



Autómata Finito con Pila

- Obviamente la diferencia fundamental con un AF es justamente la Pila, que es una pila abstracta de capacidad infinita.
- En la Pila se almacenan caracteres de un alfabeto distinto al del lenguaje que reconoce el autómata
- Por convención al escribir la secuencia de caracteres almacenados en la pila, lo hago comenzando por el tope de la misma. Así, si digo que en la pila tengo ABC significa que A está al tope y C en el fondo de la misma
- Las transiciones tienen en cuenta el estado del autómata, el carácter siguiente de la cadena a reconocer y el carácter en el tope de la pila



Definición Formal

Un AFP es una 7-upla $M = (Q, \Sigma, \Gamma, T, e_0, p_0, F)$

Donde:

Q es el conjunto de estados

Σ es el alfabeto de entrada

Γ es el alfabeto de Pila (Algunos enfatizan: $\Sigma \cap \Gamma = \emptyset$)

$e_0 \in Q$, estado inicial

$p_0 \in \Gamma$, Símbolo inicial en pila que indica pila vacía

F conjunto de estados finales

T función: $Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Gamma \rightarrow P(Q \times \Gamma^*)$

- Nota, el libro de la cátedra usa como notación

$$M = (E, A, A', T, e_0, p_0, F)$$



Función de transición

- Notar que la función de transición toma como entrada una terna dada por:
 - El estado en que se encuentra el autómata
 - Un carácter de Σ o ε
 - Esto significa que puede haber un cambio de estado sin necesidad de consumir un carácter de la cadena analizada
 - Un carácter de Γ
- Y como salida
 - Un nuevo estado del autómata
 - Un cadena sobre el alfabeto Γ (eventualmente vacía)
 - Se considera que en cada transición se elimina el carácter que estaba al tope de pila, por tanto, si quiero conservarlo debo volver a introducirlo



Función de transición

- Un modo de explicar cada transición es pensarla a cada una con los siguientes pasos
 1. **Pop**: se saca (**siempre**) del tope de pila el elemento que allí se encuentre
 2. **Push**: se insertan en la pila los elementos que indique la transición
 3. Cambio al estado que indique la transición
 4. Si el carácter que indica la transición no es ε , entonces avanzar al próximo en la cadena que está siendo analizada



Función de transición y determinismo

- Para que un AFP sea determinístico (AFPD) es necesario que se cumplan 2 condiciones
 - Para cualquier terna de entrada el conjunto de salida de tiene a lo sumo un elemento
 $\forall e \in Q, a \in (\Sigma \cup \{\varepsilon\}), x \in \Gamma: |T(e,a,x)| \leq 1$
 - Si está definida la función para ε entonces no debe estar definida para ningún elemento de Σ y viceversa
 $\forall e \in Q, x \in \Gamma:$
 $T(e,\varepsilon,x) \neq \emptyset \Rightarrow T(e,a,x) = \emptyset (\forall a \in \Sigma)$

 $\forall e \in Q, x \in \Gamma:$
Si $\exists a \in \Sigma$ tq: $T(e,a,x) \neq \emptyset \Rightarrow T(e,\varepsilon,x) = \emptyset$



Función de transición, ejemplos

- $T(4, a, Z) = \{(4, RPZ), (5, \varepsilon)\}$
 - Cuando el autómata está en el estado 4, lee el carácter a de la cadena a analizar y hay una Z al tope de la pila
 - Queda en estado 4, Saca Z del tope de la pila y coloca en ella sucesivamente Z , P y R . Por tanto R queda en el tope de la pila, más abajo P y luego Z .
 - O bien pasa a estado 5 y no agrega nada a la pila, lo que indico con ε .
Ojo: En este caso no agrego nada pero SI saco el tope de pila, Z en este ejemplo.
 - Como el conjunto de salida tiene cardinalidad 2, El autómata correspondiente NO es determinístico



