Prof. Andrea Campillo

CURVAS – INTEGRALES DE LÍNEA – FUNCIÓN POTENCIAL

CURVAS

Definición de curva

Sea la función vectorial $\overline{f} : D \subset R \to R^n$. Si se cumple que:

1) D es un conjunto conexo
2) $\overline{f}$ es continua en D

Entonces el conjunto $C = \operatorname{Im} \overline{f}$ es una curva de R^n.

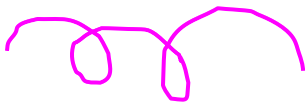
Curva cerrada

Sea la función $\overline{f} : [a\,,b] \subset R \to R^n$, asociada a la curva C. Si se cumple que $\overline{f}(a) = \overline{f}(b)$, se dice que C es una curva cerrada.

Curva simple

Sea la función $\overline{f} : D \subset R \to R^n$, asociada a la curva C. Si se cumple que $\overline{f}$ es inyectiva en *D*, entonces la curva C es una curva simple. Las curvas simples son aquellas que no se intersecan a sí mismas, ya que si $\overline{f}$ es una función inyectiva, no puede haber dos elementos del dominio con la misma imagen.

Curva simple



Curvas no simple

Punto regular de una curva

Sea $\overline{f} : D \subset R \to R^n$, asociada a la curva *C*, y sea t_0 punto interior de *D*. Si se cumple que:

- $\exists\, \overline{f}\,'(t_0)$
- $\overline{f}\,'(t_0) \neq \overline{0}$

Entonces se define a $\overline{f}(t_0) = X_0$ como punto regular de *C*.

Una curva es regular cuando todos sus puntos son regulares.

Punto suave de una curva

Sea $\overline{f} : D \subset R \to R^n$, asociada a la curva *C*, y sea t_0 punto interior de *D*. Si se cumple que:

- $\exists\, \overline{f}\,'(t_0)$
- $\overline{f'}(t)$ es continua en t_0
- $\overline{f}\,'(t_0) \neq \overline{0}$

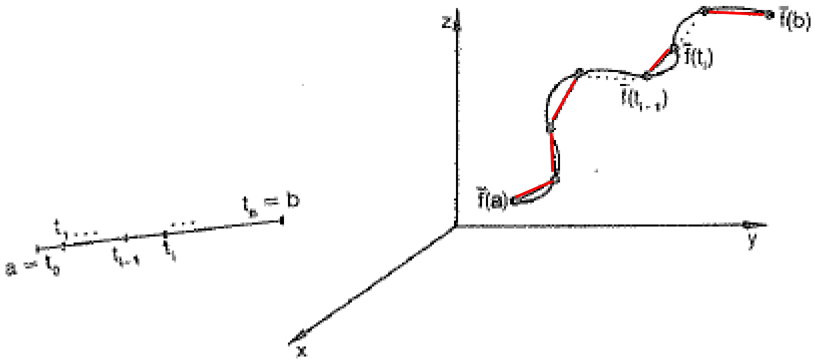
Entonces se define a $\overline{f}(t_0) = X_0$ como punto suave de *C*.

Una curva es suave cuando todos sus puntos son suaves.

Longitud de arco de curva

Consideremos una curva C suave y simple, asociada a la función vectorial $\overline{f} : [a , b] \subset R \to R^n$. Queremos averiguar cuál es la longitud de la curva C, y para ello, podemos pensar en aproximar dicha longitud mediante la longitud de una poligonal, cuyos vértices son puntos que pertenecen a la curva.

Se particiona entonces el intervalo [a , b], y se indica la imagen de cada uno de los elementos de la partición como vértice de la poligonal.



La partición P_1 viene dada por: $a = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{i-1} < t_i < \ldots < t_n = b$. A esta partición del intervalo [a , b] se le asocia una poligonal cuyos vértices son puntos que pertenecen a la curva. La longitud de esta poligonal, obtenida a partir de la partición P_1, puede calcularse sumando las longitudes de los segmentos que la componen. De este modo:

$$L_{P_1} = \sum_{i=1}^{n} \left\| \overline{f}(t_i) - \overline{f}(t_{i-1}) \right\|$$

Obviamente, L_{P_1} no es igual a la longitud de la curva, y si queremos una mejor aproximación de la longitud de C podemos refinar la partición P_1 y volver a calcular la longitud de la poligonal asociada a dicho refinamiento. (Recordemos que un refinamiento de la partición P_1 es otra partición P_2 de $[a , b]$ que contiene a los puntos de la partición P_1, y agrega más puntos al conjunto, siendo $\Delta t_i = |t_i - t_{i-1}| \to 0 \ \ \forall i$ con $1 \le i \le n$)

Este proceso puede continuar con sucesivos refinamientos, obteniendo las respectivas longitudes de las poligonales asociadas L_{P_2}, L_{P_3}, L_{P_4}, etc.

Con las longitudes de estas poligonales se genera la sucesión $\{L_{P_i}\}_{i \in N}$. Por cómo fueron construidas las poligonales, los elementos de la sucesión pueden ordenarse de la siguiente manera:

$$L_{P_1} \le L_{P_2} \le L_{P_3} \le \ldots \le L_{P_i} \le \ldots$$

Si el conjunto $\{L_{P_i}\}_{i \in N}$ está acotado superiormente, se dice que la curva C es **rectificable**. En este sentido, el supremo de dicho conjunto (la menor de las cotas superiores) será la longitud de la curva C.

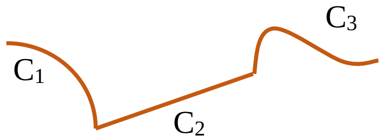
Para realizar cálculo concreto de la longitud de una curva se necesitará un método más rápido y ágil que el propuesto anteriormente, obteniendo el supremo del conjunto de las longitudes $\{L_{P_i}\}_{i \in N}$. Para ello, enunciamos el siguiente teorema.

Teorema: fórmula para el cálculo de la longitud de una curva

Sea la curva C suave y simple, asociada a $\overline{f}:[a\,,b]\subset R\rightarrow R^n$. La curva C es rectificable y su longitud está dada por:

$$L_C=\int_a^b\left\|\overline{f}'(t)\right\|dt$$

Si la curva C es **suave a trozos**, para calcular la longitud total de C se suman las longitudes de los arcos de C que resultan suaves, siempre que la intersección de dichos arcos de la curva C sea vacía (es decir, que los trozos suaves de curva C no se superpongan entre sí).



En este caso, la curva $C=C_1\cup C_2\cup C_3$ es una curva suave a trozos, por lo cual:

$$L_C=L_{C1}+L_{C2}+L_{C3}$$

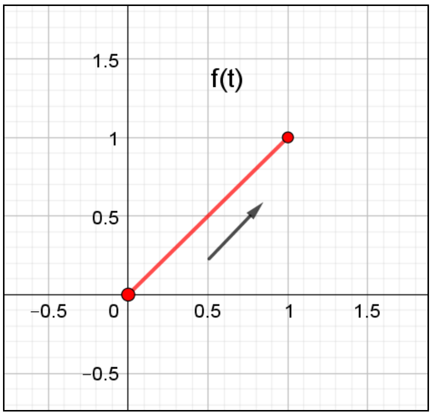
Si la curva C **no es simple**, su longitud se denomina longitud de trayectoria. La fórmula de cálculo puede generalizarse para este tipo de curvas.

