INTEGRALES MÚLTIPLES

INTEGRALES DOBLES

Condiciones de integrabilidad

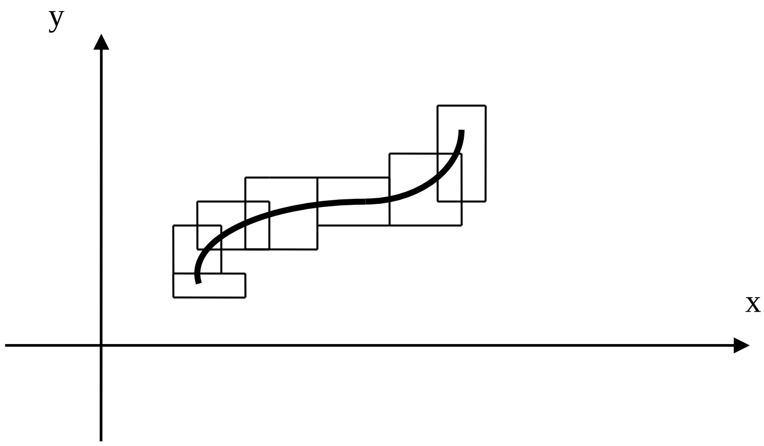
Sea el campo escalar $f : D \subset R^2 \to R$.

1) Si f es continua en *D*, entonces *f* es integrable en *D*
2) Si f es continua en *D*, excepto en un subconjunto de *D* de medida nula, entonces *f* es integrable en *D*.

Conjunto de puntos de medida nula.

La definición formal para subconjuntos del plano de medida nula es la siguiente.

Sea $S \subset R^2$, se dice que *S* es de medida nula si $\forall \varepsilon > 0$ existe un conjunto finito de rectángulos cuya unión incluya al conjunto *S* y cuya área sea menor que ε.



Intuitivamente, podemos decir que un subconjunto del plano de medida nula será aquel que "no tenga área", por ejemplo puntos aislados, segmentos, curvas, etc.

Una vez establecidas las condiciones de integrabilidad, vamos a enunciar un teorema que permita efectuar el cálculo de la integral doble, a través del cálculo de integrales simples sucesivas.

Teorema (integrales dobles en recintos rectangulares)

Sea $f : D \subset R^2 \to R$ integrable en $D = [a\,,b] \times [c\,,d]$.

Si $\forall x \in [a\,,b]$, $\exists\, g(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$, entonces:

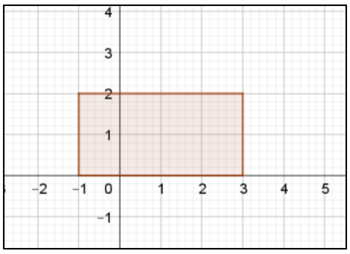
$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy \right] dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy$$

Si $\forall x \in [c\,,d]$, $\exists\, h(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$, entonces:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx \right] dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx$$

Veamos un ejemplo. Calcular la integral $\iint_D (2x+y)\,dx\,dy$, siendo $D=[-1,3]\times[0,2]$

Como la función es polinómica, es continua en R^2 y por lo tanto es integrable en *D*. Graficamos el recinto de integración.



Aplicando el teorema anterior, realizamos los cálculos en ambos órdenes de integración.

$$\iint_D (2x+y)\,dx\,dy=\int_{-1}^{3} dx\left[\int_{0}^{2}(2x+y)\,dy\right]=\int_{-1}^{3} dx\left[2xy+\frac{y^2}{2}\Bigg|_0^2\right]=\int_{-1}^{3} dx\,(4x+\frac{4}{2})=\int_{-1}^{3}(4x+2)\,dx=\left[2x^2+2x\right]_{-1}^{3}=$$

$$=18+6-2+2=24$$

$$\iint_D (2x+y)\,dx\,dy=\int_{0}^{2} dy\left[\int_{-1}^{3}(2x+y)\,dx\right]=\int_{0}^{2} dy\left[x^2+xy\Big|_{-1}^{3}\right]=\int_{0}^{2} dy\,(9+3y-1+y)=\int_{0}^{2}(4y+8)\,dy=\left[2y^2+8y\right]_0^2=$$

$$=8+16=24$$

Como indica el teorema, ambos resultados coinciden.

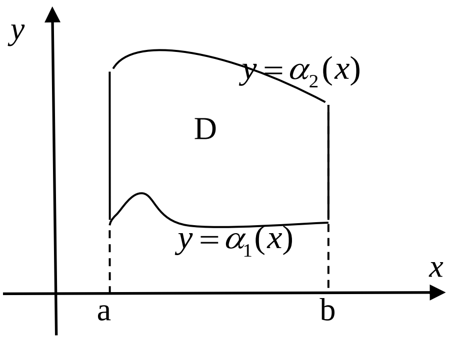
Integrales en recintos no rectangulares

Debemos ahora generalizar el cálculo de integrales dobles a recintos más generales, no necesariamente rectangulares. En este caso, caracterizamos los recintos de integración como recintos Tipo 1 y recintos Tipo 2.

Recintos Tipo 1

Sea el campo escalar $f: D\subset R^2 \to R$, siendo f integrable en *D*.

