Simulación

Práctico 8: Modelado y Simulación de Sistemas Continuos

1. Utilizando el método de Euler, resolver la siguiente ecuación diferencial:

$$
\begin{aligned}
&y' = -y,\\
&considerar\ intervalo:\ 0 \leq t \leq 3\\
&cond.\ inicial:\ y(0) = 1.
\end{aligned}
$$

   Resolver el problema (registrar en una tabla y graficar) con pasos de integración:

   (a) $h = 1$

   (b) $h = 0.5$

   Dibujar la solución exacta ($y(t) = e^{-t}$) en el mismo gráfico que las aproximaciones anteriores.

2. La siguiente ecuación modela un paracaidista en caída libre, donde:

   - c: coeficiente de resistencia,
   - v: velocidad,
   - m: masa,
   - g: gravedad,

$$
aceler./fuerzas: \frac{dv}{dt} = g - \frac{c}{m}\, v
$$

   Resolver la ecuación considerando $c = 0,5, m = 1$ y $g = 0.1$ con un paso de integración $h = 0.02$ en el itervalo [0,1].

3. Implementar en un lenguaje de propósito general el ejercicio 2 y el problema de *Masa-Resorte* visto en clases. En este último caso comparar las gráficas con la gráfica de la solución analítica.

4. *Modelo de Lotka-Volterra.* Uno de los modelos más simple y difundidos de la dinámica de poblaciones es el de *Lotka-Volterra*, desarrollado en la década de 1920 para describir la evolución de dos especies: presa y depredador.
   El modelo tiene la forma:

$$
\begin{aligned}
\dot{p}(t) &= r \cdot p(t) - a \cdot p(t) \cdot d(t)\\
\dot{d}(t) &= b \cdot p(t) \cdot d(t) - m \cdot d(t)
\end{aligned}
$$

   ,donde $p(t)$ y $d(t)$ representan el número de presas y depredadores respectivamente.
   El coeficiente r es la tasa de crecimiento del número de presas en ausencia de depredadores. El parámetro

a es el coeficiente de depredación. Similarmente, b es la tasa de crecimiento del número de depredadores en presencia de presas y m es la tasa de mortalidad de los depredadores.
Implementar una simulación del modelo para determinar la evolución de ambas especies.

Considere $r = 3, a = 2, b = 1$ y $m = 2$, y condiciones iniciales $p(0) = d(0) = 2$.

Producir 2 gráficos con las siguientes caracteristicas:

- Eje X: tiempo de la simulación. Eje Y: dos líneas que muestre la evolución de las presas y de los depredadores respectivamente.
- Eje X: Núm. de presas. Eje Y: Núm. de depredadores, en donde cada par es un punto (luego unirlos por líneas) en un tiempo de simulación t.

5. **Llenado de un tanque con un canal de salida.**

El sistema de tanque con un canal de salida se ilustra en la figura 1. El objetivo es predecir la altura del líquido en el tanque como función del tiempo para cualquier caudal de entrada arbitrario $F_{entrada}(t)$. El área del tanque es constante, por lo tanto solo interesa la altura h. Si además el tanque es de sección uniforme se cumple que: $h = V/A$, donde V es el volumen y A es el área de base (sup. del círculo).

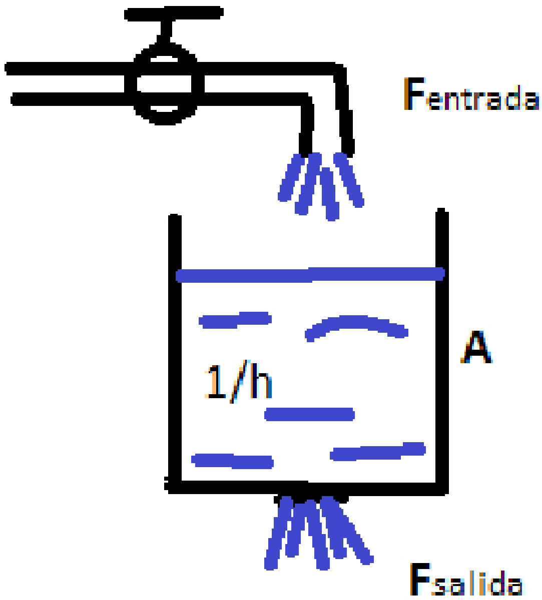

Figure 1: Recipiente de Agua.

El volumen contenido dentro del tanque es igual a la acumulación debida al líquido que entra con $F_{entrada}$ menos el que sale con F_{salida} :

$$h(t) = \frac{1}{A} \int_{t_0}^{t} (F_{entrada}(t) - F_{salida}(t))dt) + h_{inicial}$$

La función $F_{salida}(t)$ depende de la cantidad de líquido en el recipiente, a mayor volumen mayor es la presión y por lo tanto el caudal de salida, es decir, $F_{salida}(t)$ depende de $h(t)$.

Antes de introducir la variación de $F_{entrada}$, tanto ésta como h están en un estado estacionario. Luego, frente al cambio de la entrada, el sistema responde dinámicamente con un estado transitorio, que luego desaparece, alcanzando a otro estado estacionario. Las $F_{entrada}(t)$, $F_{salida}(t)$ y $h(t)$ son variables temporales o variables del sistema, en tanto que A es constante del sistema.

$$\frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{A}F_{entrada}(t) - \frac{1}{A}F_{salida}(t) \tag{1}$$

$$F_{entrada}(t) = B$$

$$F_{salida}(t) = K\sqrt{g \cdot h(t)}$$

Considerado el sistema de ecuaciones diferenciales anterior, el cual modela el problema descripto, y los valores iniciales : $A = 2$, $K = 1$, $g = 9.8$, $h_0 = 1000$ y $B = 20$, determinar cual es la variación de la altura del recipiente en el tiempo. Graficar la evolución de $h(t)$, $F_{entrada}(t)$ y $F_{salida}(t)$ con GNUPLOT.

