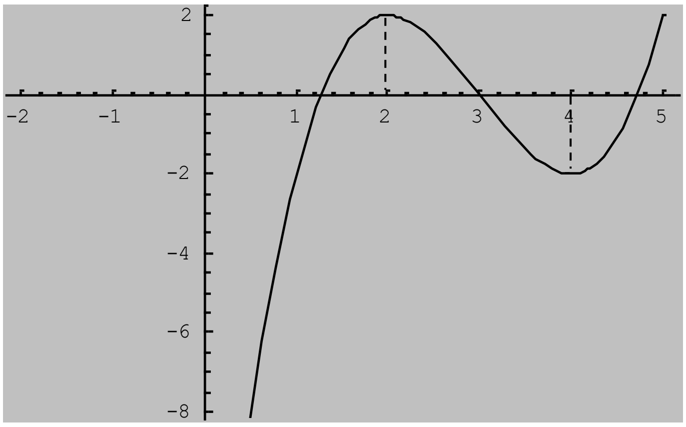
POLINOMIO DE TAYLOR – EXTREMOS

EXTREMOS LIBRES DE UN CAMPO ESCALAR

Repaso: funciones escalares (AMI)

Repasamos la definición de extremos **relativos o locales** para funciones escalares.

Veamos la siguiente gráfica de una función $f: R \to R$

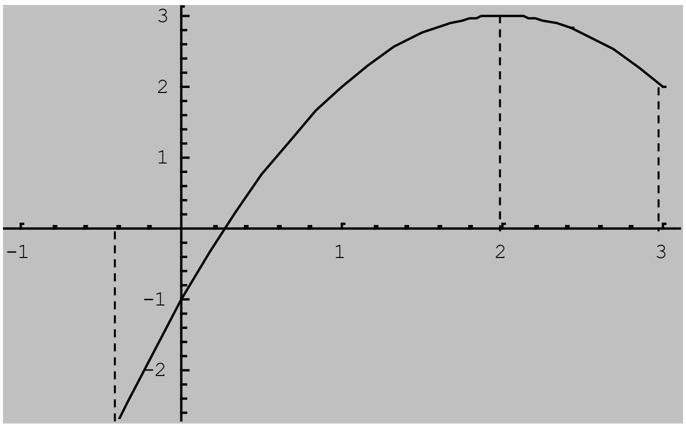


En este ejemplo resulta $f(2)$ un máximo relativo o local, y $f(4)$ un mínimo relativo o local. Para esta función no hay máximos ni mínimos absolutos.
Dada una función escalar $f: D \subset R \to R$, siendo $x_0 \in D$, se define:

- $f(x_0)$ es un máximo relativo o local de f en D si y solo si $\exists\ E(x_0) \subset D \,/\, \forall x \in E(x_0)$ se cumple que $f(x) < f(x_0)$ (siendo $x \neq x_0$)
- $f(x_0)$ es un mínimo relativo o local de f en D si y solo si $\exists\ E(x_0) \subset D \,/\, \forall x \in E(x_0)$ se cumple que $f(x) > f(x_0)$ (siendo $x \neq x_0$)

En este caso, en el cual resulta $f(x) < f(x_0)$ ó $f(x) > f(x_0)$, se dice que los extremos están definidos en **sentido estricto**.
En caso de definirlos mediante las desigualdades $f(x) \leq f(x_0)$ ó $f(x) \geq f(x_0)$, se dice que los extremos están definidos en **sentido amplio**.

Veamos ahora la siguiente gráfica, para una función $f: [-0{,}2\ ,\ 3] \to R$

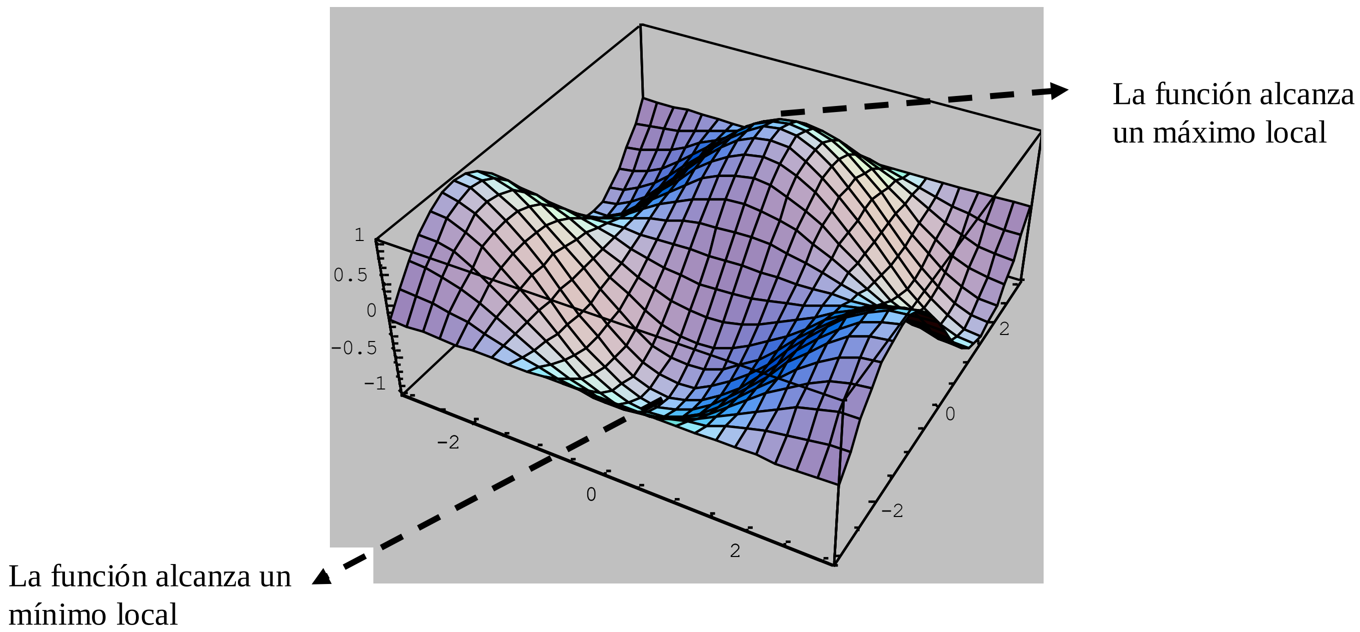


En este ejemplo resulta $f(2)$ máximo local y absoluto, y $f(-0{,}2)$ mínimo absoluto, sin ser mínimo local.
Dada una función escalar $f: D \subset R \to R$, siendo $x_0 \in D$, se define:

- $f(x_0)$ es un máximo absoluto de f en D si y solo si $\forall x \in D$ se cumple que $f(x) < f(x_0)$ (siendo $x \neq x_0$)
- $f(x_0)$ es un mínimo absoluto de f en D si y solo si $\forall x \in D$ se cumple que $f(x) > f(x_0)$ (siendo $x \neq x_0$)

