# LÍMITE Y CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES.

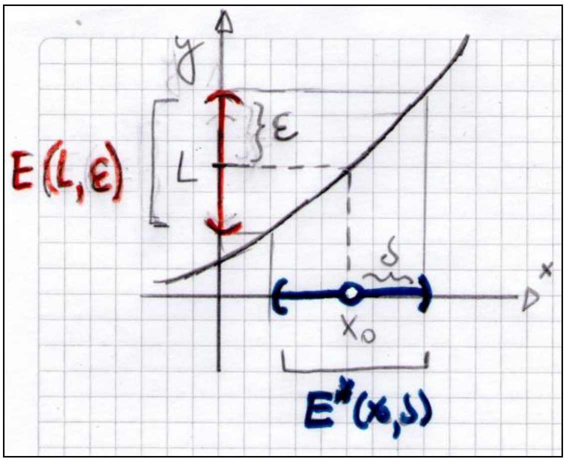
## LÍMITE DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Límite de funciones escalares: repaso

Repasemos la definición de límite para funciones escalares de una variable.

Sea $f: Dom\ f \subset R \to R$ , y $x_0$ punto de acumulación de *Dom f*. Se define:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \,/\, \forall x : x \in Dom\ f \cap \underbrace{E^*(x_0,\delta)}_{0<|x-x_0|<\delta} \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon$$




Intuitivamente podemos decir que cuando los valores de $x$ se acercan a $x_0$, los valores de la función se aproximan a L.

La definición anterior se generaliza para funciones de varias variables.

### Límite de funciones de varias variables

Sea $\overline{f}: Dom\ \overline{f} \subset R^n \to R^m$ , y $\overline{X_0}$ punto de acumulación de $Dom\ \overline{f}$ . Se define:

$$\lim_{\overline{X}\to\overline{X_0}} \overline{f}(\overline{X}) = \overline{L} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \,/\, \forall \overline{X} : \overline{X} \in Dom\ \overline{f} \cap E^*(\overline{X_0},\delta) \Rightarrow \left\| \overline{f}(\overline{X}) - \overline{L} \right\| < \varepsilon$$

Realizamos la interpretación geométrica para campos escalares de $R^2$ en R, para los cuales podemos visualizar la superficie gráfica. En este caso, los elementos del dominio son vectores de $R^2$, y las imágenes son números reales. Particularizamos la definición de límite para este tipo de campos:

Sea $f: Dom\ f \subset R^2 \to R$ , y $(x_0, y_0)$ punto de acumulación de $Dom\ \overline{f}$ . Se define:

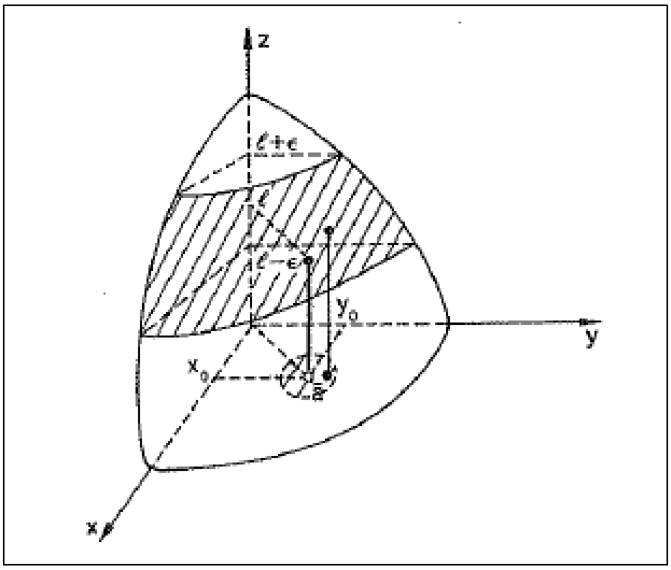
$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \,/\, \forall (x,y) : (x,y) \in Dom\ f \cap E^*((x_0,y_0),\delta) \Rightarrow | f(x,y) - L | < \varepsilon$$

