

MÚLTIPLOS Y DIVISORES

Sean A y B números enteros decimos que A es divisible por B si existe un entero C tal que $A=B.C$. En caso de que esto no ocurra, decimos que A no es divisible por B.

Esto es lo mismo que decir **B divide a A, B es divisor de A o A es múltiplo de B**

Es decir, los **divisores de un número** son los **números que** pueden dividirlo de forma exacta, y dar **como** resultado un **número** entero. Por **ejemplo**, el **número** 100 puede ser dividido exactamente entre 1, 2, 4, 5, 10, 25, 50 y 100; estos son sus **divisores**.

Observación: todo número es divisible por 1 y por si mismo

Así podemos buscar qué divisores en común tienen dos o más números, por ejemplo: Los divisores que comparten los números 40 y 30.

divisores de 40: 1,2,4,5,8,10,20,40

divisores de 30: 1,2,3,5,6,10,15,30

En común tienen al: 1,2,5 y 10

¿Cuál es el divisor común mayor (**DCM**) entre 30 y 40? **el 10.**

Los **múltiplos de un número** son los **que** se obtienen al multiplicar dicho **número** por todos los **números naturales** salvo el 0. Puesto **que** hay infinitos **números naturales**, **un número** tiene infinitos **múltiplos**. Por **ejemplo**: los **múltiplos** del **número** 3 son 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21,...

Podríamos buscar los **múltiplos en común** que tienen dos o más números. Por ejemplo: Los múltiplos que comparten los números 30 y 40.

múltiplos de 30: 30,60,90,120,150,180,210,240,270,300,330,360,390,420,450,480...

múltiplos de 40: 40,80,120,160,200,240,280,320,360,400,440,480...

y vamos a seguir encontrando porque son infinitos...

¿Cuál es el múltiplo común menor(**MCM**) entre 40 y 30? **el 120**, y todos los que le siguen son múltiplos de él.

A veces es fácil y rápido encontrar el divisor común mayor o el múltiplo común menor entre dos números, pero cuando tenemos varios números y son más grandes, puede tornarse más complicado . Por ejemplo: Hallar el DCM y el MCM entre 1045, 730, 980 y 5903...

ACTIVIDAD:

1) Escribir los números que cumplen con cada una de las siguientes condiciones:

- | | |
|---------------------|--------------------|
| a) Divisores de 24 | d) Múltiplos de 6 |
| b) Divisores de 60 | e) Múltiplos de 11 |
| c) Divisores de 200 | f) Múltiplos de 19 |

2) Completar con cruces de acuerdo a si es divisible o no

Número	Divisible por...							
	2	3	4	5	6	7	8	9
298								
36								
8622								
423								
300								

NÚMEROS PRIMOS Y COMPUESTOS

Definición:

Un número entero a , distinto de 0, -1, 1 se llama primo si y sólo si es divisible únicamente por sí mismo, por 1, por -1 y por su opuesto ($-a$).

Ejemplo:

17 es un número primo porque solamente sus divisores son 1, -1, -17 y 17.

NÚMEROS PRIMOS:

2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89.....
... (son infinitos)

Definición:

Un número entero a distinto de -1, 0, 1, se llama compuesto, si dicho número puede expresarse como el producto de dos o más factores distintos de 1, -1 y de sí mismo (estos factores pueden estar repetidos).

Ejemplo:

75 es un número compuesto dado que: $75 = 3.5.5$

Definición:

Se dice que dos números enteros distintos son primos entre sí (coprimos) cuando solo tienen como divisor común a 1 y -1.

Ejemplo:

Los números 70 y 99 son primos entre sí, ya que los divisores comunes son 1 y -1.

Debemos hacer notar que:

1. Dos números primos entre sí no necesariamente son primos.
2. Dos números primos son primos entre sí.
3. Existen infinitos números primos.

TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA

Un número natural $n > 1$ es o un número primo o puede ser expresado como un único producto de factores primos (excepto por el orden en que aparecen dichos factores). Todo número $n > 1$ se descompone en forma única como producto de factores en la forma:

$$n = p_1^{a_1} \cdot p_2^{a_2} \cdot \dots \cdot p_m^{a_m}$$

donde los números $p_1 < p_2 < \dots < p_m$ son primos y a_i son naturales:

Ejemplo:

$$24 = 2^3 \cdot 3^1$$

$$32 = 2^5$$

$$13 = 13^1$$

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

Utilizando el teorema anterior...

MÁXIMO COMÚN DIVISOR

- El máximo común divisor (m.c.d.) de dos o más números es el mayor de los divisores comunes.

- Para hallar el máximo común divisor de dos o más números, por ejemplo, m.c.d. (12, 18), se siguen estos pasos:

1.º Se descompone cada número en producto de factores primos.

2.º El producto de estos factores comunes elevados al menor exponente es el máximo común divisor de los números dados.

$$\begin{array}{r|l} 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$12 = 2^2 \times 3$$

$$18 = 2 \times 3^2$$

$$\text{m.c.d. (12, 18)} = 2 \times 3 = 6$$

NÚMEROS COPRIMOS

Los números coprimos (números primos entre sí o primos relativos) son dos números enteros a y b que no tienen ningún factor primo en común. Dicho de otra manera, si no tienen otro divisor común más que 1 y -1. Equivalentemente son coprimos, si y sólo si, su máximo común divisor (MCD) es igual a 1. Dos números coprimos no tienen por qué ser primos absolutos de forma

individual

Por ejemplo, 6 y 19 son coprimos, pero 6 y 27 no lo son porque ambos son divisibles por 3.

Corolario: Dos números primos, son coprimos entre sí.

MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

- El mínimo común múltiplo (m.c.m.) de dos o más números es el menor múltiplo común distinto de cero.

