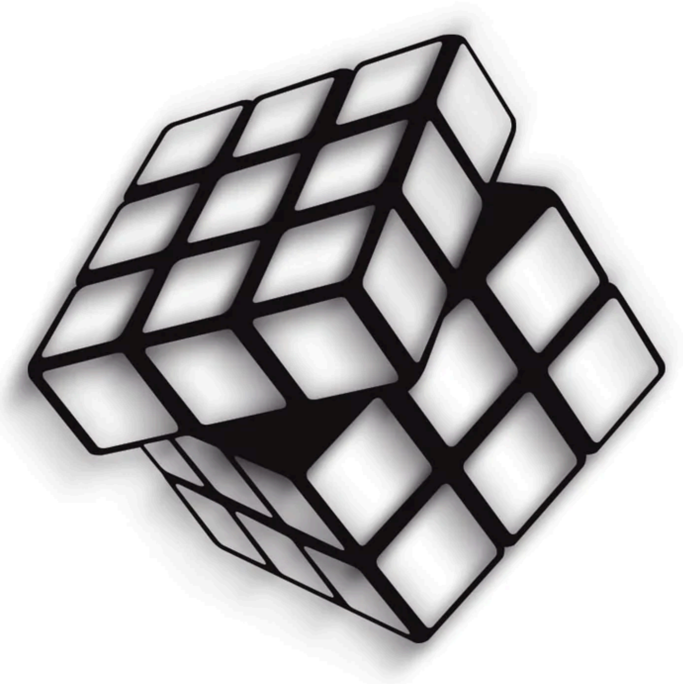
COMBINATORIA



COMBINATORIA

La Combinatoria es una rama de las matemáticas cuyo objeto es estudiar las **posibles agrupaciones o formas de ordenar objetos** que podemos llevar a cabo de un modo rápido teniendo en cuenta las relaciones que deben existir entre ellas.

Conceptos que debemos distinguir a la hora de ordenar o agrupar:

<u>Población</u>: el número de elementos que se están estudiando

<u>Muestra</u>: cuántos elementos se seleccionan del total para agrupar u ordenar

El objetivo de esta unidad no es hallar todas y cada una de las agrupaciones o combinaciones de elementos, sino más bien, la **CANTIDAD** de esas ordenaciones.
Para descubrirlo debemos hacernos dos preguntas importantes:

1. **¿Se incluyen todos los elementos en la elección?**
2. **¿Importa el orden en el cual se ordenan?**
3. **¿Se pueden repetir los elementos?**

Distinguir de los siguientes:

- Población
- Muestra
- Se incluye o no a todos los elementos
- Importa o no el orden
- Se puede o no repetir elementos

1. En una clase de matemática de 28 alumnos se quieren seleccionar a dos para entregar un trabajo sobre funciones. De cuántas formas puede hacerse dicha selección ?
2. De una clase de 16 alumnos se quiere evaluar uno por uno de forma oral el tema de funciones lineales. ¿De cuántas formas se puede ordenar dicho oral?
3. Quiero generar una clave con cuatro letras para el banco, ¿cuántas posibilidades hay?
4. En una heladería ofrecen siete gustos de helado. En 1/4 de helado entran hasta tres sabores ¿cuántas posibilidades hay?

<u>Factorial de un número natural</u>

El factorial de un número entero positivo se define como el producto de todos los números naturales anteriores o iguales a él. Se escribe n!, y se lee "n factorial". (Por definición el factorial de 0 es 1: 0!=1)

Por ejemplo, 5! = 5·4·3·2·1 = 120   En general $n! = n.(n-1)(n-2)(n-3)$...