Recordemos que una esfera abierta reducida en $R^2$ con centro en $(x_0, y_0)$ y radio δ son los puntos de un círculo con centro en $(x_0, y_0)$ y radio δ, sin la circunferencia borde y sin el punto del centro (el punto $(x_0, y_0)$). En este caso entonces, si los puntos pertenecen a $E^*((x_0,y_0),\delta)$ , se verifica:

$$| f(x,y) - L | < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < f(x,y) - L < \varepsilon \Rightarrow L - \varepsilon < f(x,y) < L + \varepsilon$$

Recordemos que $z = f(x, y)$ es la ecuación de la superficie gráfica de *f*, y las ecuaciones $z = L - \varepsilon$ y $z = L + \varepsilon$ son planos paralelos al plano (xy) que cortan al eje z en $L - \varepsilon$ y $L + \varepsilon$ respectivamente.

Por lo tanto, que la función $f$ tenga límite *L* en $(x_0, y_0)$ significa que la porción de superficie gráfica correspondiente a los valores que toma $f$ en los puntos de la esfera abierta reducida considerada, se encuentra ubicada entre los planos de ecuaciones $z = L - \varepsilon$ y $z = L + \varepsilon$ , como se muestra en la figura.




## Propiedades del límite

Las propiedades de límite que se enunciarán generalizan propiedades conocidas para límites de funciones escalares, demostradas en AMI.

- Sea $\overline{f} : Dom\ \overline{f} \subset R^n \to R^m$ , y $\overline{X_0}$ punto de acumulación de $Dom\ \overline{f}$. Si existe $\lim_{\overline{X} \to \overline{X_0}} \overline{f}(\overline{X}) = \overline{L}$, entonces **el límite** $\overline{L}$ **es único**.

Sea $\overline{f} : Dom\ \overline{f} \subset R^n \to R^m$ , y $\overline{X_0}$ punto de acumulación de $Dom\ \overline{f}$. Si $\lim_{\overline{X} \to \overline{X_0}} \overline{f}(\overline{X}) = \overline{L}$, entonces:

- $\lim_{\overline{X} \to \overline{X_0}} \| \overline{f}(\overline{X}) \| = \| \overline{L} \|$
- $\lim_{\overline{X} \to \overline{X_0}} k.\overline{f}(\overline{X}) = k.\overline{L}$ (siendo $k \in R$)

Sea $\overline{f} : Dom\ \overline{f} \subset R^n \to R^m$ , sea $\overline{g} : Dom\ \overline{g} \subset R^n \to R^m$ y $\overline{X_0}$ punto de acumulación de $Dom\ \overline{f} \cap Dom\ \overline{g}$. Si $\lim_{\overline{X} \to \overline{X_0}} \overline{f}(\overline{X}) = \overline{L}$ y $\lim_{\overline{X} \to \overline{X_0}} \overline{g}(\overline{X}) = \overline{M}$ entonces:

- $\lim_{\overline{X} \to \overline{X_0}} \overline{f}(\overline{X}) + \overline{g}(\overline{X}) = \overline{L} + \overline{M}$
- $\lim_{\overline{X} \to \overline{X_0}} \overline{f}(\overline{X}) - \overline{g}(\overline{X}) = \overline{L} - \overline{M}$
- $\lim_{\overline{X} \to \overline{X_0}} \overline{f}(\overline{X}) . \overline{g}(\overline{X}) = \overline{L} . \overline{M}$ (producto escalar)

- $\lim_{\overline{X}\to\overline{X_0}} \ \overline{f}(\overline{X})\times\overline{g}(\overline{X})=\overline{L}\times\overline{M}$ (producto vectorial)

Sea $f: Dom\ f \subset R^n \to R$, sea $g: Dom\ g \subset R^n \to R$ y $\overline{X_0}$ punto de acumulación de $Dom\ f \cap Dom\ g$. Si $\lim_{\overline{X}\to\overline{X_0}} f(\overline{X})=L$ y $\lim_{\overline{X}\to\overline{X_0}} g(\overline{X})=M$, con $M \neq 0$ entonces:

- $\lim_{\overline{X}\to\overline{X_0}} \dfrac{f(\overline{X})}{g(\overline{X})}=\dfrac{L}{M}$

## Teorema (el límite se calcula componente a componente)

Sea $\overline{f}: Dom\ \overline{f} \subset R^n \to R^m \ / \ \overline{f}(\overline{X})=(f_1(\overline{X}), f_2(\overline{X}), \ldots, f_i(\overline{X}), \ldots, f_m(\overline{X}))$, y $\overline{X_0}$ punto de acumulación de $Dom\ \overline{f}$. Entonces:

$$\exists \lim_{\overline{X}\to\overline{X_0}} \overline{f}(\overline{X})=\overline{L}=(L_1,L_2,\ldots,L_i,\ldots,L_m) \Leftrightarrow \exists \lim_{\overline{X}\to\overline{X_0}} f_i(\overline{X})=L_i \quad (\forall i: 1\le i\le m)$$

Veamos un ejemplo de aplicación del teorema anterior, resolviendo el ejercicio 3) del TP 3:

TP 3 – Ej 3)

$$\lim_{u\to 0}\left(\frac{1-\cos u}{u^2},\ 1+2u,\ \frac{\operatorname{sen}(u^2)}{u^3+u^2}\right)=$$

$$=\left(\lim_{u\to 0}\frac{1-\cos u}{u^2},\ \lim_{u\to 0} 1+2u,\ \lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen}(u^2)}{u^3+u^2}\right)=$$

$$=\left(\underbrace{\lim_{u\to 0}\frac{\operatorname{sen} u}{2u}}_{\text{l'Hop}},\ 1,\ \underbrace{\lim_{u\to 0}\frac{2u\cos(u^2)}{3u^2+2u}}_{\text{l'Hop}}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{2},\ 1,\ \lim_{u\to 0}\frac{2\cancel{u}\cos(u^2)}{\cancel{u}(3u+2)}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{2}{2}\right)=\left(\frac{1}{2},1,1\right)$$

## Aplicación de propiedades conocidas al cálculo del límite

Para evaluar ciertos límites, podemos aplicar algunas propiedades del límite de funciones escalares, que generalizamos para campos escalares:

- Límite trigonométrico fundamental

Ejemplo: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin(x^4+2y^2)}{x^4+2y^2}=1$

- Límite que tiende a $e$

Ejemplo: $\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(1+xy\right)^{\frac{1}{xy}}=e$

- Límite de un infinitésimo por una función acotada

Ejemplo: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} x^2 y \cos\left(\frac{1}{2xy^3}\right)=0$

## CONTINUIDAD DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Continuidad de funciones escalares: repaso

Repasemos la definición de continuidad para funciones escalares de una variable.

Sea $f: Dom\ f \subset R \to R$ , y $x_0$ punto de acumulación de *Dom f*. Si se cumple que:

1) $\exists\, f(x_0)$
2) $\exists \lim_{x\to x_0} f(x)=L$
3) $L=f(x_0)$

Entonces se dice que la función $f$ es continua en $x_0$.

Esta definición se generaliza para funciones de varias variables.

### Continuidad de funciones de varias variables

Sea $\overline{f}: Dom\ \overline{f} \subset R^n \to R^m$ , y $\overline{X_0}$ punto de acumulación de *Dom* $\overline{f}$ . Si se cumple que:

1) $\exists\, \overline{f}(\overline{X_0})$
2) $\exists \lim_{\overline{X}\to\overline{X}_0} \overline{f}(\overline{X})=\overline{L}$
3) $\overline{L}=\overline{f}(\overline{X_0})$

Entonces se dice que la función $\overline{f}$ es continua en $\overline{X_0}$ .

**Continuidad en conjunto**: se dice que una función $\overline{f}$ es continua en un determinado conjunto, si es continua en cada uno de los puntos que pertenecen a dicho conjunto.

Recordemos la clasificación de discontinuidades:

- Si no existe el límite de la función en el punto $\overline{X}_0$, se dice que la discontinuidad es ***esencial***.