Reparametrización de una curva

Recordemos que las funciones vectoriales que describen curvas presentan más información que la forma geométrica de la misma. Estas funciones indican también un sentido de recorrido de la curva, y la velocidad y aceleración del móvil asociado a esas trayectorias. Veamos los siguientes ejemplos:

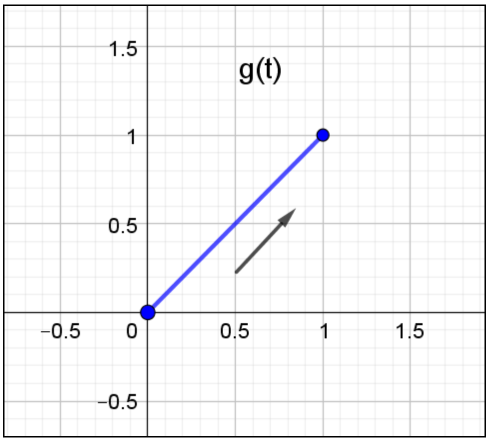
- $\overline{f}:[0\,,1]\subset R\rightarrow R^2\,/\,\overline{f}(t)=(t,t)$

Si eliminamos el parámetro, la ecuación cartesiana de la curva es $y=x$. El punto inicial es $\overline{f}(0)=(0,0)$, y el punto final es $\overline{f}(1)=(1,1)$. Por lo tanto, la curva asociada a $\overline{f}$ es el segmento que se muestra en el siguiente gráfico (la flecha indica el sentido de recorrido)



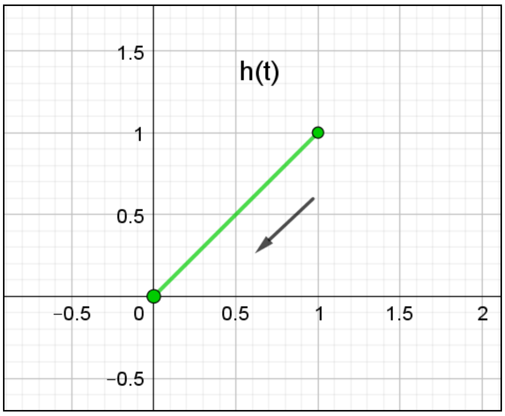
- $\overline{g}:[0\,,\frac{1}{4}]\subset R\rightarrow R^2\,/\,\overline{g}(t)=(4t,4t)$

Si eliminamos el parámetro, la ecuación cartesiana de la curva es $y=x$. El punto inicial es $\overline{g}(0)=(0,0)$, y el punto final es $\overline{g}\left(\frac{1}{4}\right)=(1,1)$. Por lo tanto, la curva asociada a $\overline{g}$ es el segmento que se muestra en el siguiente gráfico (la flecha indica el sentido de recorrido)



- $\overline{h}:[-\frac{1}{2},0]\subset R \to R^2 \,/\, \overline{h}(t)=(-2t,-2t)$

Si eliminamos el parámetro, la ecuación cartesiana de la curva es $y=x$. El punto inicial es $\overline{h}\left(-\frac{1}{2}\right)=(1,1)$, y el punto final es $\overline{h}(0)=(0,0)$. Por lo tanto, la curva asociada a $\overline{h}$ es el segmento que se muestra en el siguiente gráfico (la flecha indica el sentido de recorrido)



En estos tres ejemplos, la forma geométrica de las curvas asociadas a las funciones vectoriales es la misma: un segmento entre los puntos (0,0) y (1,1). Sin embargo, las funciones vectoriales permiten identificar características de la trayectoria que no se visualizan en la forma cartesiana de la curva. En el caso de $\overline{f}$ y $\overline{g}$ es sentido de recorrido es ascendente, en tanto que para $\overline{h}$ el sentido de recorrido es descendente. Asimismo, cada una de las funciones vectoriales determina una velocidad distinta asociada a su trayectoria (tanto en la dirección como en el módulo de la misma).

Este tipo de funciones vectoriales que describen una misma forma geométrica, pero que difieren en otras características de la curva (como velocidad y sentido de recorrido) es lo que se define como reparametrizaciones de una misma curva. Para efectuar una definición formal, podemos pensar cada una de las reparametrizaciones como composición de la función original con una función escalar. Por ejemplo:

- Función original: $\overline{f}(t)=(t,t)$
- Función vectorial $\overline{g}(t)=(4t,4t)$.

Dada $u_1(t)=4t$ resulta $\overline{g}(t)=\overline{f}(u_1(t))=\overline{f}(4t)=(4t,4t) \;\Rightarrow\; \overline{g}(t)=(\overline{f}\circ u_1)(t)$

● Función vectorial $\overline{h}(t) = (-2t, -2t)$.

$$\text{Dada } u_2(t) = -2t \quad \text{resulta} \quad \overline{h}(t) = \overline{f}(u_2(t)) = \overline{f}(-2t) = (-2t, -2t) \quad \Rightarrow \quad \overline{h}(t) = (\overline{f} \circ u_2)(t)$$

Se puede observar en estos ejemplos que algunas funciones escalares, como u_1, permiten que la reparametrización conserve el sentido de recorrido. Sin embargo, en otros casos como u_2, el sentido de recorrido de la reparametrización se invierte.

Definición: reparametrización de una curva

Sea la curva C suave y simple, asociada a la función vectorial $\overline{f} : [a\,, b] \subset R \rightarrow R^n$. Sea la función escalar $u : [c\,, d] \subset R \rightarrow [a\,, b]$, siendo u una función sobreyectiva, $u \in C^1$ en $[c\,, d]$, y tal que $u'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [c, d]$.

Entonces, la función $\overline{g} = \overline{f} \circ u : [c\,, d] \subset R \rightarrow R^n$ se denomina una reparametrización de la curva C.

Corolario 1

Dado que $u'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [c, d]$, pueden presentarse los siguientes casos:

- $u'(t) > 0 \quad \forall t \in [c, d]$, por lo cual la función $u(t)$ es **estrictamente creciente** en $[c\,, d]$. En este caso, la reparametrización dada por $\overline{g}(t) = (\overline{f} \circ u)(t)$ **conserva el sentido de recorrido** de la curva asociada a $\overline{f}$
- $u'(t) < 0 \quad \forall t \in [c, d]$, por lo cual la función $u(t)$ es **estrictamente decreciente** en $[c\,, d]$. En este caso, la reparametrización dada por $\overline{g}(t) = (\overline{f} \circ u)(t)$ **invierte el sentido de recorrido** de la curva asociada a $\overline{f}$

Corolario 2

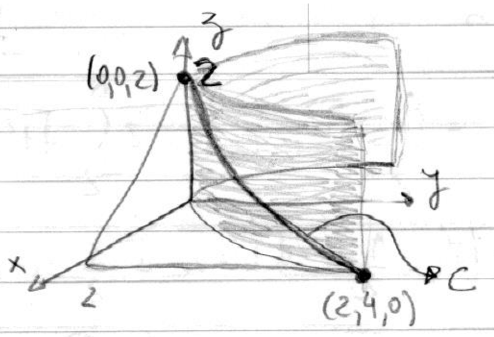
Puede demostrarse que la longitud de una curva es invariante respecto de la reparametrización, es decir, que si se reparametriza una curva, no cambia la medida de su longitud. Esta propiedad es coherente con el aspecto de que las curvas reparamentrizadas siguen teniendo la misma forma geométrica, por lo cual no puede modificarse su longitud si se la calcula considerando las distintas reparametrizaciones de la misma.

