Ejemplos de parcial de Análisis Matemático II

Los ítems E1, E2, E3 y E4 corresponden a la parte práctica.
Los ítems T1 y T2 son teóricos (sólo para promoción).

Ejemplo de 1° Parcial

T1) Sea $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ diferenciable tal que $F(0,0)=0 \wedge \overline{\nabla}F(0,0)=(1,2)$ y sea $G:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ / $\overline{G}(x,y)=(F(x,y),F(x,y))$. Se define $H = F \cdot \overline{G}$. Halle el plano tangente al gráfico de H en el origen.

T2) Sean f y g definidos de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}$ dos campos escalares C^1, A un punto de su dominio y $\breve{r}$ un versor de $\mathbb{R}^2$. Se define $h:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ / $h(x,y) = f(x,y)\ g(x,y)$. Demuestre que: $h'(A,\breve{r}) = f'(A,\breve{r})\ g(A)+f(A)\ g'(A,\breve{r})$.

E1) Dada $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ / $F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{3(x-1)y^2}{2(x-1)^2+3y^2} & \text{si } (x,y)\neq(1,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(1,0) \end{cases}$.

a) Analice la continuidad en (1,0).
b) Analice la existencia de derivadas direccionales en (1,0).
c) Estudie la diferenciabilidad en (1,0).

E2) Sea $F:A\subseteq\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ / $F\in C^1 \wedge F(5,3,2)=6$. Se sabe que $P_0=(5,3,2)$ es un punto regular de la superficie de nivel 6 de F, y que la recta $\overline{X}=(5,3,2)+t\ (1,-1,2)$ es normal a dicha superficie en P_0.

a) Analice si la ecuación $F(x,y,z)=6$ define $z=\varphi(x,y)$ en un entorno de (5,3,2). Si la respuesta es afirmativa, calcule en forma aproximada $\varphi(\frac{51}{10},\frac{27}{10})$.

b) Determine si la curva definida por: $\begin{cases} x = z+y \\ x = z^3-y \end{cases}$ corta perpendicularmente a la superficie de nivel 6 de F en (5,3,2).

E3) Sea $h(x,y) = y^2\ f(x)+6$. Halle $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ tal que: $\dfrac{2}{y^2}\dfrac{\partial h}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial h}{\partial y} = x-3 \quad \forall y\neq 0$ si $h(1,1)=2$.

E4) Dadas $f:U\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ / $f(u,v)=u\cos(v)+e^{-\pi/u}$ $\wedge$ $\overline{g}:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$/ $\overline{g}(x,y)=(x^2+y\ ,\ x^2y)$, halle la derivada direccional máxima de $h=f\circ\overline{g}$ en el punto $(0,\pi)$ e indique la dirección y sentido en que se produce.

Ejemplo de 1° Parcial

T1) **Defina** solución general, particular y singular de una ecuación diferencial ordinaria. **Analice** qué tipo de solución es $y=x+2$ de la ecuación $y''+y'=1$.

T2) Sea $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ un campo escalar diferenciable en $\overline{A}$, **demuestre** que f es derivable en toda dirección en $\overline{A}$.

E1) Dada $f(x,y)=\dfrac{x^3}{x^2+y^2}$ si $(x,y)\neq(0,0)$, **proponga** un valor para $f(0,0)$ de manera que f resulte derivable en toda dirección en (0,0). En esta condiciones **analice** si f es diferenciable en el origen.

E2) Sea F la familia de líneas de nivel de $f(x,y)=x-y^2$, **halle** la curva de la familia ortogonal a F que pasa por (0,2).

E3) Dada $w=f(u,v)$ con $(u,v)=(x^2+xy\ ,\ y^2-x)$, resulta $w=h(x,y)$. **Calcule** aproximadamente $h(1.03,1.98)$ sabiendo que f queda definida implícitamente por $wu-\ln(w+v)+6=0$.

E4) Sea π_0 el plano tangente a la superficie Σ de ec. $x^2y+xz^2+3e^{yz-2}=0$ en el punto $\overline{A}=(-1,1,2)$. **Halle** la ecuación cartesiana del plano normal a la curva C en $\overline{A}$, sabiendo que C está incluida en π_0 y en el plano de ec. $z=2$.

