



# MODELACIÓN NUMÉRICA

## (CB051) CURSO CAVALIERE

# Trabajo Práctico - Análisis de la suspensión de un vehículo

26 de noviembre de 2024

Martín Mastropietro  
108949

Agustín Altamirano  
110237

Enzo Codini  
110691

## 1. Introducción

La suspensión de un vehículo tiene como función principal absorber las aceleraciones verticales producidas por irregularidades en el terreno, de manera que se genere confort en la marcha para los pasajeros y se incremente la seguridad en el manejo al mantener el contacto de los neumáticos con el terreno. Los componentes principales del sistema de amortiguación son los muelles (resortes elásticos), los amortiguadores y los neumáticos (no tenidos en cuenta en este trabajo).

Los muelles mantienen la altura de marcha y resisten el peso del vehículo, funcionando como elemento intermediario flexible entre la carrocería y el terreno. Tanto un incremento de carga como una saliente en el terreno producen la compresión del sistema, seguido eventualmente de un rebote o extensión producido por el comportamiento dinámico del conjunto. Los amortiguadores disipan la energía introducida manteniendo las oscilaciones controladas. Se trata en general de cilindros telescópicos hidráulicos, dentro de los cuales se dispone un pistón con orificios por donde circula aceite.

El comportamiento del sistema de suspensión responde a las ecuaciones de un oscilador amortiguado. Si los amortiguadores no existieran, una perturbación en el terreno produciría oscilaciones que se mantendrían de forma permanente. Muelles demasiado blandos absorberían muy bien una perturbación, pero a costa de un desplazamiento excesivo, y posiblemente no puedan resistir el peso del vehículo ni mantener su altura de marcha. El diseño del sistema de suspensión procura hallar una solución de compromiso entre estas condiciones de contorno.

### Modelo matemático del sistema

En este trabajo, se modela la suspensión de un vehículo considerando un sistema dinámico que se desplaza en dirección vertical. Los muelles responden a una ley elástica, es decir que la fuerza es proporcional al acortamiento o alargamiento del resorte. Los amortiguadores disipan la energía proporcionalmente a la velocidad de acortamiento o alargamiento.

## Resolución

### 2. Oscilador armónico con excitación uniforme

En esta sección desarrollaremos el punto 1 del Trabajo Práctico, focalizado en el caso particular de una constante de amortiguamiento igual a cero.

#### 2.1. Resolución de la ecuación diferencial

En el modelo físico planteado, la aceleración vertical de la carrocería ( $y''$ ) está descrita por una ecuación diferencial lineal de segundo orden:

$$y'' = \frac{k}{m}(c - y) + \frac{\lambda}{m}(c' - y')$$

donde  $k$  es la constante elástica del muelle [ $N/m$ ],  $\lambda$  es la constante de amortiguación [ $Ns/m$ ],  $c$  es la cota o elevación del terreno [m],  $y$  es la posición de la carrocería [m].

Debemos resolver la ecuación diferencial utilizando el **Método Ponderado Implícito** por un período de 5 segundos, introduciendo los siguientes datos:

$$m = \frac{110691}{200} kg \quad k = 25000 \frac{N}{m} \quad \lambda = 0 \frac{Ns}{m} \quad c = 0,1m \quad \forall t$$

(110691 es el padrón de Enzo Codini).

Para ello, debemos comenzar el análisis con un factor de ponderación  $\beta = 0$  e incrementarlo de a 0,25 hasta llegar a  $\beta = 1$ , utilizando un paso  $\Delta t = 0,005s$  y estudiar cómo responde el método. Luego, para cada  $\beta$ , variar el paso hasta experimentar inestabilidades y elegir un paso donde todos arrojen un resultado aceptable.

Para la resolución de la ecuación diferencial, consideremos  $z = y'$ . Si reemplazamos en la ecuación original, tenemos el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales:

$$\begin{cases} y' = z \\ z' = \frac{k}{m}(c - y) + \frac{\lambda}{m}(c' - z) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y' = f_y(t, y, z) \\ z' = f_z(t, y, z) \end{cases}$$

Sean  $y_n$  y  $z_n$  los valores aproximados de  $y$  y  $z$  obtenidos por el Método Ponderado Implícito para el  $n$ -ésimo avance de la discretización de sus respectivas ecuaciones diferenciales. Según este método, la forma de obtener  $y_{n+1}$  a partir de  $y_n$  es:

$$y_{n+1} = y_n + h [\beta f_y(t_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}) + (1 - \beta) f_y(t_n, y_n, z_n)]$$

Reemplazando con la expresión de  $f_y(t, y, z)$  obtenemos:

$$y_{n+1} = y_n + h [\beta z_{n+1} + (1 - \beta) z_n]$$

$$y_{n+1} = y_n + h\beta z_{n+1} + h(1 - \beta) z_n$$

$$y_{n+1} - h\beta z_{n+1} = y_n + h(1 - \beta) z_n$$

De manera análoga, la forma de obtener  $z_{n+1}$  a partir de  $z_n$  según el método es:

$$z_{n+1} = z_n + h [\beta f_z(t_{n+1}, y_{n+1}, z_{n+1}) + (1 - \beta) f_z(t_n, y_n, z_n)]$$

