las conexiones entre nodos en un grafo, donde las filas y columnas de la matriz representan los nodos y los valores indican si existe una conexión entre ellos. Esto permite a los analistas de sistemas comprender las interacciones y las dependencias entre diferentes componentes del sistema.

4. Análisis de rendimiento y optimización: Las matrices pueden ser útiles para analizar el rendimiento y optimizar sistemas. Por ejemplo, en el análisis de complejidad algorítmica, se utilizan matrices para representar el tiempo de ejecución y los recursos utilizados por los algoritmos en función del tamaño de entrada. Los analistas de sistemas pueden utilizar esta información para identificar cuellos de botella, mejorar la eficiencia y optimizar los algoritmos utilizados en el sistema.

5. Modelado de bases de datos: Las matrices también pueden utilizarse como una forma de modelar y diseñar bases de datos relacionales. En este enfoque, las tablas de la base de datos se representan como matrices, donde las filas representan registros y las columnas representan atributos. Esto facilita el diseño y la manipulación de bases de datos relacionales y permite a los analistas de sistemas comprender y gestionar la estructura de la base de datos.

MATRICES

¿Por qué veremos matrices?

Las matrices son utilizadas para representar la información de manera estructurada y poder operar con ella de forma ordenada. Son muy utilizados en las técnicas gráficas por computadora y algoritmos de optimización, como por ejemplo la búsqueda de un camino óptimo.

Una matriz es una distribución de números reales (o sea, positivos, negativos, fracciones, decimales, raíces) en una tabla de m filas y n columnas. Es un arreglo bidimensional. Simbólicamente la escribimos así:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Los términos horizontales son las filas de la matriz y los verticales son sus columnas.
Una matriz con m filas y n columnas se denomina matriz m por n, o matriz m x n.
Las matrices se denotan por letras mayúsculas, A, B, ..., y los elementos de las mismas por minúsculas, a, b, ...
Ejemplo: La siguiente matriz es A ∈ R^{2x3}

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$ o sea, tiene dos filas y tres columnas.

Tipos de matrices

Según el aspecto de las matrices, se pueden clasificar en:

Matrices cuadradas

Una matriz cuadrada es la que tiene el mismo número de filas que de columnas.
Se dice que una matriz cuadrada n x n es de orden n y se denomina matriz n-cuadrada.
Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 0 & 1 \\ 2 & 8 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrices diagonales

Una matriz cuadrada es diagonal, si todos sus elementos no diagonales son cero o nulos.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} -6 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Matrices triangulares

Una matriz cuadrada A = (aij) es una matriz triangular superior o simplemente una matriz triangular, si todas las entradas bajo la diagonal principal son iguales a cero.

$$\boldsymbol{B}_{3x3} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow Matriz\ triangular\ superior.$$

$$\boldsymbol{C}_{3x3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow No\ matriz\ triangular.$$

$$\boldsymbol{D}_{3x3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow Matriz\ triangular\ inferior.$$

$$\boldsymbol{E}_{3x3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow Matriz\ triangular\ superior.$$

Matriz identidad

La matriz n-cuadrada con unos en la diagonal principal y ceros en cualquier otra posición, denotada por I, se conoce como matriz identidad (o unidad). Para cualquier matriz A, se cumple que **A. I = I ·A = A.** (el producto de una matriz con la identidad, y de la identidad con una matriz, da como resultado la misma matriz)

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Traspuesta de una matriz

La traspuesta de una matriz A consiste en intercambiar las filas por las columnas y se denota por A^T. Así, la traspuesta de A:

$$A^T = \begin{pmatrix} -8 & 0 \\ 9 & -8 \\ -7 & -8 \\ 1 & -8 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} -8 & 9 & -7 & 1 \\ 0 & -8 & -8 & -8 \end{pmatrix}$$

En otras palabras, si A = (aij) es una matriz m x n, entonces A^Tes la matriz n x m. La trasposición de una matriz cumple las siguientes propiedades:

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$
2. $(A^T)^T = A$
3. $(kA^T) = kA^T$ (si k es un escalar, osea un numero)
4. $(A.B)^T = B^T.A^T$

Matrices simétricas

Se dice que una matriz es simétrica, si $A = A^T$; y que es antisimétrica, si $A = \; - A^T$
Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -3 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & -8 \end{pmatrix} \quad \mathbf{B} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos observar que los elementos simétricos de A son iguales, o que $A = A^T$.
Por lo tanto, A es simétrica.
Para B los elementos simétricos son opuestos entre sí, entonces B es antisimétrica.
Como la matriz C no es cuadrada, no es ni simétrica ni antisimétrica.

Matrices idempotentes

Son aquellas que al multiplicarlas por sí mismas, no se alteran. O sea $A^n = A$
Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 12 & -3 \end{bmatrix}$$

Matrices involutivas

Son aquellas que al multiplicarlas por sí mismas, dan la identidad. O sea A^2 = I

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \mathrm{I} = A^2$$

Ejemplo:
Suma y resta de matrices

Para poder sumar o restar matrices, éstas deben tener el mismo número de filas y de columnas. Es decir, si una matriz es de orden 3 x 2 y otra de 3 x 3, no se pueden sumar ni restar. Esto es así ya que, tanto para la suma como para la resta, se suman o se restan los términos que ocupan el mismo lugar en las matrices.

