FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES.

<u>Funciones escalares: repaso</u>

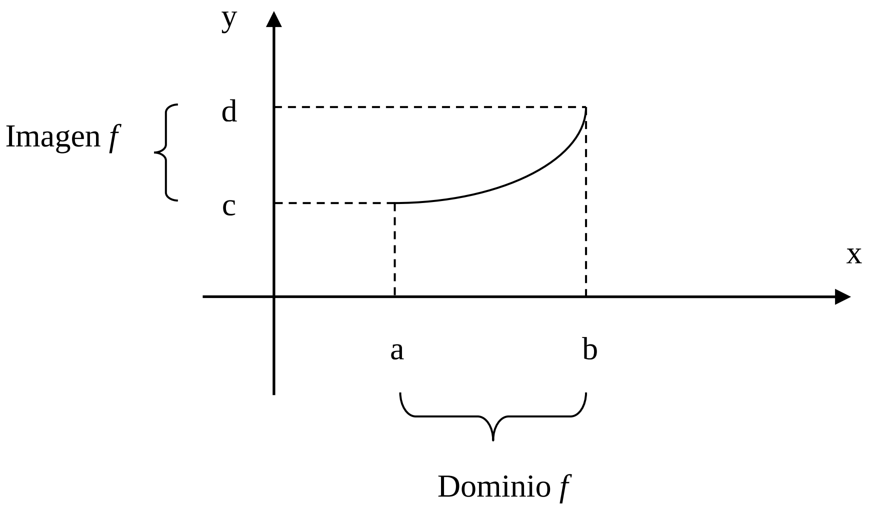
Repasemos la definición para funciones escalares de una variable.

Sea $f : D \subset R \to R \;/\; y = f(x)$. Se dice que f es una función si se verifica que:

1) $\forall x \in D \quad \exists y \in R \;/\; y = f(x)$ (existencia)
2) $x \in D \wedge y_1 \in R \wedge y_2 \in R$. Si $y_1 = f(x) \wedge y_2 = f(x) \Rightarrow y_1 = y_2$ (unicidad)

La gráfica de la función f se define como el siguiente conjunto:

Graf. $f = \{\ (x,y) \in R^2 \;/\; x \in Dom\ f \wedge y = f(x)\ \}$



En general, la gráfica de la función f resulta una curva en el pano xy.

<u>Funciones de varias variables</u>.

Para definir funciones de varias variables, generalizamos la definición de funciones escalares, ya que el concepto de función sigue siendo el mismo.

Sea $f : D \subset R^n \to R^m \;/\; \overline{y} = f(\overline{x})$. Se dice que f es una función si se verifica que:

3) $\forall \overline{x} \in D \quad \exists \overline{y} \in R^m \;/\; \overline{y} = f(\overline{x})$ (existencia)
4) $\overline{x} \in D \wedge \overline{y}_1 \in R^m \wedge \overline{y}_2 \in R^m$. Si $\overline{y}_1 = f(\overline{x}) \wedge \overline{y}_2 = f(\overline{x}) \Rightarrow \overline{y}_1 = \overline{y}_2$ (unicidad)

Vamos a analizar los casos particulares, según sean los valores que toman *n* y *m*.

• **Funciones vectoriales de variable real**: $n = 1$, $m \geq 2$

Ejemplo: $\overline{f} : R \to R^3 \;/\; \overline{f}(t) = (2 + 3t\ ,\ t^3 - 3t\ ,\ \cos(t+1))$

(Cuestión de notación: se suele utilizar una raya sobre la letra que nombra la función para indicar que sus imágenes son vectores)

En general, definimos las funciones vectoriales de la siguiente manera:

$\overline{f} : D \subset R \to R^m \;/\; \overline{f}(t) = (\ f_1(t)\ ,\ f_2(t)\ , \ldots\ldots ,\ f_i(t)\ , \ldots\ldots ,\ f_{m-1}(t)\ ,\ f_m(t)\ )$

Cada una de las funciones f_i son funciones escalares (estudiadas en Análisis Matemático I), y se las llama ***funciones componentes***.