Resolvemos el ejercicio 1)e) del TP8

1)e) Dado el siguiente arco de curva, halle dos parametrizaciones que lo orienten en sentido opuesto y plantee el cálculo de su longitud, verificando que el resultado no depende de la orientación.

$C \subset R^3$, intersección de $y = x^2$ con $x + z = 2$ en el 1er. octante

1)e) $\begin{cases} y = x^2 \\ x + z = 2 \end{cases}$ 1° octante



$\begin{cases} y = x^2 \\ z = 2 - x \end{cases}$ 1° oct

$\bar{g}_1(t) = (t, t^2, 2-t)$

1° oct: $\left.\begin{cases} t \geq 0 \longrightarrow t \geq 0 \\ t^2 \geq 0 \quad \text{vale } \forall t \in R \\ 2 - t \geq 0 \longrightarrow 2 \geq t \end{cases}\right\} \Rightarrow 0 \leq t \leq 2$

$\bar{g}_1(t) : [0,2] \to R^3 \,/\, \bar{g}_1(t) = (t, t^2, 2-t)$

Pto inicial: $\bar{g}_1(0) = (0,0,2)$

Pto final: $\bar{g}_1(2) = (2,4,0)$

Consideramos $u = -t \to \bar{g}_2 = (\bar{g}_1 \circ u)$

$0 \leq t \leq 2 \Rightarrow 0 \geq \underbrace{-t}_{u} \geq -2$

$\bar{g}_2 : [-2,0] \to R^3 \,/\, \bar{g}_2(t) = (-t, (-t)^2, 2+t) = (-t, t^2, 2+t)$

Pto inicial: $\bar{g}_2(-2) = (2,4,0)$.

Pto final: $\bar{g}_2(0) = (0,0,2)$

Cálculo longitud de la curva

$$L_1 = \int_0^2 \| \bar{g}_1'(t) \| \, dt = \int_0^2 \| (1, 2t, -1) \| \, dt = \int_0^2 \sqrt{1 + 4t^2 + 1} \, dt =$$

$$= \int_0^2 \sqrt{4t^2 + 2} \, dt = 2 \int_0^2 \sqrt{t^2 + 1/2} \, dt =$$

$$= \left[\cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} \left(t \sqrt{t^2 + 1/2} + \frac{1}{2} \operatorname{arsh} \sqrt{2}\, t \right) \Big|_0^2 \right] =$$

$$= 3\sqrt{2} + \operatorname{arsh}(2\sqrt{2}) / 2$$

$$L_2 = \int_{-2}^{0} \| \overline{g}_2'(t) \| \, dt = \int_{-2}^{0} \| (-1, 2t, 1) \| \, dt =$$

$$= \int_{-2}^{0} \sqrt{4t^2+2} = 2\int_{-2}^{0} \sqrt{t^2+1/2} \, dt =$$

$$= \left(\cancel{2} \cdot \frac{1}{\cancel{2}} t\sqrt{t^2+1/2} + \frac{1}{2} \operatorname{arsh} \sqrt{2}\, t \right) \Big|_{-2}^{0} =$$

$$= \underline{3\sqrt{2} + \frac{\operatorname{arsh}(2\sqrt{2})}{2}}$$

Abscisa curvilínea

Dada una curva C suave y simple, asociada a la función vectorial $\overline{f}:[a\,,b]\subset R \to R^n$, podemos calcular la longitud de C mediante la siguiente integral: $L_C = \int_a^b \| \overline{f}'(t) \| dt$. Si dejamos libre el extremo superior b de la integral, se puede definir una función que nos permitirá calcular la longitud de los distintos arcos de curva incluidos en C a medida que el parámetro t varía desde a hasta b, en el sentido de las t crecientes. Cuando $t = b$ obtenemos el valor de la longitud total de C.

$$s(t) = \int_a^t \| \overline{f}'(t) \| dt$$

Aclaración: en la expresión anterior se comete un abuso de notación, ya que la expresión correcta sería $s(t) = \int_a^t \| \overline{f}'(u) \| du$

Derivamos la función $s(t) = \int_a^t \| \overline{f}'(t) \| dt \quad \Rightarrow \quad s'(t) = \| \overline{f}'(t) \|$

Diferenciando la función resulta: $ds = \| \overline{f}'(t) \| dt$

El diferencial $\boxed{ds = \| \overline{f}'(t) \| dt}$ se denomina **diferencial de arco escalar.**

Consideremos el caso particular de una curva $C \subset R^3$. En este caso, el campo vectorial $\overline{f}$ asociado a la curva tendrá tres componentes: $\overline{f}(t) = (x(t)\,,\, y(t)\,,\, z(t))$. Podemos expresar las ecuaciones paramétricas de la curva y diferenciarlas miembro a miembro:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = x'(t)\,dt \\ dy = y'(t)\,dt \\ dz = z'(t)\,dt \end{cases}$$

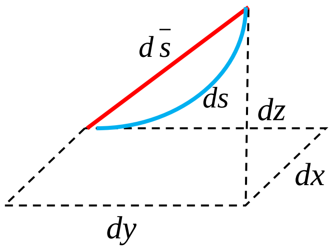
Retomamos el cálculo del diferencial de arco escalar:

$$ds = \| \overline{f}'(t) \| dt = \| (x'(t), y'(t), z'(t)) \| dt = \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2}\; dt$$

$$ds = \sqrt{[x'(t)]^2(dt)^2 + [y'(t)]^2(dt)^2 + [z'(t)]^2(dt)^2} = \sqrt{[\underbrace{x'(t)\,dt}_{dx}]^2 + [\underbrace{y'(t)\,dt}_{dy}]^2 + [\underbrace{z'(t)\,dt}_{dz}]^2}$$

$ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$

Si definimos el vector $d\bar{s} = (dx, dy, dz)$, resulta $ds = \| d\bar{s} \|$. La representación geométrica sería la siguiente:



Retomemos la definición del vector $d\bar{s}$ para poder expresarlo en función de $\bar{f}$

$d\bar{s} = (dx, dy, dz) = (x'(t)\,dt\,, y'(t)\,dt\,, z'(t)\,dt\,) = (x'(t)\,, y'(t)\,, z'(t))\,dt = \bar{f}\,'(t)\,dt \quad \Rightarrow \quad d\bar{s} = \bar{f}\,'(t)\,dt$

El diferencial $\boxed{d\bar{s} = \bar{f}\,'(t)\,dt}$ se denomina **diferencial de arco vector.**

INTEGRALES DE LÍNEA

Integral de línea de un campo escalar

Sea la curva C suave y simple, asociada a la función vectorial $\bar{g} : [a\,, b] \subset R \to R^n$. Sea el campo escalar $f : D \subset R^n \to R$, con $f \in C^1$ en D, y de modo que $\mathrm{C} \subset D$. Se define la integral de línea del campo escalar f sobre la curva C a la siguiente integral:

$$\int_c f\ ds = \int_a^b f(\bar{g}(t)) \underbrace{\| \bar{g}\,'(t) \|\ dt}_{ds}$$

Interpretación física

Podemos suponer que la curva C imagen de $\bar{g}$ representa un alambre, y el campo escalar f la densidad puntual. La integral $\int_c f\ ds$ será la masa total del alambre. Si f indica la temperatura puntual, podemos utilizar integral para determinar la temperatura promedio del alambre.

