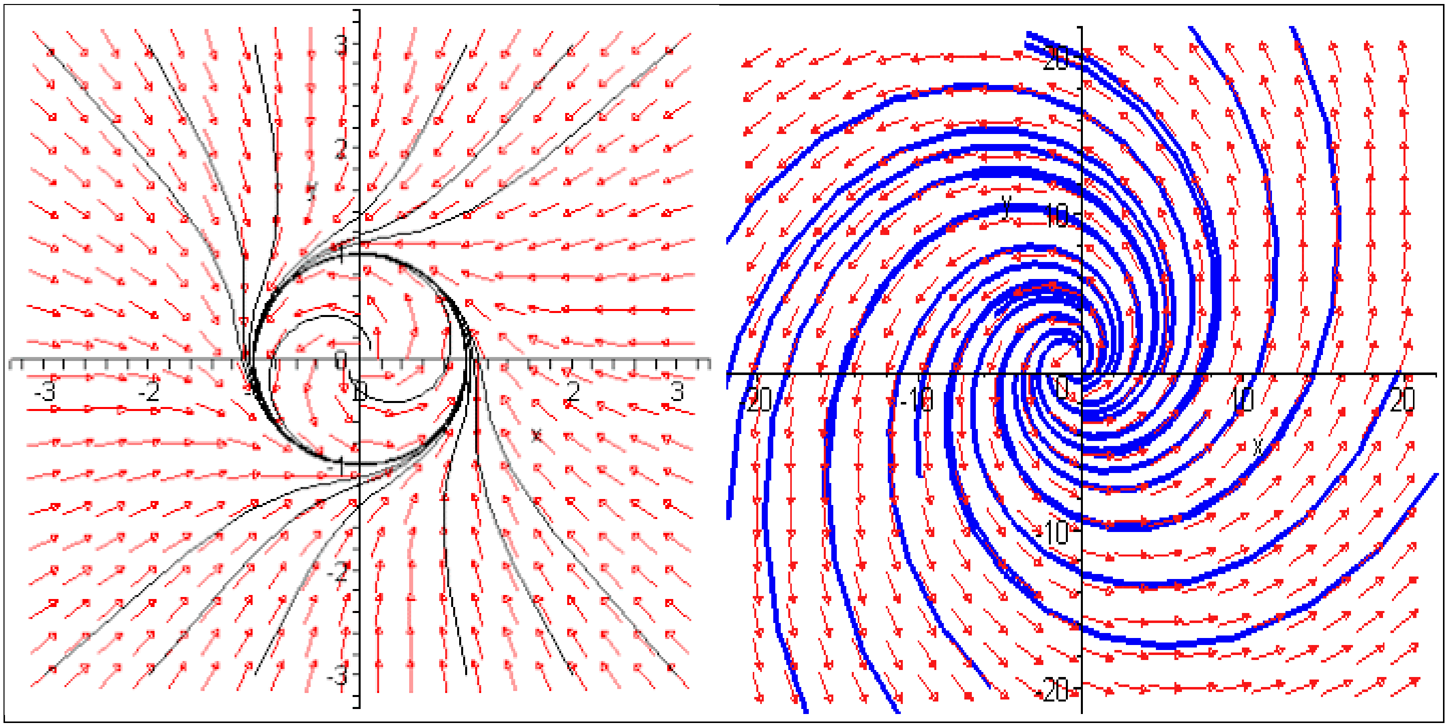
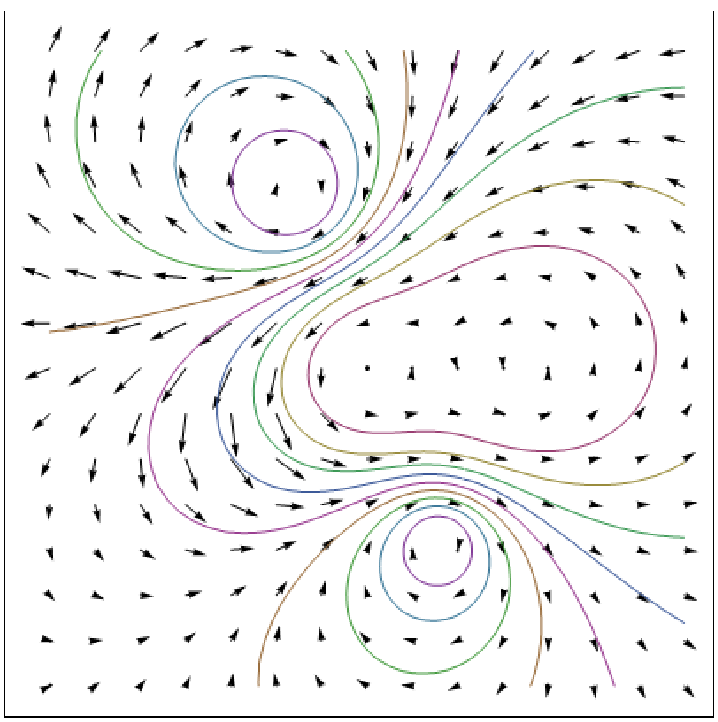
LÍNEAS DE CAMPO