Hallar una función vectorial que parametrice la curva C

Ejemplo de 1° Parcial

T1) **Defina** derivada de un campo f en un punto $\overline{A}$ en la dirección de $\bar{r}$ (derivada direccional). Para el caso del campo escalar que se indica, **analice** la existencia de derivadas direccionales en (0,0) según distintas direcciones.
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\,\mathrm{sen}(y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

T2) **Defina** extremos (máx. y mín.) locales; **analice** si $f(1,1)$ es extremo local de $f(x,y)=2+(x-y)^6$ definida en $\mathbb{R}^2$.
Desde ciclo lectivo 2006 este ítem corresponde al 2° Parcial

E1) Dado $\bar{f}(x,y)=(\,x\sqrt{y}\ ,\ \ln(x+y-1)\ ,\ \sqrt{1-y-x^2}\ )$, a) **halle y grafique** el dominio natural D de $\bar{f}$, b) **determine y grafique** el conjunto $D_1\subset\mathbb{R}^2$ en cuyos puntos quedan definidas ambas derivadas parciales de $\bar{f}$.

E2) Dada $z=f(u,v)$ con $\begin{cases}u=x-y^2\\ v=x^2\,y\end{cases}$ resulta $z=h(x,y)$. **Halle** la dirección de máxima derivada direccional de h en (1,1) y el valor de dicha derivada máxima, sabiendo que f queda definida implícitamente por $u+2\ln(v\,z)+z\,(v-1)=0$.

E3) Sea F la familia de curvas $\overline{X}=(\,t-1\ ,\ C\,t^2\,)$ con $t,C\in\mathbb{R}$; halle la familia ortogonal F y las ecuaciones de las curvas de ambas familias que pasan por el punto (1,1). (Sugerencia: comience expresando F en forma cartesiana).

E4) La curva C está trazada sobre la superficie de ecuación $z=x\,y+x^2$; la proyección de C sobre el plano *x,y* tiene ecuación cartesiana $x+y=2$. **Analice** si la recta tangente a C en $(1,1,z_0)$ tiene algún punto en común con el plano *x,z*.

Ejemplo de 1° Parcial

T1) Sea $F: D\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$, y $\overline{P}_0$ interior a D. Demuestre que si F es diferenciable en $\overline{P}_0$, entonces en ese punto F tiene derivadas en cualquier dirección y sentido.

T2) Las superficies Σ_1 y Σ_2 son respectivamente, los gráficos de dos campos escalares diferenciables F y G definidos de $D\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ y (x_0,y_0) es un punto interior de D. Demuestre que si $\overline{P}_0=(x_0,y_0,z_0)$ es un punto común a dichas superficies en el que las rectas normales son perpendiculares, entonces: $\overline{\nabla}F(x_0,y_0)\cdot\overline{\nabla}G(x_0,y_0)=-1$.

E1) Analice si la recta tangente a la curva de ecuación $\bar{r}(t)=\left(\dfrac{t^3}{4}-2\ ,\ \dfrac{4}{t}-3\ ,\ \cos(t-2)\right)$ en $t_0=2$ está incluida en el plano tangente a la superficie definida por $x^3+y^3+z^3-x\,y\,z=0$ en $\overline{P}_0=\bar{r}(t_0)$.

E2) Considere $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\ /\ F(u,v)=\cos(u\,v^2)+v^3$ y $\overline{G}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\ /\ \overline{G}(x,y)=(\pi\,x\,y\ ,\ \varphi(x,y))$, donde $v=\varphi(x,y)$ está implícitamente definida por: $v\,x+e^{v\,(y-1)}=2$. Se define $H=F\cdot\overline{G}$. Calcule en forma aproximada $H\left(\frac{12}{10},\frac{9}{10}\right)$.