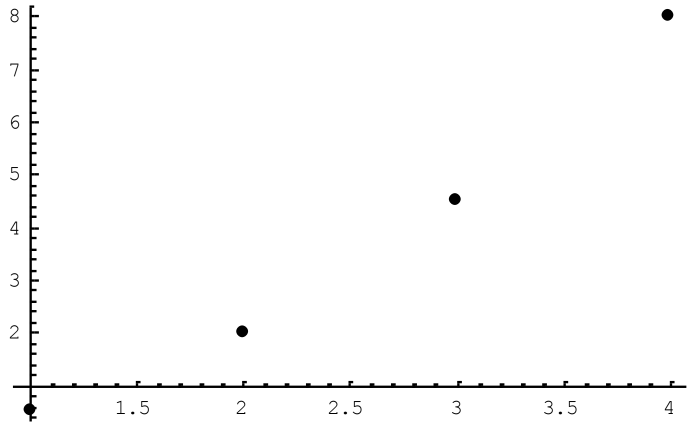
Para hallar el dominio de $\overline{f}$ tendremos que considerar en conjunto todas las restricciones de las funciones componentes. De este modo resulta:

$$\text{Dom } \overline{f} = \text{Dom } f_1 \cap \text{Dom } f_2 \ldots \cap \ldots \text{Dom } f_i \ldots \cap \ldots \text{Dom } f_m$$

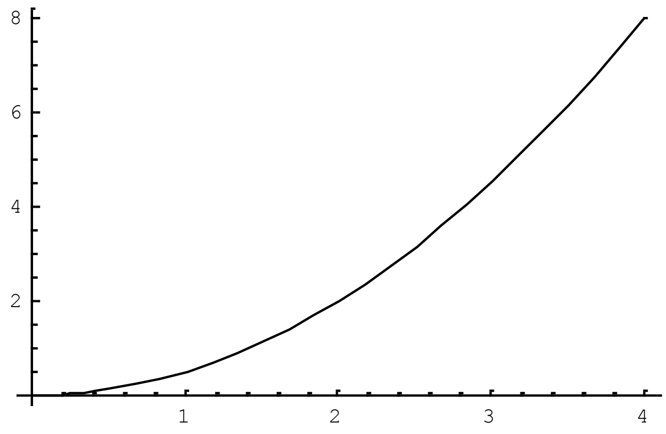
En el caso de las funciones vectoriales, la interpretación geométrica que nos interesa no es la gráfica de $\overline{f}$ sino el conjunto Imagen $\overline{f}$. Veamos un ejemplo.

Consideremos la función $\overline{f} : [0\,,\,4] \rightarrow R^2 \,/\, \overline{f}(t) = \left(t\,,\, \dfrac{t^2}{2} \right)$. En este caso, las funciones componentes son $f_1(t) = t$ y $f_2(t) = \dfrac{t^2}{2}$, y el conjunto imagen será un conjunto de pares ordenados. Podemos graficar algunos pares:

$\overline{f}(1) = \left(1\,,\, \dfrac{1}{2}\right)$ $\quad$ $\overline{f}(2) = (2\,,\,2)$ $\quad$ $\overline{f}(3) = \left(3\,,\, \dfrac{9}{2}\right)$ $\quad$ $\overline{f}(4) = (4\,,\,8)$



Si unimos todos los pares ordenados obtenidos en el conjunto imagen, la descripción geométrica será una curva incluida en R^2

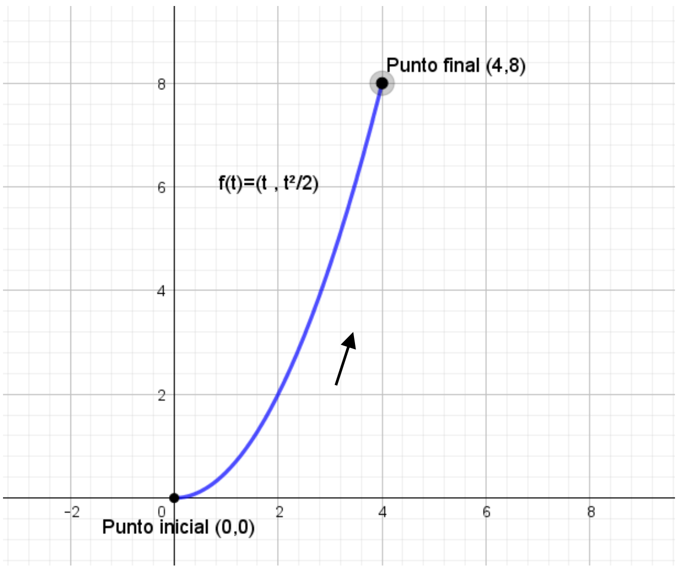


En general, el conjunto imagen de las funciones vectoriales representan curvas en R^n (en nuestro ejemplo, una curva en R^2). Decimos “en general” ya que más adelante definiremos más específicamente a qué se denomina “curva”, porque la función vectorial que la describe deberá cumplir ciertas condiciones (continuidad y dominio conexo).

