Clase 04

Análisis de Sistemas

Materia:
Elementos de Matemática

Docente contenidista: GARCÍA BONELLI, Silvia Cristina

Revisión: Coordinación

Contenido

CLASE 4

Conjuntos numéricos

Les damos la bienvenida a la clase 4 de la materia **"Elementos de Matemática**".

En esta clase vamos a ver los siguientes temas:

- Conjuntos numéricos.
- Módulo, múltiplos y divisores de un número.
- Números primos y coprimos.
- Máximo común divisor y mínimo común múltiplo.

¿Por qué vemos este tema en nuestra clase de matemática?

Números primos, coprimos, MCD, mcm, módulo

Son utilizados principalmente en procesos de seguridad y algoritmos, en criptografía informática como por ejemplo el algoritmo RSA.

También se utilizan para el área de simulación y generación de números aleatorios y pseudoaleatorios.

Introducción a los Conjuntos numéricos

En este cuadro nombramos los conjuntos numéricos existentes:

Naturales(N)
{0}

Enteros Negativos (Z^-)

Números Enteros (Z)

Fracciones (Fr)

Números Racionales (Q)

Números Irracionales (Irr)

Números Reales (R)

Números Imaginarios (Im)

Números Complejos (C)

Aclaramos el cuadro anterior teniendo en cuenta que:

N	**Números naturales.**
No	**Números Naturales comenzando de 0.**
Z-	**Números enteros Negativos.**
Z	**Números enteros.**
Fr	**Conjunto de Números fraccionarios.**
Q	**Números Racionales.**
Irr	**Conjunto de Números Irracionales.**
R	**Conjunto de números Reales.**
Im	**Conjunto de números Imaginarios.**
C	**Conjunto de números complejos.**

En símbolos y en lenguaje coloquial

Z- U {0} U N = Z

Se lee así: el conjunto de números enteros es la Unión del conjunto de números Naturales, el cero y los números Enteros negativos.

Z U Fr = Q

Se lee así: el conjunto de los números Racionales es igual al conjunto de los números Enteros y el conjunto de las fracciones.

Q U Irr = R

Se lee así: el conjunto de los números Reales es igual a la Unión del conjunto de los números Racionales y los Irracionales.

R U Im = C C

Se lee así: El conjunto de los números Complejos está formado por la Unión entre el conjunto de los números Reales y los Imaginarios.

Veremos la definición y ejemplos de cada uno de estos conjuntos

Números Naturales (N)

El conjunto de los números naturales está compuesto por los siguientes elementos:

N = {1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9 , 10 , 11 , 12 , ...}

N_0 = {0, 1, 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , 7 , 8 , 9......}

Es un conjunto infinito, utilizado desde la antigüedad para contar, es el primer conjunto que se define dentro de los conjuntos numéricos. A partir de este conjunto y determinadas operaciones se irán definiendo el resto de los conjuntos.

Números enteros (Z)

El conjunto de los números enteros está compuesto por el conjunto de los números naturales, todos los números opuestos, y el cero.

Al restar dos números naturales, como por ejemplo 5 y 7, obtenemos números que quedan fuera del conjunto de los números naturales,
5 - 7 = -2, vemos que -2 no es natural, pero sí será un número entero.

Z = { ... , -5 , -4 , -3 , -2 , -1 , 0 ,1 , 2 , 3 , 4 , 5 , ... } **Z^- U {0} U N = Z**

Ejemplos:
Temperaturas sobre 0 y bajo cero, saldo deudor, antes y después de Cristo, etc.

Números racionales (Q)

Q = { $\frac{a}{b}$, siendo a y b dos números enteros } **$Q = Z \cup Fr$**

Por ejemplo, el número 3/5, - 15/7, 15/3, 1/7, 1/3 incluso cualquier número entero también es racional dado que se puede expresar como ese mismo número dividido 1.

Por ejemplo 8 = $\frac{8}{1}$

Números Irracionales (I)

En principio, podemos definirlo como todo aquel número que **no** se puede expresar como el cociente de dos números enteros. Son números que poseen infinita parte decimal y además **no son periódicos**, es decir, la parte decimal no sigue ninguna secuencia repetida de números.

Por ejemplo:

El número π , la raíz cuadrada de 2 ($\sqrt{2}$) son números irracionales.