Reemplazando con la expresión de  $f_z(t, y, z)$  obtenemos:

$$z_{n+1} = z_n + h \left\{ \beta \left[ \frac{k}{m}(c_{n+1} - y_{n+1}) + \frac{\lambda}{m}(c'_{n+1} - z_{n+1}) \right] + (1 - \beta) \left[ \frac{k}{m}(c_n - y_n) + \frac{\lambda}{m}(c'_n - z_n) \right] \right\}$$

$$z_{n+1} = z_n + h\beta \frac{k}{m}c_{n+1} - h\beta \frac{k}{m}y_{n+1} + h\beta \frac{\lambda}{m}c'_{n+1} - h\beta \frac{\lambda}{m}z_{n+1} + h(1 - \beta) \left[ \frac{k}{m}(c_n - y_n) + \frac{\lambda}{m}(c'_n - z_n) \right]$$

$$z_{n+1} + h\beta \frac{k}{m}y_{n+1} + h\beta \frac{\lambda}{m}z_{n+1} = z_n + h\beta \frac{k}{m}c_{n+1} + h\beta \frac{\lambda}{m}c'_{n+1} + h(1 - \beta) \left[ \frac{k}{m}(c_n - y_n) + \frac{\lambda}{m}(c'_n - z_n) \right]$$

$$h\beta \frac{k}{m}y_{n+1} + \left( 1 + h\beta \frac{\lambda}{m} \right) z_{n+1} = z_n + h\beta \frac{k}{m}c_{n+1} + h\beta \frac{\lambda}{m}c'_{n+1} + h(1 - \beta) \left[ \frac{k}{m}(c_n - y_n) + \frac{\lambda}{m}(c'_n - z_n) \right]$$

Por lo tanto, en cada avance de la discretización deberemos hallar  $y_{n+1}$  y  $z_{n+1}$  resolviendo el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} y_{n+1} - h\beta z_{n+1} = y_n + h(1 - \beta)z_n \\ h\beta \frac{k}{m}y_{n+1} + \left( 1 + h\beta \frac{\lambda}{m} \right) z_{n+1} = z_n + h\beta \frac{k}{m}c_{n+1} + h\beta \frac{\lambda}{m}c'_{n+1} + h(1 - \beta) \left[ \frac{k}{m}(c_n - y_n) + \frac{\lambda}{m}(c'_n - z_n) \right] \end{cases}$$

Para ello utilizaremos el **Método de Gauss-Seidel**: sean  $y_{n+1}^{(k)}$  y  $z_{n+1}^{(k)}$  los valores aproximados de  $y_{n+1}$  y  $z_{n+1}$  obtenidos por este método en la  $k$ -ésima iteración. La fórmula iterativa para obtener  $y_{n+1}^{(k+1)}$  a partir de  $y_{n+1}^{(k)}$  es:

$$y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + h\beta z_{n+1}^{(k)} + h(1 - \beta)z_n$$

$$y_{n+1}^{(k+1)} = y_n + h \left[ \beta z_{n+1}^{(k)} + (1 - \beta)z_n \right]$$

De forma análoga, la fórmula iterativa para obtener  $z_{n+1}^{(k+1)}$  a partir de  $z_{n+1}^{(k)}$  es:

$$z_{n+1}^{(k+1)} = \frac{1}{1 + h\beta \frac{\lambda}{m}} \left\{ z_n + h\beta \frac{k}{m}c_{n+1} + h\beta \frac{\lambda}{m}c'_{n+1} + h(1 - \beta) \left[ \frac{k}{m}(c_n - y_n) + \frac{\lambda}{m}(c'_n - z_n) \right] - h\beta \frac{k}{m}y_{n+1}^{(k+1)} \right\}$$

$$z_{n+1}^{(k+1)} = \frac{1}{1 + h\beta \frac{\lambda}{m}} \left( z_n + \frac{h}{m} \left\{ \beta \left( kc_{n+1} + \lambda c'_{n+1} - ky_{n+1}^{(k+1)} \right) + (1 - \beta) [k(c_n - y_n) + \lambda(c'_n - z_n)] \right\} \right)$$

$$z_{n+1}^{(k+1)} = \frac{1}{1 + h\beta \frac{\lambda}{m}} \left( z_n + \frac{h}{m} \left\{ \beta \left[ k(c_{n+1} - y_{n+1}^{(k+1)}) + \lambda c'_{n+1} \right] + (1 - \beta) [k(c_n - y_n) + \lambda(c'_n - z_n)] \right\} \right)$$