$D=\{(x,y)\in R^2 \,/\, a\le x\le b \quad \wedge \quad \alpha_1(x)\le y\le \alpha_2(x)\}$ Las funciones α_1 y α_2 son continuas en [a,b]

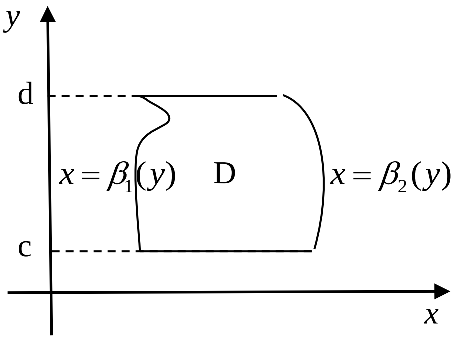


$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b dx\left[\int_{\alpha_1(x)}^{\alpha_2(x)} f(x,y)\,dy\right]$$

Recintos Tipo 2

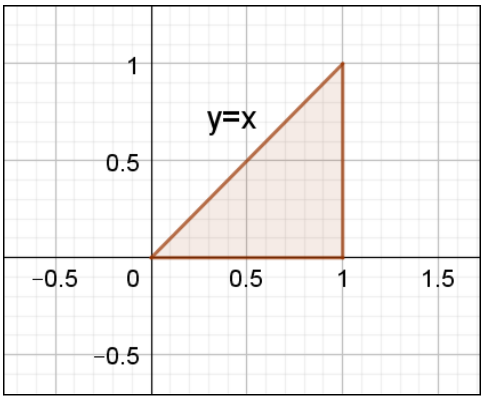
Sea el campo escalar $f: D \subset R^2 \rightarrow R$, siendo f integrable en D.

$D = \{(x,y) \in R^2 / c \le y \le d \quad \wedge \quad \beta_1(y) \le x \le \beta_2(y)\}$ Las funciones β_1 y β_2 son continuas en [c,d]



$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d dy \left[\int_{\beta_1(y)}^{\beta_2(y)} f(x,y)\,dx \right]$$

Resolvamos un ejemplo en ambos órdenes de integración. Calcular $\iint_D xy\,dx\,dy$ si D es el recinto que se indica en el siguiente gráfico.



$$\iint_D xy\,dx\,dy = \int_0^1 dx \int_0^x xy\,dy = \int_0^1 dx \left[x\frac{y^2}{2} \right]_0^x = \int_0^1 dx \left(x\frac{x^2}{2} \right) = \int_0^1 \frac{x^3}{2}\,dx = \frac{1}{2}\left[\frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{8}$$

$$\iint_D xy\,dx\,dy = \int_0^1 dy \int_y^1 xy\,dx = \int_0^1 dy \left[\frac{x^2}{2} y \right]_y^1 = \int_0^1 dy \left(\frac{y}{2} - \frac{y^3}{2} \right) = \int_0^1 \left(\frac{y}{2} - \frac{y^3}{2} \right) dy = \left[\frac{1}{2}\frac{y^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{y^4}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{1}{8}$$

En este ejemplo en particular, ambos órdenes de integración resultan sencillos de calcular. Sin embargo, en algunos casos puede ser más fácil evaluar la integral en uno de los órdenes de integración que en el otro.

Interpretaciones físicas de la integral doble

Área plana: Área D $= \iint_D 1\, dx\, dy$

Volumen de un sólido: Vol V $= \iint_D f(x,y)\, dx\, dy$

En este caso, se debe cumplir que $f(x,y) > 0 \quad \forall (x,y) \in D$

El sólido V está limitado inferiormente por el recinto D del plano (x,y), superiormente por la superficie gráfica $z = f(x,y)$, y lateralmente por la superficie cilíndrica de eje z cuya directriz es la curva frontera de D. Más adelante veremos una fórmula para el cálculo de volúmenes de sólidos donde se aplican integrales triples y que puede utilizarse en casos más generales y de manera más sencilla.

Consideramos la función $\delta(x,y)$ como la función densidad puntual.

Masa : $m = \iint_D \delta(x,y)\, dx\, dy$

Momento estático:

distancia al eje de los puntos de D

Respecto al eje x: $M_x = \iint_D y\, \delta(x,y)\, dx\, dy$

Respecto al eje y: $M_y = \iint_D x\, \delta(x,y)\, dx\, dy$

Momento de inercia:

distancia al eje al cuadrado, de los puntos de D

Respecto al eje x: $I_x = \iint_D y^2\, \delta(x,y)\, dx\, dy$

Respecto al eje y: $I_y = \iint_D x^2\, \delta(x,y)\, dx\, dy$

Coordenadas del centro de gravedad:

$$x_G = \frac{\iint_D x\, \delta(x,y)\, dx\, dy}{\iint_D \delta(x,y)\, dx\, dy} \qquad y_G = \frac{\iint_D y\, \delta(x,y)\, dx\, dy}{\iint_D \delta(x,y)\, dx\, dy}$$

Resolvemos algunos ejercicios del TP 9

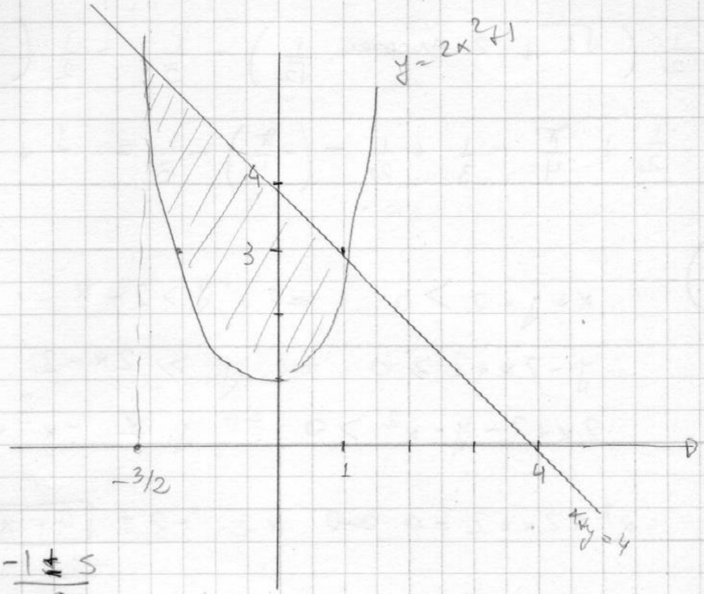
1)a) Calcular el área de las siguientes regiones planas mediante integrales dobles.

$$D = \{(x,y) \in R^2 \,/\, y \geq 2x^2+1 \quad \wedge \quad x+y \leq 4\}$$

01)

a) $y \geq 2x^2+1$

$x+y \leq 4$



$\left.\begin{array}{l} y = 2x^2+1 \\ y = 4-x \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2+1 = 4-x \Rightarrow$