Propiedad: $n! = n(n-1)!$

Ejemplos:

$$\frac{7!}{6!} = \frac{7.6!}{6!} = 7$$

$$\frac{10!}{7!} = \frac{10.9.8.7!}{7!} = 10.9.8 = 720$$

$$\frac{10!6!}{9!4!} = \frac{10.9!6.5.4!}{9!4!} = 10.6.5 = 300$$

<u>Experimento aleatorio:</u>

Son aquellos experimentos en los que no se puede predecir su resultado. Por ejemplo: lanzar una moneda, sacar una bola de una bolsa, lanzar un dado…

<u>Espacio muestral:</u>

Es el conjunto de todos los resultados posibles de un experimento aleatorio. *Por ejemplo:*

- Lanzar una moneda una vez: Espacio muestral: {cara, seca}
- Lanzar una moneda dos veces E.M: {CC,CS,SC,SS}
- Y lanzarla tres veces ? ____________
- Tirar un dado ____________
- Tirar dos dados ____________
- Tirar un dado y una moneda ____________

Si un evento A puede ocurrir de M maneras diferentes y un evento B puede ocurrir de N maneras diferentes, entonces el número total de formas en que ambos pueden ocurrir es de M.N maneras.

Por ejemplo:

- Tengo 3 pantalones y 4 camisas, ¿De cuántas maneras puedo vestirme?

- Se lanza una moneda y 2 dados. ¿De cuántas formas se pueden obtener resultados?

- ¿Cuántas contraseñas diferentes pueden escribirse con dos letras y un dígito numérico?

TIPOS DE COMBINATORIA

Variaciones

Variación: es la disposición de una parte del total de elementos en un orden determinado. Aquí sí importa el orden.

Por ejemplo:

Si quiero saber de cuántas formas se puede elegir al campeón y subcampeón del mundial, no es lo mismo salir campeón que subcampeón, por ello, aquí sí importa el orden.

Se llama **variaciones** de n elementos tomados de a r donde dos grupos son distintos si tienen distinto orden o un elemento diferente

Resumen:
No entran todos los elementos
Sí importa el orden

Podemos encontrar dos casos de variación:

CASO 1: **No** se repiten los elementos

Dichas **variaciones** se denotan por $V^{n}_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$

Variaciones de n elementos tomados de a r

Ejemplos:
¿De cuántas formas distintas pueden ordenarse 6 candidatos de un partido político para formar los cuatro primeros puestos de la lista?

$$V^{6}_{4} = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6.5.4.3.2.1}{2.1} = 6.5.4.3 = 360$$

En una Escuela se realizará un sorteo entre 20 alumnos para elegir abanderado, primer escolta, segunda escolta, de la bandera. ¿De cuántas maneras distintas se puede hacer esta elección?

$$V^{20}_{3} = \frac{n!}{(n-r)!} = \frac{20!}{(20-3)!} = \frac{20!}{17!}$$

$$= \frac{20.19.18.17.16.15.14.13.12.11.10.9.8.7.6.5.4.3.2.1}{17.16.15.14.13.12.11.10.9.8.7.6.5.4.3.2.1} = 20.19.18 = 6840$$

CASO 2: **SI** se repiten los elementos

La formula seria:

$$VR_r^n = n^r$$

Se trata de variaciones de "n" objetos tomados de a "r" donde r puede ser mayor a n, es decir, puedo tomar varias veces el mismo elemento.

Ejemplo:
¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos: 1, 2, 3, 4, 5 ?

$VR_3^5 = 5^3 = 125$ (variacion con repeticion)

En este caso tomamos en cuenta que los dígitos pueden ser repetidos, por ejemplo el 111, o el 335

Permutaciones

Permutación: es la disposición de todos los elementos en un orden determinado. Aquí si importa el orden.

Por ejemplo;

si quiero saber cuántos resultados posibles puede tener una carrera en la que participan 4 caballos, tengo que ordenar a todos los elementos, es decir, a los 4 caballos, como no es lo mismo salir primero que segundo en la carrera, aquí si importa el orden, y se necesita ordenar a todos los elementos, por ello, se trata de una permutación de 4 elementos.

Son aquellas formas de agrupar los elementos de un conjunto teniendo en cuenta que:
- Influye el orden en que se colocan.
- Tomamos todos los elementos de que se disponen.

Una permutación es una variación en la cual la cantidad de elementos que se toman para agrupar es igual a la cantidad de elementos por grupo

Resumen:
Sí, entran todos los elementos
Sí, importa el orden

EXISTEN ***DOS CASOS:***

CASO 1: En el que **No** se repiten los elementos

$P_n = n!$ Permutación de n elementos

Ejemplo:

¿Cuántos números distintos de 4 cifras distintas se pueden formar con los números 1,2,3,4?