Líneas de campo: definición

Dado un campo vectorial $\overline{f}: D \subset R^n \to R^n$, se denominan líneas de campo o líneas de fuerza a la familia de curvas contenidas en *D*, cuya recta tangente en cada punto tiene la dirección dada por $\overline{f}$ en dicho punto.

Veamos algunos ejemplos gráficos:





Analizamos la definición en el caso particular de campos vectoriales $\overline{f}: D \subset R^2 \to R^2$. En este caso, el campo vectorial $\overline{f}$ tiene dos componentes: $\overline{f}: D \subset R^2 \to R^2 \,/\, \overline{f}(x, y) = (P(x, y)\,, Q(x, y))$.

Por otro lado, consideramos un haz de curvas de R^2, asociado a la función vectorial $\overline{g}: A \subset R \to R^2 \,/\, \overline{g}(t) = (x(t)\,, y(t))$. Para que este haz de curvas sea línea de campo de $\overline{f}$, los vectores tangentes a dichas curvas deben tener la dirección dada por $\overline{f}$ en cada punto. Recordemos que las direcciones tangentes en cada punto de la curva están dadas por el vector derivado $\overline{g}'(t)$.

Sea $t_0 \in A = Dom\,\overline{g}$, de modo que $\overline{g}(t_0) = (x_0\,, y_0) \in Dom\,\overline{f}$, entonces, si el haz de curvas asociado a $\overline{g}$ es línea de campo de $\overline{f}$ se cumple que:

$$\overline{f}(x_0, y_0) = \overline{g}'(t_0) \quad \Rightarrow \quad (P(x_0, y_0)\,, Q(x_0, y_0)) = (x'(t_0)\,, y'(t_0))$$

En general:

$$(P(x, y)\,, Q(x, y)) = (x'(t)\,, y'(t)) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} P(x, y) = x'(t) \\ Q(x, y) = y'(t) \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} P(x, y) = \dfrac{dx}{dt} & (1) \\ Q(x, y) = \dfrac{dy}{dt} & (2) \end{cases}$$

Dividimos miembro a miembro la ecuación (2) dividido la ecuación (1):

$$\frac{Q(x, y)}{P(x, y)} = \frac{dy/dt}{dx/dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{Q(x, y)}{P(x, y)} = \frac{dy}{dx} = y' \qquad (3)$$

Resolviendo la ecuación diferencial indicada en (3), se obtienen las líneas de campo asociadas a $\overline{f}$.