Cuando tenemos una función vectorial y queremos encontrar la curva geométrica que se describe mediante su conjunto imagen, podemos obtener la expresión cartesiana de la curva eliminando el parámetro.
Veamos este procedimiento en el ejemplo anterior: utilizando la notación habitual, llamaremos x a la primer componente del par ordenado e y a la segunda. Tenemos entonces:

$$\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{t^2}{2} \end{cases} \Rightarrow y = \frac{x^2}{2}$$

Se trata de una parábola de eje y. Si el parámetro t pudiera tomar cualquier valor real, se trataría de toda la parábola. Sin embargo, siendo $t \in [0\,,4]$, el conjunto imagen de $\overline{f}$ será solamente un arco de esta parábola con $0 \le x \le 4$ ya que $0 \le t \le 4$.
El punto inicial de la curva es $\overline{f}(0) = (0,0)$ y el punto final es el $\overline{f}(4) = (4,8)$.

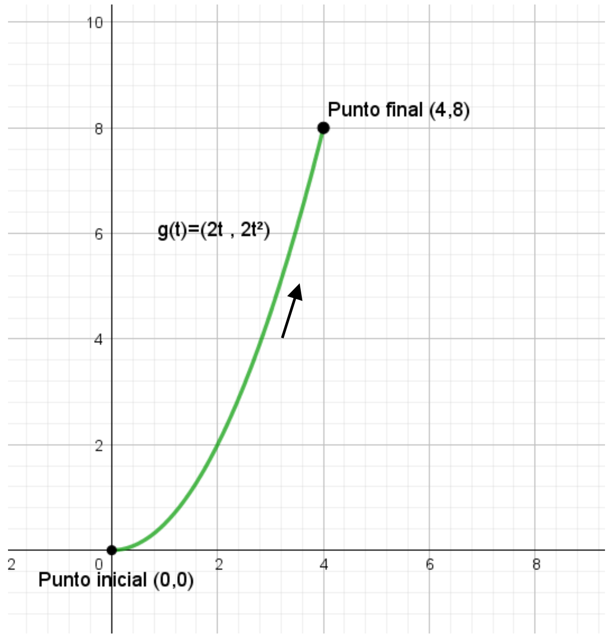


La función vectorial que describe una curva nos da más información que la descripción cartesiana: esta última solamente nos describe la forma geométrica, en tanto la función vectorial nos indica el sentido en que la curva realiza su recorrido (indicado gráficamente con una flecha) y la velocidad con la que lo hace.

Analicemos las curvas asociadas a las siguientes funciones vectoriales:
$\overline{g} : [0\,,2] \to R^2 \,/\, \overline{g}(t) = \left(2t\,,\,2t^2\right)$

$$\left.\begin{cases} x = 2t \Rightarrow t = \dfrac{x}{2} \\ y = 2t^2 \end{cases}\right] \Rightarrow y = 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 \Rightarrow y = 2\,\frac{x^2}{4} \Rightarrow y = \frac{x^2}{2}$$

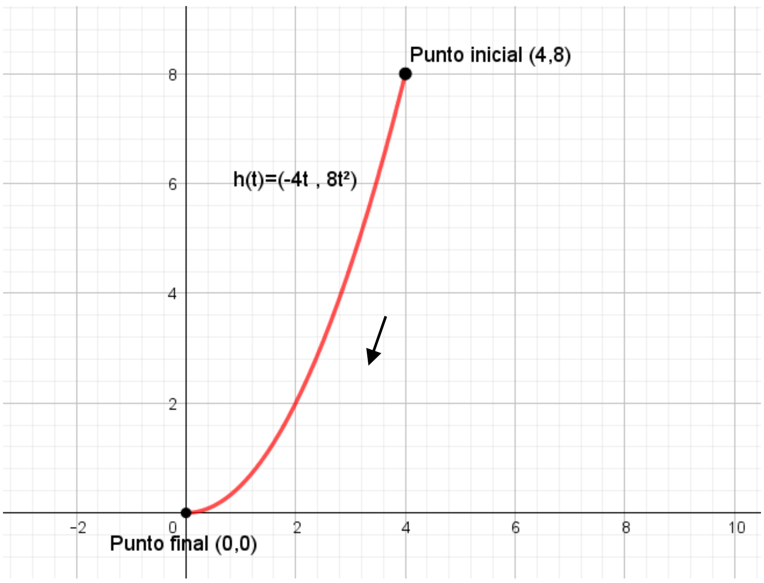
Punto inicial: $\overline{g}(0) = (0,0)$ Punto final: $\overline{g}(2) = (4,8)$