  $\nexists \lim_{\overline{X}\to\overline{X}_0} \overline{f}(\overline{X})$, es decir $\nexists \overline{L}$ → discontinuidad esencial en $\overline{X}_0$

- Si existe el límite de la función en el punto $\overline{X}_0$, pero dicho límite es distinto al valor de la función en el punto; o no existe imagen para el punto $\overline{X}_0$, entonces se dice que la discontinuidad es ***evitable***.

  $$\left.\begin{array}{l} \exists \lim_{\overline{X}\to\overline{X}_0} \overline{f}(\overline{X}) = \overline{L} \ \wedge \ \overline{f}(\overline{X}_0) \neq \overline{L} \\ \exists \lim_{\overline{X}\to\overline{X}_0} \overline{f}(\overline{X}) = \overline{L} \ \wedge \ \nexists \overline{f}(\overline{X}_0) \end{array}\right\} \longrightarrow \text{discontinuidad evitable en } \overline{X}_0$$

En el caso de las discontinuidades evitables, puede redefinirse la función para que resulte continua, asignándole a $\overline{f}(\overline{X}_0)$ el valor del límite.

## Teorema (la continuidad se evalúa componente a componente)

Sea $\overline{f} : Dom\ \overline{f} \subset R^n \to R^m \ / \ \overline{f}(\overline{X}) = (f_1(\overline{X}),\ f_2(\overline{X}), \ldots\ldots, f_i(\overline{X}), \ldots\ldots, f_m(\overline{X}))$, y $\overline{X}_0$ punto de acumulación de $Dom\ \overline{f}$. Entonces:

$$\overline{f} \text{ es continua en } \overline{X}_0 \Leftrightarrow f_i \text{ es continua en } \overline{X}_0 \ (\forall i : 1 \leq i \leq m)$$

## Curva de $R^n$: definición

Sea la función vectorial $\overline{f} : D \subset R \to R^n$. Si se cumple que:

1) D es un conjunto conexo
2) $\overline{f}$ es continua en D

Entonces el conjunto $C = \operatorname{Im} \overline{f}$ es una curva de $R^n$.

## Superficie de $R^3$: definición

Sea el campo vectorial $\overline{f} : D \subset R^2 \to R^3$. Si se cumple que:

1) D es un conjunto conexo
2) $\overline{f}$ es continua en D

Entonces el conjunto $S = \operatorname{Im} \overline{f}$ es una superficie de $R^3$.

Analicemos nuevamente el ejemplo visto en la unidad “Campos vectoriales”, de la función:

$$\overline{f} : [0, 2\pi] \times [-2, 3] \subset R^2 \to R^3 \ / \ \overline{f}(u,v) = (\cos u, \sin u, v)$$

Verificamos si se cumplen las condiciones para que $\overline{f}$ defina una superficie en $R^3$.

1) El $Dom\ \overline{f}$ = $[0, 2\pi] \times [-2, 3]$ es un conjunto conexo (se trata de un rectángulo incluido en $R^2$)

2) $\overline{f}(u,v)=(\cos u,\sin u,v)$ es un campo vectorial continuo, ya que cada una de sus componentes son funciones continuas (funciones seno, coseno y polinómicas)

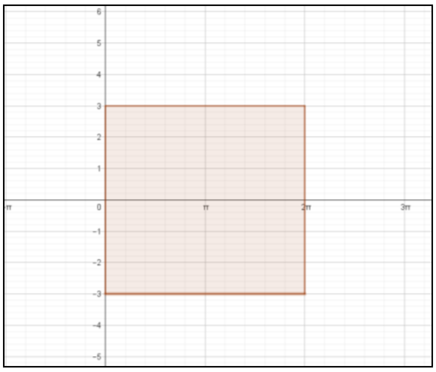
Como se cumplen las dos condiciones requeridas, el conjunto $S=\operatorname{Im}\overline{f}$ es una superficie de $R^3$.

