DIFERENCIABILIDAD DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

En AMI se estudia la relación de la derivabilidad de una función escalar con las características que tiene dicha función: si una función escalar es derivable en un punto interior de su dominio será continua en dicho punto, y además, su gráfica será una curva suave (sin “picos” ni puntos angulosos).

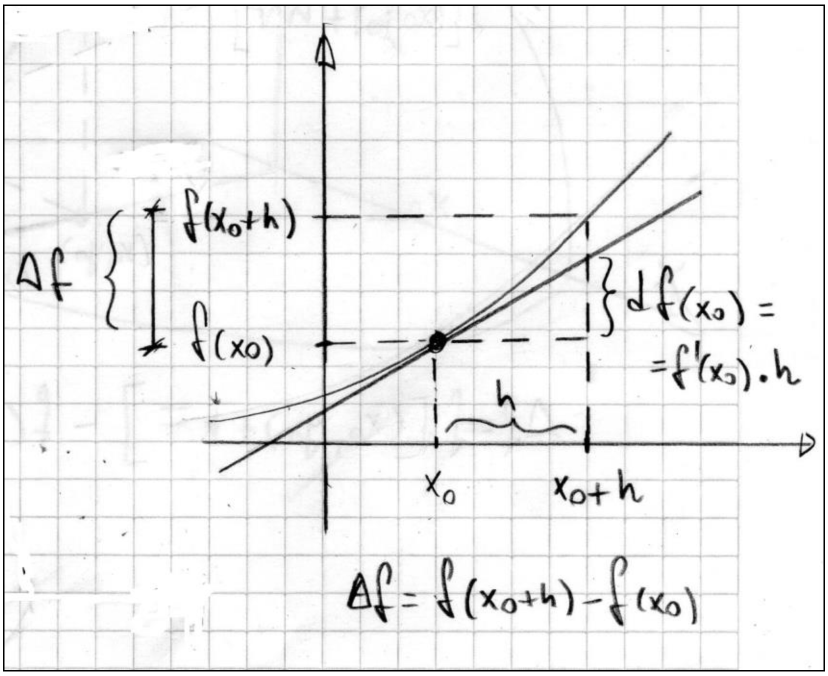
En AMII para funciones de varias variables, puede demostrarse que una función derivable en toda dirección y sentido, no necesariamente es continua. Vimos como ejemplo las funciones de los ejercicios 7) y 11)b) del TP4.

Para garantizar la continuidad de una función de varias variables debemos analizar más en profundidad la propiedad de diferenciabildad. Asimismo, para que la gráfica de un campo escalar no tenga “esquinas” o “picos” deberá tener bien definido un plano tangente en cada punto de la superficie gráfica, así como las funciones escalares de AMI con gráficas suaves tienen definida la recta tangente en cada punto. En este sentido, la diferenciabilidad de un campo escalar asegurará la existencia de ese plano tangente.

Funciones escalares diferenciables: repaso

Sea la función $f: D \subset R \to R$, y sea x_0 punto interior de *D,* definimos la diferencial de f en x_0:

$$d\, f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) = f'(x_0)\, h \quad \text{siendo} \quad x = x_0 + h$$



En este caso, resulta que $d\, f(x_0)$ es una buena aproximación del incremento de la función $\Delta f = f(x_0 + h) - f(x_0)$ en un entorno de x_0. Por lo tanto, para las funciones escalares podemos decir que dada $f: D \subset R \to R$ y x_0 punto interior de *D, f* es diferenciable si existe su derivada $f'(x_0)$, ya que la diferencial es el producto de la derivada en el punto por el incremento en la variable *x*. Por ello, una función escalar es diferenciable en x_0 , si existe el siguiente límite que define la derivada:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = L$$

Para generalizar la definición de diferenciabilidad a funciones de varias variables, vamos a operar algebraicamente con el límite anterior:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=L \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-L=0$$

Por ser L un número real resulta $\lim_{x\to x_0} L=L$. Entonces:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-L=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-\lim_{x\to x_0} L=0 \Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}\left(\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}-L\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)-L(x-x_0)}{x-x_0}=0$$

Si el límite de una función tiende a cero, el límite de su módulo también tenderá a cero. Por lo tanto podemos decir que:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{|\,f(x)-f(x_0)-L(x-x_0)|}{|\,x-x_0|}=0 \qquad (1)$$

Esta expresión es la que se desea generalizar. Tengamos en cuenta que, siendo L una constante fija, si hacemos $h=x-x_0$, la diferencial de una función escalar $d\,f(x_0)=f'(x_0)(x-x_0)=f'(x_0)\,h=L.h$ define una transformación lineal de R en R. Por ello, el límite (1) expresa el hecho de que el incremento de la función $f(x)-f(x_0)$ puede aproximarse mediante la transformación lineal $L.h=L(x-x_0)$ en un entorno de x_0, con un error que puede hacerse arbitrariamente pequeño aún cuando se divida por $|\,x-x_0|$.

Este concepto tiene sentido cuando $\overline{f}$ es un campo vectorial, y permite extender el concepto de diferenciabilidad para dichos campos.

Definición

Sea el campo vectorial $\overline{f}:D\subset R^n\to R^m$, y sea X_0 punto interior de D. Se dice que $\overline{f}$ es diferenciable en X_0 si existe una transformación lineal $L:R^n\to R^m$ de modo que se verifique que:

$$\lim_{X\to X_0}\frac{\|\,\overline{f}(X)-\overline{f}(X_0)-L(X-X_0)\,\|}{\|\,X-X_0\,\|}=0$$

Si analizamos el límite anterior tenemos que :

$$\lim_{X\to X_0}\frac{\|\,\overbrace{\overline{f}(X)-\overline{f}(X_0)}^{\Delta\overline{f}}-\overbrace{L(X-X_0)}^{\text{transf. lineal}}\,\|}{\|\,X-X_0\,\|}=0$$

La transformación lineal L es una muy buena aproximación del incremento de la función, ya que la diferencia entre ambos tiende a 0 aún cuando se divide dicha diferencia por otra función que tiende a 0.

El siguiente paso es determinar cuál es la matriz asociada a la transformación lineal L con respecto a las bases canónicas. Vamos a enunciar un teorema que nos indica que dicha matriz es la matriz Jacobiana del campo $\overline{f}$.

Teorema

Sea el campo vectorial $\overline{f}: D \subset R^n \to R^m \,/\, \overline{f}(X) = (f_1(X), f_2(X), ..., f_i(X), ..., f_m(X))$ y sea X_0 punto interior de *D*. Si $\overline{f}$ es diferenciable en X_0, entonces la matriz asociada a la transformación lineal $L: R^n \to R^m$ en las bases canónicas está dada por:

$$D\overline{f}(X_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(X_0) & \frac{\partial f_1}{\partial x_2}(X_0) & .... & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(X_0) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1}(X_0) & \frac{\partial f_2}{\partial x_2}(X_0) & .... & \frac{\partial f_2}{\partial x_n}(X_0) \\ \vdots & \vdots & .... & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(X_0) & \frac{\partial f_m}{\partial x_2}(X_0) & .... & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(X_0) \end{pmatrix}$$

Esta matriz se denomina matriz Jacobiana de $\overline{f}$ en X_0.

Analizaremos los casos particulares que se presentan para la matriz de la transformación lineal $L: R^n \to R^m$, según sean las distintas posibilidades para las dimensiones de los espacios vectoriales.