$\overline{h}:[-1\,,\,0]\to R^2\,/\,\overline{h}(t)=\left(-4t\,,\,8t^2\right)$

$$\left.\begin{cases} x=-4t\Rightarrow t=-\dfrac{x}{4} \\ y=8t^2 \end{cases}\right]\Rightarrow y=2\left(-\frac{x}{4}\right)^2\Rightarrow y=8\frac{x^2}{16}\Rightarrow y=\frac{x^2}{2}$$

Punto inicial: $\overline{h}(-1)=(4{,}8)$ Punto final: $\overline{h}(0)=(0{,}0)$



En ambos casos la curva descripta tiene la misma forma geométrica que la curva asociada a $\overline{f}$. Sin embargo, varía el sentido de recorrido para la curva asociada a $\overline{h}$. Asimismo, si la curva se corresponde con el recorrido de un móvil dado en función del tiempo (suponemos el tiempo dado en segundos), tenemos que el móvil asociado a la

función $\overline{f}$ tarda 4 segundos en recorrer la curva, en tanto el móvil asociado a $\overline{g}$ tarda 2 segundos. El móvil asociado a $\overline{h}$ tarda 1 segundo en recorrer la curva, y lo hace en el sentido contrario a los dos casos anteriores.
En resumen, las curvas dadas en forma paramétrica mediante una función vectorial, no sólo indican una forma geométrica, sino un sentido de recorrido y una velocidad.

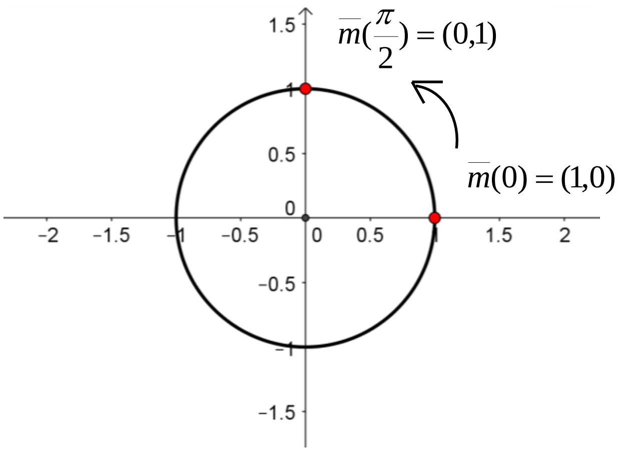
Otra ventaja de las funciones vectoriales es que pueden describirse curvas que no resultan gráficas de funciones escalares (de AMI). Veamos el siguiente ejemplo:

$$\overline{m}:[0\,,2\pi]\rightarrow R^2\,/\,\overline{m}(t)=(\cos t\,,\sin t)$$

Para encontrar la expresión cartesiana de la curva asociada a $\overline{m}$, operamos algebraicamente para eliminar el parámetro *t*:

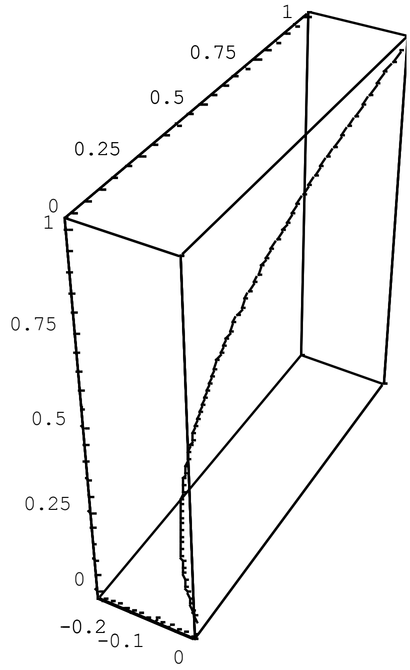
$$\left.\begin{cases} x=\cos t\Rightarrow x^2=\cos^2 t \\ y=\sin t\Rightarrow y^2=\sin^2 t\end{cases}\right]\Rightarrow x^2+y^2=\cos^2 t+\sin^2 t\Rightarrow x^2+y^2=1$$