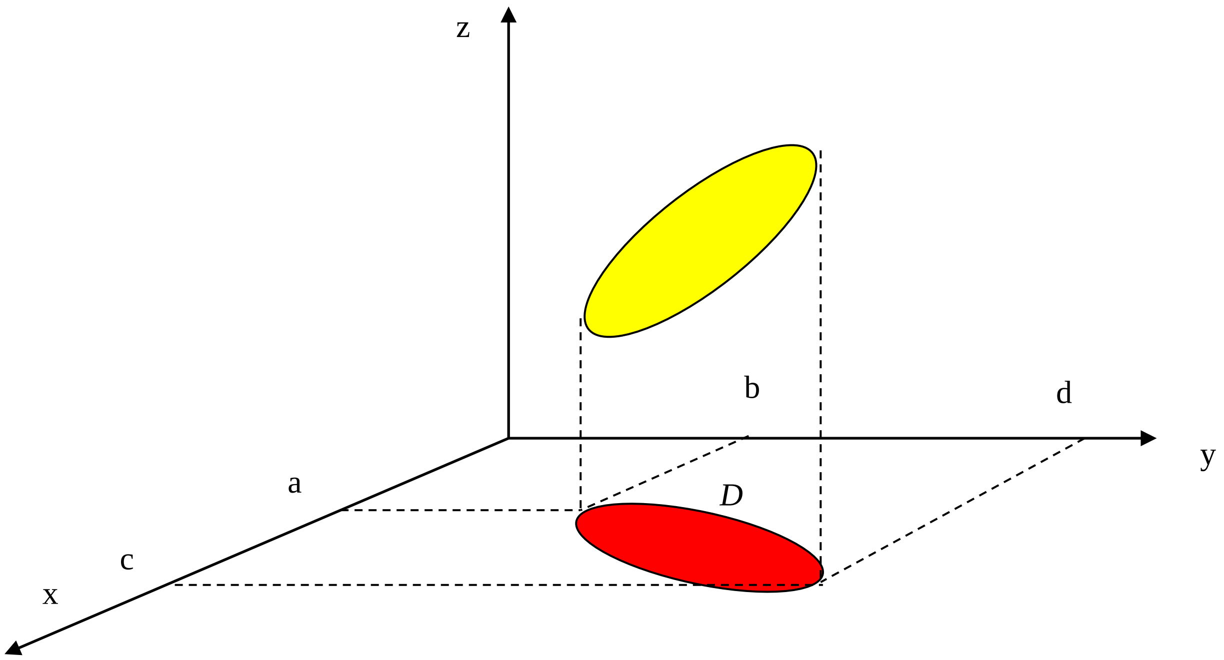
En este caso, en el cual resulta $f(x) < f(x_0)$ ó $f(x) > f(x_0)$, se dice que los extremos están definidos en **sentido estricto**.
En caso de definirlos mediante las desigualdades $f(x) \leq f(x_0)$ ó $f(x) \geq f(x_0)$, se dice que los extremos están definidos en **sentido amplio**.

Consideramos ahora un ejemplo de extremos para campos escalares.
Veamos la siguiente gráfica de una función $f: R^2 \to R$



En este ejemplo la función alcanza al menos un máximo relativo o local y un mínimo relativo o local. Estos extremos podrían ser máximos o mínimos absolutos si la función alcanza su mayor o menor valor en dichos puntos.

Veamos ahora la siguiente gráfica, para un campo escalar $f: D \subset R^2 \to R$



En este ejemplo resulta $f(a,b)$ un mínimo absoluto y $f(c,d)$ un máximo absoluto. En ambos casos no se pueden evaluar extremos relativos en (a,b) y (c,d) ya que en ninguno de los dos casos puede encontrarse un entorno con centro en dichos puntos que esté totalmente incluido en el dominio D de la función.

Generalizamos entonces las definiciones de extremos relativos y absolutos para campos escalares.

Extremos relativos o locales de un campo escalar

Dada un campo escalar $f: D \subset R^n \to R$, siendo $X_0 \in D$, se define:

- $f(X_0)$ es un **máximo relativo o local** de f en D si y solo si $\exists\ E(X_0) \subset D \,/\, \forall X \in E(X_0)$ se cumple que $f(X) < f(X_0)$ (siendo $X \neq X_0$)
- $f(X_0)$ es un **mínimo relativo o local** de f en D si y solo si $\exists\ E(X_0) \subset D \,/\, \forall X \in E(X_0)$ se cumple que $f(X) > f(X_0)$ (siendo $X \neq X_0$)

En este caso, en el cual resulta $f(X) < f(X_0)$ ó $f(X) > f(X_0)$, se dice que los extremos están definidos en **sentido estricto**.
En caso de definirlos mediante las desigualdades $f(X) \leq f(X_0)$ ó $f(X) \geq f(X_0)$, se dice que los extremos están definidos en **sentido amplio**.

Extremos absolutos de un campo escalar

Dada un campo escalar $f: D \subset R^n \to R$, siendo $X_0 \in D$, se define:

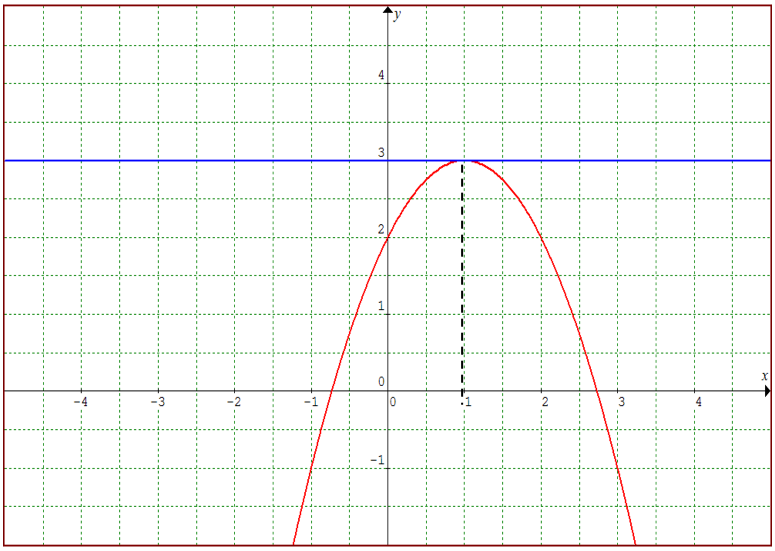
- $f(X_0)$ es un máximo absoluto de f en D si y solo si $\forall X \in D$ se cumple que $f(X) < f(X_0)$ (siendo $X \neq X_0$)
- $f(X_0)$ es un mínimo absoluto de f en D si y solo si $\forall X \in D$ se cumple que $f(X) > f(X_0)$ (siendo $X \neq X_0$)

En este caso, en el cual resulta $f(X) < f(X_0)$ ó $f(X) > f(X_0)$, se dice que los extremos están definidos en **sentido estricto**.
En caso de definirlos mediante las desigualdades $f(X) \leq f(X_0)$ ó $f(X) \geq f(X_0)$, se dice que los extremos están definidos en **sentido amplio**.