Q	Irr
$\frac{3}{4}$ = **0,75**	π **= 3,141592654……**
1,33333333….= $1,\widehat{3}$ **Periódico puro**	$\sqrt{2}$ **=1,414213562……**
1.30202020202… **Periódico mixto**	**11,654987321…………**
$\frac{5}{3}$	**• + 1**
7	$\sqrt{7}$
-2	$\sqrt{11}$
1.2	$\sqrt{5}$
∞ *cifras periódicas*	∞ *cifras* ***no*** *periódicas*

Números reales (R)

El conjunto de los números reales puede definirse como la unión de los números racionales e irracionales.

Este conjunto abarca a todos los anteriores, es cualquier número que podamos imaginar como una secuencia de dígitos decimales seguido de una coma y otra secuencia de dígitos decimales.

R U Im = C   C complejos

Módulo

La operación de módulo se le aplica a cualquier número independientemente de su conjunto (natural, entero, racional, real), y nos indica cuál es su distancia al cero en una recta numérica.

De forma práctica, muchas veces se define de la siguiente forma:

Si x es un número positivo o cero, |x| = x   (sin cambio de signo)

Si x es un número negativo, |x| = x   (con cambio de signo)

Por ejemplo

| 3 | = 3

| -7 | = 7

| 0 | = 0

| -4 | = -4 imposible, Falso

Los números opuestos tienen igual valor absoluto.

|a| = |−a|

Ejemplo:

|16| = |−16| = 16

Otra definición de Módulo: ***Es la distancia a o***

Resolveremos ahora algunos ejercicios

1. Calculá los siguientes valores absolutos.

|-14| =

|10| =

|0| =

2. Indicá V o F según corresponda.

a) |-8|= 8

b) |-16| es menor que cero

c) |-16| es mayor que cero

d) |9 - 4| = |4 -9|

e) |-1| = -1

Respuestas

a) Verdadero

b) Falso

c) Verdadero

d) Verdadero

e) Falso

3. Resolver

a) |-4|. |-3| =

b) |7-3| =

c) |7 +3| =

d) |3-7| =

e) |9| |-2| =

f) |-2-5|

g) -|-3| |-4|=

h) -|-3-4| =

i) -|9-8| =

j) |8-9| =

Respuestas

a) |-4|. |-3| =|12| 12

b) |7-3| =|4|= 4

c) |7 +3| =|10|=10

d) |3-7| =|-4| =4

e) |9| |-2| =|-18| =18

f) |-2-5| = |-7| = 7

g) -|-3| |-4|= - 3.4 = -12

h) -|-3-4| = - |-7| = 7

i) |9-8| =- |1| = -1

j) |8-9| = - |-1| = - 1

Múltiplo de un número

Se define como múltiplo de un número **"n"** a todo aquel número que se obtiene de multiplicar al número **"n"** por un entero **"k". Es decir**, todo número de la forma **n.k**

Para cualquier número entero, el conjunto de múltiplos es infinito.

Por ejemplo:

El conjunto de los múltiplos de 7 es

$\dot{7}$ **= {7,14,21,28,35,42,49,0,-7,-14,-21,-28,...}**

No olvidar que como "k" es entero, los números negativos también están incluidos en el conjunto.

El cero es múltiplo de todo número, ya que si decimos que k=0, nos queda n.0 = 0 para cualquier valor de n.

Ejercicio

Hallar los primeros diez múltiplos naturales (positivos) de los siguientes números:

a) 17

b) 29

c) -12

Divisores de un número

Se define como divisor de un número **"n"** a todo aquel número **"d"** que al dividir a "n" posee resto cero en la división entera.

Dicho de otro modo, "d" es un divisor de **"n"** si existe algún número entero **"k"** tal que **n = d.k**

Por ejemplo:

- **3 es un divisor de 27, dado que 27: 3 = 9 ,**
  dicho de otro modo 27 se puede expresar como 3.9.
  En este caso nuestro n = 27 , d = 3 y k = 9
- **4 no es un divisor de 27, dado que 27 no es posible expresarlo como 4 por algún número.**

*El conjunto de divisores de un número siempre es un conjunto **finito**.*

*A diferencia de los múltiplos que es un conjunto **infinito**.*

Por ejemplo:

El conjunto de divisores de 36 es
{1,-1,2,-2,3,-3,4,-4,6,-6,9,-9,12,-12,18,-18,36,-36}

Tenemos en cuenta que cada número siempre es divisible por:

Sí mismo y su opuesto	**Ej. 36 es divisible por 36 y -36**
La unidad y su opuesta	**36 es divisible por 1 y -1**

Ejercicio

Hallar el conjunto de divisores de:

a) 152

b) 78

c) 61

Números Primos

Se define como número primo a todo número entero **"p"** que posee exactamente 4 divisores, el mismo número, su opuesto, la unidad (1), y el opuesto de la unidad (-1).