$P_4 = 4! = 4.3.2.1 =$ **24** Hay 24 números distintos de 4 cifras ¿Vemos cuáles son ?

1234	1243	1324	1342	1432	1423
2134	2143	2341	2314	2431	2413
3124	3142	3214	3241	3412	3421
4123	4132	4213	4231	4312	4321

La cantidad de cifras del número es igual a la cantidad de cifras con las que lo pude formar

¿Cuántos números distintos de 4 cifras distintas se pueden formar con los números 6,7,8,9? $P4 = 4! = 24$

CASO 2: En el que **SI** se repiten los elementos

$$PR^{n}_{a.b.c...} = \frac{n!}{a!b!c!}$$

Lo veremos con un ejemplo:

¿De cuántas maneras distintas pueden colocarse en línea nueve bolas de las que 4 son blancas, 3 amarillas y 2 azules?

Tengo que repetir bolas del mismo color porque ya de por si tengo 4 blancas que son iguales entre sí, 3 amarillas y 2 azules que también son iguales entre sí. Por lo tanto es una permutación con repetición y la fórmula para calcularlo es:
(PR: permutacion con repeticion)

$$PR^{9}_{4.3.2...} = \frac{9!}{4!.3!.2!} = \frac{362880}{24 . 6 . 2} = \frac{362880}{288} = 1260$$

Combinaciones

Combinación: disposición de una parte del total de elementos sin tener en cuenta el orden. Aquí no importa el orden de los elementos. Por ejemplo, si quiero saber de cuántas formas se puede elegir a 2 colores de un total de 10 para combinarlos, no importa el orden en que los elija, el resultado será el mismo.
Las combinaciones son aquellas formas de agrupar los elementos de un conjunto teniendo en cuenta que: • NO influye el orden en que se colocan.

Se llama **combinaciones de n** elementos tomados de a **r** a todas las agrupaciones posibles que pueden hacerse con los elementos de forma que dos grupos son distintos si tienen por lo menos un elemento distinto:

Resumen
No entran todos los elementos
No importa el orden

Podemos encontrar dos casos:

CASO 1: No se repiten los elementos

$$C^{n}_{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$$ Combinaciones de n elementos tomados de a r

Un cocinero va a preparar una ensalada de verduras con lechuga, tomate , cebolla y zanahoria. ¿De cuántas formas se puede preparar la ensalada usando solo 2 ingredientes?

$$C^{4}_{2} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!} = \frac{4!}{2!\,(4-2)!} = \frac{4.3.2.1}{2.1.2.1} = 6$$

Combinación de 4 elementos tomados de a 2 Respuesta : 6 formas

L T L C L Z T C T Z C Z

CASO 2: Si se repiten los elementos (porque hay elementos iguales)