$\Rightarrow 2x^2+x-3=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x = \dfrac{-1\pm\sqrt{1+24}}{4} = \dfrac{-1\pm 5}{4}$

$\Rightarrow x_1 = -\dfrac{6}{4} \wedge x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = -\dfrac{3}{2} \wedge x_2 = 1$

Area $= \iint_D dx\,dy = \displaystyle\int_{-3/2}^{1} dx \int_{2x^2+1}^{4-x} dy = \int_{-3/2}^{1} dx\,(4-x-2x^2-1) =$

$= \left[-\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{2x^3}{3} + 3x \Big|_{-3/2}^{1} \right] = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{3} + 3 + \dfrac{9/4}{2} + \dfrac{2(-27/8)}{3}$

$- 3\left(-\dfrac{3}{2}\right) = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{3} + 3 + \dfrac{9}{8} - \dfrac{54}{24} + \dfrac{9}{2} = \dfrac{125}{24}$

1)c) Calcular el área de las siguientes regiones planas mediante integrales dobles.

D: dominio del campo $\overline{f}(x,y) = (\ln(x+y-2)\,,\, \sqrt{y-2x+2}\,,\, (2x+2-y-x^2)^{-1/4})$

1c) $x + y - 2 > 0 \Rightarrow y > 2 - x$

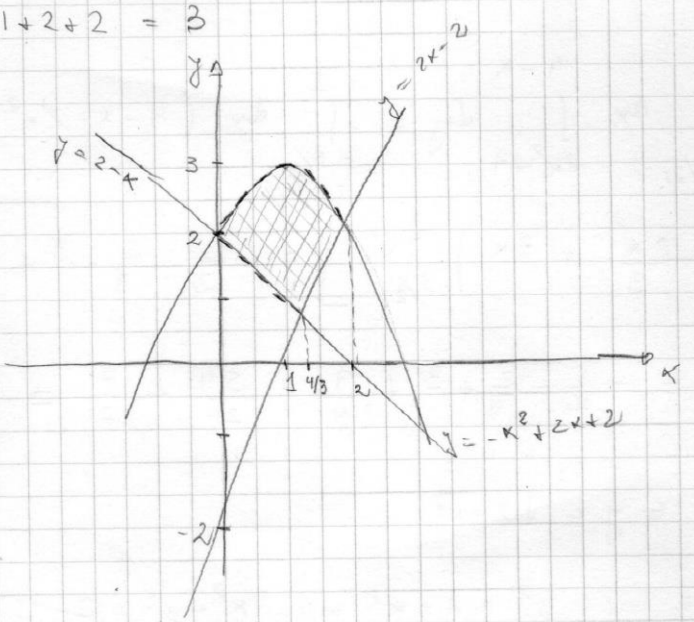
$y - 2x + 2 \geq 0 \Rightarrow y \geq 2x - 2$

$2x + 2 - y - x^2 > 0 \Rightarrow y < -x^2 + 2x + 2$

$-x^2 + 2x + 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4+8}}{-2} = \dfrac{-2 \pm \sqrt{12}}{-2} = 1 \pm \sqrt{3}$

$x_v = \dfrac{1+\sqrt{3} + 1 - \sqrt{3}}{2} = 1$

$y_v = -1 + 2 + 2 = 3$



$\left.\begin{array}{l} y = 2 - x \\ y = -x^2 + 2x + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \cancel{2} - x = -x^2 + 2x + \cancel{2} \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x(x-3) = 0 \Rightarrow x = 0 \lor x = 3$

$\left.\begin{array}{l} y = 2x - 2 \\ y = -x^2 + 2x + 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \cancel{2x} - 2 = -x^2 + \cancel{2x} + 2 \Rightarrow x^2 - 4 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = 2 \lor x = -2$

$\left.\begin{array}{l} y = 2x - 2 \\ y = 2 - x \end{array}\right\} \Rightarrow 2x - 2 = 2 - x \Rightarrow 3x - 4 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{4}{3}$

$$\text{Área} = \int_0^{4/3} dx \int_{2-x}^{-x^2+2x+2} dy + \int_{4/3}^{2} dx \int_{2x-2}^{-x^2+2x+2} dy =$$

$$= \int_0^{4/3} dx \left(-x^2 + 2x + \cancel{2} - \cancel{2} + x\right) + \int_{4/3}^{2} dx \left(-x^2 + \cancel{2x} + 2 - \cancel{2x} + 2\right) =$$

$$= \left(-\frac{x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}\Bigg|_0^{4/3}\right) + \left(-\frac{x^3}{3} + 4x\Bigg|_{4/3}^{2}\right) =$$

$$= -\frac{1}{3}\,\frac{4^3}{3^3} + \frac{3}{2}\,\frac{16}{9} + \left(-\frac{8}{3}\right) + 8 + \left(\frac{4}{3}\right)^3 \frac{1}{3} - 4 \cdot \frac{4}{3} =$$

$$= -\cancel{\frac{64}{81}} + \frac{48}{18} - \frac{8}{3} + 8 + \cancel{\frac{64}{81}} - \frac{16}{3} = \frac{8}{3}$$

2)e) Calcular las siguientes integrales en ambos órdenes de integración y verificar que los resultados coinciden.

$$\int_0^1 dx \int_0^x (x+y)\, dy + \int_1^4 dx \int_0^1 (x+y)\, dy$$

2e) $\int_0^1 dx \int_0^x (x+y)\, dy + \int_1^4 dx \int_0^1 (x+y)\, dy =$

$$= \int_0^1 dx \left[xy + \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^x\right] + \int_1^4 dx \left[xy + \frac{y^2}{2}\Bigg|_0^1\right] =$$