Resolvemos el ejercico 4) del TP8

4) Entre los puntos (0 , 0 , 0) y (1 , 1, 1) en la intersección del plano $y = x$ con la superficie de ecuación $z = 2y - x^2$ con $z \geq 0$ se ha formado un hilo conductor eléctrico con resistividad lineal (Ω / m) que en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al plano $x = 1$. Calcule la resistencia eléctrica de dicho hilo conductor.

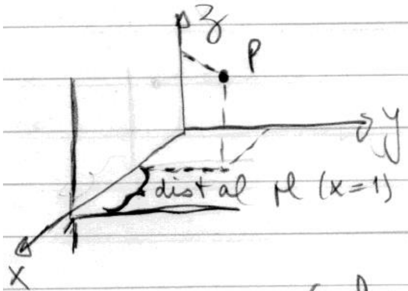
4) $\begin{cases} y = x \\ 2y = x^2 + z \rightarrow z = 2y - x^2 = 2x - x^2 \\ z \geq 0 \end{cases}$

$\bar{g}(t) = (t, t, 2t - t^2)$ $\quad \bar{g}(t_0) = (0,0,0) \Rightarrow t_0 = 0$

$\bar{g}(t_1) = (1,1,1) \Rightarrow t_1 = 1$

Alambre $\rightarrow \bar{g} : [0,1] \rightarrow R^3 \,/\, \bar{g}(t) = (t, t, 2t - t^2)$

Resistividad



$\text{dist} = |x - 1| \Rightarrow f(x,y,z) = k|x-1|$

$$\Omega = \int_C f(x,y,z)\, ds = \int_C k|x-1|\, ds =$$

$$= \int_0^1 \underbrace{k\,|t-1|}_{f(\bar{g}(t))} \underbrace{\|\bar{g}'(t)\|\, dt}_{ds} = \int_0^1 k(1-t) \cdot \|\bar{g}'(t)\|\, dt =$$

porque $0 \leq t \leq 1$, luego $|t-1| = 1 - t$

$$= \int_0^1 k(1-t)\, \|(1,1,2-2t)\|\, dt = \int_0^1 k(1-t) \sqrt{1+1+(2-2t)^2}\, dt =$$

$$= \int_0^1 k(1-t) \sqrt{2+4+4t^2-8t}\, dt = k \int_0^1 (1-t)\sqrt{4t^2-8t+6}\, dt =$$

$$= k \left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{6} \right)$$

Integral de línea de un campo vectorial

Sea la curva C suave y simple, asociada a la función vectorial $\overline{g}:[a\,,b]\subset R\to R^n$. Sea el campo vectorial $\overline{f}:D\subset R^n\to R^n$, con $\overline{f}\in C^1$ en D, y de modo que $C\subset D$. Se define la integral de línea del campo vectorial $\overline{f}$ sobre la curva C a la siguiente integral:

$$\int_c \overline{f}\; d\overline{s}=\int_a^b \overline{f}(\overline{g}(t))\;\underbrace{\overline{g}'(t)\; dt}_{d\overline{s}}$$

La integral $\int_c \overline{f}\; d\overline{s}$ se denomina también circulación del campo $\overline{f}$ a lo largo de la curva C.

Notación

Indicamos algunas notaciones alternativas para la integral de línea de un campo vectorial

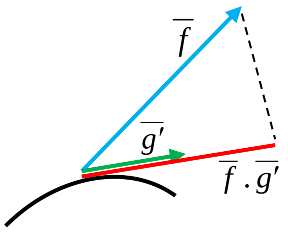
- Si $\overline{f}(x,y,z)=(P(x,y,z)\,,Q(x,y,z)\,,R(x,y,z))$, y sabiendo que $d\overline{s}=(dx,dy,dz)$ la integral de línea de $\overline{f}$ sobre la curva C se puede indicar como $\int_c P\;dx+Q\;dy+R\;dz$
- Si la curva C es cerrada, la integral se puede indicar como $\oint_C \overline{f}\; d\overline{s}$
- C^+ indica que se recorre la curva en sentido antihorario; C^- indica que se recorre la curva en sentido horario. En forma más general, C^+ y C^- indican parametrizaciones de la misma curva que la recorren en sentidos opuestos.

Interpretación física

Si $\overline{f}$ es un campo de fuerzas en el espacio, entonces una partícula (por ejemplo una pequeña unidad de carga en un campo de fuerza eléctrico o una masa unitaria en un campo gravitacional), experimentará la fuerza $\overline{f}$. Podemos suponer que la partícula se mueve a la largo de la curva C, imagen de $\overline{g}$, mientras la fuerza $\overline{f}$ actúa sobre ella. Un concepto fundamental de la física es el trabajo realizado por $\overline{f}$ sobre la partícula conforme traza la trayectoria de C. Si la curva C corresponde a un desplazamiento en línea recta dado por el vector $\overline{V}$, y $\overline{f}$ es una fuerza constante, entonces el trabajo realizado por $\overline{f}$ al mover la partícula a lo largo de la trayectoria asociada a $\overline{V}$ se calcula como $\overline{f}\,.\,\overline{V}$

$$\overline{f}\,.\,\overline{V}\to \text{(fuerza)}\times\text{(desplazamiento o distancia en la dirección de la fuerza)}$$

De manera más general, si la trayectoria está curvada, podemos imaginar que está hecha de una sucesión de desplazamientos rectos infinitesimales, o que dicho desplazamiento está aproximado por un número finito de desplazamientos rectos. Cada uno de estos tramos infinitesimales de curva se puede aproximar mediante un tramo infinitesimal de su recta tangente. Recordemos que el vector derivado $\overline{g}'$ es tangente a la curva en cada punto, por lo cual $\overline{g}'(t)\,dt$ corresponde a un vector tangente a la curva de longitud infinitesimal (denominando dt al diferencial infinitesimal de la variable *t*).



Sección infinitesimal de la curva C

Por todo lo expuesto, podemos calcular el trabajo de la fuerza $\overline{f}$ sobre una partícula que se mueve a lo largo de C mediante:

$$W = \int_a^b \overline{f}(\overline{g}(t))\,\overline{g}'(t)\,dt = \int_C \overline{f}\,d\overline{s}$$

<u>Propiedad</u>

Si consideramos que la integral $\int_C \overline{f}\,d\overline{s}$ indica el trabajo realizado por la fuerza $\overline{f}$ a lo largo de la curva C, tenemos que:

$$\int_{C^-} \overline{f}\,d\overline{s} = -\int_{C^+} \overline{f}\,d\overline{s}$$

La integral de línea de un campo vectorial a lo largo de una curva recorrida en un determinado sentido tiene el mismo valor absoluto, pero signo opuesto, a la integra del mismo campo recorriendo la curva en sentido inverso. Esta propiedad puede demostrarse analíticamente.

Resolvemos ejercicios del TP8

12) Calcule la circulación de $\overline{f}(x,y,z)=(x-y\ ,\ x\ ,\ yz)$ a lo largo de la curva intersección de $z=x-y^2$ con $y=x^2$, desde (1 , 1 , 0) hasta (–1 , 1 , –2).

