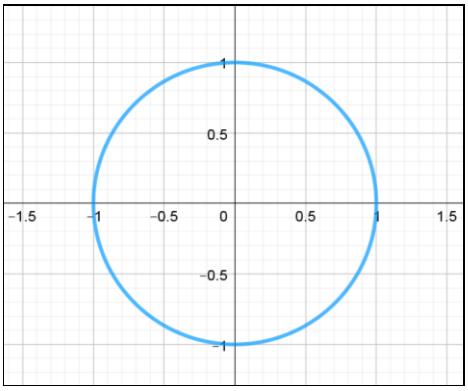
FUNCIONES DEFINIDAS EN FORMA IMPLÍCITA

En AMI ya analizaron la posibilidad de definir una función de manera explícita o implícita. Por ejemplo:

$y = 3x^2 \qquad y = f(x)$ está definida en forma explícita

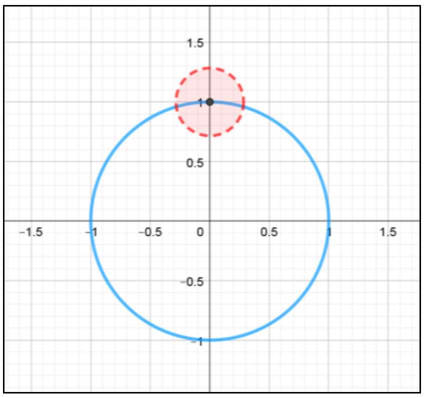
$x + 2y^3 = 1 \qquad y = f(x)$ está definida en forma implícita

En algunos casos, una función escalar puede estar definida implícitamente mediante una ecuación. Consideremos algunos casos particulares, por ejemplo, la ecuación $x^2 + y^2 = 1$. Geométricamente, la ecuación describe una circunferencia con centro en el origen y radio 1.



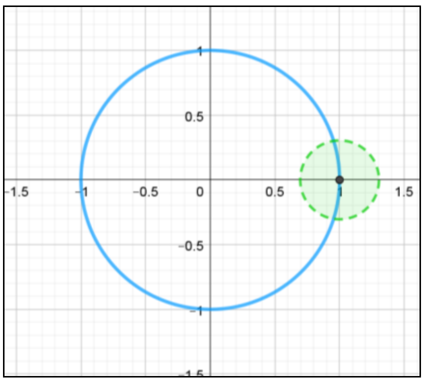
De la expresión $x^2 + y^2 = 1$ no podemos establecer **una única** función $y = f(x)$. Sin embargo, podemos considerar el caso anterior con más flexibilidad: se puede plantear la posibilidad de que la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ defina implícitamente una $y = f(x)$ o una $x = g(y)$ solamente en una bola abierta con centro en un determinado punto (x_0, y_0). En este caso, el estudio de la ecuación se realiza de manera local.

Por ejemplo, analizamos esta situación en una bola abierta con centro en el punto (0,1), con centro en el punto (1,0) y con centro en el punto $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$



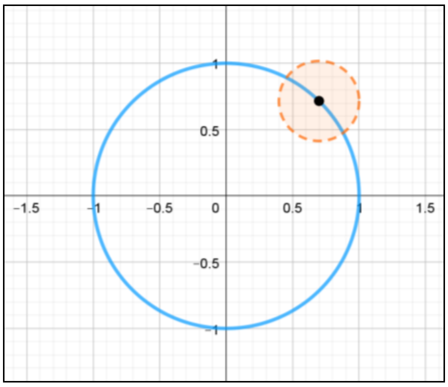
En E(0,1) queda definida una $y = f(x)$, que se puede obtener analíticamente: $y = \sqrt{1 - x^2}$.

Sin embargo en E(0,1) **no queda definida** una $x = g(y)$



En E(1,0) queda definida una $x = g(y)$, que se puede obtener analíticamente: $x = \sqrt{1 - y^2}$.

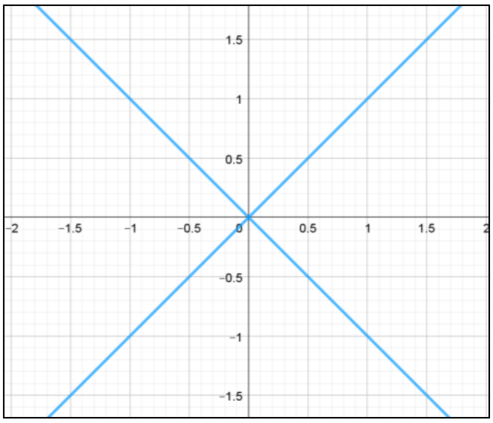
Sin embargo en E(1,0) **no queda definida** una $y = f(x)$