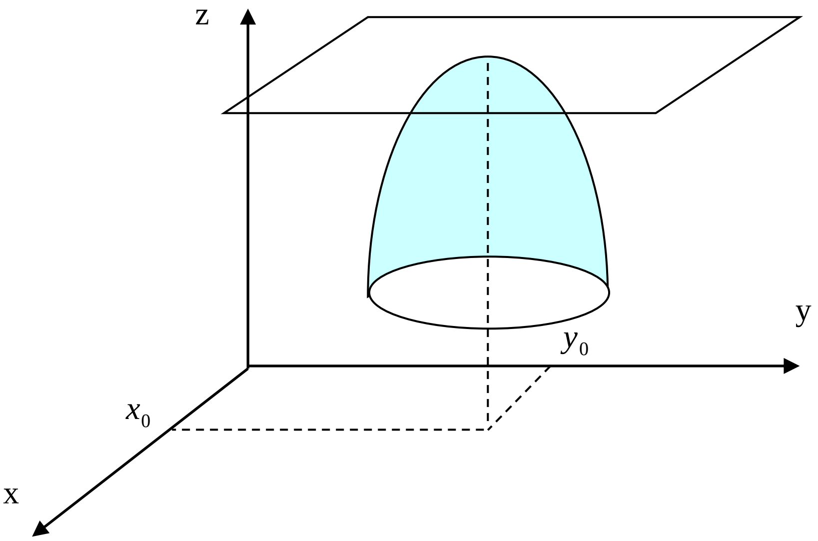
Condición necesaria para la existencia de extremos relativos o locales

Repasamos la condición necesaria para la existencia de extremos relativos o locales en funciones escalares.

Dado un campo escalar $f: D \subset R \to R$, consideramos un punto interior $x_0 \in D$. Si la función es derivable en x_0, la condición necesaria para la existencia de extremos en x_0 es que $f'(x_0) = 0$. Geométricamente, tenemos que la recta tangente a la curva asociada a f en el punto x_0 es una recta horizontal (con pendiente nula).



Si generalizamos esta situación para un campo escalar de R^2 en R, podemos considerar la siguiente gráfica.



En este caso, si la superficie gráfica de f admite plano tangente en el punto (x_0 , y_0 , z_0), siendo $z_0 = f(x_0 , y_0)$ un extremo de la función, dicho plano tangente resulta un plano horizontal (paralelo al plano xy).

Recordemos que la ecuación del plano tangente a la superficie gráfica de f en (x_0 , y_0 , z_0) es:

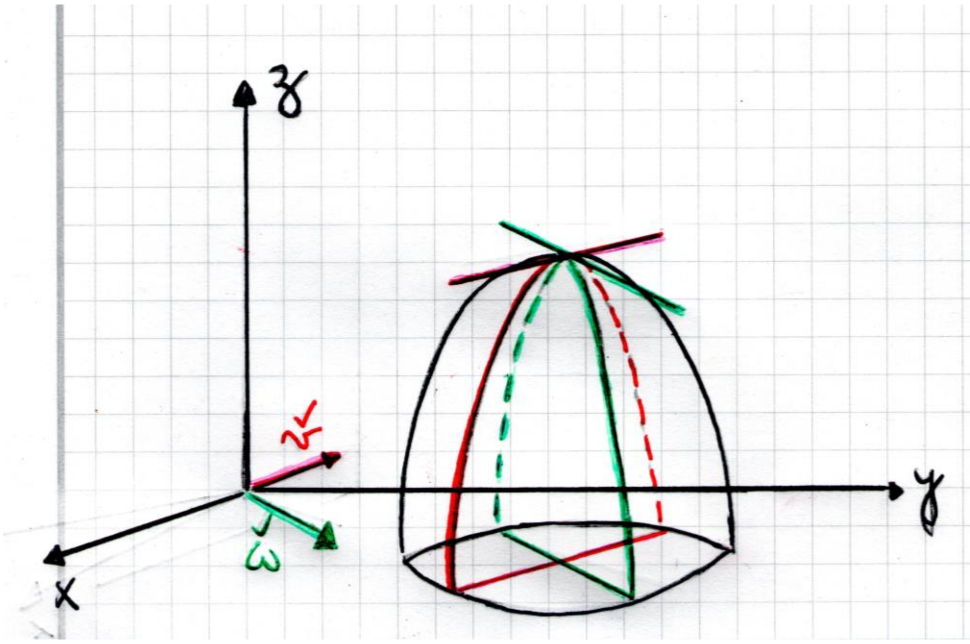
$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(X_0)\ (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(X_0)\ (y - y_0)$$

Para que este plano resulte horizontal, necesariamente debe verificarse que:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(X_0) = 0 \quad \text{con } X_0 = (x_0, y_0)\text{, es decir que } \nabla f(X_0) = \bar{0}$$

Vale aclarar que no solamente las derivadas parciales se anulan en el punto donde la función alcanza un extremo, sino que se anulan todas las derivadas direccionales que estén definidas en dicho punto.

Analicemos la situación para el caso de un campo escalar donde $f(x_0, y_0)$ es un extremo local. Si realizamos el corte de la superficie gráfica de f, es decir la superficie de ecuación $z = f(x, y)$, con planos paralelos al eje z que pasan por el punto (x_0 , y_0 , z_0), distintos a los planos coordenados, obtenemos curvas sobre la superficie, cuyas rectas tangentes en dicho punto resultan paralelas al plano (xy). La pendiente de estas rectas está dada por la derivada direccional de la función en $(x_0\ , y_0)$ [recordar la interpretación geométrica de la derivada direccional de un campo escalar en un punto]



Enunciamos y demostramos los teoremas vinculados a la condición necesaria para la existencia de extremos de campos escalares.

Teorema 1

Sea $f : D \subset R^n \to R$, X_0 punto interior de *D*, siendo $f(X_0)$ extremo relativo de *f* en *D*.

$$\text{Si existe } f'(X_0\ , \vec{v}) = \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(X_0) \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(X_0) = 0$$

Demostración: para la demostración de este teorema, no utilizamos la fórmula de cálculo de las derivadas direccionales que involucra al gradiente porque en las hipótesis no se pide que la función sea diferenciable en el punto X_0. Por ello, trabajamos con la definición de derivada direccional en un punto.

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(X_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(X_0 + h\,\vec{v}) - f(X_0)}{h} \qquad (1)$$

Dado que este límite existe y es finito, deberán coincidir los valores de los límites laterales para $h \to 0^+$ y $h \to 0^-$.

Debemos realizar el análisis de los límites laterales para dos casos: cuando $f(X_0)$ es un máximo local, y cuando $f(X_0)$ es un mínimo local.

- Si $f(X_0)$ es un máximo local

En este caso, existe un entorno de X_0 en el cual se verifica que

$$f(X_0 + h\,\vec{v}) \le f(X_0) \quad \Rightarrow \quad f(X_0 + h\,\vec{v}) - f(X_0) \le 0 \qquad (2)$$

Retomamos el límite (1) para evaluar los límites laterales:

a) $\lim_{h\to 0^+} \dfrac{f(X_0 + h\,\bar{v}) - f(X_0)}{h} \le 0$

Por lo evaluado en (2) el numerador es siempre menor o igual a cero, y siendo $h \to 0^+$ resulta $h > 0$

b) $\lim_{h\to 0^-} \dfrac{f(X_0 + h\,\bar{v}) - f(X_0)}{h} \ge 0$

Por lo evaluado en (2) el numerador es siempre menor o igual a cero, y siendo $h \to 0^-$ resulta $h < 0$

Por lo visto en a) y b), la única posibilidad para que el límite exista es que dicho límite valga 0. Por lo tanto resulta $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{v}}(X_0) = 0$

- Si $f(X_0)$ es un mínimo local

En este caso, existe un entorno de X_0 en el cual se verifica que $f(X_0 + h\,\bar{v}) \ge f(X_0) \;\Rightarrow\; f(X_0 + h\,\bar{v}) - f(X_0) \ge 0 \qquad (3)$

Retomamos el límite (1) para evaluar los límites laterales:

a) $\lim_{h\to 0^+} \dfrac{f(X_0 + h\,\bar{v}) - f(X_0)}{h} \ge 0$

Por lo evaluado en (3) el numerador es siempre mayor o igual a cero, y siendo $h \to 0^+$ resulta $h > 0$

b) $\lim_{h\to 0^-} \dfrac{f(X_0 + h\,\bar{v}) - f(X_0)}{h} \le 0$

Por lo evaluado en (3) el numerador es siempre mayor o igual a cero, y siendo $h \to 0^-$ resulta $h < 0$

Por lo visto en a) y b), la única posibilidad para que el límite exista es que dicho límite valga 0. Por lo tanto resulta $\dfrac{\partial f}{\partial \bar{v}}(X_0) = 0$

Teorema 2

Sea $f : D \subset R^n \to R$, X_0 punto interior de D, con $f \in C^1$ en D.