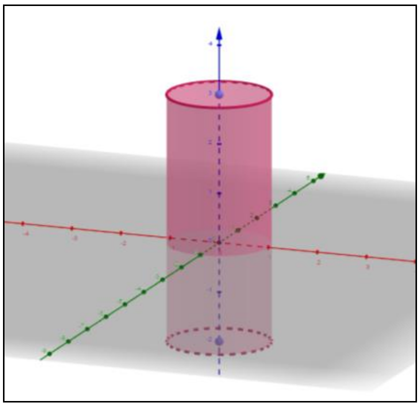
Para identificar qué subconjunto de $R^3$ es el conjunto imagen, eliminamos los parámetros *u* y *v*, para hallar las ecuaciones cartesianas que lo describen.

$$\begin{cases} x=\cos u \\ y=\sin u \\ z=v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=\cos^2 u+\sin^2 u \\ z=v \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ -2\le z\le 3 \end{cases}$$

La primera de las ecuaciones cartesianas corresponde a un cilindro circular recto, centrado en el origen, de radio 1; y la segunda ecuación indica que esta superficie no presenta completa, sino que está limitada entre los planos *z* = -2 y *z* = 3

Graficamos:





Dom $\overline{f}$ Im $\overline{f}$

En este caso podemos pensar que el campo vectorial $\overline{f}$ “enrolla” la región del plano Dom $\overline{f}$ para producir la superficie. Intuitivamente se puede considerar que los campos vectoriales que describen superficies a través de su conjunto imagen, “reacomodan” regiones planas en el espacio para transformarlas en dichas superficies.

Para analizar cómo se “enrolla” el rectángulo para transformarse en cilindro, podemos tomar un segmento paralelo a cada uno de los ejes coordenados, y analizar de qué manera se transforman sus puntos mediante el campo $\overline{f}$. Un segmento incluido en Dom $\overline{f}$ que sea paralelo al eje v tiene ecuación $u=u_0$ (siendo $0\le u_0\le 2\pi$), y un segmento paralelo al eje u tiene ecuación $v = v_0$ (siendo $-2\le v_0\le 3$). Analizamos en forma vectorial y en forma cartesiana.

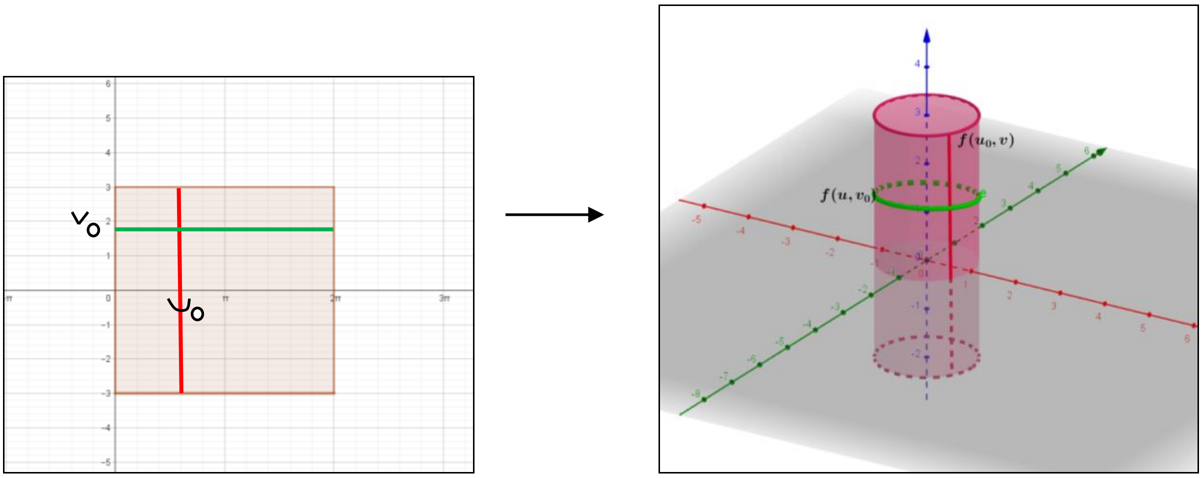
$$u=u_0 \to \overline{f}(u_0,v)=(\cos u_0,\sin u_0,v) \Rightarrow \begin{cases} x=\cos u_0 \\ y=\sin u_0 \\ z=v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\cos u_0 \\ y=\sin u_0 \\ -2\le z\le 3 \end{cases}$$