Función de transición, ejemplos

- $T(7, b, R) = \{(3, TU)\}$
 - Cuando el autómata está en el estado 7, lee el carácter b de la cadena a analizar y hay una R al tope de la pila
 - Pasa a estado 3, Saca R del tope de la pila y coloca en ella sucesivamente U y T . Por tanto T queda en el tope de la pila y más abajo U .
 - Como el conjunto tiene cardinalidad 1, esta producción puede ser parte de un AFPD
- $T(8, \varepsilon, Y) = \{(3, Y)\}$
 - Cuando el autómata está en el estado 8 y si hay una Y en el tope de la pila
 - Pasa a estado 3 sin necesidad de consumir ningún carácter de la cadena que está siendo analizada. La Y se saca del tope de pila pero es repuesta, por tanto la pila queda inalterada.
 - Si no está definida $T(8, a, Y)$ para ningún $a \in \Sigma$, entonces esta producción puede ser parte de un AFPD



Modos de Aceptación

- Aceptación por Estado final
 - Es el modo “equivalente” a los AFD, es decir, se consume la cadena a reconocer (salvo estado sin definir, que daría rechazo) y si al final está en un estado aceptor se reconoce la cadena. Para este modo el estado final de la pila es irrelevante
- Aceptación por pila vacía
 - En este modo se consume la cadena a reconocer (salvo estado sin definir) y si al final la pila está vacía se acepta la cadena, caso contrario se rechaza. Para este modo es irrelevante el conjunto de estados aceptores y en general es vacío.
- Fin de cadena
 - La mayoría de los textos lo indican con ϵ , sin embargo el libro de la cátedra lo simboliza con fdc (fin de cadena) lo que es muy razonable dado que muchas veces ese fin está marcado por un carácter centinela (o sea uno que, al no poder formar parte de la cadena que estamos reconociendo, indica el fin de la misma).



Ejemplo

- Sea $L_1 = \{\omega c \omega^R / \omega \in \{a,b\}^*\}$
- La idea es tener dos estados
 - Estado de leer y “marcar” en la pila la cadena ω (marco con una X las a y con Y las b)
 - Estado de confirmar que la cadena después de la c sea ω^R por coincidencia con lo guardado en la pila (que iremos vaciando)
 - El carácter c nos sirve para hacer el cambio de estado. No altera la pila.



Tabla de Movimientos

- $APD = (\{e_0, e_1, e_2\}, \{a, b, c\}, \{\$, X, Y\}, TM, e_0, \$, \{e_2\})$

TM	a	b	c	fdc
e0,\$	e0,X\$	e0,Y\$	e1,\$	-
e0,X	e0,XX	e0,YX	e1,X	-
e0,Y	e0,XY	e0,YY	e1,Y	-
e1,X	e1, ϵ	-	-	-
e1,Y	-	e1, ϵ	-	-
e1,\$	-	-	-	e2,\$



Por Pila Vacía

TM	a	b	c	fdc
e0,\$	e0,X\$	e0,Y\$	e1,\$	-
e0,X	e0,XX	e0,YX	e1,X	-
e0,Y	e0,XY	e0,YY	e1,Y	-
e1,X	e1, ϵ	-	-	-
e1,Y	-	e1, ϵ	-	-
e1,\$	-	-	-	e1, ϵ