Si $f(X_0)$ es extremo relativo de f en $D \;\Rightarrow\; \nabla f(X_0) = \bar{0}$

Demostración:

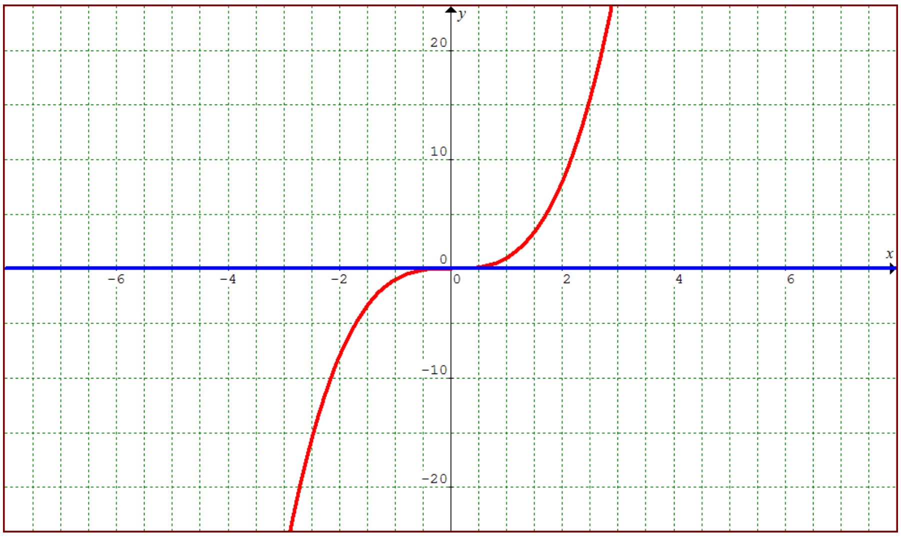
Si $f \in C^1$ en D, entonces f es derivable en toda dirección y sentido en $X_0 \in D$. En particular existen sus derivadas parciales en X_0, ya que dichas derivadas parciales son un caso particular de las derivadas direccionales (las derivadas direccionales asociadas a los versores de la base canónica de R^n).

Como $f(X_0)$ es extremo relativo de f en D, podemos aplicar lo demostrado en el Teorema 1, por lo cual todas sus derivadas direccionales se anulan en X_0. Por lo tanto, todas sus derivadas parciales serán iguales a 0 en dicho punto. Entonces:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0) = \frac{\partial f}{\partial x_2}(X_0) = \ldots\ldots = \frac{\partial f}{\partial x_i}(X_0) = \ldots\ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla f(X_0) = \bar{0}$$

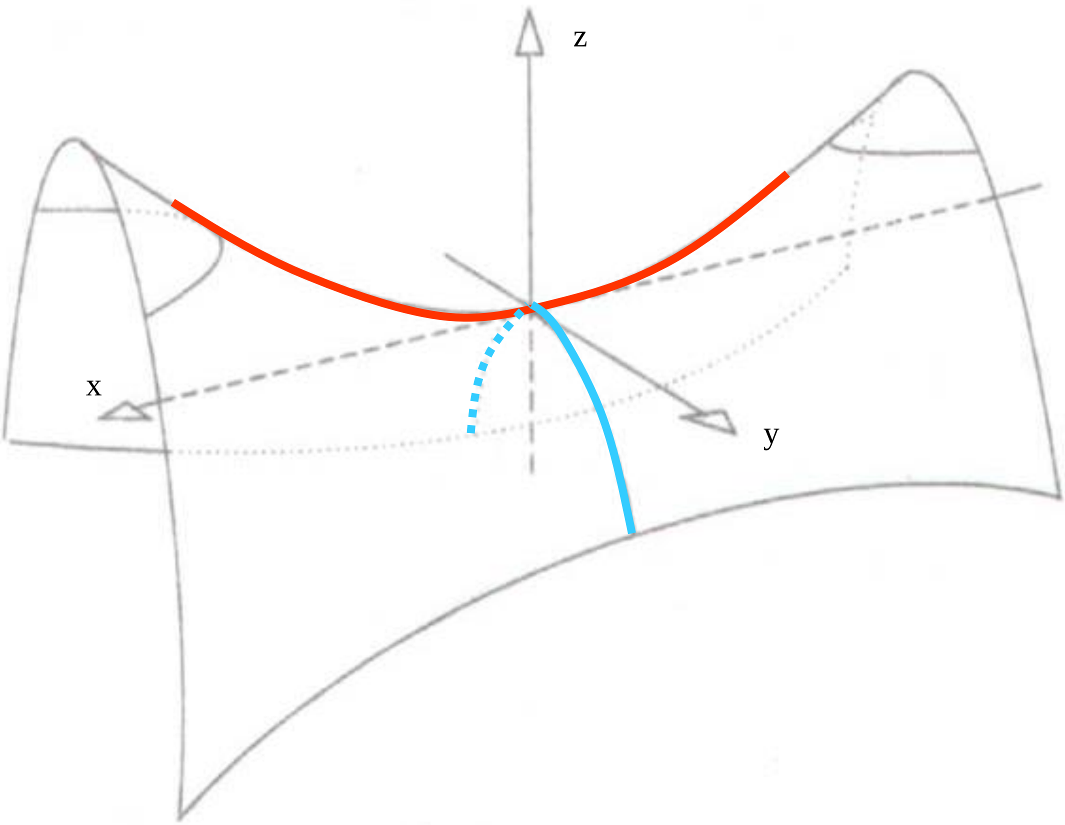
Condición suficiente para la existencia de extremos

Recordemos que para el análisis de los extremos de funciones escalares derivables, el cumplimiento de la condición necesaria (es decir, que se anule la derivada primera de la función en un punto interior del domino) no garantizaba la existencia de extremos en dicho punto. Un claro ejemplo es la función $f(x) = x^3$, donde se cumple que $f'(0) = 0$. En este caso, la recta tangente a la curva en $x = 0$ resulta horizontal, pero la función no alcanza extremos en dicho punto.



Una situación similar puede ocurrir con los campos escalares. Veamos por ejemplo la función $f(x, y) = x^2 - y^2$. La función es diferenciable en todo su dominio, y el plano tangente en (0 , 0 , 0) es de ecuación $z = 0$, es decir un plano horizontal. Sin embargo $f(0,0)$ no es un extremo de la función.