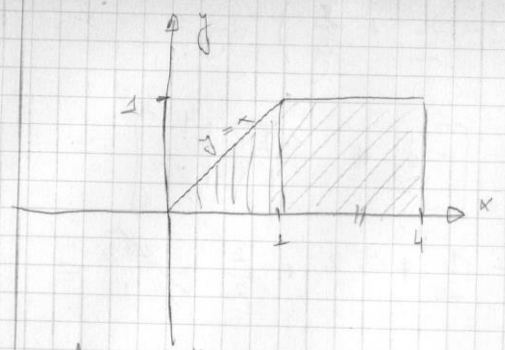
$$= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{x^2}{2}\right) dx + \int_1^4 dx \left(x + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}\left[\frac{x^3}{3}\Bigg|_0^1\right] +$$

$$+ \left[\frac{x^2}{2} + \frac{x}{2}\Bigg|_1^4\right] = \cancel{\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{3}} + \overset{8}{\frac{16}{2}} + \overset{2}{\frac{4}{2}} - \cancel{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} =$$

$$= 10 - \frac{1}{2} = \frac{19}{2}$$

Para cambiar el orden de integración graficamos el recinto correspondiente. Obtenemos las ecuaciones del recinto de los límites de integración indicados en el enunciado.

$$\underbrace{\int_0^1 dx \int_0^x (x+y)\, dy}_{\substack{0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le x}} + \underbrace{\int_1^4 dx \int_0^1 (x+y)\, dy}_{\substack{1 \le x \le 4 \\ 0 \le y \le 1}}$$



$$\int_0^1 dy \int_y^4 dx\,(x+y) = \int_0^1 dy \left[\frac{x^2}{2} + yx \Big|_y^4\right] =$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{16}{2} + 4y - \frac{y^2}{2} - y^2\right) dy = \left[8y + 2y^2 - \frac{3}{2}\frac{y^3}{3} \Big|_0^1\right]$$

$$= 8 + 2 - \frac{1}{2} = 10 - \frac{1}{2} = \frac{19}{2}$$

5)c) Calcule las siguientes integrales. En algunos casos puede convenirle invertir el orden de integración.

$$\int_{-4}^{0} dy \int_{-\sqrt{y+4}}^{\sqrt{y+4}} dx + \int_{0}^{5} dy \int_{y-2}^{\sqrt{y+4}} dx$$

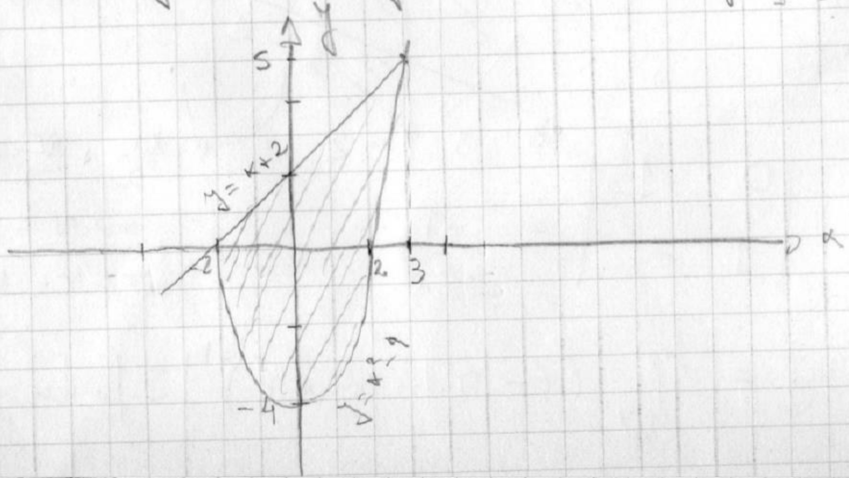
5 c) $\int_{-4}^{0} dy \int_{-\sqrt{y+4}}^{\sqrt{y+4}} dx + \int_{0}^{5} dy \int_{y-2}^{\sqrt{y+4}} dx$

Veo cambiando el orden de integración

$$\underbrace{\int_{-4}^{0} dy \int_{-\sqrt{y+4}}^{\sqrt{y+4}} dx}_{\substack{-4 \le y \le 0 \\ -\sqrt{y+4} \le x \le \sqrt{y+4}}} + \underbrace{\int_{0}^{5} dy \int_{y-2}^{\sqrt{y+4}} dx}_{\substack{0 \le y \le 5 \\ y-2 \le x \le \sqrt{y+4}}}$$

$$x = \pm\sqrt{y+4} \Rightarrow x^2 - 4 = y \quad \begin{cases} y = 5 \Rightarrow x = 3 \\ y = -4 \Rightarrow x = 0 \\ y = 0 \Rightarrow x = \pm 2 \end{cases}$$

$$x = y - 2 \Rightarrow y = x + 2 \longrightarrow y = 5 \Rightarrow x = 3$$



$$\int_{-2}^{3} dx \int_{x^2-4}^{x+2} dy = \int_{-2}^{3} dx \left(x+2-x^2+4\right) = \left[-\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 6x \Big|_{-2}^{3} \right] =$$

$$= -\frac{\cancel{27}^{\,9}}{\cancel{3}} + \frac{9}{2} + 18 + \frac{-8}{3} - \frac{\cancel{4}^{\,2}}{\cancel{2}} - (-12) = -9 + \frac{9}{2} + 18 -$$

$$- \frac{8}{3} - 2 + 12 = \frac{9}{2} - \frac{8}{3} + 19 = \frac{27-16}{6} + 19 = \frac{11}{6} + 19$$