Analizar el sistema proponiendo otra función para $F_{entrada}$.

6. Suponga que se desea modelar el movimiento vertical de una pelota que cae bajo la acción de la gravedad y que rebota al llegar al suelo. La aceleración gravitatoria se considera constante e igual a $g = 9,8m/s^2$.

   Suponer rozamiento lineal, y con velocidad $v(t)$ positiva hacia arriba.

   El sistema de ecuaciones que describe el comportamiento de la pelota es el siguiente:

$$\dot{x}(t) = v(t)$$

$$\dot{v}(t) = \begin{cases} -\frac{b_a}{m} \cdot v(t) - g & \text{si} x(t) > 0 \\ -\frac{k}{m} \cdot x(t) - \frac{b}{m} \cdot v(t) - g & \text{si} x(t) \leq 0 \end{cases}$$

   Considerando los parámetros $b_a = 0,1$, $m = 1$, $b = 30$, $g = 9,8$ y $k = 100000$, calcular y graficar la posición y velocidad de la pelota hasta que la misma quede en estado de reposo.

   Considerar lo siguiente:

   - paso de integración $h = 0.0001$,
   - detener la simulación cuando la altura sea menor a 0.00001 o un tiempo maximo de 100 unidades de tiempo.
   - el valor inicial de la velocidad es 0 (cero). A modos de testeo iniciar con una altura 10.

   Para el calculo debe usar el método de euler, mientras las gráficas deben ser creadas con gnuplot.

7. **Población infectada por un virus o bacteria - El Modelo SIR**.

   El modelo SIR es el más básico que explica la evolución de una enfermedad infecciosa creada por un virus o una bacteria. Un ejemplo de este tipo de enfermedades es la gripe A o el ébola. Este modelo consiste en un sistema de 3 ecuaciones diferenciales ordinarias no lineales que no posee una solución explícita. Sin embargo, usando herramientas de simulación podemos extraer información acerca de las soluciones del sistema.

   El modelo SIR es un modelo que divide a la población en 3 partes:

   - $S(t)$: Representa al número de individuos susceptibles, individuos sanos que al entrar en contacto con la enfermedad pueden resultar infectados, en función del tiempo.

- $I(t)$: Representa al número de individuos infectados, individuos que pueden transmitir la enfermedad al grupo $S(t)$, en función del tiempo.
- $R(t)$: Representa al número de individuos retirados, individuos que se han recuperado dela enfermedad y se han vuelto inmunes o han muerto, en función del tiempo.

El modelo SIR se basa además en las siguientes hipótesis:

- La población se mantiene constante, es decir, no se tienen en cuenta los nacimientos y muertes que se producen a lo largo del desarrollo de la enfermedad. Si denotamos por N a la población total de individuos tenemos que la suma del número de individuos de cada uno de los 3 grupos es igual al total de la población: $N = S(t) + I(t) + R(t)$
- La enfermedad se transmite por contacto directo entre las personas.
- En cuanto un individuo es infectado pasa a estar en el grupo de los infectados.
- Los individuos del grupo $I(t)$ se acaban recuperando de la enfermedad y adquieren la inmunidad o mueren (pasando en ambos casos al grupo $R(t)$).
- La tasa de infección, que determina el número de individuos por unidad de tiempo que se transfieren del compartimento de susceptibles al de infectados, es proporcional al producto $S(t) * I(t)$.

Formulación del Modelo

La tasa de infección viene dada por $\beta * S(t) * I(t)$ donde β es la tasa per-cápita de transmisión de la enfermedad.

El flujo de paso del grupo de infectados al de retirados viene determinado por $\nu * I(t)$ donde $\nu > 0$ es la tasa de retiro.

$$\dot{S}(t) = -\beta \cdot S(t) \cdot I(t), \qquad S(0) = S_0$$

$$\dot{I}(t) = \beta \cdot S(t) \cdot I(t) - \nu \cdot I(t), \qquad I(0) = I_0$$

$$\dot{R}(t) = \nu \cdot I(t), \qquad R(0) = R_0$$

donde $\beta > 0, \nu > 0$ y S_0, I_0, R_0 es el número inicial de personas susceptibles, infectadas y retiradas (respectivamente) en una población de $N = S_0 + I_0 + R_0$ habitantes. Notar que $S'(t) + I'(t) + R'(t) = 0$, por lo que la suma $S(t) + I(t) + R(t)$ es constante. Aunque el número de individuos en cada grupo es un número natural, las variables S, I, R pueden ser tratadas como variables continuas, cuando la población total es suficientemente grande.

Tomando como parámetros$\beta = 0.0022$ y $\nu = 0.4477$ y como valores iniciales $S_0 = 763$, $I_0 = 1$ y $R_0 = 0$ grafique a evolución del número de individuos suceptibles, infectados y retirados durante 20 días días.

Para el cálculo debe usar el método de euler, mientras las gráficas deben ser creadas con gnuplot.