Como semillas  $y_{n+1}^{(0)}$  y  $z_{n+1}^{(0)}$  del Método de Gauss-Seidel utilizaremos los valores obtenidos al resolver el sistema de ecuaciones diferenciales mediante el Método de Euler Explícito:

$$y_{n+1}^{(0)} = y_n + hf_y(t_n, y_n, z_n) = y_n + hz_n$$

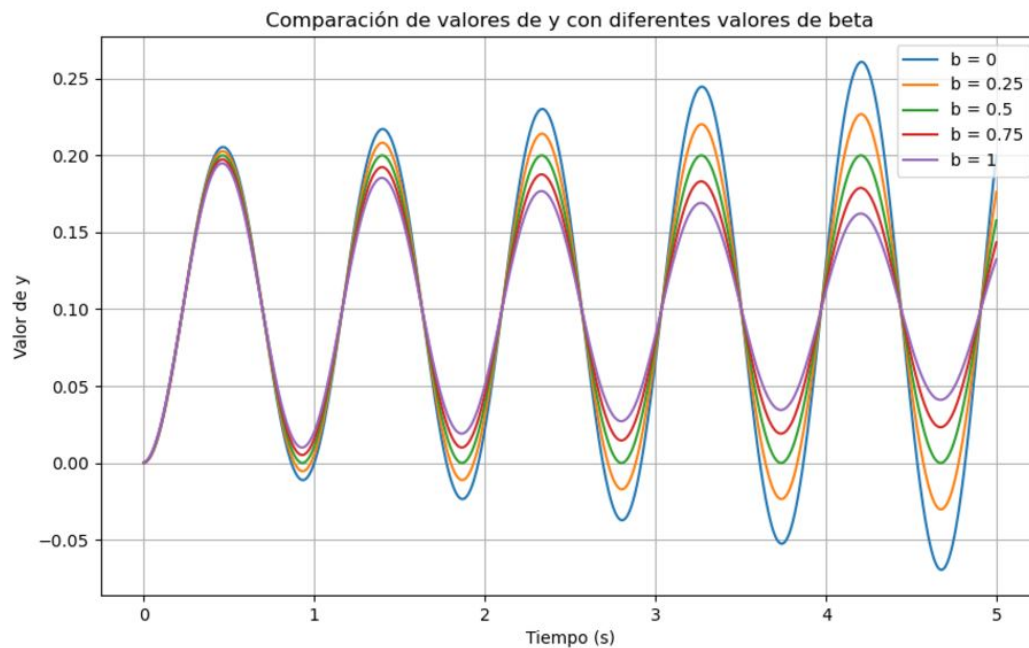
$$z_{n+1}^{(0)} = z_n + hf_z(t_n, y_n, z_n) = z_n + h \left[ \frac{k}{m}(c_n - y_n) + \frac{\lambda}{m}(c'_n - z_n) \right]$$

$$z_{n+1}^{(0)} = z_n + \frac{h}{m} [k(c_n - y_n) + \lambda(c'_n - z_n)]$$

Una vez planteado todo el método de resolución, lo implementamos en un programa de Python. Los resultados obtenidos de la aproximación de  $y(5)$  fueron:

- $\beta = 0$  (equivalente al Método de Euler Explícito):  $y = 0,20003782185166552$
- $\beta = 0,25$ :  $y = 0,17622178105935926$
- $\beta = 0,5$  (equivalente al Método de Crank-Nicholson):  $y = 0,15767335816570996$
- $\beta = 0,75$ :  $y = 0,14334587532950202$
- $\beta = 1$  (equivalente al Método de Euler Implícito):  $y = 0,1323597610963617$

Adicionalmente, generamos un gráfico en donde se pueden observar las aproximaciones de  $y(t)$  para todos los valores de  $\beta$  utilizados:



Como se puede observar, la aproximación con  $\beta = 0,5$  es la más exacta de todas, ya que es la que más se acerca a la solución analítica de la ecuación diferencial: una función senoidal (con amplitud constante). Para el resto de valores de  $\beta$ , las oscilaciones o bien se amplifican o bien se amortiguan significativamente, lo cual es un comportamiento que no se corresponde con la realidad.

A continuación, variaremos el paso de la discretización para cada uno de los valores de  $\beta$  hasta hallar inestabilidades:

- $\beta = 0$ :
  - $\Delta t = 0,01$ :  $y = 0,265836188993458$
  - $\Delta t = 0,02$ :  $y = 0,48039717498036005$