La última ecuación resulta la ecuación de una circunferencia con centro en el origen y radio 1, que no puede expresarse como la gráfica de una función escalar del tipo $y=f(x)$



Si la función vectorial $\overline{m}$ describe la trayectoria de un móvil, dicha función nos indica la forma geométrica de esa trayectoria, y además nos indica que el móvil dio una única vuelta a la circunferencia y que lo hizo en sentido antihorario. (El sentido de recorrido puede analizarse mediante lo siguiente: $\overline{m}(0)=(1,0)$; $\overline{m}(\frac{\pi}{2})=(0,1)$, como se observa en la figura anterior). Si el dominio de la función fuera el intervalo $[0\,,4\pi]$, el móvil hubiera dado dos vueltas sobre la circunferencia.
En resumen, las funciones vectoriales dan mayor cantidad de información sobre una curva que la sola forma geométrica: indican sentido de recorrido, velocidad, aceleración, etc.

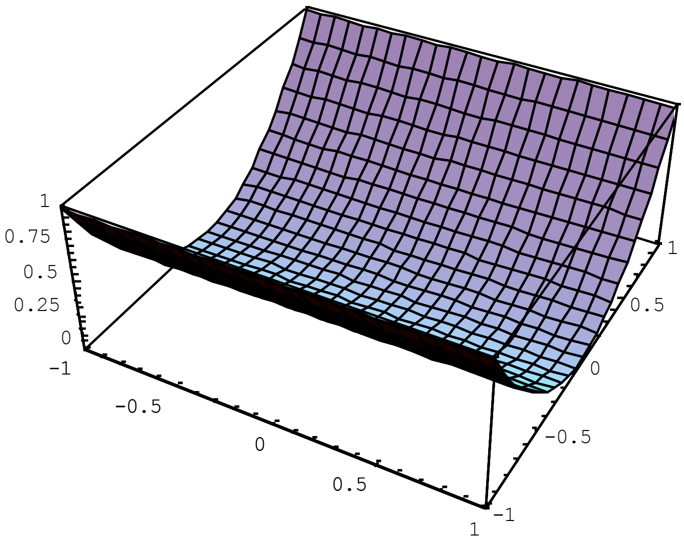
En el caso de curvas en el espacio, también pueden parametrizarse mediante una función vectorial. Recordemos que para describir una curva en el espacio mediante ecuaciones cartesianas, no alcanza con una única ecuación, sino que debe darse como un sistema de ecuaciones, es decir como la intersección de dos superficies.
Por ejemplo, graficamos la curva asociada a $\overline{f}:[0\,,1]\rightarrow R^3\,/\,\overline{f}(t)=(t^2-t,\,t\,,\,t^2)$