1) $\overline{f}$ **es función vectorial (n = 1 $\wedge$ m $\geq$ 2)**

Siendo $\overline{f}: D \subset R \to R^m \,/\, \overline{f}(t) = (f_1(t), f_2(t), ..., f_m(t))$ la transformación lineal asociada será $L: R \to R^m$. En este caso, la matriz asociada a *L* es una matriz de $m \times 1$ (es decir, *m* filas y 1 columna). Por lo tanto:

$$D\overline{f}(x_0) = \begin{pmatrix} f_1'(x_0) \\ f_2'(x_0) \\ \vdots \\ f_m'(x_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_1'(x_0) & f_2'(x_0) & \cdots & f_m'(x_0) \end{pmatrix}^{\mathrm{T}} = \left(\overline{f}'(x_0)\right)^T$$

2) f **es un campo escalar (n $\geq$ 2 $\wedge$ m = 1)**

Siendo $f: D \subset R^n \to R$ la transformación lineal asociada será $L: R^n \to R$. En este caso, la matriz asociada a *L* es una matriz de $1 \times n$ (es decir, 1 fila y *n* columnas). Por lo tanto:

$$Df(X_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(X_0) & \frac{\partial f}{\partial x_2}(X_0) & .... & \frac{\partial f}{\partial x_n}(X_0) \end{pmatrix} = \nabla f(X_0)$$

Teorema (diferenciabilidad componente a componente)

Sea $\overline{f}: D \subset R^n \to R^m \,/\, \overline{f}(X) = (f_1(X), f_2(X), ..., f_i(X), ..., f_m(X))$, y sea X_0 punto interior de *D*.

$\overline{f}$ es diferenciable en $X_0 \Leftrightarrow f_i$ es diferencialbe en X_0 ($\forall\, i$ con $1 \leq i \leq m$)

Teorema (las funciones diferenciables son continuas)

Sea $\overline{f}: D \subset R^n \to R^m$, y sea X_0 punto interior de *D*. Si $\overline{f}$ es diferenciable en X_0, entonces $\overline{f}$ es continua en X_0.

Demostración:

Si $\overline{f}$ es diferenciable en X_0, entonces se cumple que:

$$\lim_{X \to X_0} \frac{\| \overline{f}(X) - \overline{f}(X_0) - D\overline{f}(X_0)(X - X_0) \|}{\| X - X_0 \|} = 0$$

Recordemos el teorema que dice:

Sean las funciones $g: D \subset R^n \to R$ y $h: D \subset R^n \to R$, y sea X_0 punto interior de *D*. Si $\lim_{X \to X_0} \frac{g(X)}{h(X)} = 0$ y además existe $\lim_{X \to X_0} h(X) = 0$, entonces resulta necesariamente $\lim_{X \to X_0} g(X) = 0$

(Si el límite de un cociente de infinitésimos es cero, entonces el infinitésimo del numerador tiende más rápidamente a cero que el del denominador, es decir que el numerador será un infinitésimo de mayor orden que el denominador).

Teniendo en cuenta el teorema anterior, y sabiendo que $\lim_{X \to X_0} \| X - X_0 \| = 0$, podemos afirmar que:

$$\lim_{X \to X_0} \left\| \overline{f}(X) - \overline{f}(X_0) - D\overline{f}(X_0)(X - X_0) \right\| = 0$$

Si el límite de la norma de un vector tiende a 0, dicho vector tenderá necesariamente al vector nulo. Por lo tanto:

$$\lim_{X \to X_0} [\, \overline{f}(X) - \overline{f}(X_0) - D\overline{f}(X_0)(X - X_0)\,] = \overline{0}$$

Aplicando álgebra de límites, sabemos que el límite de la resta es igual a la resta de los límites, por lo que:

$$\lim_{X \to X_0} \overline{f}(X) - \lim_{X \to X_0} \overline{f}(X_0) - \lim_{X \to X_0} D\overline{f}(X_0)(X - X_0) = \overline{0} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{X \to X_0} \overline{f}(X) = \overline{0} + \lim_{X \to X_0} \overline{f}(X_0) + \lim_{X \to X_0} D\overline{f}(X_0)(X - X_0)$$

Aplicando nuevamente álgebra de límites para el producto de funciones resulta que:

$$\lim_{X \to X_0} \overline{f}(X) = \overline{0} + \lim_{X \to X_0} \overline{f}(X_0) + \lim_{X \to X_0} D\overline{f}(X_0) \,.\, \lim_{X \to X_0} (X - X_0)$$

Tengamos en cuenta que tanto $\overline{f}(X_0)$ como $D\overline{f}(X_0)$ son constantes. Por lo tanto $\lim_{X \to X_0} \overline{f}(X_0) = \overline{f}(X_0) \;\wedge\; \lim_{X \to X_0} D\overline{f}(X_0) = D\overline{f}(X_0)$. Además el $\lim_{X \to X_0} (X - X_0) = \overline{0}$. Aplicando estos conceptos resulta:

$$\lim_{X \to X_0} \overline{f}(X) = \overline{f}(X_0) + D\overline{f}(X_0) \,.\, \overline{0} \quad \Rightarrow \quad \lim_{X \to X_0} \overline{f}(X) = \overline{f}(X_0)$$

Esta última igualdad confirma que $\overline{f}$ es continua en X_0 ya que el límite de la función con $X \to X_0$ coincide con $\overline{f}(X_0)$, el valor de la función en el punto considerado.

Si una función es diferenciable en un punto interior de su dominio, es continua en dicho punto. Sin embargo el teorema recíproco no es válido: una función puede ser continua en un punto y no ser diferenciable en dicho punto.

Como en todo teorema, es válido su contrarecíproco: si la función no es continua en un punto interior de su dominio, entonces no es diferenciable en dicho punto.

$$\overline{f} \text{ diferenciable en } X_0 \Rightarrow \overline{f} \text{ continua en } X_0 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{f} \ \underline{\textbf{no}} \text{ continua en } X_0 \Rightarrow \overline{f} \ \underline{\textbf{no}} \text{ diferenciable en } X_0$$

Este teorema contrarecíproco es muy aplicado en el análisis de la diferenciabilidad de una función de varias variables. Si sabemos que una función es discontinua en un punto interior de su dominio, entonces no será diferenciable en dicho punto.

Ejemplo: TP5 ejercicio 4)a)
En los siguientes casos analice la derivabilidad en distintas direcciones y la diferenciabilidad de la función en el origen de coordenadas

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x+y} & si \ \ x+y \neq 0 \\ 0 & si \ \ x+y = 0 \end{cases}$$ Observe que f no es continua en (0 , 0)

4)a) Analizo derivabilidad en $\overline{0}$

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4}{x+y} & si \ \ x+y \neq 0 \\ 0 & si \ \ x+y = 0 \end{cases}$$

$\vec{v} = (a,b) \,/\, a^2+b^2 = 1$

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f[(0,0)+h(a,b)] - \overbrace{f(0,0)}^{=0}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(ha,hb)}{h} \quad (*)$$

- Si $ha+hb = 0 \Rightarrow h(a+b) = 0 \Rightarrow a+b = 0$

$$(*) = \lim_{h \to 0} \frac{0}{h} = 0$$

- Si $ha+hb \neq 0 \Rightarrow a+b \neq 0$

$$(*) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h^4a^4}{ha+hb}}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h^{\cancel{4}\,2}a^4}{\cancel{h}(a+b)} \cdot \frac{1}{\cancel{h}} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h^2a^4}{a+b} = 0$$

f es derivable en toda dirección y sentido en el origen.