- $\Delta t = 0,04$ :  $y = -1,135220261062976$
- $\Delta t = 0,05$ :  $y = -11,22090526658365$
- $\beta = 0,25$ :
  - $\Delta t = 0,01$ :  $y = 0,19861801585373842$
  - $\Delta t = 0,02$ :  $y = 0,2553568132138305$
  - $\Delta t = 0,04$ :  $y = 0,3444791583846307$
  - $\Delta t = 0,05$ :  $y = 0,22835584561157313$
  - $\Delta t = 0,1$ :  $y = -13,765218967819207$
- $\beta = 0,5$ :
  - $\Delta t = 0,01$ :  $y = 0,15689639721212834$
  - $\Delta t = 0,02$ :  $y = 0,15374623213056693$
  - $\Delta t = 0,04$ :  $y = 0,14056225179693904$
  - $\Delta t = 0,05$ :  $y = 0,13021036530370345$
  - $\Delta t = 0,1$ :  $y = 0,0462290545020604$
  - $\Delta t = 0,2$ :  $y = 0,12548218921927135$
  - $\Delta t = 0,25$ :  $y = 0,19484556465087255$
  - $\Delta t = 0,25$ :  $y = -1,2221755389587438 * 10^{116}$
- $\beta = 0,75$ :
  - $\Delta t = 0,01$ :  $y = 0,1319309427003599$
  - $\Delta t = 0,02$ :  $y = 0,11644219261397665$
  - $\Delta t = 0,04$ :  $y = 0,10294868099027693$
  - $\Delta t = 0,05$ :  $y = 0,10054857620110064$
  - $\Delta t = 0,1$ :  $y = 0,09932373586161782$
  - $\Delta t = 0,2$ :  $y = 480,21149937103496$
- $\beta = 1$ :
  - $\Delta t = 0,01$ :  $y = 0,11741874005767666$
  - $\Delta t = 0,02$ :  $y = 0,10432520633446671$
  - $\Delta t = 0,04$ :  $y = 0,09979883164532591$
  - $\Delta t = 0,05$ :  $y = 0,0997446039418529$
  - $\Delta t = 0,1$ :  $y = 0,1000022869446976$
  - $\Delta t = 0,2$ :  $y = 1,0370632254972512 * 10^{162}$

El valor de  $\beta$  con el cual el método presenta inestabilidades primero es con  $\beta = 0$  (correspondiente al Método de Euler Explícito). Podemos notar una inestabilidad evidente a partir de  $\Delta t = 0,04$  en este método, por lo que el máximo paso donde todos los métodos arrojan un resultado aceptable es  $\Delta t = 0,02$ .

Observemos además que los métodos con  $\beta \geq 0,5$  son más estables que los que tienen  $\beta < 0,5$ , destacando el caso de  $\beta = 0,5$  como el más estable.

## 2.2. Corroboración experimental de la frecuencia de oscilación

En este punto se nos solicita corroborar experimentalmente si la frecuencia natural de oscilación se corresponde con su expresión analítica:  $\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}}$

Al analizar los resultados experimentales utilizando  $\beta = 0,5$  y  $\Delta t = 0,005s$ , observamos que la función  $y(t)$  del oscilador armónico tiene un mínimo en  $t = 0s$ , y el siguiente mínimo se produce en  $t = 0,935s$ . Este es el período de  $y(t)$ . Por lo tanto, la frecuencia de  $y(t)$  obtenida experimentalmente es  $\frac{1}{0,935s} = 1,0695Hz$ .

La frecuencia esperada de un oscilador armónico, expresada en radianes sobre segundo, es:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{25000N/m}{\frac{110691}{200}kg}} = 6,7209 \frac{rad}{s}$$

Expresada en  $Hz$ , la frecuencia esperada resulta  $1,0697Hz$ , un valor muy similar al obtenido experimentalmente.

## 2.3. Estimación experimental del orden

En este punto se nos solicita estimar experimentalmente el orden de cada  $\beta$  usado. Para eso, primero debemos estimar el error de truncamiento de cada solución, ya que no tenemos el valor exacto de esta. Lo que se puede hacer para acercarse, es usar una solución con un paso muy pequeño en relación al que estemos utilizando.

Sean  $y_a$  e  $y_b$  dos soluciones obtenidas con el método con paso  $\Delta t_a$  y  $\Delta t_b$  respectivamente. Si tomamos  $\Delta t_b = \frac{\Delta t_a}{16}$ , entonces  $y_b$  será una solución mucho más exacta que  $y_a$ , por lo que podemos utilizarla como referencia para calcular una cota del error absoluto del método:  $E(y_a) \approx |y_a - y_b|$ .

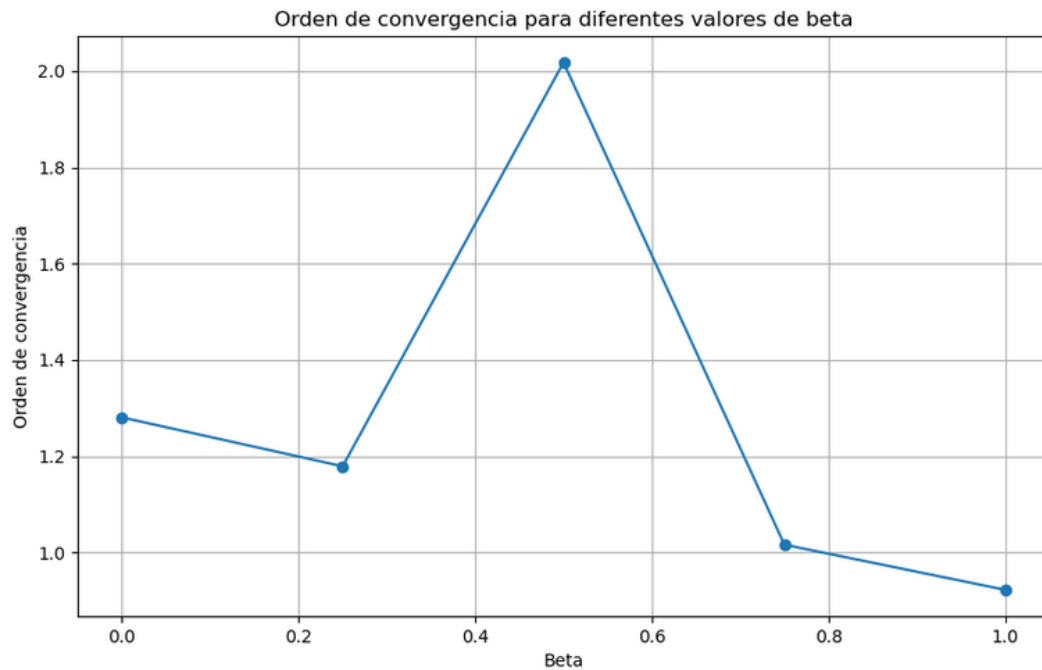
Este error es directamente proporcional a una potencia del paso de discretización, cuyo exponente es el orden de convergencia del método. Es decir, se puede expresar como  $E(y_a) \approx C * \Delta t_a^p$ , donde  $C$  es una constante dependiente del problema y el método (para este caso no la vamos a necesitar), y  $p$  es el orden de convergencia que buscamos.