CAMBIO DE COORDENADAS EN INTEGRALES DOBLES

Sistema de coordenadas polares: definición

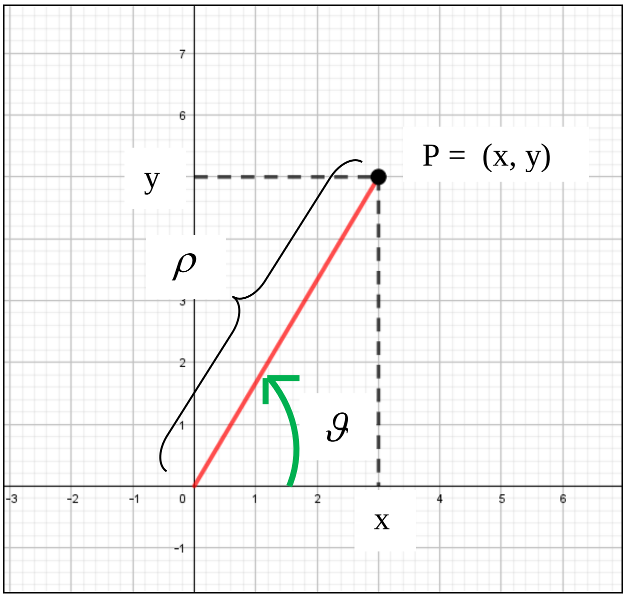
El sistema de coordenadas polares localiza los puntos del plano por medio de dos parámetros:

- la distancia ρ del punto al origen de coordenadas
- el ángulo ϑ que forma el radio vector del punto con la parte positiva del eje x

Se dice entonces que el par ordenado (ρ, ϑ) corresponde a las coordenadas polares del punto *P*.

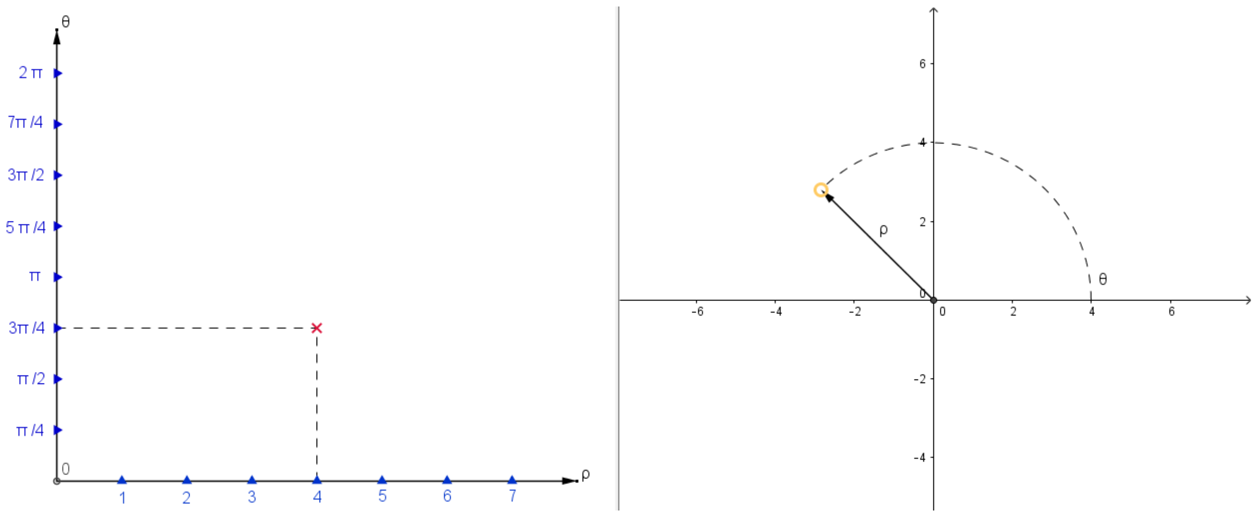
Para que la relación que vincula las coordenadas polares con las cartesianas sea una función biyectiva, los rangos de variación de las coordenadas polares se toman como:

$$\rho \geq 0 \quad , \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi$$



La vinculación entre coordenadas cartesianas y polares se produce mediante la siguiente transformación:

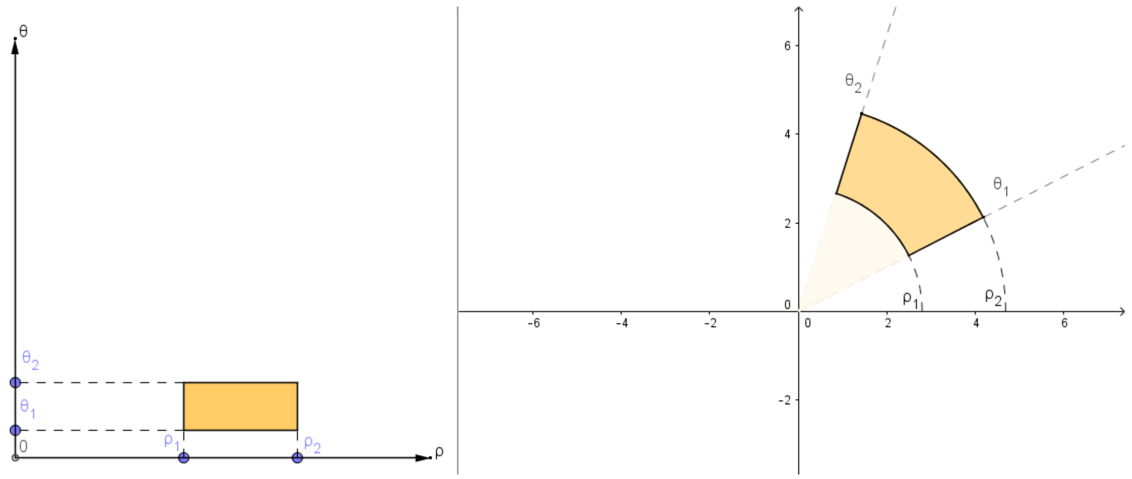
$$\begin{cases} x = \rho \cos\vartheta \\ y = \rho\, sen\vartheta \end{cases}$$



Acceder al applet dinámico "Sistema de coord. Polares" (Conexión a internet y Java necesarios).

Interpretación geométrica del diferencial de área

El rectángulo en el plano $\rho\vartheta$, que se corresponde con las inecuaciones $R_1 \le \rho \le R_2$, $\vartheta_1 \le \vartheta \le \vartheta_2$ se transforma mediante este cambio de coordenadas en un cuadrilátero curvilíneo limitado por sectores circulares y rectas radiales, como se muestra en la siguiente figura:



Acceder al applet dinámico "Diferencial de área coord. Polares" (Conexión a internet y Java necesarios).