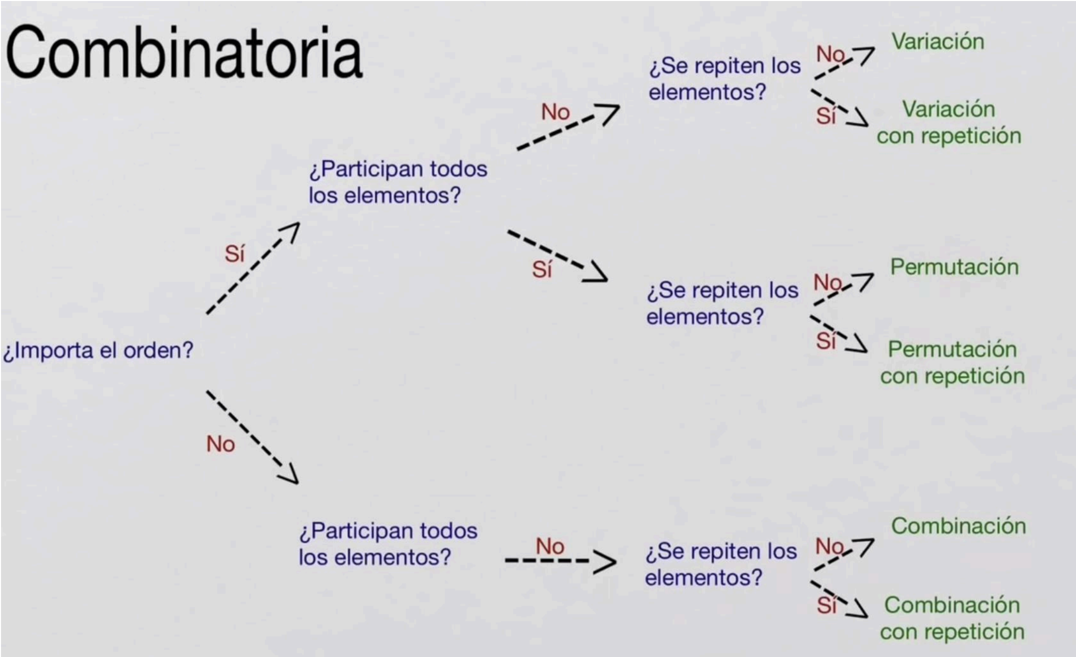
Es un conjunto de elementos que se puede formar tomando de a "r" elementos a partir de un conjunto de "n" elementos. Sin importar el orden. Pudiendo repetir los elementos.
La fórmula utilizada es la siguiente:

$$CR^{n}_{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}$$

Veamos un ejemplo: En una confitería hay cinco tipos diferentes de pasteles. ¿De cuántas formas se pueden elegir cuatro pasteles pudiéndose elegir varios del mismo tipo?
No importa el orden (son pasteles). Puede haber dos o más pasteles en un grupo, entonces con repetición. Por lo tanto, como no importa el orden, es una combinación y como me dicen que se pueden repetir los elementos, es una combinación con repetición.
Aplico la fórmula:

$$C' = \frac{(n+r-1)!}{r!\,.\,(n-1)!} = \frac{(5+4-1)!}{4!\,.\,(5-1)!} = \frac{8!}{4!\,.\,4!} = \frac{40320}{24\ .\ 24} = 70$$

70 maneras diferentes de elegir 4 pasteles
de cinco grupos de pasteles distintos.


Combinatoria
¿Importa el orden?
Sí
No
¿Participan todos los elementos?
No
Sí
¿Se repiten los elementos?
No
Sí
Variación
Variación con repetición
¿Se repiten los elementos?
No
Sí
Permutación
Permutación con repetición
¿Participan todos los elementos?
No
¿Se repiten los elementos?
No
Sí
Combinación
Combinación con repetición

EN RESUMEN

	INCLUYE A TODOS LOS ELEMENTOS	IMPORTA EL ORDEN	REPETICIÓN	FÓRMULA
VARIACIÓN	NO	SI	NO	$V^{n}_{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$
			SI	$VR^{n}_{r} = n^{r}$
PERMUTACIÓN	SI	SI	NO	$P_{n} = n!$
			SI	$PR^{n}_{a.b.c...} = \frac{n!}{a!b!c!}$
COMBINACIÓN	NO	NO	NO	$C^{n}_{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}$
			SI	$CR^{n}_{r} = \frac{(n+r-1)!}{r!\,(n-1)!}$

ACTIVIDAD

1. ¿De cuántas formas pueden hacer fila 5 amigos para entrar al cine?

2. Un alumno tiene 7 libros, ¿de cuántas maneras puede acomodar cinco de ellos en un estante?

3. El capitán de un barco solicita 2 marineros para realizar un trabajo, sin embargo, se presentan 10. ¿De cuántas formas podrá seleccionar a los 2 marineros?

4. Con 4 frutas diferentes, ¿cuántos jugos surtidos se pueden preparar? *Un jugo surtido se prepara con 2 frutas.

5. . ¿De cuántas formas puede un juez otorgar el primero, segundo y tercer premio en un concurso que tiene ocho concursantes?

6. ¿Cuántos grupos podemos formar al extraer 4 cartas de una baraja española de 40 ?
a) Sin reposición de cartas
b) Con reposición de cartas.