Resumiendo: para obtener las líneas de campo de $\overline{f}(x, y) = (P(x, y)\,, Q(x, y))$ se debe hallar la solución general de la ecuación diferencial:

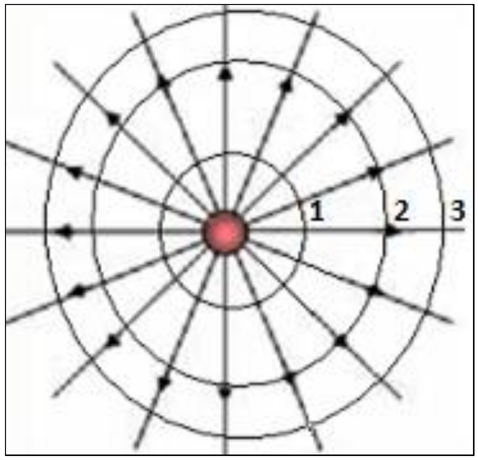
$$\boxed{y' = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}}$$

Caso particular: $\overline{f}(x, y)$ es un campo de gradientes

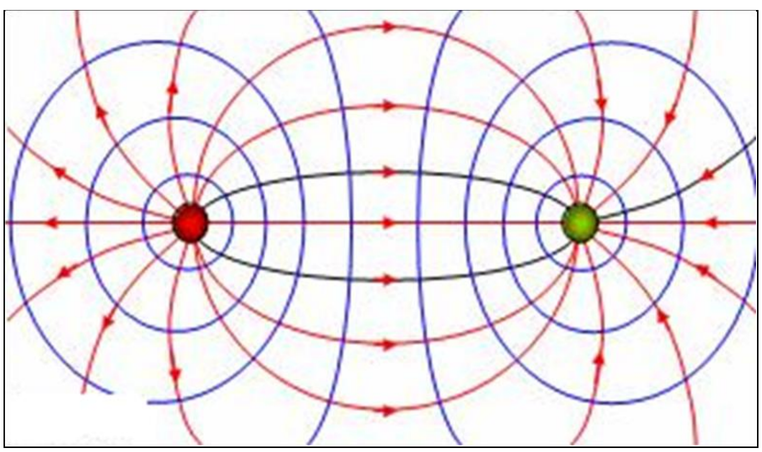
Dado el campo vectorial $\overline{f}: D \subset R^2 \to R^2$, consideramos el caso particular en el cual $\exists \phi: D \subset R^2 \to R$ de modo que $\overline{f}(x, y) = \nabla \phi$. Las líneas de nivel de ϕ, de ecuación $\phi(x, y) = k \quad (k \in \operatorname{Im} \phi)$, se denominan líneas equipotenciales.

Para campos vectoriales que resultan campos de gradientes, las líneas de campo y las líneas equipotenciales son haces de curvas mutuamente ortogonales.

Veamos algunos ejemplos de esta propiedad, asociados a la física:



En la figura se visualiza esta relación de ortogonalidad entre las líneas de campo y las líneas equipotenciales, en el caso del campo eléctrico creado por una carga puntual de signo positivo. En este caso, las líneas de fuerza del campo eléctrico forman un haz que emerge de la carga en todas las direcciones y se dirige hacia el exterior. Junto con ellas, se han dibujado también las curvas 1, 2 y 3, con centro en la carga. Son líneas equipotenciales, ya que, como el valor del potencial eléctrico depende únicamente de la carga y de la distancia, en todos los puntos que pertenecen a cada una de estas líneas, el potencial tiene un valor constante.



En la figura anterior se muestran las líneas del campo eléctrico (en color rojo) y las líneas equipotenciales (en azul) de un dipolo eléctrico, formado por dos cargas puntuales de signos opuestos (la positiva representada de color rojo y la negativa de color verde). Puede observarse que las líneas de campo son perpendiculares a las líneas equipotenciales.

Teorema: las líneas de campo y las líneas equipotenciales son haces de curvas mutuamente ortogonales

Sea el campo vectorial $\overline{f}: D \subset R^2 \to R^2$, con $\overline{f} \in C^1$ en D, y sea $\phi: D \subset R^2 \to R$ de modo que $\overline{f}(x,y) = \nabla\phi(x,y)$

Entones, las líneas de campo de $\overline{f}$ y las líneas equipotenciales de ϕ (de ecuación $\phi(x,y) = k$, $k \in \mathrm{Im}\,\phi$), son haces de curvas mutuamente ortogonales.