Es decir que posee el siguiente conjunto de divisores: **{p,-p,1,-1}**

Algunos números primos son los siguientes:
2 , 3 , 5 , 7 , 11 , 13 , 17 , 19 , 23 , ...

¿Cuántos hay en total? **Infinitos.**

El conjunto de todos los números primos tiene una cardinalidad infinita, es decir que nunca terminan.

Factorización en un número como producto de números primos

Cualquier número entero se puede expresar como un producto de números primos. Los números primos, por supuesto, solo pueden expresarse como un producto de ellos mismos por uno.

Para el resto de los números, que los denominaremos números compuestos, existe una forma de expresarlos como un producto de números primos.

Por ejemplo:

2 , 3 , 5 , 7 , 11 , 13 , 17 , 19 , 23 , primos

250 = 2 . 125 = 2 . 5 . 25 = 2 . 5 . 5 . 5 , por lo tanto $250 = 2.5^3$

64 = 2 . 32 = 2 . 2 . 16 = 2 . 2 . 2 . 8 =
2 . 2 . 2 . 2 . 4 = 2 . 2 . 2 . 2 . 2 . 2 , por lo tanto $64 = 2^6$

250	2
125	5
25	5
5	5
1	

$250 = 2.5^3$

64	2
32	2
16	2
8	2
4	2
2	2
1	

$64 = 2^6$

Para tener en cuenta:

En la calculadora las potencias se calculan **э** ó x^y según el modelo.

En el caso de tratarse de un número primo no hay manera de expresarlo como producto de otros números.
Ya que justamente no tiene ningún divisor a excepción de él mismo y la unidad.

En general para hallar la factorización, debemos ir evaluando por qué números es divisible el número que queremos factorizar.

En general, comenzamos evaluando si es divisible por 2, luego por 3, luego por 5, y así sucesivamente.

Tener presente que puede llegar a dividirse más de una vez por el mismo número dado que en la factorización los números primos pueden aparecer repetidos.

Ejercicio

Hallar la factorización de los siguientes números:

a) 259 = 7.37

b) 348 = 2^2 3.29

c) 721 = 7.103

Máximo Común Divisor (MCD)

El máximo común divisor entre dos o más números se define como aquel divisor **positivo** que divide a todos los números involucrados y además es el mayor de todos los divisores comunes.

Por ejemplo:

Calculemos el máximo común divisor entre 24 y 42, MCD (24,42)

Buscamos los divisores del 24: {1,2,3,4,6,8,12,24}

Buscamos los divisores del 42: {1,2,3,6,7,14,21,42}

Los divisores comunes de ambos son: {1,2,3,6}

De todos los divisores comunes, el de mayor valor es el 6.

Por lo tanto, MCD (24,42) = 6

Para tener en cuenta:

Hay un método práctico para hallar el MCD sin hallar el conjunto de divisores de cada número.
Se debe hallar la factorización en números primos de cada número.

$24 = 2^3.3$

$42= 2.3.7$

Es el producto de las *potencias comunes con su MENOR exponente*.

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

MCD = 2.3 = 6

Factores primos = {2, 3, 5, 7, 11, 13..........}

Ejercicio

Hallar el MCD entre los siguientes pares de números enteros:

d) MCD(87;45)

e) MCD(45;147)

f) MCD(94;97)

Respuestas

a) 87 = 3. 29   45 = 3^2 .5   MCD = 3

b) 45 = 3^2 .5   147 = 7^2 .3   MCD = 3

c) 94 = 2. 47   97 = 97   MCD = 1

Hallar el MCD entre el 6,8,10.

6= 2.3   8= 2^3 10 = 2.5   MCD = 2

Vamos a verificar este resultado

Divisores de 6 = {1, 2, 3, 6}

Divisores de 8 = {1, 2, 4, 8}

Divisores de 10 = {1, 2, 5, 10}

Buscamos el mayor de los divisores comunes a los tres números, es 2.

Mínimo Común Múltiplo (mcm)

El mínimo común múltiplo entre dos o más números se define como aquel múltiplo positivo que es múltiplo de todos los números involucrados y además es el menor de todos los múltiplos comunes.