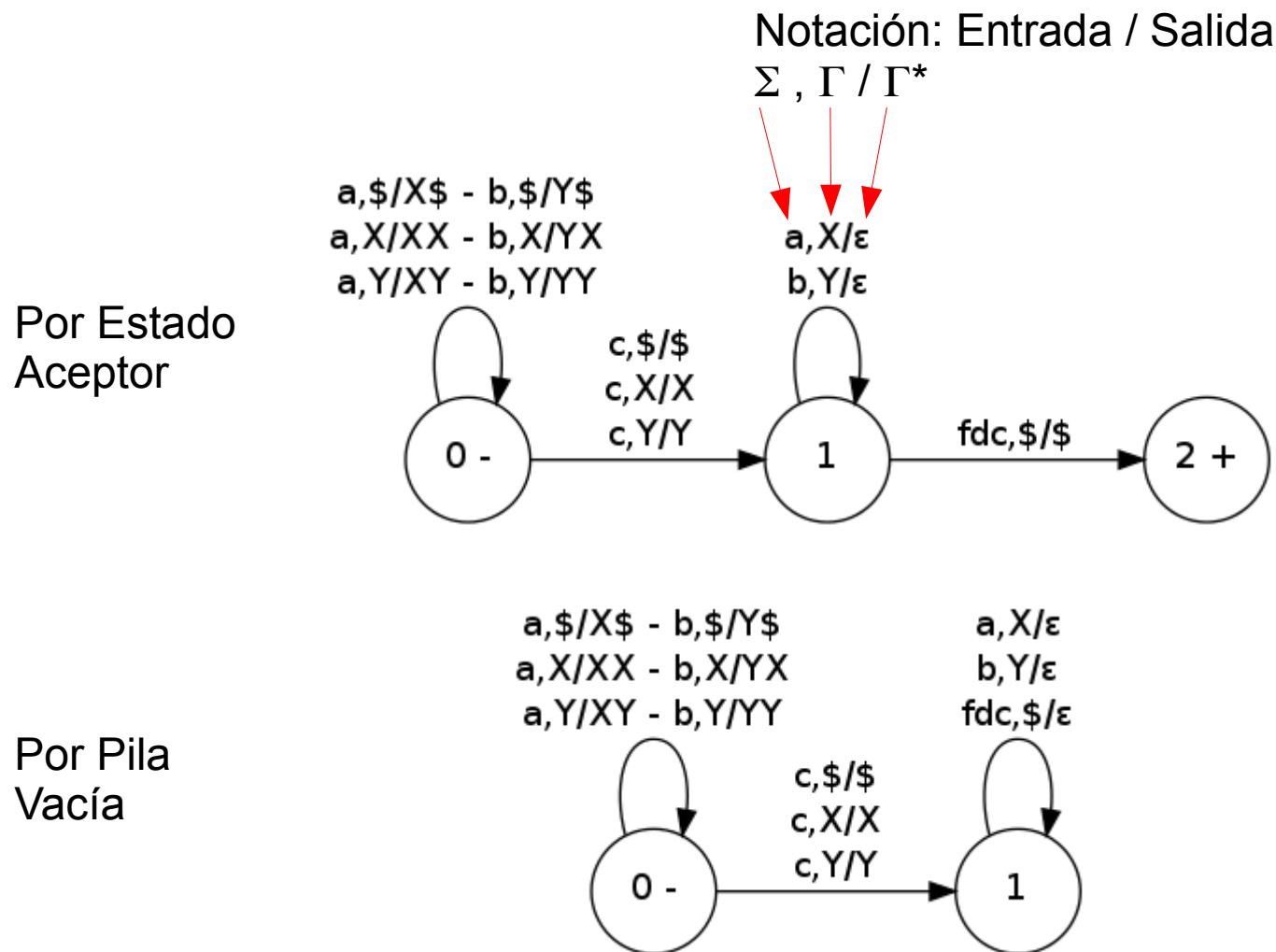
Caso abbcbbba

Cadena	Pila	Estado
abbcbbba	\$	0
bbcbba	X \$	0
bcbbba	Y X \$	0
cbba	Y Y X \$	0

Cadena	Pila	Estado
bba	Y Y X \$	1
ba	Y X \$	1
a	X \$	1
Est. Final	\$	2
Pila Vacía	ϵ	1