El gráfico que se presenta a continuación corresponde al ejemplo anterior para campos escalares



Vemos en la gráfica del campo $f(x, y) = x^2 - y^2$ (paraboloide hiperbólico o silla de montar), que en un entorno del (0,0) , si consideramos los puntos que se hallan en la dirección del eje x, la función crece (línea roja). Sin embargo, si en ese mismo entorno consideramos la dirección del eje y, la función decrece para los puntos del entorno (línea celeste). Por lo tanto, aunque el planto tangente en (0 , 0 , 0) es horizontal, no se produce ningún extremo para la función en (0 , 0).
Este tipo de puntos en los cuales el planto tangente a la gráfica es horizontal, pero no se produce un extremo para la función, se denominarán puntos de ensilladura o puntos de silla.

Definimos entonces:

- **Punto crítico o punto estacionario**

Sea $f : D \subset R^n \to R$, X_0 punto interior de *D*, con $f \in C^1$ en *D*. X_0 es punto crítico de f en *D* si se cumple que $\nabla f(X_0) = \overline{0}$

Para tener en cuenta: los extremos de funciones diferenciables se alcanzan en puntos críticos de su dominio, pero no todos los puntos críticos indican que la función alcanza un extremo en dicho punto (podemos encontrar un plano tangente horizontal a la gráfica de la función en un determinado punto de su dominio sin que se produzca un extremo en dicho punto).

- **Punto de ensilladura o punto de silla**

Sea $f : D \subset R^n \to R$, siendo X_0 un punto crítico de f en *D*. Si se verifica que:

$\forall\, E(X_0)$ se cumple que: $\begin{cases} \exists\, X_1 \in E(X_0) \,/\, f(X_0) < f(X_1) \\ \exists\, X_2 \in E(X_0) \,/\, f(X_0) > f(X_2) \end{cases}$, entonces X_0 es punto de ensilladura de f.

Clasificación de los puntos críticos – Condición suficiente para la existencia de extremos

Para las funciones escalares de una variable, la condición suficiente para la existencia de extremos en aquellos puntos críticos donde se anula la derivada primera, es que la derivada segunda sea distinta de cero: si es mayor que cero, el punto crítico es un mínimo local, y si la derivada segunda en menor que cero, el punto crítico será un máximo local.

En el caso de los campos escalares, no tenemos una única derivada segunda, por lo que la condición suficiente involucra a todas las derivadas segundas del campo escalar organizadas matricialmente.
Enunciamos el teorema (condición suficiente) para campos escalares de $R^2 \to R$

Teorema

Sea $f : D \subset R^2 \to R$, donde $X_0 = (x_0 \, , y_0) \in D$ es punto crítico de f, siendo $f \in C^2$ en *D*. Definimos como Hessiano de *f* en X_0 al siguiente determinante, siempre que las derivadas segundas de f en X_0 no se anulen todas simultáneamente.

$$H(X_0) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(X_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X_0) \end{vmatrix}$$

- $H(X_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad X_0$ es punto de ensilladura

- $H(X_0) > 0 \quad \wedge \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_0) > 0 \quad \Rightarrow \quad f(X_0)$ es un mínimo local de f (análogamente si se cumple que $H(X_0) > 0 \quad \wedge \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X_0) > 0$)
- $H(X_0) > 0 \quad \wedge \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_0) < 0 \quad \Rightarrow \quad f(X_0)$ es un máximo local de f (análogamente si se cumple que $H(X_0) > 0 \quad \wedge \quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X_0) < 0$)
- $H(X_0) = 0$ es un caso dudoso, no puede asegurarse nada.

Resolvemos algunos ejercicios del TP7

6) b) Dada $f : D \subset R^2 \to R$, analice si $f(0,0)$ es extremo local; en caso afirmativo clasifíquelo y calcule su valor: $f(x,y) = x^3 + xy^2$

6)b) $f(x,y) = x^3 + xy^2$ $\qquad f(0,0) = 0$

$f'_x = 3x^2 + y^2 \qquad f'_x(0,0) = 0$

$f'_y = 2xy \qquad f'_y(0,0) = 0$

condic necesaria

$f''_{xx} = 6x \qquad f''_{xy} = 2y \qquad H(0,0) = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$

$f''_{yy} = 2x$

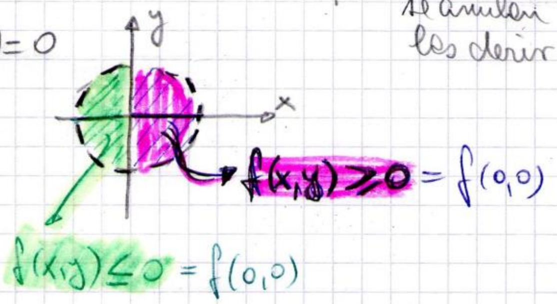
el H no está definido si se anulan todas las deriv segundas

Comparamos $f(x,y)$ con $f(0,0) = 0$

$f(x,y) = x\,\underbrace{(x^2+y^2)}_{\geq 0}$

si $x>0$ $f(x,y) \geq 0$

si $x<0$ $f(x,y) \leq 0$



En cualquier $E(0,0)$ existen puntos (x,y) de modo que:

- $f(x,y) < 0 = f(0,0)$ si $x < 0$
- $f(x,y) > 0 = f(0,0)$ si $x > 0$

Por lo tanto $(0,0,f(0,0)) = (0,0,0)$ es pto de ensilladura

8)a) Estudie la existencia de extremos relativos (locales) en sus dominios naturales: $f(x,y) = x^2 + y^2 + xy^2$

08)

a) $f'_x = 2x + y^2 = 0$ ①

$f'_y = 2y + 2xy = 0$ ②

② $\to$ $2y(1+x) = 0 \Rightarrow y = 0 \vee x = -1$

- $y = 0$ reemp en ① $\to$ $2x = 0 \Rightarrow x = 0$

$P_1 = (0,0)$

- $x = -1$ reemp en ① $\to$ $-2 + y^2 = 0 \Rightarrow y^2 = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \sqrt{2} \vee y = -\sqrt{2}$

$P_2 = (-1, \sqrt{2})$

$P_3 = (-1, -\sqrt{2})$

$f''_{xx} = 2 \qquad f''_{yy} = 2 + 2x \qquad f''_{xy} = 2y$

$$H = \begin{vmatrix} 2 & 2y \\ 2y & 2+2x \end{vmatrix}$$

$\boxed{P_1 = (0,0)}$ $\quad H(P_1) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 4 > 0 \to$ extremo local

$f''_{xx}(0,0) = 2 > 0 \Rightarrow f(0,0)$ es mínimo local

$f(0,0) = 0$

$\boxed{P_2 = (-1, \sqrt{2})}$ $\quad H(P_2) = \begin{vmatrix} 2 & 2\sqrt{2} \\ 2\sqrt{2} & 2-2 \end{vmatrix} = 0 - 4.2 = -8 < 0$

$\downarrow$

pto ensillad

$(-1, \sqrt{2}, \underbrace{f(-1,\sqrt{2})})$ es pto ensilladura

$f(-1,\sqrt{2}) = 1 + 2 + (-1)2 = 1$

$\boxed{P_3 = (-1, -\sqrt{2})}$ $\quad H(P_3) = \begin{vmatrix} 2 & -2\sqrt{2} \\ -2\sqrt{2} & 2-2 \end{vmatrix} = 0 - 4.2 = -8 < 0$

$\downarrow$

pto ensillad

$[-1, -\sqrt{2}, \underbrace{f(-1,-\sqrt{2})}]$ es pto ensilladura

$f(-1,-\sqrt{2}) = 1 + 2 - 2 = 1$

12) Aplicando Taylor resulta $f(x,y) \cong 7x + y + xy - y^2 - 4x^2$ en un entorno de A=(1 , 1). Analice si f (A) es extremo local. En caso afirmativo clasifíquelo y calcule su valor.