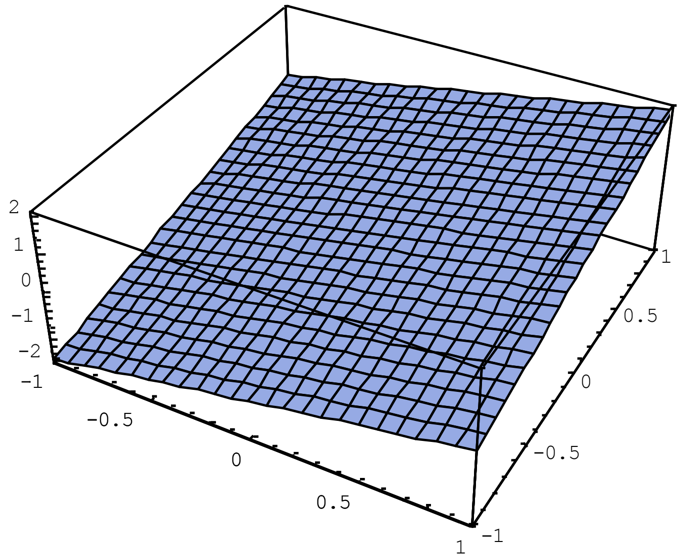


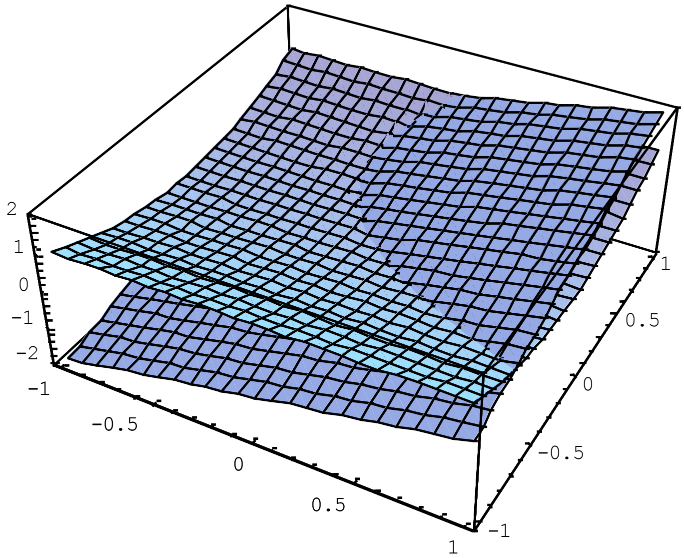
Para indicar el sistema de ecuaciones cartesianas que describen la forma geométrica de la curva eliminamos el parámetro:

$$\begin{cases} x = t^2 - t \\ y = t \\ z = t^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = y^2 - y \\ z = y^2 \end{cases} \qquad \text{ó} \qquad \begin{cases} x = y^2 - y \\ z = x + y \end{cases}$$

En el primer caso la curva se describe como la intersección de dos superficies cilíndricas, y en el segundo lugar como la intersección de una superficie cilíndrica con un plano.
Veamos la representación de la intersección de la superficie cilíndrica y el plano que definen la curva.







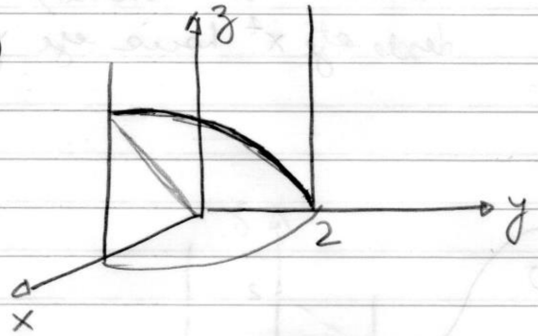
Resolvemos el ejercicio 11) de TP2

Sea C la línea que resulta de la intersección de la superficie de ecuación $x^2+y^2=4$ con el plano de ecuación $z=x$ en el 1er. octante.

a) Dibújela
b) Halle una ecuación vectorial
c) Halle las ecuaciones para las líneas resultantes de proyectar C sobre los planos coordenados: analice en forma vectorial y en forma cartesiana.

11) $\begin{cases} x^2+y^2=4 \\ z=x \end{cases}$ 1° octante

a)



$x^2+y^2=4$ cilindro circular recto

$z=x$ plano

b) $x^2+y^2=4 \Rightarrow \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{4}=1 \Rightarrow \underbrace{\left(\frac{x}{2}\right)}_{\cos t}^2+\underbrace{\left(\frac{y}{2}\right)}_{\operatorname{sen} t}^2=1$

$\begin{cases} \frac{x}{2}=\cos t \Rightarrow x=2\cos t \\ \frac{y}{2}=\operatorname{sen} t \Rightarrow y=2\operatorname{sen} t \end{cases}$

Siendo $z=x$ resulta $z=2\cos t$

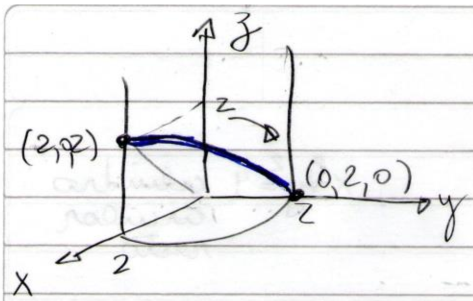
Como la curva está ubicada sólo en el 1° octante, "barre" un ángulo de $\pi/2$ (la curva completa "barrería" un ángulo de 2π, media curva uno de π y así sucesivamente)

Luego: $\bar{f}:[0,\pi/2]\to R^3 / \bar{f}(t)=(2\cos t, 2\operatorname{sen} t, 2\cos t)$

Podemos analizar el sentido de circulación:

Pto inicial $\to \bar{f}(0)=(2,0,2)$

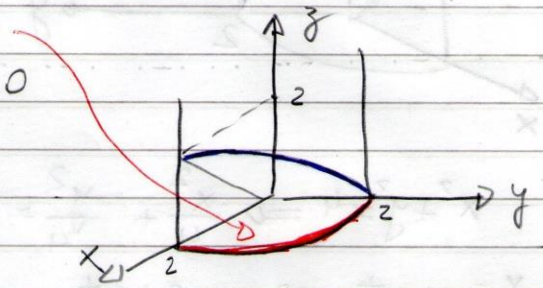
Punto final $\to \bar{f}(\pi/2)=(0,2,0)$



(sentido antihorario)
desde eje x^+ hacia eje y^+

c) Proyección pl (xy)

Ecuación pl(xy): $z=0$



Forma vectorial

Curva C

$\bar{f}:[0,\pi/2]\to R^3 / \bar{f}(t)= (2\cos t, 2\,\text{sen}\,t, \underbrace{2\cos t}_{=0})$

proyección (xy)

Curva proyección

$\bar{g}:[0,\pi/2]\to R^3 / \bar{g}(t)=(2\cos t, 2\,\text{sen}\,t, 0)$

Forma cartesiana

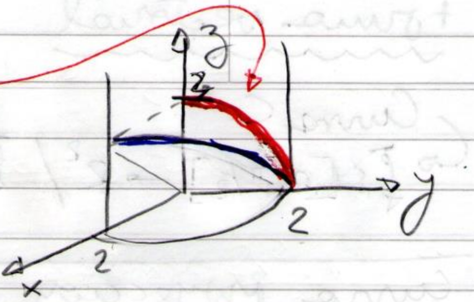
Eliminamos el parámetro de la función $\bar{g}$

$$\left\{\begin{array}{l} x=2\cos t \\ y=2\,\text{sen}\,t \\ z=0 \end{array}\right. \Rightarrow \begin{array}{l} x^2+y^2=4 \\ z=0 \end{array}$$

Luego: $\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2=4 \\ z=0 \\ 1^\circ \text{ octante} \end{array}\right.$

(se agrega 1° octante en la expresión cartesiana para no indicar la circunferencia completa)

Proyección plano (yz)



Ecuación pl (yz): $x = 0$

Forma vectorial

Curva C

$\bar{f} : [0, \pi/2] \to R^3 / \bar{f}(t) = (\underbrace{2\cos t}_{=0 \text{ proyección } (yz)}, 2\,\text{sen}\,t, 2\cos t)$

Curva proyección

$$\boxed{\bar{h} : [0, \pi/2] \to R^3 / \bar{h}(t) = (0, 2\,\text{sen}\,t, 2\cos t)}$$

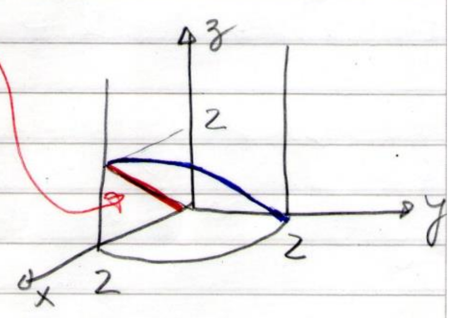
Forma cartesiana

$$\left\{\begin{array}{l} x = 0 \\ y = 2\,\text{sen}\,t \\ z = 2\cos t \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} x = 0 \\ y^2 + z^2 = 4 \end{array}$$

Luego: $\left\{\begin{array}{l} y^2 + z^2 = 4 \\ x = 0 \\ 1^\circ \text{ octante} \end{array}\right.$

Proyección plano (xz)

Ecuación pl (xz): $y = 0$



Forma vectorial

Curva C

$\to \bar{f}: [0, \pi/2] \to R^3 \,/\, \bar{f}(t) = (2\cos t, \underbrace{2\,\text{sen}\, t}_{=0 \text{ proyección } (xz)}, 2\cos t)$

Curva proyección

$\bar{m}: [0, \pi/2] \to R^3 \,/\, \bar{m}(t) = (2\cos t, 0, 2\cos t)$

Forma cartesiana

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 0 \\ z = 2\cos t \end{cases} \longrightarrow \quad \begin{matrix} x = z \\ y = 0 \end{matrix}$$

Luego

$$\begin{cases} x = z \\ y = 0 \\ \text{con } 0 \le x \le 2 \end{cases}$$

Se agrega la condición $0 \le x \le 2$ para no indicar toda la recta, sino solamente el segmento proyección.