Teorema de cambio de variables para integrales dobles

Sea $f: D \subset R^2 \to R$, f integrable en D. Sea $\overline{h}: W \to D \,/\, \overline{h}(u,v) = (x(u,v)\,,\, y(u,v))$, con $\overline{h} \in C^1$ en W. Si se cumple que:

1) $\overline{h}$ es una función biyectiva (o biunívoca, o uno a uno) de W en D.

2) $\forall (u,v) \in W$ se cumple que: $J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix} \ne 0$

Entonces:

$$\iint_D f(x,y)\, dx\, dy = \iint_W f(x(u,v)\,,\, y(u,v))\,|\,J\,|\, du\, dv$$

El teorema sigue siendo válido si las condiciones 1) y 2) no se cumplen en un subconjunto de medida nula.

$J = \dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \det\begin{pmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{pmatrix}$ se denomina jacobiano de transformación.

Cálculo del jacobiano de transformación para coordenadas polares

Calculamos el jacobiano de transformación a coordenadas polares dado por $\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\, sen\vartheta \end{cases}$

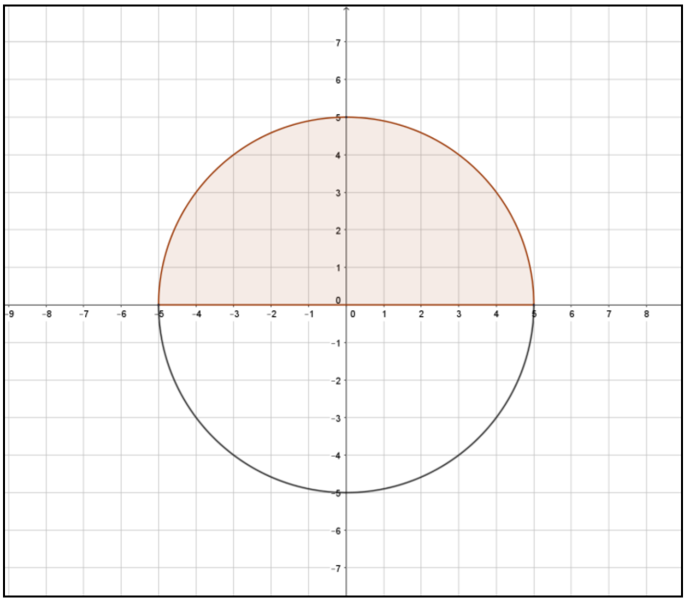
$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\rho,\vartheta)} = \det\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\rho\, sen\vartheta \\ sen\vartheta & \rho\cos\vartheta \end{pmatrix} = \rho\cos^2\vartheta + \rho\, sen^2\vartheta = \rho(\cos^2\vartheta + sen^2\vartheta) = \rho$$

Siendo $J = \rho$, analizamos el módulo del jacobiano para realizar el cambio de variables en integrales dobles, de acuerdo con el teorema correspondiente:

$$|\,J\,| = |\,\rho\,| = \rho$$

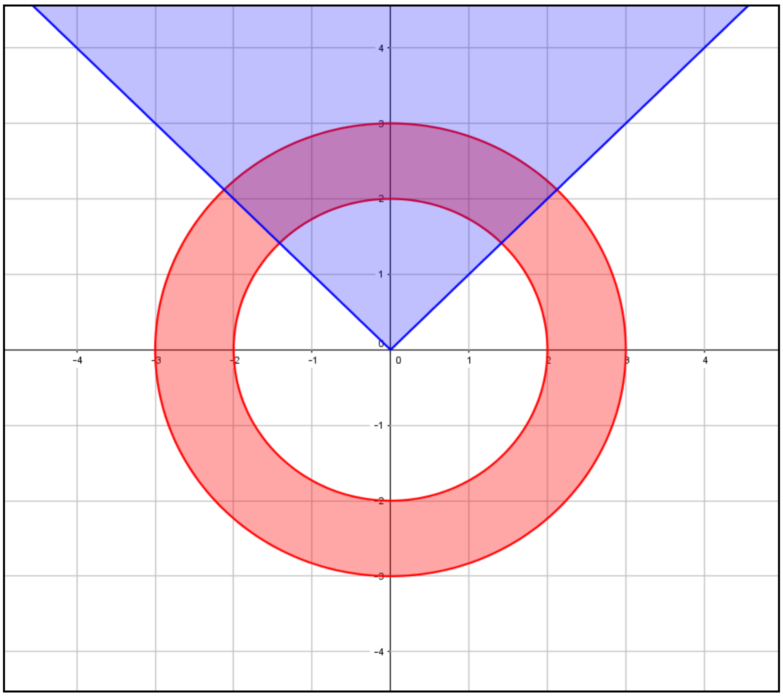
Ejercicios de aplicación

A) Hallar el área de la región D definida por $x^2 + y^2 \leq 25$ con $y \geq 0$



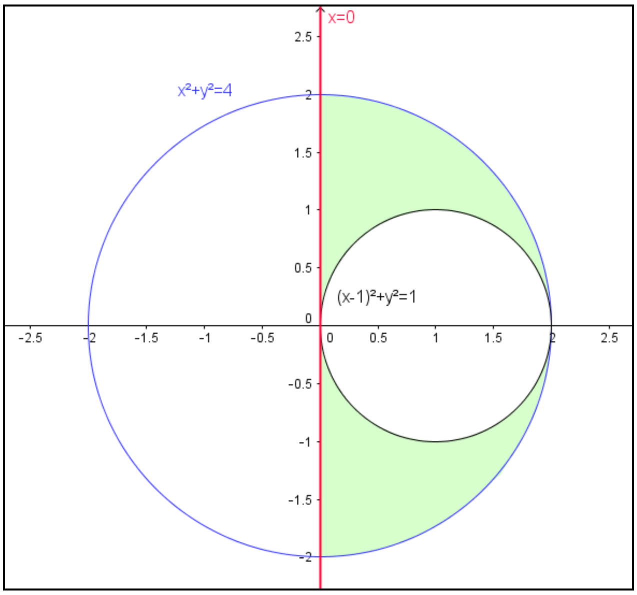
$$A = \iint_D dx\,dy = \int_0^{\pi} d\vartheta \int_0^{5} \rho\, d\rho = 17{,}5\,\pi$$