Diagramas de Transición Notación Habitual





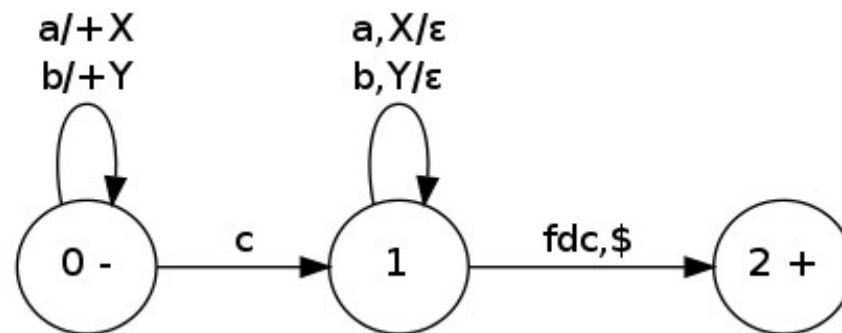
Notación Alternativa

- Notación General: $\Sigma, \Gamma / \Gamma^*$ Ejemplo: $a, Y / XY$
- Push: Repongo el elemento al tope pila, lo indico con un + delante de Γ^*
 - $\Sigma, \Gamma / +\Gamma^*$ Ejemplo: $a, Y / +X$
- Si en la entrada solo indico Σ implica para todo elemento de Γ
 - Σ / Γ^* Ejemplo: $a / +X$
- Si solo escribo la entrada implica que la pila queda inalterada
 - Σ, Γ Ejemplo: a, Y
 - Σ Ejemplo: a

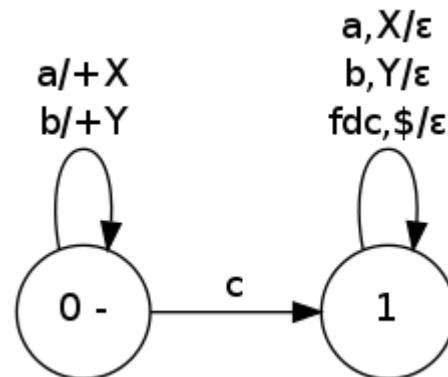


Diagramas de Transición Notación Alternativa

Por Estado
Aceptor



Por Pila
Vacía





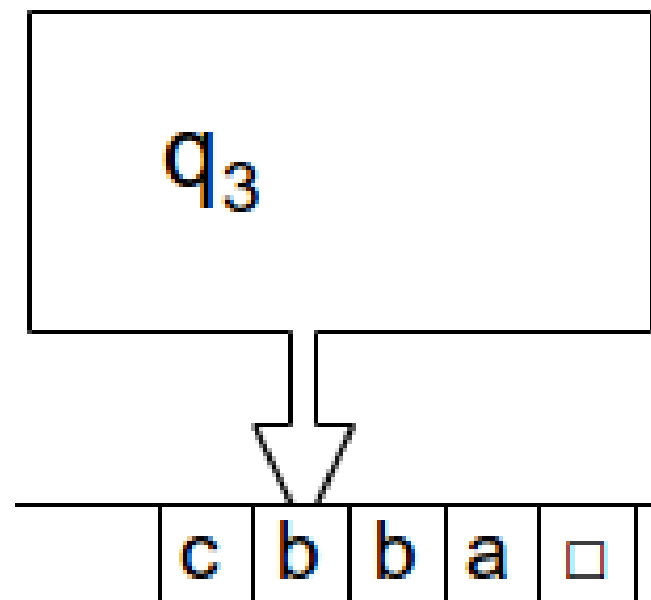
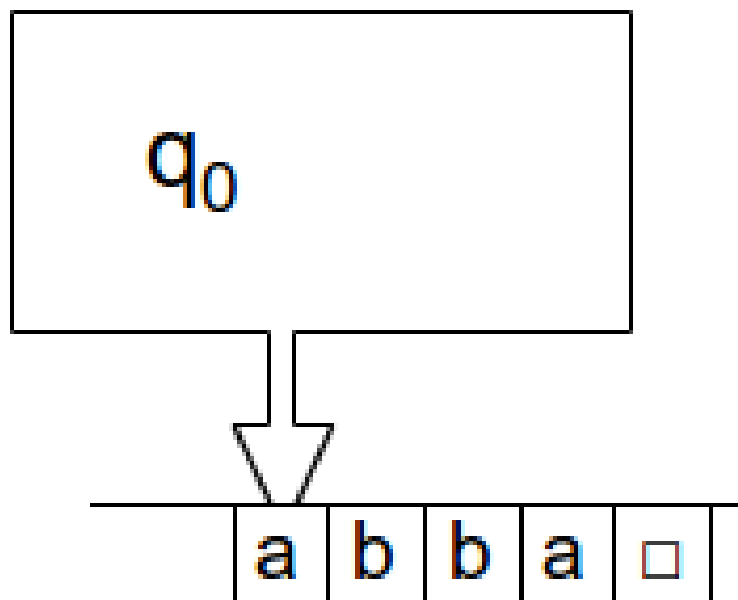
Máquina de Turing