Vol taylor

$P(x,y) = 7x + y + xy - y^2 - 4x^2$

12) $f'_x(1,1) = P'_x(1,1) \Rightarrow f'_x(1,1) = (7 + y - 8x)\Big|_{(1,1)} = 0$

$f'_y(1,1) = P'_y(1,1) \Rightarrow f'_y(1,1) = (1 + x - 2y)\Big|_{(1,1)} = 0$

Luego $A = (1,1)$ es pto crítico

$f''_{xx}(1,1) = P''_{xx}(1,1) \Rightarrow f''_{xx}(1,1) = -8$

$f''_{yy}(1,1) = P''_{yy}(1,1) \Rightarrow f''_{yy}(1,1) = -2$

$f''_{xy}(1,1) = P''_{xy}(1,1) \Rightarrow f''_{xy}(1,1) = 1$

$H(A) = \begin{vmatrix} -8 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 16 - 1 = 15 > 0 \rightarrow$ extremo local

$f''_{xx}(A) = -8 < 0 \rightarrow$ máx local

$f(1,1) = P(1,1) = 7 + 1 + 1 - 1 - 4 = 4$ es máx local

17)e) Analice la existencia de extremos relativos, clasifíquelos y calcule sus valores.

$f(x,y,z) = xy + xz$ en puntos de la superficie de ecuación $\overline{X} = (u, u - v, v^2)$ con $(u,v) \in R^2$

17) e) $\begin{cases} x = u \\ y = u - v \\ z = v^2 \end{cases} \Rightarrow f(x,y,z) = u(u - v) + u(v^2)$

$= u^2 - uv + uv^2$

$g(u,v) = u^2 - uv + uv^2$

$g'_u = 2u - v + v^2 = 0$ ①

$g'_v = -u + 2uv = 0$ ②

② $\to u(-1+2v) = 0 \Rightarrow u = 0 \lor v = \frac{1}{2}$

- $u = 0$ en ① $\to v^2 - v = 0 \Rightarrow v(v-1) = 0 \Rightarrow v = 0 \lor v = 1$

$P_1 = (0,0)$

$P_2 = (0,1)$

- $v = \frac{1}{2}$ en ① $\to 2u - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 0 \Rightarrow u = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right)\frac{1}{2} \Rightarrow$

$\Rightarrow u = \frac{1}{8}$

$P_3 = \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right)$

$g''_{uu} = 2 \qquad g''_{vv} = 2u \qquad g''_{uv} = -1+2v$

$$H = \begin{vmatrix} 2 & -1+2v \\ -1+2v & 2u \end{vmatrix}$$

- $H(P_1) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0 \to$ pto ensilladura

$\left.\begin{array}{l} u=0 \\ v=0 \end{array}\right\} \Rightarrow (x,y,z) = (0,0,0)$

$\boxed{(0,0,0,f(0,0,0)) = (0,0,0,0) \text{ es pto ensilladura}}$

- $H(P_2) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0 \to$ pto ensilladura

$\left.\begin{array}{l} u=0 \\ v=1 \end{array}\right\} \Rightarrow (x,y,z) = (0,-1,1)$

$\boxed{(0,-1,1,f(0,-1,1)) = (0,-1,1,0) \text{ es pto ensilladura}}$

- $H(P_3) = \begin{vmatrix} 2 & -1+2\cdot\frac{1}{2} \\ 0 & 2\cdot\frac{1}{8} \end{vmatrix} = 1/2 > 0 \longrightarrow$ extremo local

$g''_{uu}(P_3) = 2 > 0 \to$ mínimo local

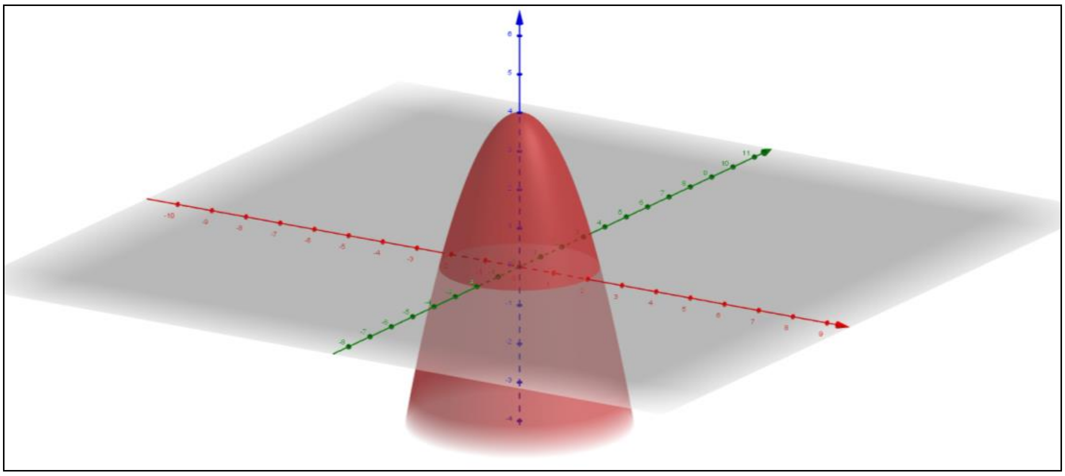
$$\left.\begin{array}{l} u = \frac{1}{8} \\ r = \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow (x, y, z) = \left(\frac{1}{8}, \frac{1}{8} - \frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) = \left(\frac{1}{8}, -\frac{3}{8}, \frac{1}{4}\right)$$

$$\boxed{f\left(\frac{1}{8}, -\frac{3}{8}, \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}\left(-\frac{3}{8}\right) + \frac{1}{8}\,\frac{1}{4} = -\frac{1}{64} \text{ es mínimo local}}$$

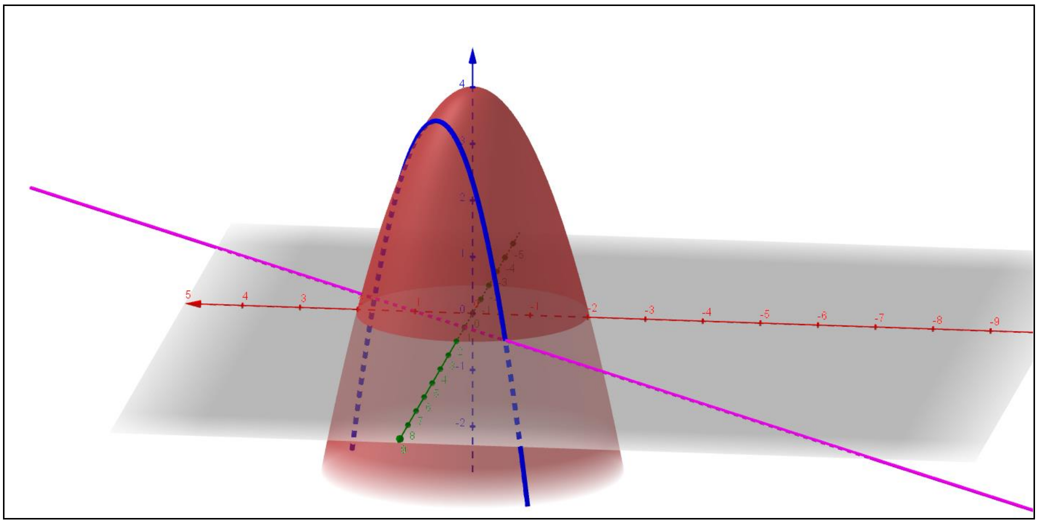
EXTREMOS CONDICIONADOS O LIGADOS DE UN CAMPO ESCALAR

Analizamos ahora un tipo especial de problema, en el cual se busca evaluar los extremos de una campo escalar en algún subconjunto de su dominio.