04)

a) $f(x,y) \begin{cases} \dfrac{x^4}{x+y} & \text{si } x+y \neq 0 \\ 0 & \text{si } x+y = 0 \end{cases}$

Analizo la diferenciabilidad por el "contrarrecíproco" (f no cont en $\bar{0} \Rightarrow$ f no dif en $\bar{0}$)

Veo la continuidad en (0,0)

i) $f(0,0) = 0$

ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \ ?$

$\underline{x+y=0}$ / $L_1 = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x+y=0}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x+y=0}} 0 = 0$ (A)

$\underline{x+y\neq 0}$ / $L_2 = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x+y\neq 0}} f(x,y) = \lim\limits_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ x+y\neq 0}} \dfrac{x^4}{x+y}$

sea $L_{2a} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4}{x + x^4 - x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^4}{x^4} = 1$ (B)

$x+y = x^4 \Rightarrow y = x^4 - x$

(A) $\neq$ (B) $\Rightarrow \nexists$ límite doble en $\bar{0} \Rightarrow$ f no es continua en $\bar{0} \Rightarrow$ f no es diferenciable en $\bar{0}$

f es derivable en toda dirección y sentido en $\bar{0}$, pero <u>no</u> es diferenciable en $\bar{0}$ (tampoco es continua)

Teorema (las funciones diferenciables son derivables en toda dirección y sentido)

Sea $\overline{f} : D \subset R^n \to R^m$, y sea X_0 punto interior de D. Si $\overline{f}$ es diferenciable en X_0, entonces $\overline{f}$ es derivable en toda dirección y sentido en X_0, y además $\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial \breve{v}}(X_0) = D\overline{f}(X_0) \cdot \breve{v}$

Demostración:

Si $\overline{f}$ es diferenciable en X_0, entonces se cumple que:

$$\lim_{X \to X_0} \frac{\| \overline{f}(X) - \overline{f}(X_0) - D\overline{f}(X_0)(X - X_0) \|}{\| X - X_0 \|} = 0$$

Recordemos el teorema que dice:

Sean las funciones $g : D \subset R^n \to R$ y $h : D \subset R^n \to R$, y sea X_0 punto interior de D. Si $\lim_{X \to X_0} \dfrac{g(X)}{h(X)} = 0$ y además existe $\lim_{X \to X_0} h(X) = 0$, entonces resulta necesariamente $\lim_{X \to X_0} g(X) = 0$

(Si el límite de un cociente de infinitésimos es cero, entonces en infinitésimo del numerador tiende más rápidamente a cero que el del denominador, es decir que el numerador será un infinitésimo de mayor orden que el denominador).

Teniendo en cuenta el teorema anterior, y sabiendo que $\lim_{X \to X_0} \| X - X_0 \| = 0$, podemos afirmar que:

$$\lim_{X \to X_0} \| \overline{f}(X) - \overline{f}(X_0) - D\overline{f}(X_0)(X - X_0) \| = 0$$

Si el límite de la norma de un vector tiende a 0, dicho vector tenderá necesariamente al vector nulo. Por lo tanto:

$$\lim_{X \to X_0} [\, \overline{f}(X) - \overline{f}(X_0) - D\overline{f}(X_0)(X - X_0) \,] = \overline{0}$$

Aplicando álgebra de límites, sabemos que el límite de la resta es igual a la resta de los límites, por lo que:

$$\lim_{X \to X_0} [\overline{f}(X) - \overline{f}(X_0)] - \lim_{X \to X_0} D\overline{f}(X_0)(X - X_0) = \overline{0} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{X \to X_0} [\overline{f}(X) - \overline{f}(X_0)] = \overline{0} + \lim_{X \to X_0} D\overline{f}(X_0)(X - X_0) \qquad (1)$$

Realizamos ahora la siguiente sustitución: $X = X_0 + H$

Hacemos $H = h\,\breve{v}$ siendo $h = \| H \|$ y $\breve{v}$ es el versor asociado al vector H.

Por lo tanto: $X = X_0 + h\,\breve{v}$ y además $X - X_0 = h\,\breve{v}$

Para realizar la sustitución en el límite, debemos considerar que:

$$X \to X_0 \quad \Rightarrow \quad X - X_0 \to \overline{0} \quad \Rightarrow \quad H \to \overline{0} \quad \Rightarrow \quad \| H \| \to 0 \quad \Rightarrow \quad h \to 0$$

Realizamos entonces la sustitución en el límite (1):

$$\lim_{h \to 0} \overline{f}(X_0 + h\,\breve{v}) - \overline{f}(X_0) = \lim_{h \to 0} D\overline{f}(X_0)\; h\breve{v}$$

Dividiendo miembro a miembro por h:

$$\lim_{h \to 0} \frac{\overline{f}(X_0 + h\,\breve{v}) - \overline{f}(X_0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{D\overline{f}(X_0)\,\cancel{h}\breve{v}}{\cancel{h}} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial \overline{f}}{\partial \breve{v}}(X_0) = D\overline{f}(X_0)\,\breve{v}$$

Si una función es diferenciable en un punto interior de su dominio, existirán todas las derivadas direccionales en dicho punto. Sin embargo el teorema recíproco no es válido: pueden existir todas las derivadas direccionales de una función en un punto, y sin embargo dicha función no ser diferenciable en el punto considerado.
Como en todo teorema, es válido su contrarecíproco: si la función no es derivable en toda dirección y sentido en un punto interior de su dominio, o su derivada direccional en dicho punto es distinta al producto de la matriz Jacobiana en el punto por el versor, entonces la función no es diferenciable en dicho punto.

$$\overline{f} \text{ diferenciable en } X_0 \Rightarrow \overline{f} \text{ derivable en } X_0 \quad \wedge \quad \frac{\partial \overline{f}}{\partial \breve{v}}(X_0) = D\overline{f}(X_0).\breve{v}$$

$$\Updownarrow$$

$$\overline{f} \; \underline{\textbf{no}} \text{ derivable en } X_0 \quad \vee \quad \frac{\partial \overline{f}}{\partial \breve{v}}(X_0) \neq D\overline{f}(X_0).\breve{v} \quad \Rightarrow \overline{f} \; \underline{\textbf{no}} \text{ diferenciable en } X_0$$

Este teorema contrarecíproco es muy aplicado en el análisis de la diferenciabilidad de una función de varias variables. Si sabemos que una función no es derivable en toda dirección y sentido en un punto interior de su dominio, entonces no será diferenciable en dicho punto. Si siendo derivable, el valor de la derivada direccional en un punto interior de su dominio es distinto al valor del producto de la matriz jacobiana por el versor correspondiente, entonces la función no es diferenciable en el punto.

Ejemplo: TP 5) ejercicio 2)

Siendo $f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{xy} & si\ \ xy\geq 0\\ x & si\ \ xy<0\end{cases}$ calcule $f'((0,0),(2,-1))$ aplicando la definición. Observe que en este caso $f'((0,0),(2,-1))\neq \nabla f(0,0).(2,-1)$ ¿Existe la derivada pedida? Si existe, ¿cuál es su valor? El campo escalar f, ¿es diferenciable en (0,0)?

2) $f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{xy} & si\ xy\geq 0\\ x & si\ xy<0\end{cases}$

$$f'[(0,0)(2,-1)]=\lim_{h\to 0}\frac{f[(0,0)+h(2,-1)]-\overbrace{f(0,0)}^{=0}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2h,-h)}{h}\underset{\uparrow}{=}\lim_{h\to 0}\frac{2\cancel{h}}{\cancel{h}}=2 \quad (*)$$

porque $2h.(-h)=-2h^2<0$ ($h\neq 0$ porque es la variable que tiende a 0)

$\nabla f(0,0)=[f'_x(0,0),\ f'_y(0,0)]$ Calculo las deriv. parciales por definición porque la función está "partida" en (0,0)

$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f[(0,0)+h(1,0)]-\overbrace{f(0,0)}^{=0}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f[(0,0)+h(0,1)]-\overbrace{f(0,0)}^{=0}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

Luego $\nabla f(0,0)=(0,0)\Rightarrow \nabla f(0,0).(2,-1)=0$ (*)

Por (*) resulta $f'[(0,0),(2,-1)]\neq \nabla f(0,0).(2,-1)$ (A)

La derivada pedida existe y vale 2 (por definic)

El campo f no es dif en (0,0) por (A)

Caso particular: campos escalares

Si la función f es un campo escalar, es decir $f: D \subset R^n \to R$, siendo f diferenciable en un punto X_0 interior a su dominio, existen todas las derivadas direccionales de f en X_0 y pueden calcularse de la siguiente manera:

$$\frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(X_0) = \nabla f(X_0) \,.\, \breve{v}$$

Aplicando los conceptos aprendidos en relación al producto escalar de vectores podemos escribir:

$$\frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(X_0) = \nabla f(X_0) \,.\, \breve{v} = \| \nabla f(X_0) \| \, \| \breve{v} \| \cos\,\alpha = \| \nabla f(X_0) \| \,.\, 1 \,.\, \cos\alpha$$

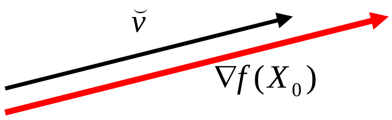
siendo α el ángulo comprendido entre ambos vectores, es decir entre $\nabla f(X_0)$ y $\breve{v}$, por lo que resulta $0 \le \alpha \le \pi$.