12) Circulación: $\int_C \bar{f}\,d\bar{s}$ con $\bar{f}(\bar{x})=(x-y, x, yz)$

$$C:\begin{cases} z=x-y^2 \\ y=x^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z=x-x^4 \\ y=x^2 \end{cases}$$

$$\bar{g}(t)=(t, t^2, t-t^4)$$

Punto inicial: $(1,1,0)$ $\bar{g}(t_0)=(1,1,0)\Rightarrow t_0=1$
Punto final: $(-1,1,-2)$ $\bar{g}(t_1)=(-1,1,-2)\Rightarrow t_1=-1$

$1\geq t\geq -1$

$$\int_C \bar{f}\,d\bar{s}=\int_1^{-1}\bar{f}(\bar{g}(t))\,\bar{g}'(t)\,dt=$$

$$=\int_1^{-1}\left(t-t^2, t, t^2(t-t^4)\right).(1,2t,1-4t^3)\,dt=$$

$$=\int_1^{-1}(t-t^2, t, t^3-t^6)(1,2t,1-4t^3)\,dt=$$

$$=\int_1^{-1}\left[t-t^2+2t^2+(t^3-t^6)(1-4t^3)\right]dt=$$

$$=\int_1^{-1}\left(t+t^2+t^3-5t^6+4t^9\right)dt=$$

$$=\left[\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+\frac{t^4}{4}-\frac{5t^7}{7}+\frac{4t^{10}}{10}\right]_1^{-1}=\frac{16}{21}$$

INDEPENDENCIA DE LA TRAYECTORIA (O INDEPENDENCIA DEL CAMINO)

En general, si se calcula la integral de línea de un campo vectorial a lo largo de una curva C que une los puntos A y B, el resultado no depende exclusivamente de los extremos A y B de la curva, sino también de la trayectoria elegida entre ambos. La idea es ver si existe alguna clase de campo vectorial para los cuales el valor de la integral $\int_C \overline{f}\, d\overline{s}$ depende solamente de los extremos de la curva C que los une, y no dependa del camino en sí mismo, es decir, que la integral sea independiente de la trayectoria que une los puntos A y B (punto inicial y final de la curva C).

El siguiente teorema nos indica que si el campo $\overline{f}$ es un campo de gradientes, el valor de la integral de línea de dicho campo de gradientes será independiente del camino elegido para unir los puntos inicial y final del recorrido.

Teorema (independencia de la trayectoria)

Sea la curva C suave y simple, asociada a la función vectorial $\overline{g}:[a,b]\subset R\to R^n$, de modo que $\overline{g}(a)=A \quad \wedge \quad \overline{g}(b)=B$. Sea el campo vectorial $\overline{f}:D\subset R^n\to R^n$, $\overline{f}\in C^1$ en D, con D abierto y conexo, de modo que $C\subset D$. Sea el campo escalar $\phi:D\subset R^n\to R \;/\; \overline{f}=\nabla\phi$. Entonces:

$$\int_C \overline{f}\, d\overline{s} = \int_C \nabla\phi\, d\overline{s} = \phi(B)-\phi(A)$$

Demostración:

$$\int_C \overline{f}\, d\overline{s} = \int_C \nabla\phi\, d\overline{s} = \int_a^b \nabla\phi(\overline{g}(t))\ \overline{g}'(t)\ dt \qquad (*)$$

Para resolver la integral, realizamos la siguiente sustitución:

$$u(t)=\phi(\overline{g}(t))=(\phi\circ\overline{g})(t) \quad \Rightarrow \quad u'(t)=\nabla\phi(\overline{g}(t))\ \overline{g}'(t)$$

Reemplazando la sustitución propuesta en $(*)$ tenemos que:

$$\int_a^b \nabla\phi(\overline{g}(t))\ \overline{g}'(t)\ dt = \int_a^b u'(t)\, dt = u(t)\Big|_a^b = u(b)-u(a) = \phi(\overline{g}(b))-\phi(\overline{g}(a)) = \phi(B)-\phi(A)$$

Corolario

Si se cumplen todas las condiciones de hipótesis del teorema para una curva cerrada C, resulta A = B (el punto inicial y el punto final coinciden). Entonces, la integral de línea de un campo de gradientes a lo largo de una curva cerrada es nulo.

$$\oint_C \overline{f}\, d\overline{s} = \oint_C \nabla\phi\ d\overline{s} = \phi(A)-\phi(A)=0$$

Nomenclatura

- Si la integral $\int_C \overline{f}\, d\overline{s}$ es independiente de la trayectoria, se dice que $\overline{f}$ es un **campo conservativo**
- Si $\exists\phi:D\subset R^n\to R \;/\; \overline{f}=\nabla\phi$ se dice que ϕ es la **función potencial** asociada a $\overline{f}$

Campo de gradientes y función potencial asociada

Dada la importancia de los campos de gradientes en el cálculo de integrales de línea, es importante poder determinar si un campo vectorial dado es un campo de gradientes, asociado a un campo escalar (su función potencial asociada).

Veamos un ejemplo: dado el campo vectorial $\overline{f}(x,y)=(18x^2y+2x\,,6x^3+2)$ queremos verificar si se trata de un campo de gradientes, y en dicho caso, determinar su función potencial.

Si $\overline{f}(x,y)=(18x^2y+2x\,,6x^3+2)=\nabla\phi$ para algún campo escalar ϕ, entonces la primera componente del campo debería ser ϕ'_x y la segunda componente debería ser ϕ'_y.

$$\overline{f}(x,y)=(\underbrace{18x^2y+2x}_{¿\phi'_x?}\,,\underbrace{6x^3+2}_{¿\phi'_y?})$$

Para verificar si esta suposición es correcta, podemos derivar parcialmente la primera componente del campo respecto de *y*, con lo cual obtendríamos ϕ''_{xy}. Análogamente, si derivamos parcialmente la segunda componente respecto de *x*, obtendríamos ϕ''_{yx}. En este proceso, estaríamos obteniendo las derivadas cruzadas de ϕ, que de acuerdo con el teorema de Schwartz, deben ser iguales (siempre que se cumplan las condiciones de hipótesis, que más adelante vamos a especificar).

Entonces, verificamos si se cumple la igualdad: $\dfrac{\partial f_1}{\partial y}=\dfrac{\partial f_2}{\partial x}$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}(18x^2y+2x)=18x^2$$
$$\frac{\partial f_2}{\partial x}=\frac{\partial}{\partial x}(6x^3+2)=18x^2$$

Se cumple que $\dfrac{\partial f_1}{\partial y}=\dfrac{\partial f_2}{\partial x}$, por lo cual $\overline{f}(x,y)$ es un campo de gradientes

(Observación: más adelante formalizaremos este procedimiento, con lo cual habrá que pedir determinadas condiciones sobre el campo $\overline{f}$ y su dominio para asegurar la existencia de función potencial).

Veamos ahora cómo procedemos para obtener la función potencial ϕ, de modo que $\overline{f}=\nabla\phi$. De este campo escalar ϕ conocemos sus derivadas parciales, por lo cual, para obtener el campo escalar original, tendremos que integrar. Los datos que conocemos son:

$$\begin{cases}\phi'_x=18x^2y+2x & (1)\\ \phi'_y=6x^3+2 & (2)\end{cases}$$

Para encontrar el campo escalar ϕ podemos integrar la función (1) respecto de *x*, o integrar la función (2) respecto de *y*. Recordemos que estas integrales son integrales indefinidas, por lo cual debemos sumar la constante de integración. Sin embargo, en este caso, la constante no será un número real, ya que si integramos respecto de una sola de las dos variables, la otra variable está funcionando como una constante (del mismo modo que se realiza la operatoria de derivadas parciales).