Demostración

Si dos haces de curvas son mutuamente ortogonales, sus respectivas derivadas cumplen con la relación de perpendicularidad, es decir, son inversas y opuestas. Denominamos y'_{LC} a la derivada asociada a las líneas de campo, y llamamos y'_{LE} a la derivada asociada a las líneas equipotenciales. Si ambos haces de curvas son mutuamente perpendiculares, deberá cumplirse que: $y'_{LC} = -\dfrac{1}{y'_{LE}}$

Si $\overline{f}(x,y) = \nabla\phi(x,y) \quad \Rightarrow \quad \overline{f}(x,y) = (\phi'_x \,,\, \phi'_y)$

Si consideramos la ED asociada a las líneas de campo, tenemos que: $\boxed{y'_{LC} = \dfrac{\phi'_y}{\phi'_x} \quad (1)}$

Hallamos la ED asociada a la familia de líneas equipotenciales $\phi(x,y) = k$. Derivamos miembro a miembro dicha ecuación, considerando la siguiente red orientada:

$$\begin{tikzcd}[row sep=small] & x & \\ \phi \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\ & y \arrow[r] & x \end{tikzcd}$$

$$\phi'_x + \phi'_y \; y'_{LE} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y'_{LE} = -\frac{\phi'_x}{\phi'_y} \quad (2)}$$

De (1) y (2) resulta: $y'_{LC} = -\dfrac{1}{y'_{LE}}$, y por lo tanto, los haces de curvas son mutuamente ortogonales.

Resolvemos ejercicios del TP 12

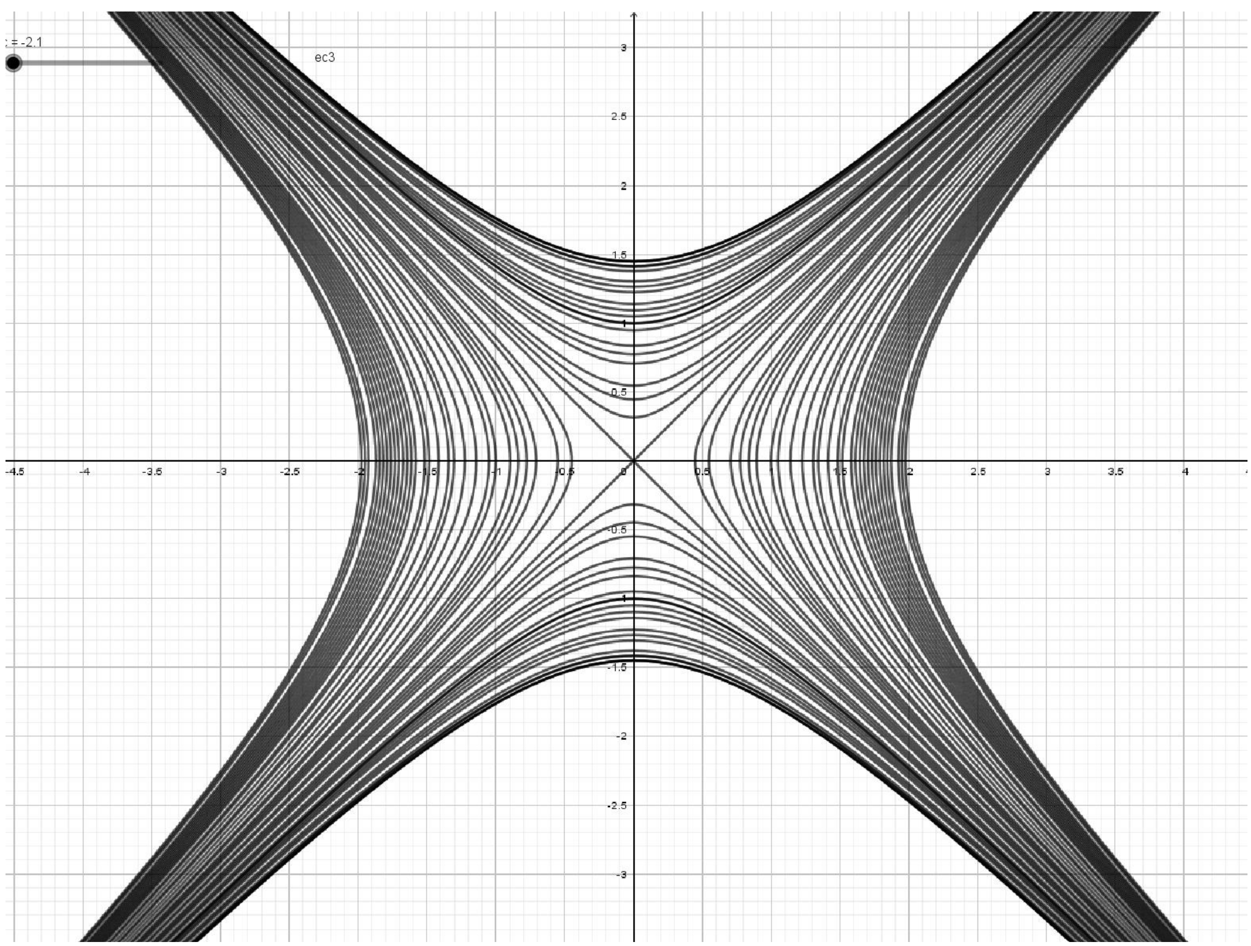
13) b) Halle y grafique la familia de líneas de campo en el siguiente caso: $\overline{f}(x, y) = (y, x)$