E3) Estudie la continuidad, la derivabilidad en cualquier dirección y sentido y la diferenciabilidad en (0,1) de:
$$F(x,y)=\begin{cases}\dfrac{(y-1)\,x^2-x^3}{x^2+(y-1)^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,1)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,1)\end{cases}.$$

E4) Sea $\varphi(x)$ la trayectoria ortogonal que pasa por (0,0) de la familia de curvas $C\,x=e^{-2y}$. Determine los puntos críticos y clasifíquelos para $F(x,y)=(1+y)\,\varphi(x)+y^2$.
Desde ciclo lectivo 2006 este es ejercicio de 2° Parcial. Para 1° parcial podría ser: Determine los puntos de $z=(1+y)\,\varphi(x)+y^2$ donde el plano tangente es paralelo al *x,y*.

Ejemplo de 1° Parcial

T1) **Defina** derivada parcial de un campo f en un punto $\overline{A}$. Dado el campo f que se indica, **analice** la existencia de f'_x en los distintos puntos de su dominio.
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3(y-2)^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

T2) **Defina** soluciones general, particular y singular de una ecuación diferencial ordinaria. Halle la solución particular de $y'-y=1-x$ que pasa por el punto (0,2).

E1) Dadas $f(u,v)=\ln(u+v-1)$ y $\overline{g}(x,y)=(x^2-1,\ y-2x\ )$: a) **Halle y grafique** el dominio natural de $h=f\circ\overline{g}$. b) **Halle** una expresión lineal para aproximar los valores de h en un entorno de (2,3).

E2) Sea $w=u^2+uv^2$ con $\begin{cases}u=xy+y\\ v=f(x,y)\end{cases}$ resulta $w=h(x,y)$. Sabiendo que f queda definida implícitamente por $v-2x+\ln(v+y)=0$, **halle** la <u>mínima</u> deriv. direccional de h en (1,–1) e indique la dirección de mínima.

E3) Dada la curva C como intersección de las superficies de ecuaciones $z=x+y^2-1$ y $x^2+(y-z)^2=5$, **analice** si la recta tangente a C en $(1,2,4)$ tiene algún punto en común con el eje z.

E4) Sea Σ de ecuación $z=f(x,y)$, la superficie de nivel 3 de $g(x,y,z)=1+2x+\ln(y+z^2-1)$ que pasa por el punto (1,1,1); **calcule** aproximadamente $f(1.02,\ 0.99)$.

Otros ejemplos: ítems de 1° parcial

T) Sea $F: A\subseteq\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\ /\ F\in C^1$ y sea S la superficie que es gráfico de F. Si C_1 y C_2 son dos curvas incluidas en S cuyas rectas tangentes en $\overline{P}_0=(x_0,y_0,F(x_0,y_0))$ son respectivamente $\overline{X}=\overline{P}_0+\lambda\,(1,3,4)$ y $\overline{X}=\overline{P}_0+\lambda\,(-1,3,0)$, encuentre la dirección y sentido de la máxima derivada direccional de F en $(x_0,\ y_0)$. Justifique cada paso del procedimiento utilizado.

E) Dada $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3+y^3}{x} & \text{si } x\neq0\\ 0 & \text{si } x=0\end{cases}$.
a) Analice la existencia del límite de f para $(x_0,y_0)=(0,0)$. ¿Es continua en (0,0)?. Si no lo es, clasifique la discontinuidad.
b) Halle la derivada de f en (0,0) en toda dirección. ¿El resultado contradice lo obtenido en a)?, ¿por qué?.

E) Halle la derivada direccional máxima de $h=f\circ\overline{g}$ en (1,1) siendo $\overline{g}(x,y)=(xy^2,\ y-x^2)$ si $z=f(u,v)$ queda definida por $z-u^2+v^2\ln(v+z)=0$.

E) Sea la superficie S de ecuación $\overline{X}=(\,u-v^2\,,\ v-u\ ,\ v+u\,)$ con $(u,v)\in\mathbb{R}^2$; analice si la recta normal a S en el punto $\overline{A}=(-3,1,3)$ tiene algún punto en común con la curva intersección de $z=x^2$ con $x+y+z=2$.

E) Dada $z=u^2+uv$ donde $u=x-y^2\ \wedge\ v=g(x)$ definida implícitamente por $x+vx+\ln(v+x)=0$, resulta $z=f(x,y)$, halle el plano tangente a la superficie de ecuación $z=f(x,y)$ en $\overline{A}=(0,1,z_0)$.