Veamos la resolución, si trabajamos con (1):

$$\phi=\int(18x^2y+2x)\,dx=18\frac{x^3}{3}y+x^2+g(y)\quad\Rightarrow\quad\phi=6x^3y+x^2+g(y)\qquad(3)$$

Habiendo integrado respecto de *x*, $g(y)$ es la constante de integración, en este caso, una función que depende de *y*. ¿Cómo obtenemos la función $g(y)$? Dado que ya utilizamos la ecuación (1), debemos utilizar la ecuación (2) para seguir resolviendo el sistema. Para ello derivamos parcialmente respecto de *y* en (3), y obtenemos ϕ'_y para igualar con (2).

$$\left.\begin{array}{ll} De\ (3): & \phi'_y = 6x^3 + g'(y) \\ De\ (2): & \phi'_y = 6x^3 + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \ 6x^3 + g'(y) = 6x^3 + 2 \ \Rightarrow \ g'(y) = 2 \ \Rightarrow \ g(y) = 2y + c$$

Reemplazando la función $g(y)$ obtenida en (3) tenemos que:

$$\phi = 6x^3 y + 2y + x^2 + c$$

Algunas observaciones:

● En este procedimiento no estamos obteniendo una única función potencial ϕ, sino una familia de funciones potenciales, que difieren en una constante.

● Una forma sencilla de controlar si se obtuvo correctamente la función potencial es realizar sus derivadas parciales y verificar que coincidan con los datos originales del problema, es decir, que las derivadas parciales de la ϕ obtenida sean las componentes del campo vectorial $\overline{f}$.

El siguiente teorema formaliza el procedimiento realizado anteriormente, y nos da una condición necesaria que permite identificar posibles campos de gradientes.

Teorema: condición necesaria para la existencia de función potencial

Sea el campo vectorial $\overline{f}: D \subset R^n \to R^n \ / \ \overline{f}(X) = (f_1(X), f_2(X), \ldots, f_i(X), \ldots, f_n(X))$, con $\overline{f} \in C^1$ en D, siendo D abierto y conexo

$$\text{Si } \exists \phi: D \subset R^n \to R \ / \ \overline{f} = \nabla\phi, \text{ entonces } \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad \forall i, j = 1, \ldots, n \ (\text{con } i \neq j)$$

Demostración:

Si $\overline{f} = \nabla\phi \ \Rightarrow \ (f_1, f_2, \ldots, f_i, \ldots, f_j, \ldots, f_n) = (\phi'_{x_1}, \phi'_{x_2}, \ldots, \phi'_{x_i}, \ldots, \phi'_{x_j}, \ldots, \phi'_{x_n})$

De la igualdad anterior se deduce que: $\begin{cases} f_i = \phi'_{x_i} \\ f_j = \phi'_{x_j} \end{cases} \quad \forall i, j = 1, \ldots, n \ (\text{con } i \neq j) \qquad (*)$

Derivamos miembro a miembro en (*) :

$f_i = \phi'_{x_i}$ derivamos miembro a miembro respecto de x_j : $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = \phi''_{x_i x_j}$ (1)

$f_j = \phi'_{x_j}$ derivamos miembro a miembro respecto de x_i : $\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i} = \phi''_{x_j x_i}$ (2)

Dado que $\overline{f} \in C^1\, en\, D \wedge \overline{f} = \nabla\phi \ \Rightarrow \ \phi \in C^2\, en\, D$, y por lo tanto se cumple para ϕ el teorema de Schwartz (las derivadas cruzadas son iguales). Por lo tanto:

$\phi''_{x_i x_j} = \phi''_{x_j x_i}$ y aplicando esta igualdad en (1) y (2) resulta $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j} = \dfrac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad \forall i, j = 1, \ldots, n \ (\text{con } i \neq j)$

Es importante aclarar que el teorema anterior indica una **<u>condición necesaria pero no suficiente</u>**. Veamos el siguiente ejemplo (ejercicio 16 del TP8)

16) Sea $\overline{f}: R^2 - \{(0,0)\} \to R^2 \,/\, \overline{f}(x,y) = \left(\dfrac{y}{x^2+y^2}, \dfrac{-x}{x^2+y^2} \right)$. Demuestre que $\overline{f}$ cumple la condición necesaria para la existencia de función potencial. Por otra parte, verifique que su circulación a lo largo de una circunferencia con centro en el origen no resulta nula. En este caso, ¿puede asegurar que $\overline{f}$ admite función potencial en su dominio?

Verificamos la condición necesaria para la existencia de función potencial:

16) $\dfrac{\partial\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)}{\partial y} = \dfrac{x^2+y^2-2y\cdot y}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$

$\dfrac{\partial\left(\frac{-x}{x^2+y^2}\right)}{\partial x} = \dfrac{-x^2-y^2+x\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$

son $=$

Como indica el enunciado, calculamos la circulación del campo $\overline{f}$ a lo largo de la circunferencia con centro en el origen y radio 1.

Sea $C: x^2+y^2=1$, descripta por:

$\overline{g}: [0, 2\pi] \to R^2 \,/\, \overline{g}(t) = (\cos t, \operatorname{sen} t)$

Calculamos $\oint_C \overline{f}\, d\overline{\lambda} = \int_0^{2\pi} \overline{f}(\overline{g}(t))\, d\overline{\lambda} =$

$= \int_0^{2\pi} \left(\dfrac{\operatorname{sen} t}{\cos^2 t + \operatorname{sen}^2 t}, \dfrac{-\cos t}{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t} \right) (-\operatorname{sen} t, \cos t)\, dt =$

$= \int_0^{2\pi} (-\operatorname{sen}^2 t - \cos^2 t)\, dt = -\int_0^{2\pi} dt = -2\pi \neq 0$

En este caso, ¿puede asegurar que $\overline{f}$ admite función potencial en su dominio? Si $\overline{f}$ admitiera función potencial sería un campo conservativo, por lo cual, la integral a lo largo de cualquier curva cerrada suave y simple debería dar 0 (teorema de la independencia de la trayectoria, corolario). Sin embargo, la integral de línea calculada más arriba, que se evaluó sobre una curva cerrada, dio como resultado -2π (distinto de cero). Por ello se puede afirmar que $\overline{f}$ **no admite función potencial** en su dominio.

Podemos observar que, aun cuando $\overline{f}$ cumple la condición necesaria para la existencia de función potencial, no es un campo conservativo. La característica que tiene el campo vectorial $\overline{f}$ es que $Dom\,\overline{f} = R^2 - \{(0,0)\}$, el cual no es un conjunto simplemente conexo. La curva elegida para demostrar que $\overline{f}$ no admite función potencial es una curva que encierra al origen, que es el punto excluido del dominio.

Teorema: condición necesaria y suficiente para la existencia de función potencial

Sea el campo vectorial $\overline{f}: D \subset R^n \to R^n \,/\, \overline{f}(X) = (f_1(X), f_2(X), \ldots, f_i(X), \ldots, f_n(X))$, con $\overline{f} \in C^1$ en D, siendo D abierto y **simplemente conexo**.