Tenemos entonces que: $\frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(X_0) = \| \nabla f(X_0) \| \cos\alpha$ (1)

1) *Derivada direccional máxima*

La expresión (1) será máxima cuando el $\cos\alpha$ sea máximo, ya que $\| \nabla f(X_0) \|$ es un número positivo. Por lo tanto, $\cos\alpha$ es máximo si $\cos\alpha = 1 \Rightarrow \alpha = 0$.

Siendo 0 el ángulo entre los vectores $\nabla f(X_0)$ y $\breve{v}$, geométricamente significa que ambos tienen la misma dirección y sentido.



Por ello podemos afirmar que si un campo escalar es diferenciable en un punto X_0 interior a su dominio, la derivada direccional será máxima en la dirección y sentido del gradiente del campo escalar en dicho punto.

$$\breve{v}_{\max ima\ en\ X_0} = \frac{\nabla f(X_0)}{\| \nabla f(X_0) \|}$$

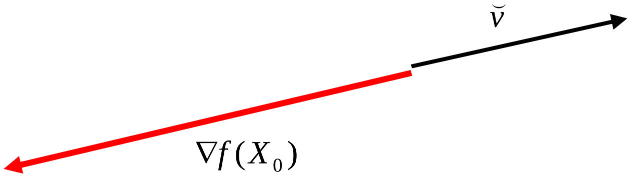
El valor de la derivada máxima en X_0 será:

$$f'_{\max ima}(X_0) = \| \nabla f(X_0) \| \underbrace{\cos\alpha}_{1} = \| \nabla f(X_0) \|$$

2) *Derivada direccional mínima*

La expresión (1) será mínima cuando el $\cos\alpha$ sea mínimo, ya que $\| \nabla f(X_0) \|$ es un número positivo. Por lo tanto, $\cos\alpha$ es mínimo si $\cos\alpha = -1 \Rightarrow \alpha = \pi$.

Siendo π el ángulo entre los vectores $\nabla f(X_0)$ y $\breve{v}$, geométricamente significa que ambos tienen la misma dirección y sentido opuesto.



Por ello podemos afirmar que si un campo escalar es diferenciable en un punto X_0 interior a su dominio, la derivada direccional será mínima en la dirección y sentido opuesto al gradiente del campo escalar en dicho punto.

$$\breve{v}_{\min ima\ en\ X_0} = -\frac{\nabla f(X_0)}{\|\nabla f(X_0)\|}$$

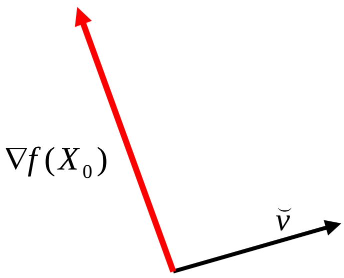
El valor de la derivada mínima en X_0 será:

$$f'_{\min ima}(X_0) = \|\nabla f(X_0)\| \underbrace{\cos\alpha}_{-1} = -\|\nabla f(X_0)\|$$

3) ***Derivada direccional nula***

La expresión (1) será nula cuando el $\cos\alpha$ sea nulo, ya que $\|\nabla f(X_0)\|$ es un número positivo. Por lo tanto, $\cos\alpha$ es nulo si $\cos\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi}{2}$.

Siendo $\dfrac{\pi}{2}$ el ángulo entre los vectores $\nabla f(X_0)$ y $\breve{v}$, geométricamente significa que ambos vectores son perpendiculares.



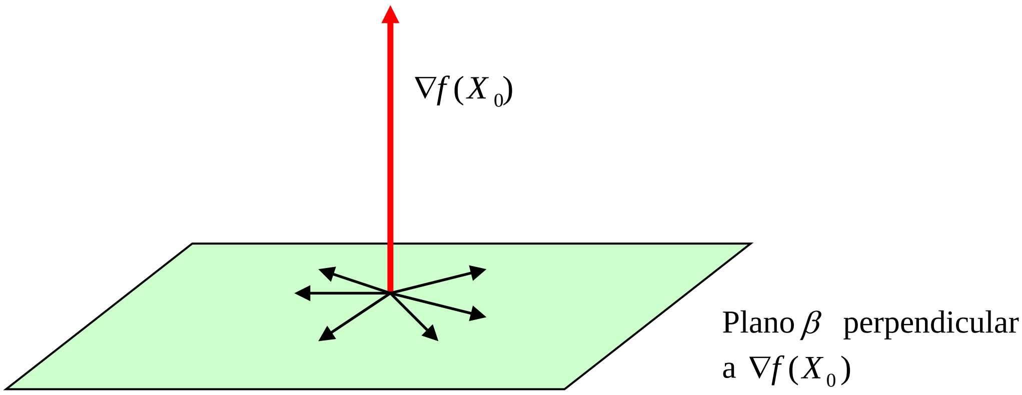
Por ello podemos afirmar que si un campo escalar es diferenciable en un punto X_0 interior a su dominio, la derivada direccional será nula en las direcciones y sentidos perpendiculares al gradiente del campo escalar en dicho punto.

Si el campo escalar está definido en un subconjunto de R^2, habrá dos direcciones de derivada nula, que resultan ser los dos versores perpendiculares al gradiente en el punto considerado.

Sabiendo que $\nabla f(X_0) = \left(\dfrac{\partial f}{\partial x}(X_0)\ ,\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(X_0)\right)$, los vectores perpendiculares al anterior serán $\left(-\dfrac{\partial f}{\partial y}(X_0)\ ,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(X_0)\right)$ y $\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(X_0)\ ,\ -\dfrac{\partial f}{\partial x}(X_0)\right)$. Por lo tanto:

$$\breve{v}_{nula\ en\ X_0} = \frac{\left(-\dfrac{\partial f}{\partial y}(X_0)\ ,\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(X_0)\right)}{\left\|\nabla f(X_0)\right\|} \qquad \text{o} \qquad \breve{v}_{nula\ en\ X_0} = \frac{\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}(X_0)\ ,\ -\dfrac{\partial f}{\partial x}(X_0)\right)}{\left\|\nabla f(X_0)\right\|}$$

Si el campo escalar está definido en un subconjunto de R^3, los versores asociados a la derivada nula serán los que yacen en el plano que tiene al gradiente en el punto considerado como vector normal.



Ejemplo: TP5) ejercicio 13)a)

Hallar las direcciones de derivada direccional máxima, mínima y nula de la siguiente función $f(x,y) = x^2 - xy^2$ en el punto A = (1 , 3)

Resolución:

f es un campo escalar diferenciable porque es una función polinómica, por lo cual la derivada máxima en (1,3) se produce en la dirección y sentido de $\nabla f(1,3)$ en dicho punto; la derivada mínima en (1,3) en la dirección y sentido opuesto de $\nabla f(1,3)$, y las derivadas nulas en las direcciones y sentidos perpendiculares a $\nabla f(1,3)$.