- Es un autómatata que se define formalmente como una 7-upla $(Q, \Sigma, \Gamma, T, q_0, B, F)$ Donde:
 - Q : Conjunto de estados
 - Σ : Alfabeto terminal
 - Γ : Alfabeto de cinta
 - $\Gamma = \Sigma \cup B \cup \text{Alfabeto auxiliar ("no terminal")}$
 - $\text{Alfabeto auxiliar} \cap \Sigma = \emptyset$
 - $T : Q \times \Gamma \rightarrow Q \times \Gamma \times \{L, D\}$
 - q_0 : Estado inicial
 - B : Carácter blanco (pertence a Γ)
 - F : Conjunto de estados aceptores



Esquema

$$T(q_0, a) = (q_3, c, D)$$





Descripción del programa

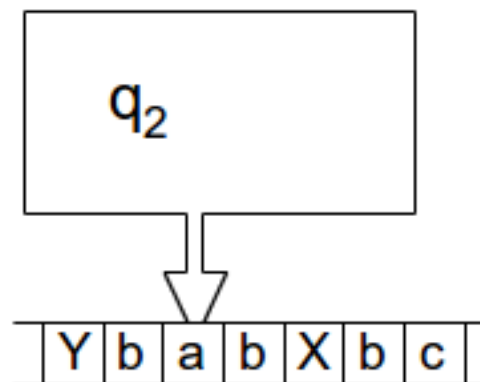
- Tipo actividad (como en el libro de la cátedra):
 - Estado actual – carácter leído, carácter escrito, dirección – Nuevo estado
 - Ejemplo: $e_0 - a, X, R - e_1$
- Tipo tabla:
 - Una fila por cada estado
 - Un elemento de Γ por cada columna (carácter leído)
 - En la intersección:
 - El nuevo estado
 - El carácter a escribir
 - El movimiento

T	a	b
e0	e1,X,D	...
e1



Descripción instantánea

- Se hace mostrando el estado a la izquierda del próximo carácter a leer



Descripción Instantánea

Yb q_2 abXbc



Ejemplo $L = \{ a^n b^n c^n / n \geq 1 \}$

- Estado 0: Marca una **a** con **X** y pasa a estado 1 para buscar la **b** correspondiente. Si se encuentra con **Y** pasa a estado 6 para confirmar que todo cierre bien y terminar
- Estado 1: Salta las **a**, hasta encontrar **b**, que marca con **Y** y pasa a estado 2. Si encuentra **Y** pasa a estado 4
- Estado 2: Salta las **b**, hasta encontrar **c**, que marca con **Z** y pasa a estado 3 para una nueva ronda. Si encuentra **Z** pasa a estado 5
- Estado 3: Viaja hacia atrás para un nuevo ciclo, hasta encontrar una **X**, entonces pasa a estado 0
- Estado 4: Saltea las **Y** previamente convertidas, hasta encontrar una **b** que marca con **Y**, y pasa a estado 2
- Estado 5: Saltea las **Z** previamente convertidas, hasta encontrar una **c**, que marca con **Z** y pasa a estado 3 para una nueva ronda
- Estado 6: Saltea las **Y** (se terminaron las a), hasta una **Z** y pasa a estado 7
- Estado 7: Saltea las **Z** hasta encontrar \square y pasa a estado final



Tabla del ejemplo

$$L = \{ a^n b^n c^n / n \geq 1 \}$$

	a	b	c	X	Y	Z	□
e0	e1,X,D	-	-	-	e6,Y,D	-	-
e1	e1,a,D	e2,Y,D	-	-	e4,Y,D	-	-
e2	-	e2,b,D	e3,Z,I	-	-	e5,Z,D	-
e3	e3,a,I	e3,b,I	-	e0,X,D	e3,Y,I	e3,Z,I	-
e4	-	e2,Y,D	-	-	e4,Y,D	-	-
e5	-	-	e3,Z,I	-	-	e5,Z,D	-
e6	-	-	-	-	e6,Y,D	e7,Z,D	-
e7	-	-	-	-	-	e7,Z,D	e8+,□,I