13) b) $\overline{f}(x, y) = (y, x)$

$y' = \frac{x}{y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} \Rightarrow \int dy\, y = \int x\, dx \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{y^2}{2} = \frac{x^2}{2} + c \Rightarrow \frac{y^2 - x^2}{2} = c \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{y^2 - x^2 = k}$



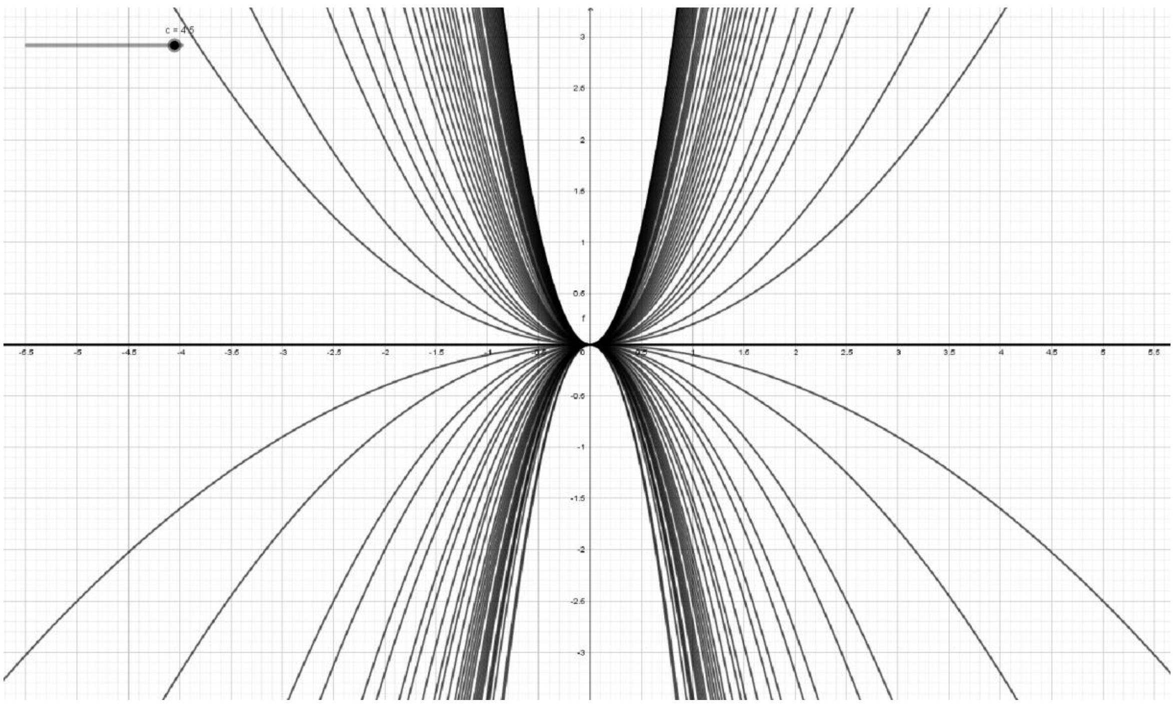
13) c) Halle y grafique la familia de líneas de campo en el siguiente caso: $\overline{f}(x, y) = (x/2\,, y)$