13) a) $\nabla f = (2x - y^2 , -2xy) \Rightarrow \nabla f(1,3) = (2-9, -2\cdot 3) \Rightarrow$

$\Rightarrow \nabla f(1,3) = (-7,-6)$

$\bar{v}_{máx} \rightarrow (-7,-6) \Rightarrow \breve{v}_{máx} = \frac{(-7,-6)}{\sqrt{49+36}} = \frac{(-7,-6)}{\sqrt{85}}$

$\bar{v}_{mín} \rightarrow (7,6) \Rightarrow \breve{v}_{mín} = \frac{(7,6)}{\sqrt{85}}$

$\bar{v}_{nula} \rightarrow (6,-7)$ y $(-6,7) \Rightarrow \breve{v}_{nula} \rightarrow \frac{(6,-7)}{\sqrt{85}}$ y $\frac{(-6,7)}{\sqrt{85}}$

TP5) Ejercicio 4)b) En los siguientes casos, analice la derivabilidad en distintas direcciones y la diferenciabilidad de la función en el origen de coordenadas

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & si \quad (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Verifique que en (0,0) la función tiene dos direcciones de derivada direccional máxima, y cuatro direcciones para las cuales la derivada resulta nula.

4)b)

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & si \ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si \ (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

Derivabilidad $\quad \check{v}=(a,b) \,/\, a^2+b^2=1$

$$\frac{\partial f}{\partial \check{v}}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f[(0,0)+h(a,b)]-\overbrace{f(0,0)}^{=0}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(ha,hb)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{h^2a^2\,hb}{h^2a^2+h^2b^2}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h^3}a^2b}{\cancel{h^2}\underbrace{(a^2+b^2)}_{=1}}\cdot\frac{1}{\cancel{h}}=a^2b$$

Es derivable en toda direcc y sentido

Diferenciabilidad

No se puede analizar trabajando con la continuidad, porque f es continua en (0,0) (infinitésimo por func acotada)

Opción A : Verifico si $\nabla f(0,0)\cdot\check{v}\neq f'(\bar{o},\check{v})$

$$\left.\begin{aligned}&\underbrace{f'_x(0,0)}_{\check{v}=(1,0)}=1^2\cdot 0=0\\ &\underbrace{f'_y(0,0)}_{\check{v}=(0,1)}=0^2\cdot 1=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow \nabla f(0,0)=\bar{o}$$

$\nabla f(0,0)\cdot\check{v}=\bar{o}\cdot\check{v}=0 \quad \forall\, \check{v}\in R^2$ Pero no todas las deriv direcc son nulas (P.ej, con $\check{v}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$)

Luego: $\nabla f(0,0)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\neq\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$

Como resulta $\nabla f(0,0)\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \neq f'\left(\bar{0},\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right) \Rightarrow$

$\Rightarrow f$ no es diferenciable en $(0,0)$

Opción B

Analizamos la cantidad de direcciones de derivada máxima y de derivada nula

Recordar: si la func. es diferenciable tiene solamente una direcc de deriv máxima y solamente dos direcc de deriv nula

$\frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(0,0) = a^2 b \qquad \breve{v} = (a;b) \,/\, a^2+b^2 = 1$

$a^2 b = 0 \begin{cases} a = 0 & \breve{v}_1 = (0,1) \quad \breve{v}_2 = (0,-1) \\ b = 0 & \breve{v}_3 = (1,0) \quad \breve{v}_4 = (-1,0) \end{cases}$

Hay 4 direcciones de deriv nula $\therefore$ f no es diferenc en $(0,0)$

$\frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(0,0) = a^2 b = (1-b^2)b = b - b^3$

Analizo los máximos de la función $g(b) = b - b^3$

$g'(b) = 1 - 3b^2 = 0 \Rightarrow 1 = 3b^2 \Rightarrow b = \pm\sqrt{1/3}$

$g''(b) = -6b \qquad g''\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) < 0 \rightarrow g\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ es máx local

$g''\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) > 0 \rightarrow g\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ es mín local

$a^2 = 1 - b^2$

Máx

$b = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow a^2 = 1 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \Rightarrow a^2 = \frac{2}{3} \Rightarrow |a| = \sqrt{\frac{2}{3}}$

$a_1 = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \check{v}_{1\,máx} = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

$a_2 = -\sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \check{v}_{2\,máx} = \left(-\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

f tiene dos direcciones de deriv máxima ($\check{v}_1$ y $\check{v}_2$) luego f no es diferenc en (0,0)

Funciones de clase C^1

Debido a que la diferenciabilidad de las funciones de varias variables es una propiedad tan importante, es necesario identificar bajo qué condiciones un campo vectorial es diferenciable en un punto interior de su dominio. Para ello, es necesario definir previamente el concepto de funciones de clase C^1.

Sea $\overline{f} : D \subset R^n \to R^m$, y sea X_0 punto interior de *D*. Si existen todas las derivadas parciales de $\overline{f}$ en X_0 y todas ellas son continuas en X_0, se dice que la función $\overline{f}$ es de clase C^1 en X_0.

Este concepto se generaliza definiendo que la función $\overline{f}$ es de clase C^1 en *D* si y solo si $\forall X_0 \in D$ se cumple que $\overline{f}$ es de clase C^1 en X_0.

Notación: $\overline{f}$ es de clase C^1 en *D* → $\overline{f} \in C^1$ en *D*

Teorema (condición necesaria de diferenciabilidad)

Sea $\overline{f} : D \subset R^n \to R^m$, y sea X_0 punto interior de *D*.

$$\overline{f} \in C^1 \text{ en } X_0 \Rightarrow \overline{f} \text{ es diferenciable en } X_0$$

El teorema recíproco no es válido.

Los teoremas más importantes de la diferenciabilidad se encadenan en el siguiente orden:

$\overline{f} \in C^1$ en $X_0 \Rightarrow \overline{f}$ es diferenciable en X_0 ⇒

- $\overline{f}$ es continua en X_0
- $\overline{f}$ es derivable en toda dirección y sentido en X_0, y además $\frac{\partial \overline{f}}{\partial \check{v}}(X_0) = D\overline{f}(X_0) \cdot \check{v}$

En todos los casos, los teoremas recíprocos no son válidos.

Diferencial total de un campo vectorial

Recordemos que una función $\overline{f}: D \subset R^n \to R^m$ es diferenciable en X_0 (punto interior de *D*) si se cumple que: $\lim_{X \to X_0} \dfrac{\| \overline{f}(X) - \overline{f}(X_0) - D\overline{f}(X_0)(X - X_0) \|}{\| X - X_0 \|} = 0$

Se define como diferencial total de $\overline{f}$ en X_0 a la parte lineal que aproxima el incremento de $\overline{f}$.

$$d\,\overline{f}(X_0) = D\overline{f}(X_0)(X - X_0)$$

Analizamos el caso particular en que f es un campo escalar, $f: D \subset R^2 \to R$, de modo que la matriz Jacobiana es el gradiente de la función.

$$df(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0)[(x, y) - (x_0, y_0)] = (\, f'_x(x_0, y_0)\,,\; f'_y(x_0, y_0)\,)(x - x_0, y - y_0)$$

$$df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\,(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)\,(y - y_0)$$

Si denominamos a los incrementos de las variables *x* e *y*: $dx = x - x_0 \quad \wedge \quad dy = y - y_0$

Tenemos que: $df(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\,dx + f'_y(x_0, y_0)\,dy$

Plano tangente a la superficie gráfica de un campo escalar

Sabiendo que el diferencial total $df(x_0, y_0)$ se corresponde con la transformación lineal que aproxima el incremento de la función para el campo escalar diferenciable f, es razonable definir el plano tangente a la superficie gráfica de f utilizando dicho concepto.