7. En una urna, hay 5 bolas del mismo tamaño y peso, de los cuales, 3 son rojas y 2 son azules. ¿De cuántas maneras se pueden extraer una a una las bolas de la urna?

8. Se va a programar un torneo de ajedrez para los 10 integrantes de un club. ¿Cuántos partidos se deben programar si cada integrante jugará con cada uno de los demás sin partidos de revancha?

9. ¿De cuántas formas distintas pueden sentarse 8 personas en una fila de butacas?

10. ¿Cuántos números de tres cifras se pueden formar con los dígitos: 2, 3, 4, 5?

11. ¿Cuántos números de 5 cifras podemos escribir con los números del 0 al 4 ?

12. ¿Cuántos números de 4 cifras podemos escribir con los números del 0 al 4 sin repetirlos?

13. Una persona decide invitar a 5 amigos de su grupo de 8 amigos. ¿De cuántas maneras puede realizarlo?

14. De cuántas formas se pueden colocar los 11 integrantes de un equipo de fútbol si uno de ellos solo puede ser arquero?

15. Si un cuestionario tiene 15 preguntas y cada pregunta tiene tres opciones de respuesta, ¿cuántas formas distintas posibles existen de resolver el cuestionario?

16. En una clase de 35 alumnos, se requiere formar un comité de 3 alumnos. ¿De cuántas maneras se puede formar?

17. Si deseo elegir un pote con 3 gustos diferentes de helado en una heladería que tiene 6 gustos solamente. ¿De cuántas formas podré hacerlo?

18. ¿De cuántas formas puedo colocar 12 libros en un estante?

19. Un club cuenta con 20 socios en condiciones de integrar la comisión directiva. Los cargos son presidente, vicepresidente, tesorero y vocal. ¿Cuántas formas hay de formar las listas?

20. En el palo de señales de un barco se pueden izar tres banderas rojas, dos azules y cuatro verdes. ¿Cuántas señales distintas pueden indicarse con la colocación de las nueve banderas?

21. Sabiendo que existen 27 letras en el abecedario, ¿cuántas formas diferentes hay de escribir grupos de tres letras (pudiendo repetirlas)?

22. ¿Cuántas formas existen de escoger un grupo de 5 personas de un total de 12 personas?

23. A una reunión concurren 12 personas e intercambian saludos entre todos. ¿Cuántos saludos han intercambiado?

24. ¿Cuántas banderas diferentes de tres franjas horizontales de colores distintos pueden confeccionarse a partir de siete colores diferentes?

25. En una heladería tienen 12 sabores distintos. a) ¿Cuántos cucuruchos de 2 sabores distintos se pueden elegir?
b) ¿Y si se pueden repetir los sabores?

26. Un plantel de fútbol está integrado por 22 jugadores. De cuántas maneras puede seleccionar 11 jugadores, el director técnico, con la única condición de incluir a un arquero de los 3 que tienen en el plantel?

27. Nuestras patentes actuales constan de 2 letras, 3 números y 2 letras. ¿Cuántas patentes pueden formarse utilizando este sistema?

28. Cuatro libros de matemática, seis de física y dos de química deben ser colocados en una estantería. Cuántas colocaciones distintas se admiten si:
a. Los libros de cada materia deben colocarse juntos
b. Solo los libros de matemática deben estar juntos

29. En un hospital se utilizan cinco símbolos para clasificar las historias clínicas de sus pacientes, de manera que los dos primeros son letras y los tres últimos son dígitos.Suponiendo que hay 25 letras, ¿cuántas historias clínicas podrían hacerse si:
1. No hay restricciones sobre letras y números
2. Las dos letras no pueden ser iguales.

30. Con 4 varones y 6 mujeres. ¿Cuántas formas hay de armar un grupo con 3 integrantes de cada género?

31. En un curso de matemática de primer año hay 31 estudiantes de los cuales nueve son recursantes. Si el docente pidió armar un grupo de cuatro estudiantes, de cuántas maneras puede armarse ese grupo si…

A) Debe haber sólo 1 recursante
B) Debe haber al menos 1 recursante
C) Debe haber al menos 1 ingresante