Entonces, para calcular el orden de convergencia, usamos la relación entre dos pasos consecutivos ( $\Delta t_i$  y  $\Delta t_{i+1}$ ):

$$\frac{E(\Delta t_{i+1})}{E(\Delta t_i)} \approx \left(\frac{\Delta t_{i+1}}{\Delta t_i}\right)^p \rightarrow \log\left(\frac{E(\Delta t_{i+1})}{E(\Delta t_i)}\right) \approx p * \log\left(\frac{\Delta t_{i+1}}{\Delta t_i}\right) \rightarrow p \approx \frac{\log\left(\frac{E(\Delta t_{i+1})}{E(\Delta t_i)}\right)}{\log\left(\frac{\Delta t_{i+1}}{\Delta t_i}\right)}$$

De esta manera, implementamos este cálculo en nuestro programa y obtuvimos el orden de convergencia estimado para cada uno de los valores seleccionados de  $\beta$ .

- Para  $\beta = 0$ ,  $p = 1,2807708452808777$
- Para  $\beta = 0,25$ ,  $p = 1,1791547793256254$
- Para  $\beta = 0,5$ ,  $p = 2,0181028473002396$
- Para  $\beta = 0,75$ ,  $p = 1,0163159568111568$
- Para  $\beta = 1$ ,  $p = 0,9225287690683462$



Esto es coherente con lo esperado según la teoría: los métodos con  $\beta = 0$  y  $\beta = 1$  (Euler Explícito e Implícito, respectivamente) tienen un orden de convergencia cercano a 1, mientras que con  $\beta = 0,5$  (equivalente al Método del Trapecio o de Crank-Nicholson) se obtiene un orden de convergencia cercano a 2, es decir, es un método con convergencia de segundo orden.

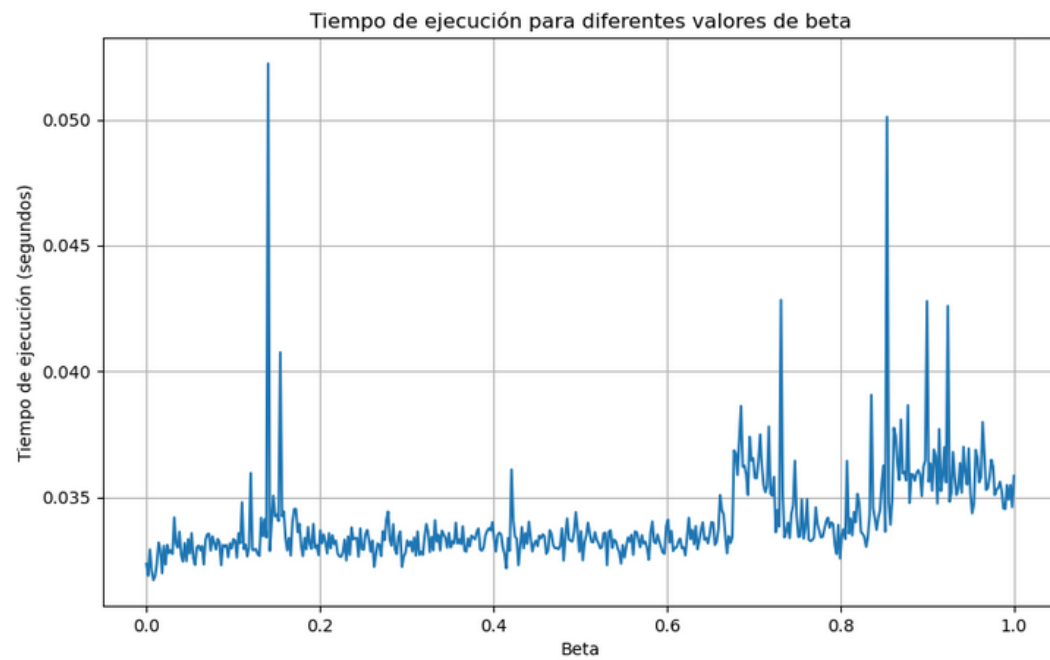
## 2.4. Caso más conveniente

Por último, en esta sección se nos pide elegir el caso más conveniente justificando la elección en base al error y tiempo cálculo. En base al error ya estaría calculado previamente, ahora vamos a calcular el tiempo de cálculo para cada beta:

- $\beta = 0 \rightarrow 0,01628398895263672$  segundos
- $\beta = 0,25 \rightarrow 0,017207622528076172$  segundos
- $\beta = 0,5 \rightarrow 0,014196157455444336$  segundos
- $\beta = 0,75 \rightarrow 0,01764202117919922$  segundos
- $\beta = 1 \rightarrow 0,023629188537597656$  segundos

Como podemos observar, el tiempo de ejecución para cada uno de los valores de  $\beta$  no varía significativa. De forma adicional, realizamos una medición del tiempo de cálculo con 500 valores de  $\beta$  entre 0 y 1:





Como se puede apreciar, casi no varían (salvo algunos picos que se habrán dado por un valor muy particular o error del procesador). Por ende, tanto en tiempo como en orden de convergencia el mejor  $\beta$  es 0.5

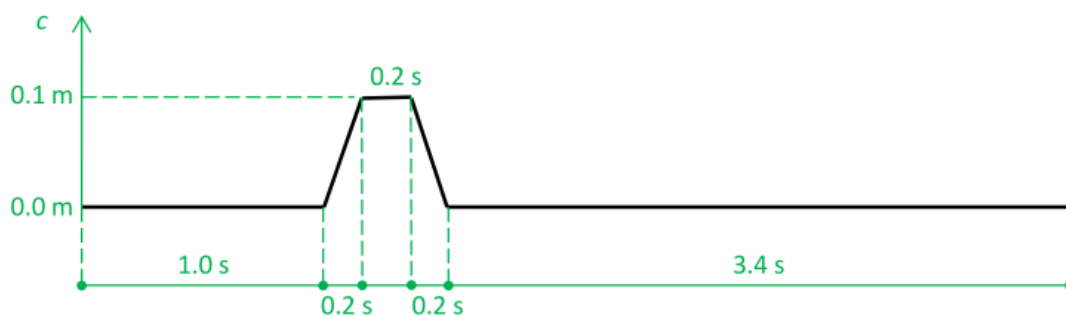
### 3. Oscilador amortiguado accionado por una loma de burro

En esta sección vamos a estudiar cómo varia el comportamiento del sistema al incluir el amortiguador y considerando un terreno con loma de burro.

#### 3.1. Resolución de la ecuación diferencial

Habiendo elegido un  $\beta$ , se nos solicita volver a resolver el sistema, pero ahora utilizando los siguientes datos:

$$m = \frac{110691}{200} \text{ kg} \quad k = 25000 \frac{\text{N}}{\text{m}} \quad \lambda = 750 \frac{\text{Ns}}{\text{m}} \quad c \text{ de acuerdo a:}$$



Ya habíamos planteado el método de resolución de esta ecuación previamente. Introduciendo los nuevos valores en el programa, obtenemos que  $y(5)$  vale aproximadamente  $-0,0013574532059818342$ .

Veamos en un gráfico la diferencia de los valores de  $y$  con  $\beta = 0,5$  cuando estamos en el caso de la loma de burro, con y sin amortiguamiento (el eje vertical representa el valor de la variable  $y$  y el eje horizontal el valor del tiempo en segundos):