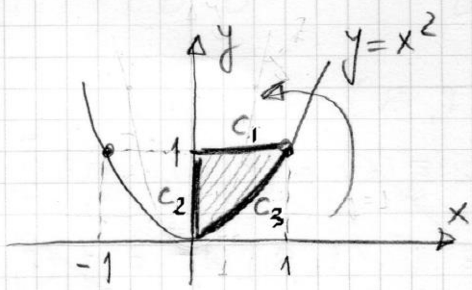
$$\exists \phi: D \subset R^n \to R \;/\; \overline{f} = \nabla\phi \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial f_i}{\partial x_j} = \frac{\partial f_j}{\partial x_i} \quad \forall i, j = 1, \ldots, n \ (\text{con } i \neq j)$$

Resolvemos algunos ejercicios del TP8.

11) Calcule la circulación de $\overline{f}(x,y)=(y,-x)$ a lo largo de la frontera de la región definida por $x^2 \le y \le 1 \;\; \wedge \;\; 0 \le x \le 1$, en sentido positivo. Observe que en el ejemplo la circulación no resulta nula, aún con camino cerrado. ¿Es $\overline{f}$ un campo conservativo?

11) $x^2 \le y \le 1$

$0 \le x \le 1$



$C_1:\ y=1 \quad , \quad 0 \le x \le 1$

$C_2:\ x=0 \quad , \quad 0 \le y \le 1$

$C_2:\ y=x^2 \quad , \quad 0 \le x \le 1$

$C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$

$C_1: \quad \overline{g}_1(t) = (t, 1) \qquad 1 \geq t \geq 0$

$\overline{f}(x,y) = (y, -x)$

$C_2: \quad \overline{g}_2(t) = (0, t) \qquad 1 \geq t \geq 0$

$C_3: \quad \overline{g}_3(t) = (t, t^2) \qquad 0 \leq t \leq 1$

$$\oint_C \overline{f}\, d\overline{s} = \int_{C_1} \overline{f}\, d\overline{s} + \int_{C_2} \overline{f}\, d\overline{s} + \int_{C_3} \overline{f}\, d\overline{s} = \left[\int_1^0 (1,-t)(1,0)\, dt\right] + \left[\int_1^0 (t,0)(0,1)\, dt\right] +$$

$$+\left[\int_0^1 (t^2,-t)(1,2t)\, dt\right] = \int_1^0 1\, dt + \cancel{\int_1^0 0\, dt} + \int_0^1 (t^2-2t^2)\, dt =$$

$$= -1 + \left[-\frac{t^3}{3}\Big|_0^1\right] = -1 + \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{4}{3}$$

Debido a que la integral de $\overline{f}$ a lo largo de una curva cerrada dio **distinto de cero**, podemos afirmar que $\overline{f}$ **no es un campo conservativo**.

Si el resultado de $\oint_C \overline{f}\, d\overline{s} = 0$, no puede ni afirmase ni negarse que $\overline{f}$ sea un campo conservativo. Se requiere un análisis más pormenorizado de la condición necesaria y suficiente para la existencia de función potencial, a fin de evaluar que $\overline{f}$ sea o no conservativo.

13) Calcule el trabajo de $\overline{f}(x,y,z) = 3x\,\breve{i} - xz\,\breve{j} + yz\,\breve{k}$ a lo largo de la curva de ecuación $\overline{X} = (t-1\,,\, t^2,\, 2t)$ con $t \in [1,3]$. ¿Cuáles son los puntos inicial y final del recorrido?, ¿puede asegurar el mismo resultado si manteniendo dichos puntos se utiliza otra curva?

13) pto inicial $\rightarrow \overline{X}(1) = (0, 1, 2)$

pto final $\rightarrow \overline{X}(3) = (2, 9, 6)$

$$\tau_{AB} = \int_1^3 \overline{f}\, d\overline{s} = \int_1^3 \left[3(t-1),\ -(t-1)\,2t,\ t^2\,2t\right] \cdot$$

$$\cdot\,(1,\ 2t,\ 2)\,dt = \int_1^3 \left[3t-3-2t(t-1)2t+4t^3\right] dt =$$

$$= \int_1^3 \left(3t-3-\cancel{4t^3}+4t^2+\cancel{4t^3}\right) dt = \left[\frac{4t^3}{3}+\frac{3t^2}{2}-3t\ \Big|_1^3\right] =$$

$$= \frac{4.27}{3}+\frac{3.9}{2}-9-\frac{4}{3}-\frac{3}{2}+3 = \frac{122}{3}$$

Para asegurar la independencia del camino, verifico si existe fc. potencial:

$$\overline{f}(x,y,z) = (\overbrace{3x}^{P},\ \overbrace{-xz}^{Q},\ \overbrace{yz}^{R})$$

$$¿\phi'_x?\qquad ¿\phi'_y?\qquad ¿\phi'_z?$$

$P(x,y,z) = 3x$

$Q(x,y,z) = -xz$

$R(x,y,z) = yz$

$$\left.\begin{array}{l} P'_y = 0 \\ Q'_x = -z \end{array}\right\} \neq \qquad \begin{array}{l} P'_z = 0 \\ R'_x = 0 \end{array} \qquad \left.\begin{array}{l} Q'_z = -x \\ R'_y = z \end{array}\right\} \neq$$

No existe fc. potencial, por lo tanto el campo no es conservativo (el dominio R^3 es simplemente conexo).

Si $\overline{f}$ no es conservativo, el resultado de la integral **no es** independiente del camino

14)d) Verifique si los siguientes campos admiten función potencial; de existir, determínela.

$$\bar{f}(x,y,z) = (2x+y+1\,,\ x+z\,,\ y+2z)$$

$$\text{d)}\quad \begin{aligned} P &= 2x+y+1 \\ Q &= x+z \\ R &= y+2z \end{aligned} \qquad \bar{f}(x,y,z) = (\underbrace{2x+y+1}_{P},\ \underbrace{x+z}_{Q},\ \underbrace{y+2z}_{R})$$

$$\left.\begin{matrix} P'_y = 1 & P'_z = 0 & Q'_z = 1 \\ Q'_x = 1 & R'_x = 0 & R'_y = 1 \end{matrix}\right\}\ \text{cumple condic necesaria}$$

Dom $\bar{f} = R^3$ simplemente conexo $\rightarrow$ cumpl condic suficiente

Se establece entonces el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} \phi'_x = 2x+y+1 & (1) \\ \phi'_y = x+z & (2) \\ \phi'_z = y+2z & (3) \end{cases}$$

Comenzamos integrando sobre la función (1)

$$\phi = \int (2x+y+1)\,dx = x^2 + xy + x + g(y,z)$$

Utilizamos la ecuación (2) para hallar la función $g(y,z)$

$$\left.\begin{aligned} \phi'_y &= x + g'_y \\ \phi'_y &= x+z \end{aligned}\right\} \Rightarrow g'_y = z \Rightarrow \int dg_y = \int z\,dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow g(y,z) = zy + h(z)$$

$$\phi = x^2 + xy + x + zy + h(z)$$

Utilizamos la ecuación (3) para hallar la función $h(z)$

$$\left.\begin{aligned} \phi'_z &= y + h'(z) \\ \phi'_z &= y+2z \end{aligned}\right\} \rightarrow h'(z) = 2z \Rightarrow \int dh = \int 2z\,dz \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h(z) = z^2 + c$$

$$\boxed{\phi = x^2 + xy + x + zy + z^2 + c}$$

19) Siendo $\overline{f}(x,y,z)=(2xy+z^2\ ,\ x^2\ ,\ 2xz)$, verifique que admite función potencial en R^3 y calcule $\int_C \overline{f}\ d\overline{s}$ a lo largo de la curva C de ecuación $\overline{X}=(2t+e^{t^3-t}, t^2-t\ ,\ 3t)$ con $0\le t\le 1$, orientada en el sentido que impone la parametrización que se indica.