Segmento vertical sobre la superficie del cilindro (en rojo)

$$v = v_0 \rightarrow \overline{f}(u, v_0) = (\cos u, \sin u, v_0) \Rightarrow \begin{cases} x = \cos u \\ y = \sin u \\ z = v_0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ z = v_0 \end{cases}$$

Circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ contenida en el plano z = $v_0$ (en verde)

Veamos la representación gráfica:




Las curvas obtenidas mediante $\overline{f}(u, v_0)$ y $\overline{f}(u_0, v)$ son curvas que yacen sobre la superficie imagen del campo $\overline{f}$ (en este ejemplo, una circunferencia y un segmento), y se denominan líneas coordenadas.

## Línea coordenada: definición

Sea el campo vectorial $\overline{f}: D \subset R^2 \rightarrow R^3$ asociado a una superficie $S \subset R^3$, con $(u_0, v_0) \in Dom\ \overline{f}$

Se denomina **línea coordenada *u* = *u*₀** a la curva imagen de $\overline{f}(u_0, v)$

Se denomina **línea coordenada *v* = *v*₀** a la curva imagen de $\overline{f}(u, v_0)$

## Análisis de las superficies gráficas de campos escalares de R$^2$ en R

Cuando analizamos las asociaciones geométricas de los campos escalares, vimos que, en general, las gráficas de campos de R$^2$ en R son superficies en el espacio. Como ya hemos definido formalmente a qué se denomina superficie, podemos entonces analizar en qué casos la gráfica de un campo escalar de R$^2$ en R será efectivamente una superficie bien definida.

Si tenemos un campo escalar $f: Dom\ f \subset R^2 \rightarrow R$, su gráfica tendrá ecuación $z = f(x, y)$. Para saber si esta gráfica es formalmente una superficie, habrá que encontrar un campo vectorial definido de un subconjunto de R$^2$ en R$^3$ que nos dé la forma vectorial o paramétrica de la superficie. La función más sencilla será:

$$\overline{g}(x, y) = (x, y, f(x, y))$$

Debemos analizar si esta función cumple con las condiciones para definir una superficie asociada a su conjunto imagen (que su dominio sea conexo y que el campo vectorial sea continuo en dicho dominio).

***Dominio:*** evaluando el $Dom\ \bar{g}$, vemos que la primer y segunda componente del campo no tienen restricciones, y por lo tanto, las restricciones de $\bar{g}$ serán las mismas de su tercera componente, $f(x,y)$. Por lo tanto, $Dom\ \bar{g} = Dom\ f$

***Continuidad:*** para analizar la continuidad de $\bar{g}$ en su dominio, debemos analizar la continuidad de cada una de sus componentes. En este sentido, la primera y la segunda componentes son continuas por ser funciones polinómicas. Por lo tanto, la continuidad de $\bar{g}$ está vinculada a la continuidad de su tercera componente $f(x,y)$. Si $f(x,y)$ es continua en *Dom f*, entonces $\bar{g}$ será continua en $Dom\ \bar{g}$.

En resumen: dado el campo escalar $f : Dom\ f \subset R^2 \to R$, su gráfica de ecuación $z = f(x,y)$ es una superficie si se cumple que:

1) $Dom\, f$ es un conjunto conexo
2) $f$ es un campo escalar continuo en su dominio

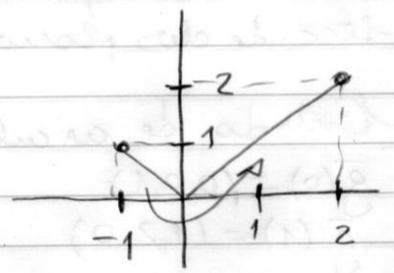
Resolvemos algunos ejercicios del TP 3

4) Represente el conjunto imagen de las siguientes funciones vectoriales de una variable e indique en qué casos dicho conjunto es una curva