Veamos un ejemplo: si consideramos la función $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$, su dominio es *Dom f* = $\mathbb{R}^2$, y además, la función alcanza un máximo local y absoluto en $f(0, 0) = 4$.



Sin embargo, podemos determinar si la función dada alcanza algún extremo en los puntos del dominio donde $x + y = 1$. En este caso, estamos analizamos el comportamiento del campo escalar en un subconjunto de su dominio $A = \{(x, y) \in R^2 / x + y = 1\}$.



En el gráfico vemos marcado en rosa el subconjunto *A* de los puntos del dominio que pertenecen a la recta $x + y = 1$. Para estos puntos, sus imágenes en relación a la función corresponden a la curva graficada en azul. En este caso, el análisis de los extremos condicionados implica estudiar los extremos solamente en relación a las imágenes del conjunto *A*, es decir, analizar los extremos en la curva indicada en azul. Geométricamente se puede ver que dicha curva alcanza un máximo como extremo ligado de f en *A*.

Sin embargo, no siempre es posible realizar un gráfico que permita visualizar el problema. Por ello es necesaria una herramienta de cálculo para obtener los extremos condicionados de un determinado campo escalar, cuyo dominio se restringe mediante ecuaciones que limitan los valores que pueden tomar las variables independientes. Estas **ecuaciones de restricción** se suelen escribir en forma general **igualadas a cero**. Para el ejemplo que estamos analizando, el conjunto *A* será: $A=\{(x,y)\in R^2 \,/\, x+y-1=0\}$

Notación: se indica $f|_A$ a los valores que toma el campo escalar f en los puntos de conjunto $A\subset Dom\, f$

Condición necesaria para la existencia de extremos condicionados (método de los multiplicadores de Lagrange)

Sea $f: D\subset R^n \to R$, con $f\in C^1$ en *D*. Sean las funciones $g_1, g_2, \dots, g_k : B\subset R^n \to R$, siendo $g_i \in C^1$ en *B* ($\forall i: 1\le i\le k$), con $k<n$, de modo que las derivadas parciales de g_i no se anulan todas simultáneamente ($\forall i: 1\le i\le k$).

Sea $A=\{X\in R^n \,/\, g_1(X)=0 \wedge g_2(X)=0 \wedge \dots \wedge g_i(X)=0 \wedge \dots \wedge g_k(X)=0\}$. Sea $X_0\in A$ un punto tal que $f(X_0)$ es un extremo condicionado de $f|_A$.

Entonces existen los números reales $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ de modo que X_0 es punto crítico de la función:

$$L(X,\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k) = f(X)+\lambda_1\, g_1(X)+\lambda_2\, g_2(X)+\dots+\lambda_k\, g_k(X)$$

Los valores $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ se denominan **multiplicadores de Lagrange**.

Clasificación de extremos condicionados

Una vez obtenidos los puntos críticos mediante la aplicación del método de los multiplicadores de Lagrange, es necesario clasificar dichos puntos críticos para determinar si se trata de máximos o de mínimos condicionados.

En algunos casos, dicha clasificación puede realizarse en función del contexto geométrico o físico del problema. En relación a un método de clasificación analítico, vamos a enunciar dicho método para aplicar en campos escalares definidos de R^2 en R con una única ecuación de restricción para el cálculo de extremos ligados.

Sea $f: D\subset R^2 \to R$, y sea $A=\{(x,y)\in R^2 \,/\, g(x,y)=0\}$, de modo tal que puede aplicarse el método de los multiplicadores de Lagrange para obtener los puntos críticos en el análisis de los extremos condicionados para $f|_A$. Sea $P_0=(x_0,y_0)$ con $\lambda=\lambda_0$ un punto crítico de $f|_A$.

Se define la función: $L^*(x,y)=f(x,y)+\lambda_0\, g(x,y)$ (habrá una función L^* por cada punto crítico hallado)

Se define como Hessiano orlado para el punto crítico P_0 al siguiente determinante:

$$H_{orlado}(x_0,y_0)=\left.\begin{vmatrix} L^*_{xx} & L^*_{xy} & g'_x \\ L^*_{yx} & L^*_{yy} & g'_y \\ g'_x & g'_y & 0 \end{vmatrix}\right|_{(x_0,y_0)}$$

- $H_{orlado}(x_0, y_0) > 0$, entonces $f(x_0, y_0)$ es máximo condicionado de $f|_A$
- $H_{orlado}(x_0, y_0) < 0$, entonces $f(x_0, y_0)$ es mínimo condicionado de $f|_A$
- $H_{orlado}(x_0, y_0) = 0$ es un caso dudoso, no puede asegurarse nada.

Resolvemos el problema planteado anteriormente utilizando este teorema: se quiere encontrar los extremos condicionados de $f(x,y) = 4 - x^2 - y^2$ para los punto del conjunto $A = \{(x,y) \in R^2 \,/\, x + y - 1 = 0\}$, es decir, los extremos condicionados de $f|_A$.

1) Comenzamos definiendo la función *L*, sabiendo que la restricción de los puntos del conjunto *A* viene dada por la ecuación $g(x,y) = x + y - 1 = 0$

$$L(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y) = 4 - x^2 - y^2 + \lambda(x + y - 1)$$

2) Debemos hallar los puntos críticos de *L*, que son los mismos puntos críticos de $f|_A$. Para ello se plantea la condición necesaria para la existencia de puntos críticos en funciones diferenciables: $\nabla L(x,y,\lambda) = \bar{0}$

$$\begin{cases} L'_x = -2x + \lambda = 0 & (1) \\ L'_y = -2y + \lambda = 0 & (2) \\ L'_\lambda = x + y - 1 = 0 & (3) \end{cases}$$

Resolvemos el sistema de ecuaciones. De (1) y (2): $\left.\begin{matrix} (1): & \lambda = 2x \\ (2): & \lambda = 2y \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad 2x = 2y \quad \Rightarrow \quad x = y$

Reemplazamos la igualdad anterior en (3): $x + y - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x + x - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \dfrac{1}{2}$