19) $\overline{f}(xyz)=(2x\,y+z^2,\ x^2,\ 2xz)$

$\frac{\partial(2xy+z^2)}{\partial y}=\frac{\partial(x^2)}{\partial x}$

$2x = 2x$ ①

$\frac{\partial(2xy+z^2)}{\partial z}=\frac{\partial(2xz)}{\partial x}$

$2z = 2z$ ②

$\frac{\partial(x^2)}{\partial z}=\frac{\partial(2xz)}{\partial y}$

$0 = 0$ ③

Por ①, ②, ③ cumple condic necesaria

Dom $\overline{f}=R^3$ simplemente conexo ∴ cumple condic suficiente

$$\begin{cases}\phi'_x=2xy+z^2\\ \phi'_y=x^2\\ \phi'_z=2xz\end{cases}$$

$\phi=\int x^2\ dy = x^2y+g(x,z) \Rightarrow$

$\Rightarrow \phi'_x=2xy+g'_x=2xy+z^2 \Rightarrow g'_x=z^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow g(x,z)=z^2x+h(z)$

$\phi(xyz)=x^2y+z^2x+h(z) \Rightarrow \phi'_z=2xz+h'(z)=2xz \Rightarrow$

$\Rightarrow h'(z)=0 \Rightarrow h(z)=C$

$\phi(x,y,z)=x^2y+z^2x+C$

$\overline{X}(0)=(1,0,0)$

$\overline{X}(1)=(2+1,\ 0,\ 3)=(3,0,3)$

$\int_C \overline{f}\,d\overline{s}=\phi(3,0,3)-\phi(1\,0\,0)=[3^2.0+3^2.3+\cancel{C}]-$

$-[1^2.0+0^2.1+\cancel{C}]=27$

OPERADOR NABLA (∇)

El operador ∇ ya lo hemos utilizado para notación del gradiente de un campo escalar. Considerado como un operador, Nabla se define como el operador de derivadas parciales:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

Si consideramos el operador Nabla de tres componentes resulta:

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

A partir del uso de este operador pueden definirse la divergencia y el rotor de un campo vectorial.

Divergencia de un campo vectorial

Sea $\overline{f} : D \subset R^n \to R^n \,/\, \overline{f}(X) = (f_1(X), f_2(X), \dots, f_i(X), \dots, f_n(X))$, con $\overline{f} \in C^1$ en D. Se define la divergencia del campo $\overline{f}$ como:

$$div\ \overline{f} = \nabla . \overline{f} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right) . (f_1, f_2, \dots, f_i, \dots, f_n) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_i} + \dots + \frac{\partial f_n}{\partial x_n}$$

Si un campo vectorial tiene **divergencia nula** se lo denomina **solenoidal**.

Una interpretación física de la divergencia puede hacerse considerando a $\overline{f}$ como el campo de velocidades de un gas o un fluido. En ese caso, la divergencia de $\overline{f}$ representa la tasa de expansión de ese gas o fluido por unidad de volumen. Si div $\overline{f} > 0$ significa que el gas se está expandiendo; si div $\overline{f} < 0$ significa que el gas se comprime.

Rotor de un campo vectorial

Sea $\overline{f} : D \subset R^3 \to R^3 \,/\, \overline{f}(X) = (f_1(X), f_2(X), f_3(X))$, con $\overline{f} \in C^1$ en D. Se define el rotor del campo $\overline{f}$ como:

$$rot\ \overline{f} = \nabla \times \overline{f} = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} = \breve{i} \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z} \right) - \breve{j} \left(\frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial z} \right) + \breve{k} \left(\frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)$$

$$rot\ \overline{f} = \nabla \times \overline{f} = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y} - \frac{\partial f_2}{\partial z}, \frac{\partial f_1}{\partial z} - \frac{\partial f_3}{\partial x}, \frac{\partial f_2}{\partial x} - \frac{\partial f_1}{\partial y} \right)$$

Si un campo vectorial tiene **rotor nulo** se lo denomina **irrotacional**.

Si la función $\overline{f}$ representa el campo de velocidades de un fluido, cuando dicho campo es irrotacional significa que el fluido no presenta remolinos.

Aplicaciones reiteradas del operador Nabla

- **Divergencia del gradiente** de un campo escalar:

  Sea el campo escalar $f: D \subset R^3 \to R$, con $f \in C^2$ en D. Se define al Laplaciano del campo f como la divergencia del gradiente de f:

$$\nabla^2 f = \nabla . \nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) . (f'_x, f'_y, f'_z) = f''_{xx} + f''_{yy} + f''_{zz}$$

- **Rotor del gradiente** de un campo escalar

  Sea el campo escalar $f: D \subset R^3 \to R$, con $f \in C^2$ en D. Calculamos el rotor de gradiente de un campo escalar

$$rot(\nabla f) = \nabla \times \nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (f'_x, f'_y, f'_z) = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f'_x & f'_y & f'_z \end{vmatrix} = \breve{i}(f''_{zy} - f''_{yz}) - \breve{j}(f''_{zx} - f''_{xz}) + \breve{k}(f''_{yx} - f''_{xy}) = \bar{0}$$

El rotor de un campo escalar de clase C^2 es el vector nulo, ya que sus derivadas cruzadas son iguales.

Otras formas de enunciar la condición necesaria para la existencia de función potencial

La condición necesaria para la existencia de función potencial puede expresarse de diferentes formas, además de la ya enunciada.

Una opción es utilizar la demostración anterior, ya que si calculamos el rotor de un campo vectorial, el resultado es el vector nulo. En este sentido, el teorema se indica de la siguiente manera:

- Sea el campo vectorial $\bar{f}: D \subset R^3 \to R^3 / \bar{f}(X) = (f_1(X), f_2(X), f_3(X))$, con $\bar{f} \in C^1$ en D, siendo D abierto y conexo

$$\text{Si } \exists \phi : D \subset R^n \to R \ / \ \bar{f} = \nabla \phi \text{, entonces } rot\ \bar{f} = \bar{0}$$

Otra posibilidad es analizar la matriz jacobiana del campo vectorial $\bar{f} \in C^1$ en D. Si $\bar{f} = \nabla \phi = (\phi'_x, \phi'_y, \phi'_z)$,

su matriz jacobiana será: $D\bar{f} = \begin{pmatrix} \phi''_{xx} & \phi''_{xy} & \phi''_{xz} \\ \phi''_{yx} & \phi''_{yy} & \phi''_{yz} \\ \phi''_{zx} & \phi''_{zy} & \phi''_{zz} \end{pmatrix}$. Esta matriz es una matriz simétrica, ya que siendo $\bar{f} \in C^1$ en D, resulta $\phi \in C^2$, y por lo tanto sus derivadas cruzadas son iguales. Utilizando esta propiedad, la condición necesaria para la existencia de función potencial puede enunciarse de la siguiente manera:

- Sea el campo vectorial $\bar{f}: D \subset R^3 \to R^3 / \bar{f}(X) = (f_1(X), f_2(X), f_3(X))$, con $\bar{f} \in C^1$ en D, siendo D abierto y conexo

$$\text{Si } \exists \phi : D \subset R^n \to R \ / \ \bar{f} = \nabla \phi \text{, entonces } D\bar{f} \text{ es una matriz simétrica}$$