4)b) $\bar{g} : [-1,2] \subset R \to R^2 \,/\, \bar{g}(u) = (u, |u|)$

4) b) $\bar{g}(u) = (u, |u|)$

$\begin{cases} x = u \\ y = |u| \end{cases} \Rightarrow y = |x|$ con $-1 \le x \le 2$




Analizo sentido de recorrido

Pto inicial $\to \bar{g}(-1) = (-1,1)$

Pto final $\to \bar{g}(2) = (2,2)$

1) Dom $\bar{g} = [-1,2]$ conj conexo

2) $\bar{g}$ es continua en $[-1,2]$ porque tiene componentes continuas (funciones polinómicas y función módulo)

De 1) y 2) : Im $\bar{g}$ es una curva

4)d) $\bar{g}: R \to R^3 \,/\, \bar{g}(t) = (t, 2t, 1-t)$

4) d) $\bar{g}: R \to R^3 \,/\, \bar{g}(t) = (t, 2t, 1-t)$

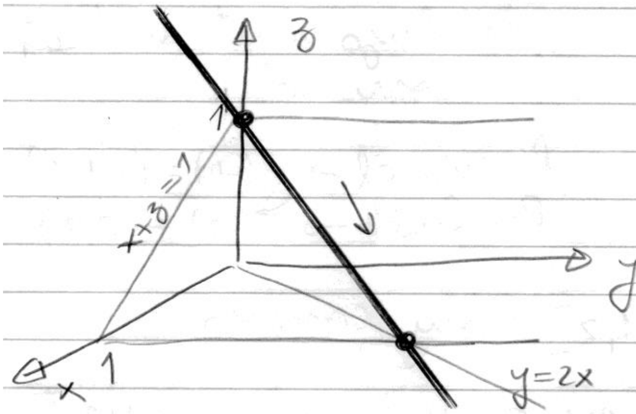
$$\begin{cases} x = t \\ y = 2t \\ z = 1-t \end{cases} \to \begin{rcases} y = 2x \\ z = 1-x \end{rcases} \Rightarrow \begin{rcases} y = 2x \\ x+z = 1 \end{rcases}$$

es una recta, intersecc de dos planos

Sentido de circular

$\bar{g}(0) = (0,0,1)$

$\bar{g}(1) = (1,2,0)$




1) Dom $\bar{g} = R$ conj conexo

2) $\bar{g}$ es continua en R porque todas sus componentes son continuas (polinómicas)

De 1) y 2) : Im $\bar{g}$ es una curva

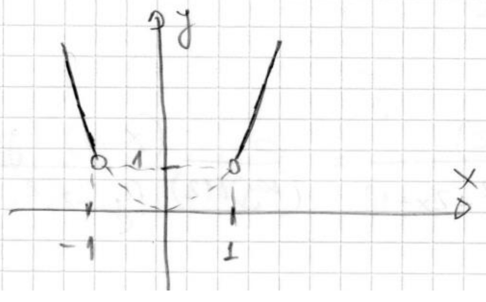
4)e) $\bar{g}: D \subset R \to R^2 \,/\, \bar{g}(x) = (x, x^2) \quad con\ D = \{x \in R / |x| > 1\}$

$g: D \subset R \to R^2 / \bar{g}(x) = (x, x^2) \quad D = \{x \in R / |x| > 1\}$

4) e) $y = x^2$ (ec. cartesiana)

$D = (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ no conexo

No es curva



4)f) $\overline{g}(u) = \begin{cases} (u, u^2+1) & si\ u \geq 0 \\ (u, u^2) & si\ u < 0 \end{cases}$

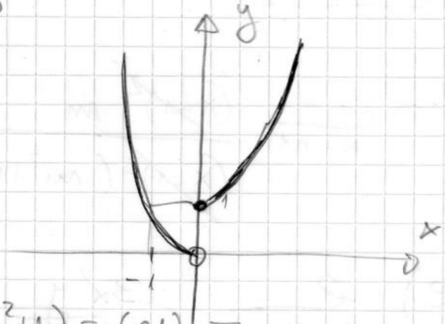
4f) $\overline{g}(u) = \begin{cases} (u, u^2+1) & si\ u \geq 0 & (A) \\ (u, u^2) & si\ u < 0 & (B) \end{cases}$