B) Encontrar el área de la región D definida por $4 \leq x^2 + y^2 \leq 9$ con $y \geq |x|$



$$A = \iint_D dx\,dy = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} d\vartheta \int_2^{3} \rho\, d\rho = 1{,}25\,\pi$$

C) Calcular el área de la región plana definida por: $\begin{cases} x^2 + y^2 \leq 4 \\ (x-1)^2 + y^2 \geq 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$



Cálculos auxiliares:

$(x-1)^2 + y^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 = 2x$

Pasando la última ecuación a coordenadas polares:

$$\rho^2 \cos^2 \vartheta + \rho^2 sen^2 \vartheta = 2\rho \cos \vartheta \quad \Rightarrow \quad \rho^2 (\cos^2 \vartheta + sen^2 \vartheta) = 2\rho \cos \vartheta \quad \Rightarrow \quad \cancel{\rho^2} = 2\cancel{\rho} \cos \vartheta \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad \rho = 2\cos \vartheta \quad (\text{con } \rho \neq 0)$$

Por lo tanto, la ecuación de la circunferencia $(x-1)^2 + y^2 = 1$ en coordenadas polares resulta: $\rho = 2\cos \vartheta$

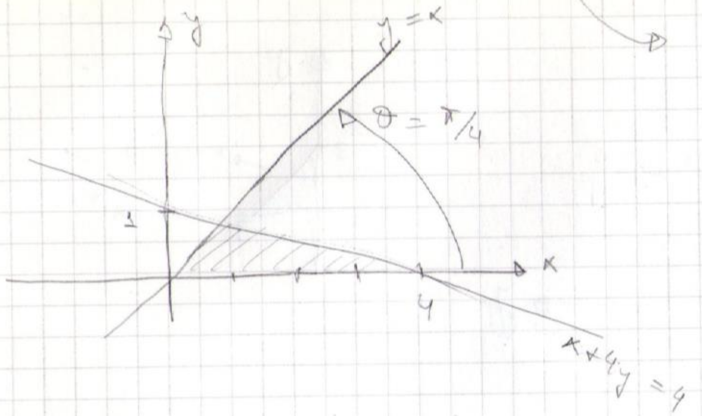
Aclaración: el caso en el cual $\rho = 0$ se corresponde con el origen de coordenadas, el punto (0 , 0). En este caso, y a los efectos de la integral doble, un punto resulta un subconjunto del plano de medida nula.

$$A = \iint_D dx\, dy = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\vartheta \int_{2\cos\vartheta}^{2} \rho \, d\rho = \frac{\pi}{2}$$

Resolvemos ejercicios del TP 9

9) Calcule $\iint_D \frac{x+4y}{x^2}\,dx\,dy$ con D: $x \geq y$, $x+4y \leq 4$, $y \geq 0$ usando coordenadas polares

9) $x \geq y$ $\quad x+4y \leq 4 \quad y \geq 0$ $\Rightarrow \frac{x}{4}+y \leq 1$



$$\begin{cases} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

$$x+4y=4 \Rightarrow \rho\cos\theta + 4\rho\,\mathrm{sen}\,\theta = 4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \rho = \frac{4}{\cos\theta + 4\,\mathrm{sen}\,\theta}$$

$$\iint_D \frac{x+4y}{x^2}\,dx\,dy = \int_0^{\pi/4} d\theta \int_0^{\frac{4}{\cos\theta+4\,\mathrm{sen}\,\theta}} \frac{\cancel{\rho}\cos\theta + 4\cancel{\rho}\,\mathrm{sen}\,\theta}{\cancel{\rho^2}\cos^2\theta}\,\cancel{\rho}\,d\rho$$

$$= \int_0^{\pi/4} d\theta \left(\frac{\cancel{\cos\theta + 4\,\mathrm{sen}\,\theta}}{\cos^2\theta}\right) \frac{4}{\cancel{\cos\theta + 4\,\mathrm{sen}\,\theta}} =$$

$$= 4\left[\mathrm{tg}\,\theta \Big|_0^{\pi/4}\right] = 4\,(1-0) = 4$$

10)a) En el siguiente caso se indica una integral planteada en coordenadas polares. Graficar la región correspondiente en el plano (xy), plantear la integral en coordenadas cartesianas, y resolverla en alguno de los dos sistemas de coordenadas.

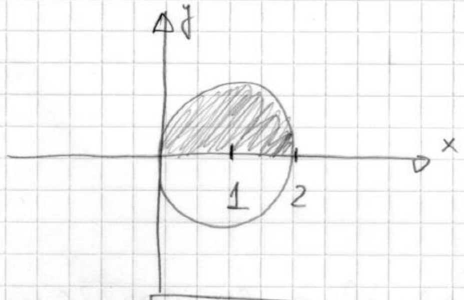
$$\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho^3 \, d\rho$$

$$\rho^3 = \underbrace{\rho}_{J} \cdot \underbrace{\rho^2}_{x^2+y^2}$$

$$10)\quad a)\quad \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho^3 \, d\rho$$

$$0 \le \varphi \le \pi/2 \qquad 0 \le \rho \le 2\cos\varphi$$

$$\rho = 2\cos\varphi \Rightarrow \rho^2 = 2\rho\cos\varphi \Rightarrow x^2+y^2 = 2x \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 = 1 \Rightarrow (x-1)^2 + y^2 = 1$$



$$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} (x^2+y^2)\, dy$$

Resuelvo en polares:

$$\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho^3 \, d\rho = \int_0^{\pi/2} d\varphi \left[\frac{\rho^4}{4} \Big|_0^{2\cos\varphi} \right] =$$

$$= \int_0^{\pi/2} d\varphi \left[\frac{16}{4} \cos^4\varphi \right] = 4 \int_0^{\pi/2} \cos^4\varphi \, d\varphi =$$

$$= 4 \left[\frac{3}{8}\varphi + \frac{\operatorname{sen}(2\varphi)}{4} + \frac{\operatorname{sen}(4\varphi)}{32} \Big|_0^{\pi/2} \right] =$$

$$= \cancel{4}^{1} \left[\frac{3}{\cancel{8}_{2}} \frac{\pi}{2} + \cancel{\frac{\operatorname{sen}\pi}{4}} + \cancel{\frac{\operatorname{sen}(2\pi)}{32}} - 0 \right] = \frac{3}{4}\pi$$

