ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS - 2da. PARTE

Teorema de existencia

Sea la función $f(x,y)$ siendo $f: D=[a,b]\times[c,d]\subset R^2 \to R$, con f continua en *D*. Si $(x_0, y_0)\in D$, entonces existe $\varepsilon > 0$ y existe una función $y(x)$ definida en el intervalo $(x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$ que resuelve el problema dado por

$$y' = f(x,y) \qquad \wedge \qquad y(x_0) = y_0$$

<u>Nota</u>: el dominio de la función solución puede ser un intervalo pequeño, inclusive con ε tendiendo a cero.

Ejemplo: problema dado por $y' = 1 + y^2 \quad \wedge \quad y(0) = 0$.

Resolviendo la ecuación diferencial resulta:

$$\frac{dy}{dx} = 1 + y^2 \;\Rightarrow\; \frac{dy}{1+y^2} = dx \;\Rightarrow\; \int \frac{dy}{1+y^2} = \int dx \;\Rightarrow\; arctg(y) = x + c \;\Rightarrow\; y = tg(x+c)$$

Una vez obtenida la solución general, evaluamos la solución particular que corresponde a los datos del problema:

$$y(0) = tg(0+c) = 0 \;\Rightarrow\; c = 0 + n\,\pi \quad (\text{con } n \in Z)$$

En este caso, el dominio de definición de la función solución resulta $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

Teorema de unicidad

Sea la función $f(x,y)$ siendo $f: D=[a,b]\times[c,d]\subset R^2 \to R$, siendo f continua y con derivadas parciales continuas en *D* ($f \in C^1$ en *D*). Si $(x_0, y_0)\in D$ y además $y_1(x) \;\wedge\; y_2(x)$ son dos funciones que resuelven el problema dado por

$$y' = f(x,y) \qquad \wedge \qquad y(x_0) = y_0$$

para todo valor de $x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$, donde ε es algún número positivo, entonces

$$y_1(x) = y_2(x) \quad \forall x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon)$$

Es decir, la solución al problema es única.

Ejemplo: problema dado por $y' = 3y^{2/3} \qquad \wedge \qquad y(0) = 0$.

Resolviendo la ecuación diferencial resulta:

$$\frac{dy}{dx} = 3y^{2/3} \;\Rightarrow\; \frac{dy}{3y^{2/3}} = dx \;\Rightarrow\; \int \frac{dy}{3y^{2/3}} = \int dx \;\Rightarrow\; y^{1/3} = x + c \;\Rightarrow\; y = (x+c)^3$$

Una vez obtenida la solución general, evaluamos la solución particular que corresponde a los datos del problema:

$y(0) = (0+c)^3 = 0 \;\Rightarrow\; c = 0$. Por lo tanto la solución al problema será: $y_1(x) = x^3$

Sin embargo, la función $y_2(x) = 0$ también es solución para el problema. Si derivamos la función, resulta $y_2' = 0$ y además $y_2(0) = 0$. Por cumplir estas dos condiciones, $y_2(x) = 0$ es solución particular de la ED.

En este caso, la falta de unicidad de la solución se debe a que la función $f(x,y)$ asociada a la ecuación diferencial es en este caso $f(x,y) = 3y^{2/3}$, que no resulta C^1 ya que $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{2}{\sqrt[3]{y}}$ no está definida para $y = 0$.

<u>Nota</u>: si restringimos las hipótesis del teorema de existencia, nos referimos a la combinación de ambos como teorema de existencia y unicidad.