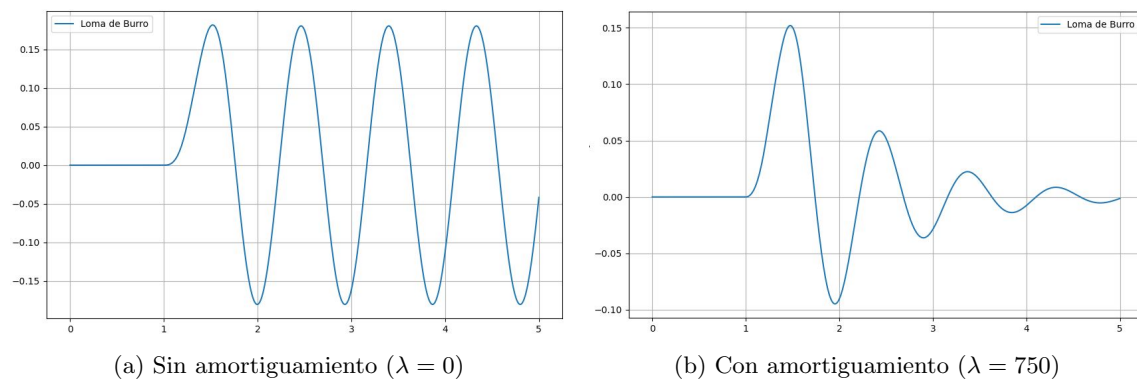
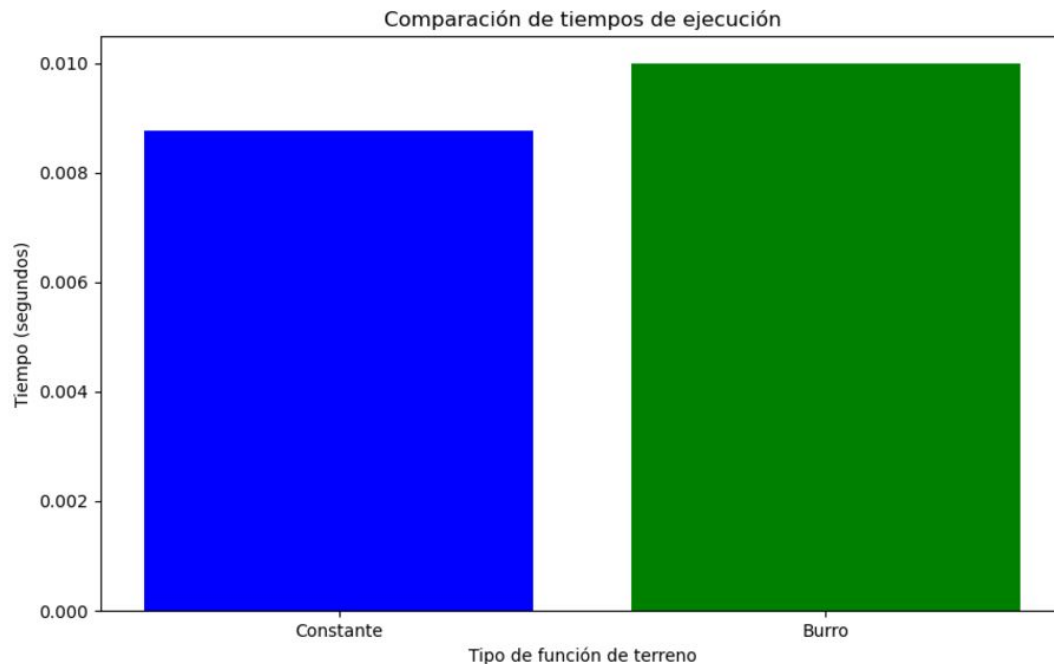


Figura 1: Comparación de los valores de  $y$  con y sin amortiguamiento.

Observando la figura, podemos ver como con amortiguamiento, las oscilaciones de la función  $y$  se van amortiguando de a poco, a diferencia del caso sin amortiguamiento ( $\lambda = 0$ ).

A su vez, quisimos ver cómo variaba respecto al tiempo el cálculo con la loma de burro y sin:



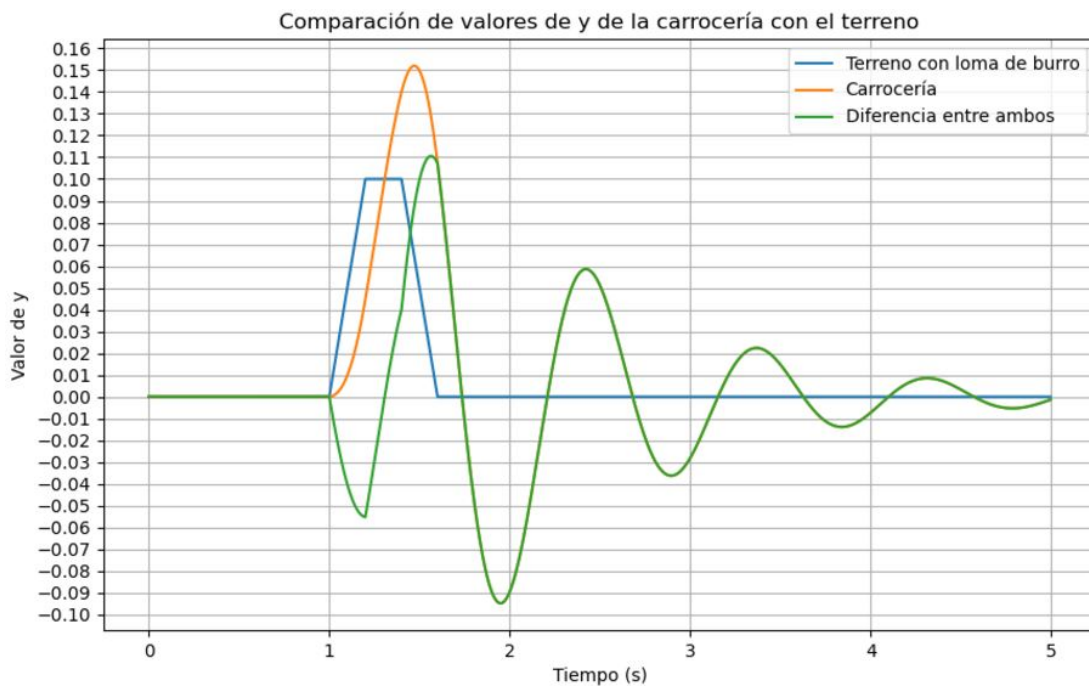
Como se ve, el calculo con la loma de burro tarda más, pero es tan poco que lo podemos considerar despreciable.