- Para hallar el mínimo común múltiplo de dos o más números, por ejemplo, m.c.m. (30, 45), se siguen estos pasos:

1.° Se descompone cada número en producto de factores primos.

2.° El producto de estos factores comunes elevados al mayor exponente y de los no comunes es el mínimo común múltiplo de los números dados.

30		2	45		3
15		3	15		3
5		5	5		5
1			1		

$$30 = 2 \times 3 \times 5$$

$$45 = 3^2 \times 5$$

$$\text{m.c.m. (30, 45)} = 2 \times 3^2 \times 5 = 90$$

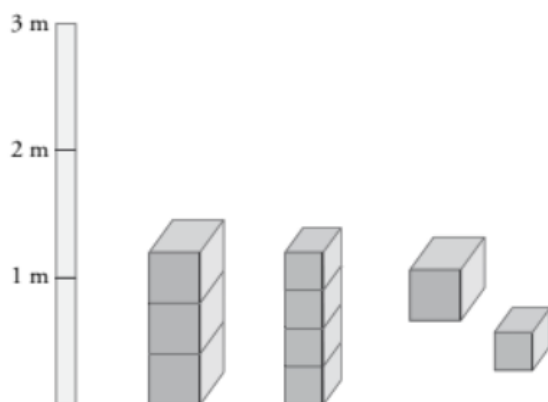
ACTIVIDAD 1:

Hallar el MCM y DCM entre:

- a. 600 y 180
- b. 252 y 108
- c. 132 y 72
- d. 147 y 882
- e. 234 y 117
- f. 300, 150 y 220
- g. 196, 294 y 686

ACTIVIDAD 2: Resolver utilizando MCM o DCM

1. Andrés tiene en su tienda los botones metidos en bolsas. En la caja A tiene bolsitas de 24 botones cada una y no sobra ningún botón. En la caja B tiene bolsitas de 20 botones cada una y tampoco sobra ningún botón. El número de botones que hay en la caja A es igual que el que hay en la caja B. ¿Cuántos botones como mínimo hay en cada caja?
2. María y Jorge tienen 25 bolas blancas, 15 bolas azules y 90 bolas rojas y quieren hacer el mayor número de collares iguales sin que sobre ninguna bola.
 - a) ¿Cuántos collares iguales pueden hacer?
 - b) ¿Qué número de bolas de cada color tendrá cada collar?
3. Un campo rectangular de 360 m de largo y 150 m de ancho, está dividido en parcelas cuadradas iguales. El área de cada una de estas parcelas cuadradas es la mayor posible. ¿Cuál es la longitud del lado de cada parcela cuadrada?
4. Teresa tiene un reloj que suena cada hora, otro reloj que suena cada 150 minutos y un tercero cada 6 horas. A las 9 de la mañana los tres relojes han coincidido.
 - a) ¿Cuántas horas, como mínimo, han de pasar para que vuelvan a coincidir?
 - b) ¿A qué hora volverán a sonar otra vez juntos?
5. Una fábrica envía mercancía a Valencia cada 6 días y a Sevilla cada 8 días. Hoy han coincidido ambos envíos. ¿Cuánto tiempo pasará hasta que vuelvan a coincidir?
6. Un carpintero tiene dos listones de 180 cm y 240 cm, respectivamente, y desea cortarlos en trozos iguales, lo más largos que sea posible, y sin desperdiciar madera. ¿Cuánto debe medir cada trozo?
7. Se han construido dos columnas de igual altura: la primera apilando cubos de 40 cm de arista, y la segunda, con cubos de 30 cm de arista. ¿Qué altura alcanzarán sabiendo que superan los dos metros, pero no llegan a tres?



8. En una librería se quieren colocar 72 libros de matemática, 48 de sociales, 54 de lengua y 162 de naturales en la menor cantidad de estantes y con la misma y mayor cantidad de libros de cada área en todos ellos.
 - a) ¿Cuántos estantes se van a ocupar?
 - b) ¿Cuántos libros de cada área habrá en cada uno?

9. Un sitio turístico en el Caribe ofrece tres diferentes cruceros:
Opción 1: tarda 6 días en ir y regresar a su punto de inicio,
Opción 2: tarda 8 días en ir y regresar a su punto de inicio y
Opción 3: tarda 10 días en ir y regresar a su punto de inicio.

Si los tres cruceros partieron al mismo tiempo hace 39 días, ¿cuántos días faltan para que vuelvan a partir el mismo día todos los cruceros?

10. Simón tiene una pista de carreras con dos autos. El primer auto le da una vuelta completa a la pista en 31 segundos y el segundo lo hace en 17 segundos.
Carlos también tiene su pista de carreras con dos autos, pero el primero da una vuelta completa en 36 segundos y el segundo en 42 segundos.

Como Carlos siempre pierde cuando juegan, propone a Simón que el ganador sea quien tenga en su pista sus dos autos situados en la meta al mismo tiempo. ¿Quién ganará?

11. Un acuario pequeño se quedó en bancarrota, por lo que otros acuarios van a comprar los peces que tienen. En total, se venderán 48 peces payaso, 60 peces globo, 36 tiburones bebés, 24 pulpos y 72 peces león.
Para la venta, se desea que los contenedores sean del mismo tamaño y que alberguen la mayor cantidad de animales posible. Además, en cada contenedor sólo puede haber peces de una única especie.

¿Cuántos peces debe haber por contenedor y cuántos contenedores se necesitan para cada especie?

12. Un estudiante de Astronomía sabe que Venus le da la vuelta al Sol en 225 días y Marte en 687 días. Si sabe que la última vez que Venus, Tierra y Marte se alinearon fue hace 1805645 días, ¿en cuánto tiempo se volverán a alinear los 3 planetas en el mismo punto?