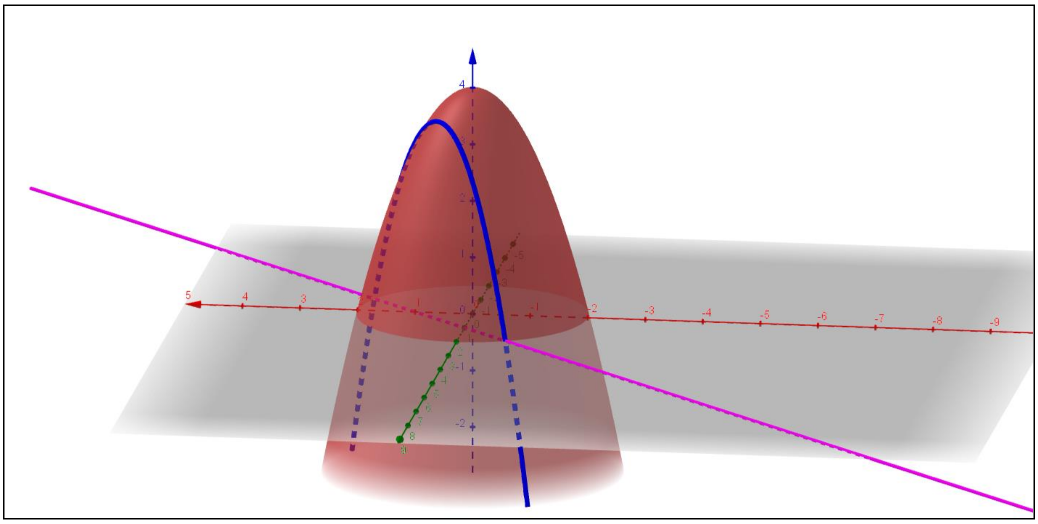
Si $x = \dfrac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} y = x = \dfrac{1}{2} \\ \lambda = 2x = 1 \end{cases}$. El punto crítico es $P = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ con $\lambda = 1$

3) Clasificamos el punto crítico obtenido. Para ello, definimos la función L^* y obtenemos el Hessiano orlado para el punto $P = \left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$

$L^*(x,y) = 4 - x^2 - y^2 + 1.(x + y - 1) = 4 - x^2 - y^2 + x + y - 1$

$$H_{orlado} = \begin{vmatrix} L^*_{xx} & L^*_{xy} & g'_x \\ L^*_{yx} & L^*_{yy} & g'_y \\ g'_x & g'_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow H_{orlado}\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 4 > 0$$

Como $H_{orlado}\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right) > 0$ resulta $f\left(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}\right)$ un máximo condicionado de $f|_A$. Esto coincide con el análisis geométrico que puede hacerse mediante el siguiente gráfico:



Resolvemos el ejercicio 18) del TP 7

Determine los puntos de la curva de ecuación $4y^2 - 18x + 9x^2 - 16y = 11$ más próximo y más alejado del punto (1 , 7).

18) $d = \sqrt{(x-1)^2+(y-7)^2}$

Maximizar o minimizar la raíz es equivalente a maximizar o minimizar su argumento

$L(x,y,\lambda) = (x-1)^2+(y-7)^2+\lambda(4y^2-18x+9x^2-16y-11)$

$L'_x = 2(x-1)-18\lambda+18\lambda x = 0 \rightarrow (1)$

$L'_y = 2(y-7)+8\lambda y-16\lambda = 0 \rightarrow (2)$

$L'_\lambda = 4y^2-18x+9x^2-16y-11=0 \quad (3)$

$(1) \rightarrow x-1-9\lambda+9\lambda x = 0 \Rightarrow x(1+9\lambda) = (1+9\lambda) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (x-1)(1+9\lambda) = 0 \Rightarrow x = 1 \lor \lambda = -\frac{1}{9}$

$\boxed{x=1}$ en (3) $\rightarrow 4y^2-18+9-16y-11 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 4y^2-16y-20 = 0 \Rightarrow y^2-4y-5=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = \frac{4\pm\sqrt{16+20}}{2} \Rightarrow y = \frac{4\pm 6}{2}$ $y=5$ $\lor$ $y=-1$

$x=1 \land y=5$ en (2) $\rightarrow 2(5-7)+18\lambda\cdot 5-16\lambda = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -4+40\lambda-16\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{4}{24}$

- $P_1 = (1,5)$ con $\lambda = \frac{4}{24}$

$x=1 \land y=-1$ en (2) $\rightarrow 2(-1-7)-8\lambda-16\lambda = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow -16-24\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{16}{24} \Rightarrow \lambda = -\frac{2}{3}$

- $P_2 = (1,-1)$ con $\lambda = -\frac{2}{3}$

FECHA

$\boxed{\lambda = -1/9}$ en (2) $\rightarrow 2(y-7)+8\left(-\frac{1}{9}\right)y-16\left(-\frac{1}{9}\right) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2y-14-\frac{8}{9}y+\frac{16}{9} = 0 \Rightarrow \frac{10}{9}y = \frac{110}{9} \Rightarrow$

$\Rightarrow y = 11$

Reemp en (3) $\rightarrow 4\cdot 11^2-18x+9x^2-16\cdot 11-11 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 9x^2-18x+297=0$

$x^2-2x+33=0 \quad x_{1,2} = \frac{2\pm\sqrt{4-4\cdot 33}}{2} \notin \mathbb{R}!!$

Aparecen entonces dos puntos críticos. Para clasificarlos, podemos hacer consideraciones geométricas. Calculando las distancias de los puntos $P_1=(1,5)$ y $P_2=(1,-1)$ al punto (1 , 7), se podrá decidir cuál es el punto que más cercano y cuál el más lejano.

$$d[(1,5)\,,\,(1,7)]=\sqrt{(1-1)^2+(5-7)^2}=\sqrt{4}=2$$
$$d[(1,-1)\,,\,(1,7)]=\sqrt{(1-1)^2+(-1-7)^2}=\sqrt{64}=8$$

De los cálculos anteriores se deduce que el punto perteneciente a la curva que está más cercano al (1,7) es el punto $P_1=(1,5)$, y el que está más alejado es el punto $P_2=(1,-1)$.

Realizamos la clasificación de los puntos críticos mediante el uso del Hessiano orlado

Clasificamos los ptos críticos

$-P_1=(1,5)$ con $\lambda=\dfrac{4}{24}$

$$L^*=(x-1)^2+(y-7)^2+\frac{4}{24}\left(4y^2-18x+9x^2-16y-11\right)$$

$$L^*_{xx}=2+18\cdot\frac{4}{24}=5$$

$$L^*_{yy}=2+8\cdot\frac{4}{24}=10/3$$

$$L^*_{xy}=0$$

$$H_{ol}=\begin{vmatrix}5 & 0 & -18+18x\\ 0 & 10/3 & 8y-16\\ -18+18x & 8y-16 & 0\end{vmatrix}$$

$$H_{ol}(P_1)=\begin{vmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 10/3 & 24\\ 0 & 24 & 0\end{vmatrix}=5\left(0-24^2\right)<0$$

mínimo condic

$$\text{dist}(1,5)=\sqrt{0^2+(-2)^2}=2 \text{ es mínima}$$

El punto más cercano es (1,5) y su distancia al pto. dado es 2.

$- \; P_2 = (1,-1)$ con $\lambda = -\frac{2}{3}$

$$L^* = (x-1)^2 + (y-7)^2 - \frac{2}{3}\left(4y^2 - 18x + 9x^2 - 16y - 11\right)$$

$$L^*_{xx} = 2 + 18 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right) = -10$$

$$L^*_{yy} = 2 + 8\left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{10}{3}$$

$$L^*_{xy} = 0$$

$$H_{ol} = \begin{vmatrix} -10 & 0 & -18+18x \\ 0 & -\frac{10}{3} & 8y-16 \\ -18+18x & 8y-16 & 0 \end{vmatrix}$$

$$H_{ol}(P_2) = \begin{vmatrix} -10 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{10}{3} & -24 \\ 0 & -24 & 0 \end{vmatrix} = -10\left(-24^2\right) > 0$$

máximo condic

$$\text{dist}\,(1,-1) = \sqrt{0^2 + (-8)^2} = 8 \quad \text{es máximo}$$

El punto más lejano es $(1,-1)$ y su distancia al pto dado es 8