E) Sea $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy+y^2}{x^4+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0)\end{cases}$. Estudie la continuidad y la existencia de derivadas parciales de la función en el punto (0,0).

E1) Si n_0 es la recta normal a la superficie Σ de ecuación $z=h(x,y)$ en $(3,1,z_0)$, donde $h=f\circ\overline{g}$ con $f(u,v)=\sqrt{u^2+3v}$ y $\overline{g}(x,y)=(\,x-1,\ y^2-2\,)$, **analice** si n_0 interseca al eje x en algún punto.

E2) Sea $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x\ln(y^2+1)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)=(0,0)\\ 0 & \text{si } (x,y)\neq(0,0)\end{cases}$, **halle** todos los versores $\breve{r}=(u,v)$ tales que $f'((0,0),\breve{r})=0$.

E3) Sea F la familia de curvas de ecuación $y=Cx^3$, **halle** la curva de la familia ortogonal a F que pasa por (1,1).

E4) Dada $z=f(x,y)$ definida por $2xz+e^{y+2z-4}-1=0$ **calcule** una aproximación lineal de $f(0.02,\ 0.99)$.

Ejemplo de 2° Parcial

T1) **Enuncie** el teorema de Green. Siendo $g(x,y) = x^2 y + f(x,y)$ con $f \in C^2$, **aplique** el teorema para demostrar que es nula la circulación de ∇g a lo largo de toda curva cerrada.

T2) **Defina** coordenadas polares e **indique** la fórmula de cambio de variables (cartesianas a polares) para integrales dobles. Una integral doble planteada en polares es $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} d\varphi \int_0^{2/\cos(\varphi)} \rho^2 \cos(\varphi)\, d\rho$, **dibuje** la correspondiente región de integración en el plano x,y y **realice** el planteo completo de la integral en coordenadas cartesianas.

E1) **Calcule** la masa del cuerpo definido por $\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 3 - 2x^2 - 2y^2$, si su densidad en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al eje z.

E2) **Calcule** el flujo de $\bar f(x,y,z) = (2x + y\,\mathrm{sen}(z),\ x\,\mathrm{sen}(z),\ 4z)$ a través de la superficie abierta Σ de ecuación $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ con $z \ge 3$. **Indique** gráficamente cómo ha decidido orientar a Σ.

E3) Dado $\bar f(x,y) = (x - y,\ 2y)$, **calcule** $\int_C \bar f \cdot d\bar s$ si C es el arco de curva integral de $y'' + y = x$ desde (0,0) a $(\pi/2, 1)$.

E4) Sea el campo $\bar f(x,y) = (2x,\ 2y - 5)$ con función potencial $\phi(x,y)$ / $\phi(1,1) = 1$; **demuestre** que $\phi(x,y)$ tiene un único extremo local que también es absoluto en $\mathbb{R}^2$, **calcule** su valor y **clasifíquelo**.

Ejemplo de 2° Parcial

T1) Demuestre que si y_0 e y_1 son soluciones de $a_0\, y'' + a_1\, y' + a_2\, y = f(x)$ e $y_h = C_1\, u_1(x) + C_2\, u_2(x)$ es la solución general de la homogénea asociada, entonces es posible determinar $C_1 \in \mathbb{R}$ y $C_2 \in \mathbb{R}$ tales que

$$y_1 = C_1\, u_1(x) + C_2\, u_2(x) + y_0 .$$

Resuelva $y'' - 2y' - 3y = 3x$.

T2) Sea $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ / $f \in C^1$ y $\nabla f(x,y,z) = \bar 0 \quad \forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Demuestre que si Σ es una superficie en $\mathbb{R}^3$, orientable y suave a trozos, entonces: $\iint_\Sigma f(x,y,z)\, d\sigma$ es proporcional al área de Σ.

E1) Aplique el teorema del rotor para calcular la circulaciòn de $\bar f(x,y,z) = (xy,\ z,\ zx)$ a lo largo de la curva intersecciòn de $x^2 + y^2 = 4$ con $z = x + y$.