Ejemplo:

Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, entonces

$$A+B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)+(-3) & (2)+(-2) \\ (3)+(-1) & (4)+(5) \\ (4)+(1) & (6)+(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 9 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A-B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 4 & 6 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (-1)-(-3) & (2)-(-2) \\ (3)-(-1) & (4)-(5) \\ (4)-(1) & (6)-(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 4 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Producto de matrices
Producto por un escalar

El producto de un escalar k por la matriz A, escrito k·A o simplemente kA, es la matriz obtenida multiplicando cada valor de A por k:

$$kA = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \dots & ka_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \dots & ka_{mn} \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

Entonces:

$$3A = 3\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 9 \\ 12 & 15 & -6 \end{pmatrix}$$

Producto entre Matrices

Para poder multiplicar dos matrices, la cantidad de columnas de la primera debe coincidir con la cantidad de filas de la segunda. La matriz resultante del producto quedará con el mismo número de filas de la primera y con el mismo número de columnas de la segunda.
Es decir, si tenemos una matriz 2 x 3 y la multiplicamos por otra de orden 3 x 5, la matriz resultante será de orden 2 x 5.
Es importante destacar que la multiplicación de matrices no es conmutativa.
¿Cómo se procede en la multiplicación? Hay que tener cuidado y organización

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & & \\ & & \end{pmatrix}$$

1) Reviso el tamaño de la matriz
A = 2 x 3 B = 3 x 3
Como son iguales se puede multiplicar.
El tamaño de la matriz de la respuesta es 2 x 3

Se opera así:

$$(0 \times 6) + (1 \times 9) + (2 \times 12) =$$
$$0 + 9 + 24 = 33$$

2) Al sumar los productos de los elementos de la primera fila de la primera matriz con los elementos de la primera columna de la segunda matriz, obtenemos el coeficiente que se ubicará en la posición a_{11}.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 36 & \\ & & \end{pmatrix}$$

$$(0 \times 7) + (1 \times 10) + (2 \times 13) =$$
$$0 + 10 + 26 = 36$$

3) Se repite el procedimiento para obtener los otros coeficientes de la matriz resultante.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 36 & 39 \\ & & \end{pmatrix}$$

$$(0 \times 8) + (1 \times 11) + (2 \times 14) =$$
$$0 + 11 + 28 = 39$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 36 & 39 \\ 114 & & \end{pmatrix}$$

$$(3 \times 6) + (4 \times 9) + (5 \times 12) =$$
$$18 + 36 + 60 = 114$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 36 & 39 \\ 114 & 126 & \end{pmatrix}$$

$$(3 \times 7) + (4 \times 10) + (5 \times 13) =$$
$$21 + 40 + 65 = 126$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 36 & 39 \\ 114 & 126 & 138 \end{pmatrix}$$

$$(3\times 8)+(4\times 11)+(5\times 14)=$$
$$24+44+70=138$$

Por lo tanto

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 \\ 12 & 13 & 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 33 & 36 & 39 \\ 114 & 126 & 138 \end{pmatrix}$$

ACTIVIDAD

1) a) Indicar el orden de las siguientes matrices

a) $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$

b) $R = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

c) $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$

d) $P = \begin{pmatrix} 3 & -6 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

b) Completar el siguiente cuadro, indicando si se pueden multiplicar las matrices o no, y cual es el tamaño de la matriz de la respuesta.

Matriz A	Matriz B	¿Se pueden multiplicar?	Tamaño de respuesta
3 x 4	4 x 5		
5 x 3	4 x 6		
4 x 2	3 x 4		
3 x 1	1 x 1		
4 x 3	3 x 4		

2) Dadas las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Realizar las operaciones que se indican a continuación, cuando sea posible:

a) $A + B$

b) $A.C$

c) $C.B$

d) $C^T.B$

e) $(2A + B).C$

3) Dadas las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 0 & -6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Efectuar cuando sea posible:

a) C.A b) C.D c) A. B d) B.A

e) 3D- 4E f) C.D + 3E g) B.D-2B. E

4)
Dadas las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & 3 \\ 0 & 9 & 5 \\ -6 & 2 & 1 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -4 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

a. Calcular A.B y B.A ¿Coinciden los resultados?

b. Calcular $(A + B)^2$ y $A^2 + 2AB + B^2$ ¿Coinciden los resultados?

c. Calcular $A^2 - B^2$ y $(A + B)(A - B)$ ¿Coinciden los resultados?

5) Demostrar que: $A^2 - A - 2I = \overline{0}$, siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ I = Matriz identidad de 3x3 y $\overline{0}$ = Matriz Nula de 3x3

6) a) Por qué matriz hay que multiplicar la matriz A para obtener la matriz B siendo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$$

b) Halle la matriz A. Determine previamente el orden de la matriz A.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} . A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

7) Resolver la siguiente ecuación matricial:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

8) Hallar x,y,z si

$$3.\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 6 \\ -1 & 2w \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & x+y \\ z+w & 3 \end{pmatrix}$$

9) Verificar que: a) $U^2 = U$ b) $V^2 = V$ c) U.V = V.U d) U + V = I

$$U = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -4 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix},\ V = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 1 & -2 & -4 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

11) Verificar que las siguientes matrices satisfacen las relaciones indicadas.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},\ A^2 - 3A + 8I = 0$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ -1 & -2 \end{pmatrix},\ B^2 = B$$

12) a) Se dice que una matriz A es idempotente si y sólo si es cuadrada y $A = A^2$
Pruebe que la siguiente matriz es idempotente para cualquier valor de x e y.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & y & 0 \end{bmatrix}$$

b) Se denomina matriz involutiva a toda matriz, cuadrada, tal que su cuadrado es la matriz identidad.
Compruebe que la siguiente matriz es involutiva

$$\begin{bmatrix} -4 & -5 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$