(A) $y = x^2 + 1$ con $x \geq 0$

(B) $y = x^2$ con $x < 0$

No continua en $u = 0$

↓ No es curva

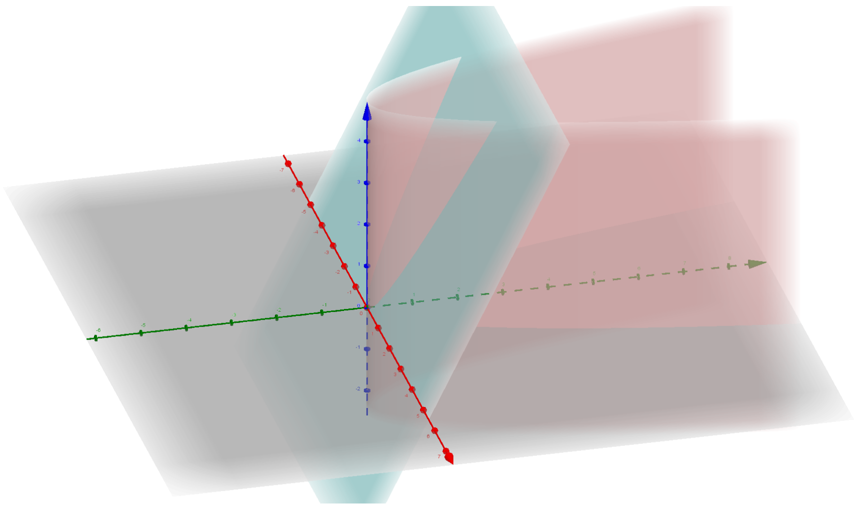



$\lim\limits_{u \to 0^+} \overline{g}(u) = \lim\limits_{u \to 0^+} (u, u^2+1) = (0,1)$

$\lim\limits_{u \to 0^-} \overline{g}(u) = \lim\limits_{u \to 0^-} (u, u^2) = (0,0)$

$\neq$ ∄ lím

Gráfica curva ejercicio 9)



9) Sea C la curva de ecuación $\overline{X}(t)=(t,t^2,2t^2)$ con $t\in R$

a) Exprese C como intersección de dos superficies

b) Demuestre que C es una curva plana

c) Dada la superficie $\overline{X}(u,v)=(u+v\,,u-v\,,u^2+u+v^2-v+2uv)$ con $(u,v)\in R^2$, demuestre que C está incluida en ella.

TP 3

9) a) $\overline{X}=(t,t^2,2t^2)$ $t\in R$

$$\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \\ z=2t^2 \end{cases} \rightarrow y=x^2 \qquad z=2y$$

$$\boxed{\begin{cases} y=x^2 \\ z=2y \end{cases}}$$

b) C es plana ya que todos sus puntos pertenecen a un plano (el plano $z=2y$)

c) La curva C estará incluida en la sup S si todos los puntos de la curva verifican la ecuación de la superficie

Hallamos la ecuación cartesiana de S dada por $\overline{X}=(u+v,\ u-v,\ u^2+u+v^2-v+2uv)$

$$\begin{cases} x=u+v \\ y=u-v \\ z=u^2+u+v^2-v+2uv=(u^2+v^2+2uv)+(u-v) \end{cases}$$

$\Rightarrow z=(u+v)^2+(u-v)$

Luego: $z=x^2+y$ ecuac cartesiana de la sup

Evaluamos si los ptos de la curva verifican la ecuación. En C:
$$\begin{cases} x=t \\ y=t^2 \\ z=2t^2 \end{cases}$$

$$z=x^2+y \rightarrow \underbrace{2t^2}_{z}=\underbrace{t^2}_{x^2}+\underbrace{t^2}_{y} \quad \text{Verifica}$$

Por lo tanto $C\subset S$