E2) Sea $\bar f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ / $\bar f(x,y,z) = (k x^2 y,\ 2yz,\ y^2)$ y sea C la curva definida por la intersección de la superficie $x^2 + y^2 = 4$ con $z = 3x + y$

a) Calcule el trabajo que realiza $\bar f$ para recorrer el tramo de C que se encuentra en el primer octante en sentido horario.

b) Determine k para que el trabajo sea independiente de la trayectoria y verifique el resultado que obtuvo en a) utilizando la función potencial.

E3) Calcule la masa del cuerpo definido por $1 - x^2 - z^2 \le y \le 10 - 2x^2 - 2z^2$ si su densidad en cada punto es proporcional a su distancia al eje y.

E4) Sea el campo vectorial $\bar F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ / $\bar F(x,y,z) = (x,\ y,\ z+1)$ y Σ la parte de superficie de $z = x^2 + y^2$ que resulta interior a $x^2 + y^2 = 4$. Utilice el teorema de la divergencia para calcular el flujo de $\bar F$ a través de Σ.

Ejemplo de 2° Parcial

T1) Demostrar que si y_1 e y_2 son soluciones de la ecuación diferencial $y'' + b\,y' + c\,y = 0$, entonces cualquier combinación lineal de ellas también es solución de la ecuación diferencial dada. ¿Es ésta la forma de la solución general de dicha ecuación?. Justificar la respuesta.

T2) Sean $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un campo escalar y $\bar{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial solenoidal, ambos de clase C^1 tales que $\bar{f} \perp \bar{\nabla}\varphi$. Sea V un sólido cuya superficie frontera Σ es simple, suave a trozos y orientable. Probar que el flujo de $\bar{g}(x,y,z) = \varphi(x,y,z)\ \bar{f}(x,y,z)$ a través de Σ es cero.

E1) Sea g la S.P. de $g'' - g = x$ que satisface $g(0) = 0$ y $g'(0) = -1$. Calcular la circulación del campo vectorial $\bar{f}$ sobre la curva C intersección de $z = 1 - x^2 - y^2$ con $x^2 + y^2 = 1$, siendo $\bar{\nabla} \wedge \bar{f} = (x^2,\ y^2(x+y),\ -y\,g(x))$. Indicar el sentido en que se recorre la curva.

E2) Calcular el flujo de $\bar{f}$ a través de la superficie frontera del cuerpo definido por: $z \ge 3x^2 + y^2$, $9 - 2y^2 \ge z$, sabiendo que $\bar{f}(x,y,z) = (x,\ h(x)\,z,\ x\,y\,z)$ con h de clase C^1.

E3) Sea $\bar{F}(x,y,z) = (2\,x\,y,\ x^2 + z^2,\ 2\,y\,z)$. Analizar la existencia de función potencial y calcular, mediante dos procedimientos distintos, $\displaystyle\int_{\overset{\frown}{AB}} \bar{F} \cdot d\bar{s}$, si $A = (2, 4, 4)$ y $B = (0, 0, 0)$ son extremos del arco curva $C: \begin{cases} y = x^2 \\ z = 2\,x \end{cases}$.

E4) Calcular el área de la porción de cono $z^2 = x^2 + y^2$ que verifica $x^2 + y^2 < 4\,y$, $x > 0$.

Ejemplo de 2° Parcial

T1) Sea $\bar{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ un campo de gradientes continuo. Demuestre que si P_0 y P_1 son puntos de $\mathbb{R}^2$, el trabajo de $\bar{F}$ entre esos puntos es independiente de la trayectoria.

T2) Demuestre que las funciones $u_1(x) = e^x$ y $u_2(x) = 1$ son linealmente independientes. Escriba una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden con coeficientes constantes que cumpla simultáneamente con las siguientes condiciones: i) u_1 y u_2 sean soluciones particulares de la homogénea asociada, ii) $y_p = e^{2x}$ sea solución particular de la ecuación no homogénea.

E1) Calcule el área de la porción de $y = x^2 + z^2$ que resulta exterior a $y = 2\sqrt{x^2 + z^2}$.