Por ejemplo:

Calculemos el mínimo común múltiplo entre 24 y 20, MCM (24,20)

Buscamos los múltiplos del 24:

{24,48,72,96,120,144,168,192,216,240,264,288,302,...}

Buscamos los múltiplos del 20:

{20,40,60,80,100,120,140,160,180,200,220,240,260,280,...}

Noten que:

- Al tratarse del conjunto de múltiplos, es un conjunto infinito, por lo que debemos detenernos en el momento que encontramos un múltiplo en común entre ambos conjuntos.
- El múltiplo común que primero aparece en ambos conjuntos es el número 120, luego también aparece el 240. Pero debemos quedarnos con el mínimo, por lo tanto, mcm (24,20) = 240.
- Hay un método práctico para hallar el mcm sin hallar el conjunto de múltiplos de cada número. Se debe hallar la factorización en números primos de cada número.

$24 = 2^3.3$

$20= 2^2.5$

$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

mcm = $2^3.3.5 = 120$

Ahora tomamos el producto de las *potencias comunes y no comunes con su mayor exponente*

mcm (24;20) = $2^3.3.5 = 8.3.5 = 120$

Ejercicio

Hallar el mcm entre los siguientes pares de números enteros:

a) mcm (12;25)

b) mcm (18;24)

c) mcm (16;50)

Respuestas

a) $12 = 2^2 .3$	$25 = 5^2$	mcm (12;25) = $2^2 .3 \ \ 5^2 = 300$
b) $18 = 2.3^2$	$24 = 2^{3\cdot}3$	mcm (18;24) = $2^3 .3^2 = 72$
c) $16 = 2^4$	$50 = 2 .5^2$	mcm(16;50) = $2^4 \ 5^2 = 400$

Resumen de M.C.D. y m.c.m.

MCD es el mayor de los divisores comunes	mcm es el menor de los múltiplos comunes
Es el Producto de las potencias <u>comunes</u> con su <u>MENOR</u> exponente	**Es el producto de las potencias comunes y no comunes con <u>su mayor exponente</u>**

Números Coprimos

Dos números “a” y “b” son coprimos si el MCD (a,b) = 1.

Es decir que dos números son coprimos, si no tienen ningún divisor en común excepto el 1, que por definición es divisor de cualquier número.

Por ejemplo:

Los números 125 y 84 son coprimos. Si calculamos el MCD

$125 = 5^3$

$84 = 2^2.3.7$ son coprimos

$$\begin{array}{r|l} 84 & 2 \\ 42 & 2 \\ 21 & 3 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 125 & 5 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

Como vemos, en este caso no tienen ningún factor común a excepción del uno, que, aunque no esté escrito siempre está. Por lo que MCD (125;84) = 1

$125 = 1.5^3$

$84 = 1.2^2.3.7$

Ejercicio

Determinar cuáles de los siguientes pares de números son coprimos:

a) 39 y 156 no son coprimos.

b) 72 y 55 son coprimos.

c) 169 y 121 son coprimos.

Ejercicio Integrador

Hallar el Máximo común divisor y Mínimo común Múltiplo de 225,365 y 687.

225	3	365	5	687	3
75	3	73	73	229	229
25	5	1		1	
5	5				
1					

$m.c.m.(:,:) =$

$= 3^2 \cdot 5^2 \cdot 73 \cdot 229 =$

$= 3\,761\,325$

MCD = 1

Hemos llegado así al final de esta clase en la que vimos estos temas:

- Conjuntos numéricos.
- Módulo, múltiplos y divisores de un número.
- Números primos y coprimos.
- Máximo común divisor y mínimo común múltiplo.

Estaremos respondiendo tus dudas y consultas en el aula virtual, y no olvides realizar el desafío semanal.

¡Hasta la próxima clase!

Bibliografía y webgrafía:

Amenedo M., y otros. Matemática. Editorial Santillana. Capítulo 6: Divisibilidad (2000).

Ministerio de Educación, Ciencia y Tecnología (2007) Apoyo al último año de la secundaria para la articulación con el Nivel Superior. Cuaderno de trabajo para los alumnos Resolución de problemas.

https://thales.cica.es/rd/Recursos/rd98/Matematicas/07/mcdmcm.html

https://www.edufichas.com/matematicas/minimo-comun-multiplo-maximo-comun-divisor/

https://www.smartick.es/blog/matematicas/numeros/numeros-primos-y-numeros-compuestos/