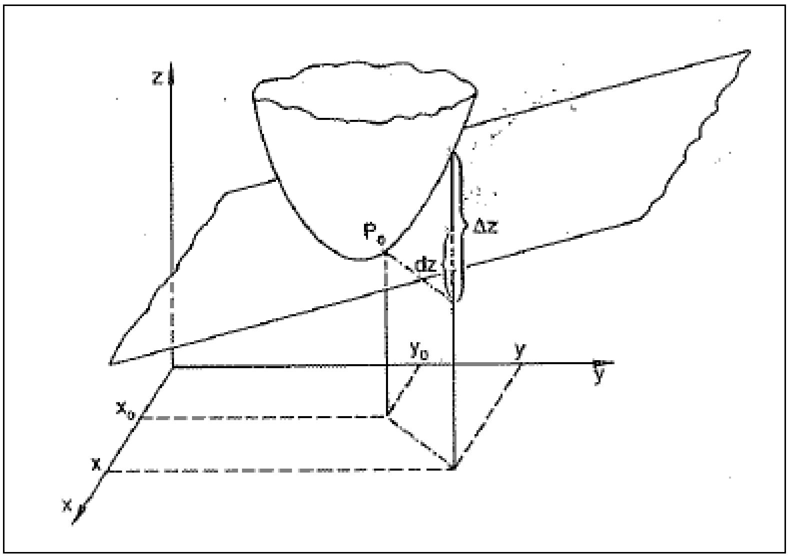
Definición: Sea $f: D \subset R^2 \to R$, y sea (x_0, y_0) un punto interior de *D*. Si f es diferenciable en (x_0, y_0), la ecuación del plano tangente a la superficie gráfica de f (de ecuación $z = f(x, y)$) en el punto (x_0, y_0, z_0) con $z_0 = f(x_0, y_0)$ es:

$$z - z_0 = f'_x(x_0, y_0)\,(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)\,(y - y_0)$$

Interpretación geométrica del diferencial total

La interpretación geométrica es análoga a la vista para funciones escalares en AMI, donde el diferencial indica el incremento hasta la recta tangente en lugar de hacerlo hasta la curva.

En este caso, en un entorno del punto (x_0, y_0), si se aproxima el incremento de la función mediante el diferencial total, se considera la altura hasta el plano tangente, en lugar de hacerlo hasta la superficie.

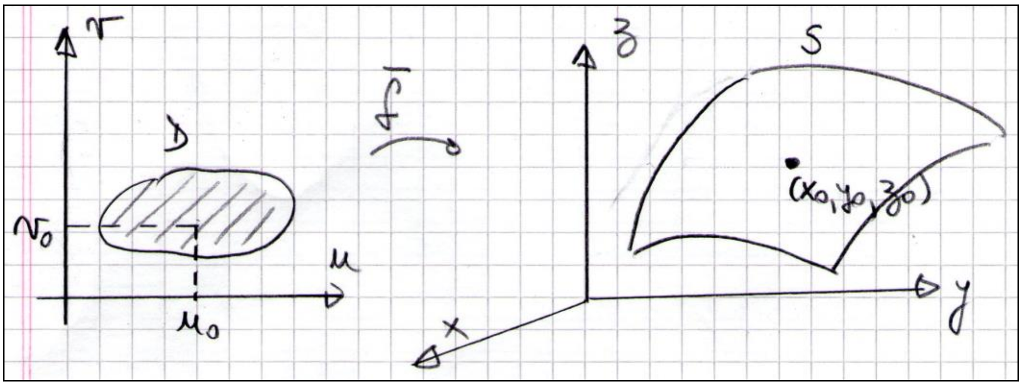


Suponemos $f : D \subset R^2 \to R$, (x_0, y_0) un punto interior de D, f diferenciable en (x_0, y_0). Notación usada en el gráfico: $dz = df$, $\Delta z = \Delta f$

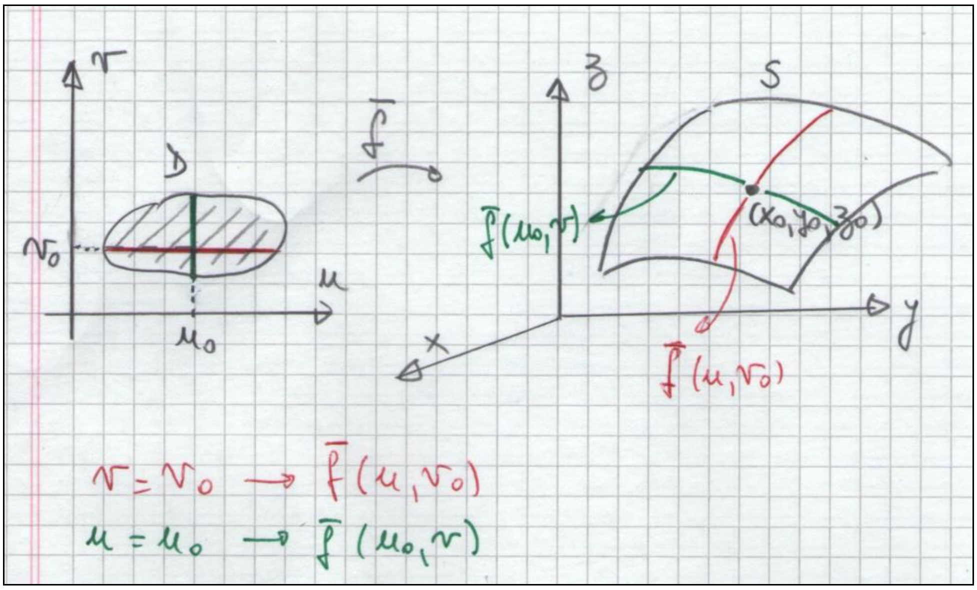
Superficies definidas en forma paramétrica: plano tangente y recta normal

Recordemos que una superficie se define como imagen de un campo vectorial $\overline{f} : D \subset R^2 \to R^3$, donde el dominio de la función es un conjunto conexo, y la función es continua en dicho dominio.

Consideremos por ejemplo un campo vectorial $\overline{f} : D \subset R^2 \to R^3$, donde (u_0, v_0) es un punto interior de su dominio, de modo que $(x_0, y_0, z_0) = \overline{f}(u_0, v_0)$ es un punto que pertenece a la superficie S asociada a $\overline{f}$ (como se indica en la figura)



Podemos analizar la imagen de los segmentos $u = u_0$ y $v = v_0$, con lo cual obtenemos las líneas coordenadas $\overline{f}(u_0, v)$ y $\overline{f}(u, v_0)$, que son curvas incluidas en la superficie S (apunte “1 Límite y continuidad”).