E2) Sea $\bar{F} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,/\, \bar{F}(x,y) = (2\,x,\ 2\,y + g^2(x) - x^2 - 2\,x)$.

a) Si $g(x)$ es la solución particular de $2\,x\,g\,g' - x^2 - g^2 = 0$ que cumple con $g(1) = \sqrt{3}$, verifique que $\bar{F}$ es conservativo.

b) Considere la curva equipotencial de $\bar{F}$ que pasa por (1,1) y calcule, usando integrales de línea, el área encerrada por $x \ge y^2$ y dicha curva .

E3) Sea $\bar{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \,/\, \bar{F}(x,y,z) = (z,\ x\,y,\ y^2)$. Obtenga el flujo de $\bar{F}$ a través de la superficie frontera del sólido ubicado en el primer octante limitado por $z = 2\,y$, los planos coordenados y la superficie de ecuación $x^2 + y^2 = 4\,y$.

E4) Calcule aplicando el teorema del rotor la circulación de $\bar{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \,/\, \bar{F}(x,y,z) = (z\,x,\ z,\ 2\,y)$ a lo largo de la curva definida por $\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + z^2 = 4 \end{cases}$.

Otros ejemplos: ítems de 2° parcial

T) Sean a y b los respectivos puntos críticos de dos funciones escalares derivables f y g. Demuestre que si $H(x,y) = f(x)\,g(y)$ entonces (a, b) es punto crítico de H(x, y). ¿El recíproco es cierto?, ¿por qué?.

E) Obtenga la ec. del plano tangente y de la recta normal a la superficie representativa de $z = f(x,y)$ en $(1,-1,z_0)$ sabiendo que el polinomio de Taylor de 2º grado de f en un entorno de (1,–1) es $p(x,y) = x^2 - x\,y + 3\,y^2 - 2\,x + y + 4$.

E) Analice la existencia de extremos relativos de f, si $\nabla f(x,y) = (h(x) + 6\,y,\ 6\,y + 6\,x)$, donde h es la solución particular de $h'(x) = 12 + x\ h''(x)$ tal que la recta tangente a su gráfico en $(1, h(1))$ tiene ecuación $y = 6$.

E) Sea $\varphi(x)$ la trayectoria ortogonal que pasa por (0,0) de la familia de curvas $C\,x = e^{-2\,y}$. Determine los puntos críticos y clasifíquelos para $F(x,y) = (1+y)\varphi(x) + y^2$.

E) Dada $z = f(x,y)$ definida implícitamente por $x + y + z + e^{z\,(x+y)} = 0$, analice si $f(0,0)$ es extremo local.

E) Calcule el volumen del cuerpo definido por $z \ge x^2$, $x \le z^2$, $x \ge |y|$.

E) Calcule el flujo de $\bar{f}(x,y,z) = (z^2\ ,\ 2\,x\,y,\ x\,z)$ a través del trozo de superficie esférica de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ con $z \ge y$, en el 1° octante. Indique gráficamente la orientación que ha elegido para el versor normal a la superficie.

E) Calcule la circulación de $\bar{f}(x,y) = (y\,x^3,\ x - y)$ a lo largo de la curva frontera de la región plana definida por $x + y \ge 4$, $y \ge 2\,x - 8$, $y \le x + 4$.

E1) **Calcule** la masa del cuerpo definido por $\sqrt{x^2 + y^2} \le z \le 3 - 2\,x^2 - 2\,y^2$, si su densidad en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al eje z.

E2) **Calcule** el flujo de $\bar{f}(x,y,z) = (2\,x + y\,\mathrm{sen}(z),\ x\,\mathrm{sen}(z),\ x + 4\,z)$ a través de la superficie abierta Σ de ecuación $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ con $z \ge 3$. **Indique** gráficamente cómo ha decidido orientar a Σ.

E3) Dado $\bar{f}(x,y) = (x - y,\ 2\,y)$, **calcule** $\int_C \bar{f} \cdot d\bar{s}$ si C es el arco de curva integral de $y'' + y = x$ desde (0,0) a (π/2, 1).

E4) Sea el campo $\bar{f}(x,y) = (2\,x,\ 2\,y - 5)$ con función potencial $\phi(x,y)\ /\ \phi(1,1) = 1$; **demuestre** que $\phi(x,y)$ tiene un único extremo local que también es absoluto en $\mathbb{R}^2$, **calcule** su valor y **clasifíquelo**.