13) c) $\overline{f}(x,y) = \left(\frac{x}{2}, y\right)$

$$y' = \frac{y}{x/2} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{2y}{x} \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = \int 2\,\frac{dx}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln(ky) = 2\ln x = \ln x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ky = x^2 \Rightarrow \boxed{y = c\,x^2}$$



Ejercicio de final:

Dado $\overline{f}(x,y)=(2xy\,,x^2)$ que admite función potencial ϕ / $\phi(1,1)=2$. Determinar las ecuaciones de la línea de campo y la línea equipotencial que pasa por (2 , 1).

Líneas de campo

$$y' = \frac{x^2}{2xy} = \frac{x}{2y} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{x}{2y} \Rightarrow \int 2y\,dy = \int x\,dx$$

$$\Rightarrow y^2 = \frac{x^2}{2} + C$$

Pasa por (2,1) : $1^2 = \frac{2^2}{2} + C \Rightarrow C = 1 - 2 = -1$

$$\boxed{y^2 = \frac{x^2}{2} - 1}$$

Líneas equipotenciales

Los líneas equipotenciales son $\perp$ a las líneas de campo. Entonces, hallo la familia de curvas ortogonales a $y^2 = \frac{x^2}{2} + C$

$$y^2 = \frac{x^2}{2} + C \Rightarrow 2y\,y' = x$$

$$\downarrow \perp$$

$$2y\left(-\frac{1}{y'}\right) = x \Rightarrow -2y\frac{dx}{dy} = x$$

$$\Rightarrow -2\int\frac{dx}{x} = \int\frac{dy}{y} \Rightarrow -2\ln(kx) = \ln y \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (kx)^{-2} = y \Rightarrow y = \frac{a}{x^2}$$

pasa por (2,1) :

$$1 = a/4 \Rightarrow a = 4 \longrightarrow \boxed{y = \frac{4}{x^2}}$$

Comprobación: Dada $\vec{f}(x,y)=(2xy, x^2)$ hallemos su función potencial asociada

$$\begin{cases} \phi'_x = 2xy \\ \phi'_y = x^2 \end{cases}$$

$\phi = \int 2xy\, dx = x^2 y + g(y)$

$\phi'_y = x^2 + g'(y) = x^2 \Rightarrow g'(y) = 0 \Rightarrow g(y) = c$

$\phi(x,y) = x^2 y + c$ si $\phi(1,1) = 2 \therefore 1 + c = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow c = 1$

$\phi(x,y) = x^2 y + 1$

Líneas equipotenciales: $\phi(x,y) = k \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 y + 1 = k \Rightarrow x^2 y = b$

Pasa por $(2,1)$: $4 \cdot 1 = b \Rightarrow b = 4$

$x^2 y = 4 \Rightarrow \boxed{y = \frac{4}{x^2}}$