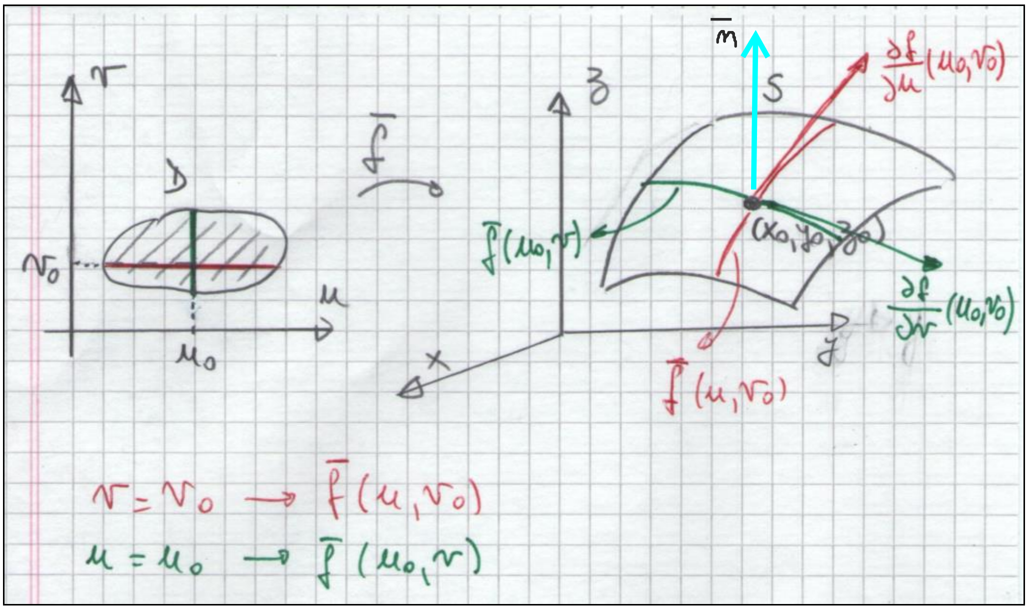


Si derivamos las funciones asociadas a las líneas coordenadas, obtendremos vectores tangentes a las mismas, ya que el vector derivado de la función vectorial asociada a una curva es tangente a dicha curva. Obtenemos entonces los vectores $\frac{\partial \bar f}{\partial u}(u_0,v_0)$ y $\frac{\partial \bar f}{\partial v}(u_0,v_0)$ que son tangentes en el punto (x_0,y_0,z_0) a dos curvas que se hallan sobre la superficie, y por lo tanto determinan el plano tangente a esa superficie en (x_0,y_0,z_0).

En este sentido, el producto vectorial entre los vectores $\frac{\partial \bar f}{\partial u}(u_0,v_0)$ y $\frac{\partial \bar f}{\partial v}(u_0,v_0)$ es un vector normal a la superficie en (x_0,y_0,z_0), y por ello es un vector director del plano tangente a la superficie en dicho punto.

Producto vectorial fundamental: $\bar n = \frac{\partial \bar f}{\partial u}(u_0,v_0) \times \frac{\partial \bar f}{\partial v}(u_0,v_0)$

Teniendo un vector normal al plano (el vector $\bar n$), y un punto que pertenece a dicho plano (el punto $(x_0,y_0,z_0) = \bar f(u_0,v_0)$) se podría determinar la ecuación del plano tangente a la superficie *S*.



Sin embargo, para que el plano tangente pueda estar bien definido, es necesario que el campo vectorial $\overline{f}$ sea derivable para obtener los vectores $\frac{\partial \overline{f}}{\partial u}(u_0, v_0)$ y $\frac{\partial \overline{f}}{\partial v}(u_0, v_0)$, cuyo producto vectorial $\overline{n}$ es el vector normal al plano. Por otro lado, es necesario que el vector director sea $\overline{n} \neq \overline{0}$. Por ello, debemos definir punto regular de una superficie para poder determinar luego la ecuación del planto tangente a la superficie en dicho punto.

Punto regular de una superficie

Sea $\overline{f}: D \subset R^2 \to R^3$ asociada a la superficie *S*, y sea (u_0, v_0) punto interior de *D*. Si se cumple que:

1) $\exists \frac{\partial \overline{f}}{\partial u}(u_0, v_0) \quad \wedge \quad \exists \frac{\partial \overline{f}}{\partial v}(u_0, v_0)$ y ambas derivadas son continuas en (u_0, v_0)
2) $\overline{n} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \overline{f}}{\partial v}(u_0, v_0) \neq \overline{0}$

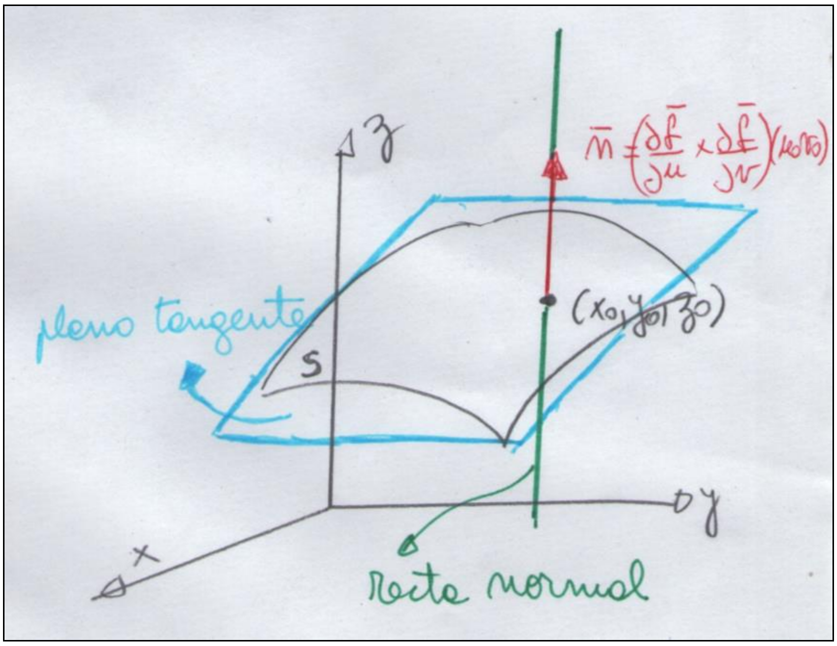
Entonces se dice que $\overline{f}(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$ es un punto regular de *S*.
Una superficie es regular cuando todos sus puntos son regulares.

Plano tangente y recta normal a una superficie

Sea $\overline{f}: D \subset R^2 \to R^3$ asociada a la superficie *S*, y sea (u_0, v_0) punto interior de *D*, de modo que $\overline{f}(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$ es un punto regular de *S*. Se define:

Plano tangente a *S* en (x_0, y_0, z_0) : $[(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)].\left(\frac{\partial \overline{f}}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \overline{f}}{\partial v}(u_0, v_0)\right) = 0$

Recta normal a *S* en (x_0, y_0, z_0) : $(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda\left(\frac{\partial \overline{f}}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \overline{f}}{\partial v}(u_0, v_0)\right) \quad (\lambda \in R)$



Ejercicio 11) Dada la superficie de ecuación $z = x^2 - xy^3 + x$, demuestre que todos sus puntos son regulares y halle aquellos puntos en los que el plano tangente es "horizontal" (paralelo al xy)

11) $z = x^2 - xy^3 + x$

Parametrizamos la sup:

$\bar{f}(x,y) = (x, y, x^2 - xy^3 + x)$

(1) $\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} = (1, 0, 2x - y^3 + 1)$

$\frac{\partial \bar{f}}{\partial y} = (0, 1, -3xy^2)$

Existen y son continuas en R^2 por tener componentes polinómicas

(2) $\frac{\partial \bar{f}}{\partial x} \wedge \frac{\partial \bar{f}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 1 & 0 & 2x - y^3 + 1 \\ 0 & 1 & -3xy^2 \end{vmatrix} =$

$= \check{i}(-2x + y^3 - 1) - \check{j}(-3xy^2) + \check{k}(1) =$

$= (-2x + y^3 - 1, 3xy^2, 1) \neq \bar{0} \quad \forall (x,y) \in R^2$

(porque su 3° componente es una cte $\neq$ de cero)

Por (1) y (2), todos los ptos de la sup son regulares

Plano tangente

$(x - x_0, y - y_0, z - z_0)(-2x_0 + y_0^3 - 1, 3x_0 y_0^2, 1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (-2x_0 + y_0^3 - 1)(x - x_0) + 3x_0 y_0^2 (y - y_0) + z - z_0 = 0$