Ejemplo aaabbbccc (1)

Descripción automática	Transición
e_0 aaabbbccc□	e_1, X, D
Xe_1 aabbbccc□	e_1, a, D
Xae_1 abbbccc□	e_1, a, D
$Xaae_1$ bbbbbccc□	e_2, Y, D
$XaaYe_2$ bbbbbccc□	e_2, b, D
$XaaYbe_2$ bbbbbccc□	e_2, b, D
$XaaYbbe_2$ ccccc□	e_3, Z, I
$XaaYbe_3$ bbZcc□	e_3, b, I
$XaaYe_3$ bbZcc□	e_3, b, I
$Xaae_3$ YbbZcc□	e_3, Y, I



Ejemplo aaabbbccc (2)

Descripción automática	Transición
Xa e₃ aYbbZcc□	e ₃ ,a,I
X e₃ aaYbbZcc□	e ₃ ,a,I
e₃ XaaYbbZcc□	e ₀ ,X,D
X e₀ aaYbbZcc□	e ₁ ,X,D
XX e₁ aYbbZcc□	e ₁ ,a,D
XXa e₁ YbbZcc□	e ₄ ,Y,D
XXaY e₄ bbZcc□	e ₂ ,Y,D
XXaYY e₂ bZcc□	e ₂ ,b,D
XXaYYb e₂ Zcc□	e ₅ ,Z,D
XXaYYbZ e₅ cc□	e ₃ ,Z,I



Ejemplo aaabbbccc (3)

Descripción automática	Transición
XXaYYb e₃ ZZc□	e ₃ ,Z,I
XXaYY e₃ bZZc□	e ₃ ,b,I
XXaY e₃ YbZZc□	e ₃ ,Y,I
XXa e₃ YbZZc□	e ₃ ,Y,I
XX e₃ aYYbZZc□	e ₃ ,a,I
X e₃ XaYYbZZc□	e ₀ ,X,D
XX e₀ aYYbZZc□	e ₁ ,X,D
XXX e₁ YbZZc□	e ₄ ,Y,D
XXX e₄ YbZZc□	e ₄ ,Y,D
XXXYY e₄ bZZc□	e ₂ ,Y,D



Ejemplo aaabbbccc (4)

Descripción automática	Transición
XXXYYYe ₂ ZZc□	e ₅ ,Z,D
XXXYYYZe ₅ Zc□	e ₅ ,Z,D
XXXYYYZZe ₅ c□	e ₃ ,Z,I
XXXYYYZe ₃ ZZ□	e ₃ ,Z,I
XXXYYYe ₃ ZZZ□	e ₃ ,Z,I
XXXYYe ₃ YZZZ□	e ₃ ,Y,I
XXXYe ₃ YZZZ□	e ₃ ,Y,I
XXXe ₃ YYZZZ□	e ₃ ,Y,I
XXe ₃ YZZZ□	e ₀ ,X,D
XXXe ₀ YYZZZ□	e ₆ ,Y,D



Ejemplo aaabbbccc (5)

Descripción automática	Transición
XXX Y _{e₆} Y _Y ZZZ□	e ₆ ,Y,D
XXXYY e₆ _Y ZZZ□	e ₆ ,Y,D
XXXYYY e₆ _Z ZZ□	e ₇ ,Z,D
XXXYYYZ e₇ _Z □	e ₇ ,Z,D
XXXYYYZZ e₇ _Z □	e ₇ ,Z,D
XXXYYYZZZ e₇ _□	e ₈₊ ,□,I
XXXYYYZZZe ₈ Z□	Acepta



Licencia

*Esta obra, © de Eduardo Zúñiga, está protegida legalmente bajo una licencia Creative Commons, **Atribución-CompartirDerivadasIgual 4.0 Internacional**.*

<http://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/>

***Se permite: copiar, distribuir y comunicar públicamente la obra; hacer obras derivadas y hacer un uso comercial de la misma.
Siempre que se cite al autor y se herede la licencia.***