### 3.2. Optimización del amortiguamiento del vehículo

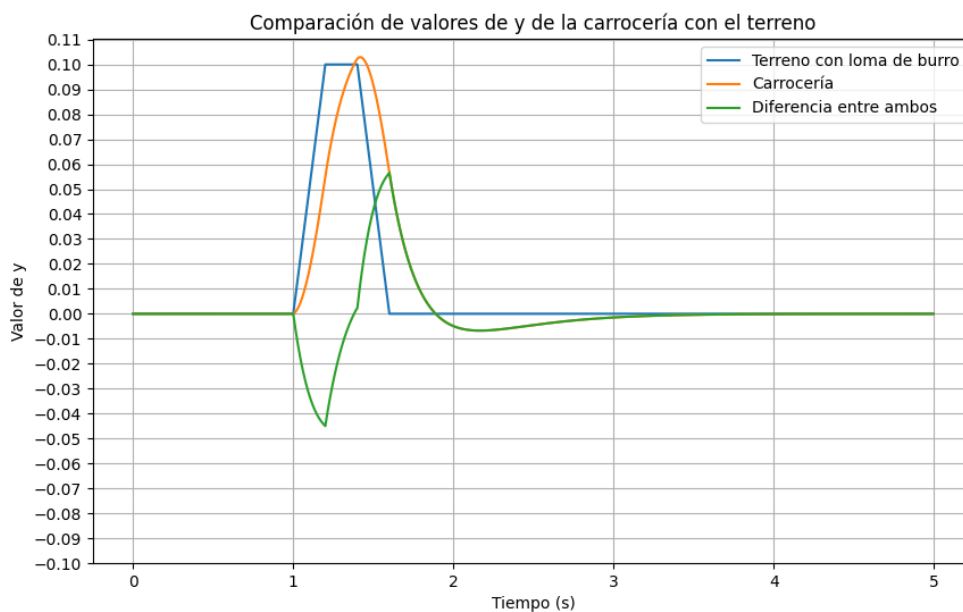
Por último, se nos pide modificar los valores de  $k$  y  $\lambda$  para optimizar la amortiguación del vehículo teniendo en cuenta tres restricciones:

1. El sistema de amortiguación no puede comprimirse más de  $0,05m$ , es decir  $y - c \geq -0,05m$ .
2. La aceleración vertical  $y''$  al pasar por la loma de burro debe minimizarse.
3. Las oscilaciones en la carrocería después de la loma de burro deben minimizarse.

Como podemos observar en el siguiente gráfico, los valores actuales de  $k$  y  $\lambda$  no cumplen las restricciones pedidas: el sistema de amortiguación se comprime más de  $0,05m$  (el gráfico verde muestra un mínimo por debajo de  $-0,05m$ ). Además, el vehículo experimenta hay muchas oscilaciones de gran amplitud una vez que pasó la loma de burro



La solución que encontramos luego de varios intentos fue reducir  $k$  a 7000 y aumentar  $\lambda$  a 2700. Con estos valores, se cumple con lo pedido:



## 4. Conclusiones

El estudio de los modelos matemáticos del sistema de suspensión de un vehículo, tanto con como sin amortiguamiento, seguido de su resolución mediante métodos de aproximación, nos permitieron comprender la gran utilidad de estos métodos numéricos para estos escenarios. Particularmente, notamos las cualidades positivas del Método Ponderado Implícito con  $\beta = 0,5$  (Método de Crank-

Nicholson). Al ser un método de orden 2 muy estable, puede aplicarse en situaciones de la vida real con un error de método considerablemente bajo.

## 5. Código utilizado

Para los calculos de este trabajo práctico, se programaron una serie de *scripts* de Python, que además generan gráficos a partir de los datos obtenidos. Este se puede encontrar en el siguiente repositorio de la plataforma GitHub, además sera entregado junto a este PDF.

<https://github.com/AgustinAltamirano/TP-Modelacion-Numerica>

Además, se puede jugar con distintos valores para la constante de elasticidad y de amortiguamiento, y ver que resultados tienen en el sistema. El programa se ejecuta con los siguientes comandos:

```
python3 main.py 1 <val k> <val lambda> <paso> <betas>
```

Donde *val k* es el valor de la constante elástica, *val lambda* el valor de la constante de amortiguamiento, y *betas* los valores de beta que queremos evaluar, separados por coma. Por ejemplo, para obtener los resultados pedidos en el enunciado:

```
python3 main.py 1 25000 0 0.005 0,0.25,0.5,0.75,1
```

Al ejecutarse, el programa muestra los gráficos y genera un archivo llamado *output.txt* con los resultados.

Para obtener los gráficos del ejercicio 2 del TP, Se debe ejecutar el siguiente comando:

```
python3 main.py 2 <val k> <val lambda> <paso> <beta>
```

Este comando solo acepta un valor para beta, especificado en el parametro *beta*. Por ejemplo, para obtener los resultados pedidos por el enunciado:

```
python3 main.py 2 25000 750 0.005 0.5
```