Para que este plano sea paralelo al pl (xy), su ecuación debe ser del tipo $z = k$

Luego:

$\begin{cases} -2x_0 + y_0^3 - 1 = 0 & (1) \\ 3x_0 y_0^2 = 0 & (2) \end{cases} \Rightarrow x_0 = 0 \vee y_0 = 0$

reemp en (1): $x_0 = 0 \Rightarrow y_0^3 = 1 \Rightarrow y_0 = 1 \longrightarrow (x_0, y_0) = (0, 1)$

$y_0 = 0 \Rightarrow -2x_0 = 1 \Rightarrow x_0 = -\frac{1}{2} \longrightarrow (x_0, y_0) = \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

El plano tgte será horizontal en los ptos:

$\bar{A} = \bar{f}(0,1) = (0, 1, 0)$

$\bar{B} = \bar{f}\left(-\frac{1}{2}, 0\right) = \left(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{4}\right)$

11)

Otra forma plano tgte // pl (xy)

Dos planos son // si sus vectores normales son proporcionales

normal al pl (xy) $\rightarrow (0,0,1)$

normal al pl tgte a la sup $\rightarrow (-2x+y^3-1, 3xy^2, 1)$

Luego

$$(-2x+y^3-1, 3xy^2, 1) = k\,(0,0,1)$$

$$\begin{cases} -2x+y^3-1=0 \\ 3xy^2=0 \\ 1=k \rightarrow k=1 \end{cases}$$

son las mismas ecuaciones de la modalidad anterior

Ejercicio 17) Sea $f \in C^1$, si $f'(A,(3,4)) = 4 \wedge f'(A,(2,7)) = -6$

a) Calcular $f'(A,(5,9))$
b) Determinar el valor de la derivada direccional máxima de f en A.
c) Sabiendo que $f(A) = 3$, calcule en forma aproximada $f(A + (0.01, -0.02))$

17)

Como $f \in C^1$
$$\begin{cases} f'(\bar{A},(3,4)) = 4 \Rightarrow [f'_x(\bar{A}), f'_y(\bar{A})](3,4) = 4 \\ f'(\bar{A},(2,7)) = -6 \Rightarrow [f'_x(\bar{A}), f'_y(\bar{A})](2,7) = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 f'_x(\bar{A}) + 4 f'_y(\bar{A}) = 4 \\ 2 f'_x(\bar{A}) + 7 f'_y(\bar{A}) = -6 \end{cases} \Rightarrow f'_x(\bar{A}) = \frac{4 - 4f'_y(\bar{A})}{3}$$

$$2 \, \frac{4 - 4 f'_y(\bar{A})}{3} + 7 f'_y(\bar{A}) = -6 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(-\frac{8}{3} + 7\right) f'_y(\bar{A}) = -6 - \frac{8}{3}$$

$$\frac{13}{3} f'_y(\bar{A}) = -\frac{26}{3} \Rightarrow f'_y(\bar{A}) = -2$$

$$f'_x(\bar{A}) = \frac{4 - 4\cdot(-2)}{3} = 4$$

$$\nabla f(\bar{A}) = (4, -2)$$

a) $f'(\bar{A},(5,9)) = (4,-2)(5,9) = 20 - 18 = 2$

b) $f'_{\breve{v}_{max}}(\bar{A}) = \| \nabla f(A) \| = \| (4,-2) \| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = \boxed{2\sqrt{5}}$

17) c)

Aproximo el valor pedido mediante el plano tgte $\rightarrow z_P \cong f(A+(0{,}01\,;\,-0{,}02))$

$$z_P - z_0 = f'_x(A)\underbrace{(x-x_0)}_{0{,}01} + f'_y(A)\underbrace{(y-y_0)}_{-0{,}02}$$

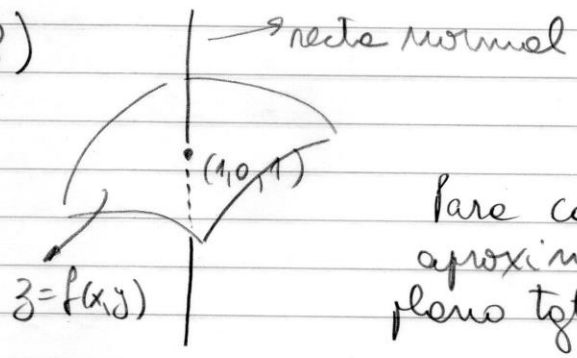
$z_0 = f(A) = 3$

$$z_P = 4 \cdot 0{,}01 + (-2)(-0{,}02) + 3 = 3{,}08$$

$$f(A+(0{,}01\,;\,-0{,}02)) \cong 3{,}08$$

Ejercicio 18) La recta determinada por la intersección de las superficies $y^2 = x^2 - z^2 \;\wedge\; z = x$ es normal a la superficie $z = f(x,y)$ en (1 , 0 , 1). Calcule aproximadamente $f(0.98\,,0.01)$

18)



$$\begin{cases} y^2 = x^2 - z^2 \\ z = x \end{cases}$$

Para calcular $f(0{,}98\,;\,0{,}01)$ aproximamos con z_P del plano tgte en $(1,0,1)$

El vector director del plano es el vector director de la recta normal

$$\begin{cases} y^2 = x^2 - z^2 \\ z = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y^2 = 0 \\ z = x \end{cases} \quad (x,y,z) = (x,0,x) = x\underbrace{(1,0,1)}_{\text{vector director recta}}$$

Plano tgte $\quad [(x,y,z)-(1,0,1)]\,(1,0,1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x - 1 + z - 1 = 0 \Rightarrow z_P = 2 - x$

$$f(0{,}98\,;\,0{,}01) \cong z_P(0{,}98\,;\,0{,}01) = 2 - 0{,}98 = 1{,}02$$

Ejercicio 20) Se sabe que el plano tangente a la superficie de ecuación $z = f(x, y)$ en el punto $(1 , 2 , z_0)$ es $2x + 3y + 4z = 1$. Con esta información, ¿es posible calcular la derivada direccional de f en el punto $(1 , 2)$ en la dirección que va hacia el punto $(3 , 4)$?

20) Si $z=f(x,y)$ tiene plano tgte en $(1,2,z_0)$, entonces f es diferenc. en $(1,2)$

Luego $\frac{\partial f}{\partial \check{v}}(1,2) = \nabla f(1,2)\cdot \check{v}$

Para identificar claramente las derivadas parciales en la ecuación del plano tgte tengamos en cuenta la ecuación:

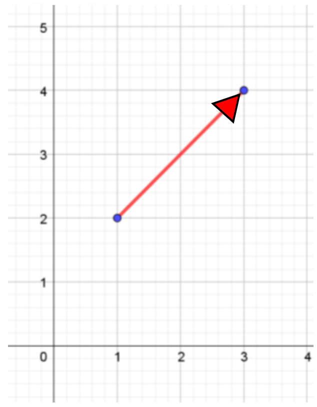
$$z-z_0 = f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

$$z = f'_x(x_0,y_0)\,x + f'_y(x_0,y_0)\,y + \underbrace{\left[-f'_x(\bar{x}_0)x_0 - f'_y(\bar{x}_0)y_0 + z_0\right]}_{\text{constante}}$$

Hay que llevar la ecuación del plano a esta forma para identificar las deriv parciales de f

$$2x+3y+4z=1 \Rightarrow z = \frac{1-2x-3y}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow z = \underbrace{-\frac{1}{2}}_{f'_x(1,2)}x \underbrace{-\frac{3}{4}}_{f'_y(1,2)}y + \frac{1}{4}$$



$$\bar{v} = (3,4)-(1,2) = (2,2) \Rightarrow \check{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}(1,2) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{5}{4\sqrt{2}}$$