6)a) Resuelva los siguientes ejercicios usando el cambio de coordenadas indicado

$\iint_D (6-x-y)^{-1}dx\,dy$, D: $|x+y|\le 2 \quad \wedge \quad y\le x+2\le 4$, usando $(x,y)=(v\,,u-v)$

6)a) $\iint_D (6-x-y)^{-1}\,dx\,dy$

D: $|x+y|\le 2 \quad \wedge \quad y \le x+2 \le 4$

usando $(x,y)=(v,u-v) \longrightarrow \begin{cases} x=v \\ y=u-v \end{cases}$

Hallamos el recinto transformado de D

$|x+y|\le 2 \Rightarrow -2\le x+y\le 2$

i) $-2\le x+y \to -2\le \cancel{v}+u-\cancel{v} \Rightarrow \boxed{u\ge -2}$

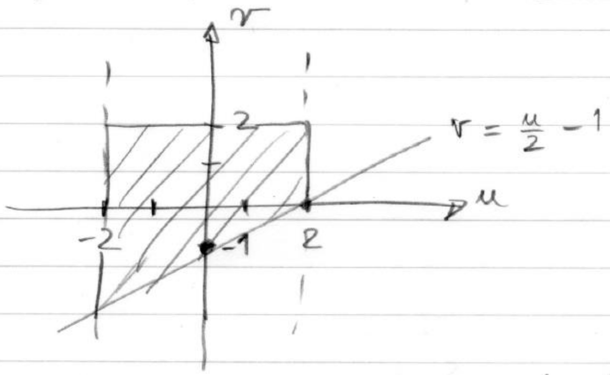
ii) $x+y\le 2 \to \cancel{v}+u-\cancel{v}\le 2 \Rightarrow \boxed{u\le 2}$

$y\le x+2\le 4$

i) $y\le x+2 \to u-v\le v+2 \Rightarrow 2v\ge u-2$

$\Rightarrow \boxed{v\ge \frac{u}{2}-1}$

ii) $x+2\le 4 \Rightarrow x\le 2 \to \boxed{v\le 2}$



$J=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1$

$|J|=|-1|=1$

$\iint_D (6-x-y)^{-1}\,dx\,dy=\int_{-2}^{2}du\int_{\frac{u}{2}-1}^{2}dv\,\overbrace{\frac{1}{6-\cancel{v}-u+\cancel{v}}}^{1/(6-u)}\cdot 1$ |J|

$=\int_{-2}^{2} du\ \frac{1}{6-u}\left(2-\frac{u}{2}+1\right)=\int_{-2}^{2}\frac{3-u/2}{6-u}\,du=$

$=\int_{-2}^{2}\frac{1}{2}\,\frac{\cancel{6-u}}{\cancel{6-u}}\,du=\frac{1}{2}\,(2-(-2))=2$

6)d) Resuelva los siguientes ejercicios usando el cambio de coordenadas indicado

$\iint_D (x+y-2)^2\,dx\,dy$ aplicando el cambio de variables definido por $(x,y)=(u+v\,,u-v)$ con $D=\{(x,y)\in R^2\ /\ y\geq |x|\ ,\ x+2y\leq 3\}$

6)d) $\iint_D (x+y-2)^2\,dx\,dy$ $\qquad \begin{cases} x = u+v \\ y = u-v \end{cases}$

$D=\{(x,y)\in R^2 / \ y\geq |x|\ ,\ x+2y\leq 3\}$

Hallemos el recinto transformado de D

i) $|x|\leq y \rightarrow |u+v|\leq u-v \Rightarrow$

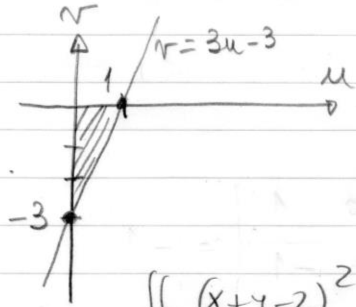
$\Rightarrow \underbrace{-(u-v)\leq u+v}_{①}$, $\underbrace{u+v\leq u-v}_{②}$

①: $-u+\cancel{v}\leq u+\cancel{v} \Rightarrow 2u\geq 0 \Rightarrow \boxed{u\geq 0}$

②: $\cancel{u}+v\leq \cancel{u}-v \Rightarrow 2v\leq 0 \Rightarrow \boxed{v\leq 0}$

ii) $x+2y\leq 3 \rightarrow u+v+2(u-v)\leq 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{3u-3\leq v}$



$J=\dfrac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} x'_u & x'_v \\ y'_u & y'_v \end{vmatrix}=$

$=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-2 \Rightarrow |J|=2$

$\iint_D (x+y-2)^2\,dx\,dy=\int_0^1 du\int_{3u-3}^{0} dv\,(u+\cancel{v}+u-\cancel{v}-2)^2\cdot \overset{|J|}{2}=$

$=2\int_0^1 du\,(2u-2)^2\left[v\Big|_{3u-3}^{0}\right]=2\int_0^1 du\,(2u-2)^2(-3u+3)=$

$=24\int_0^1(-u^3+3u^2-3u+1)\,du=-\dfrac{u^4}{4}+u^3-\dfrac{3u^2}{2}+u\Big|_0^1=6$