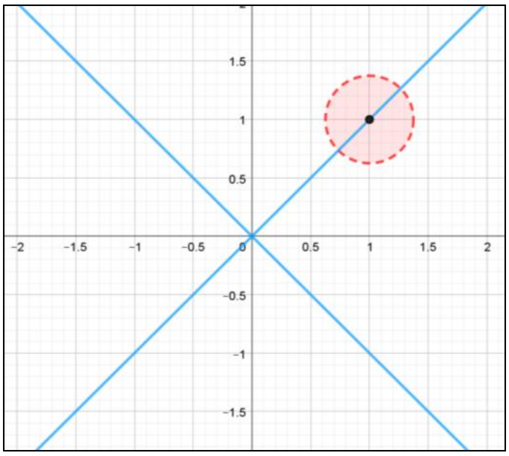
En $E\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ queda definida una $y=f(x)$, que se puede obtener analíticamente: $y=\sqrt{1-x^2}$.

En $E\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ queda definida una $x=g(y)$, que se puede obtener analíticamente: $x=\sqrt{1-y^2}$.

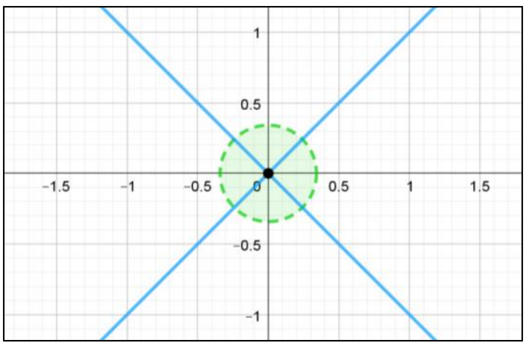
Veamos otro ejemplo: consideramos la ecuación $x^2-y^2=0$. Gráficamente, la ecuación representa dos rectas que se cortan en el origen (Si desarrollamos la ecuación resulta: $x^2-y^2=0 \Rightarrow x^2=y^2 \Rightarrow |x|=|y|$)



Analizamos si la ecuación $x^2-y^2=0$ define implícitamente una función en una bola abierta con centro en el punto (1,1) y con centro en el punto (0,0).



En E(1,1) queda definida una $y=f(x)$, que se puede obtener analíticamente: $y=x$.
En E(1,1) queda definida una $x=g(y)$, que se puede obtener analíticamente: $x=y$.

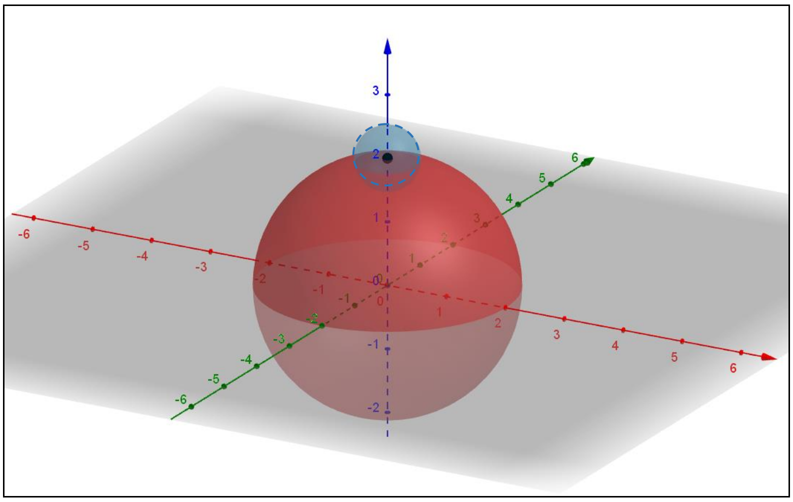


En E(0,0) **no queda definida** una $y=f(x)$

En E(0,0) **no queda definida** una $x=g(y)$

Este análisis puede realizarse también en ecuaciones de tres variables, y determinar si definen implícitamente alguna función de dos variables, siempre considerando el análisis limitado a una bola abierta con centro en (x_0, y_0, z_0).

Veamos un ejemplo. La ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ representa gráficamente un casquete esférico con centro en el origen y radio 2. Analizamos si la ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ define implícitamente una función $z = f(x, y)$, una función $y = g(x, z)$, o una función $x = h(y, z)$ en una bola abierta con centro en el punto (0,0,2).



En E(0,0,2) queda definida una $z = f(x, y)$, que se puede obtener analíticamente: $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.
En E(0,0,2) **no queda definida** una $y = g(x, z)$
En E(0,0,2) **no queda definida** una $x = h(y, z)$

En los todos los casos anteriores, el análisis sobre la posibilidad de que una ecuación defina implícitamente una función en el entorno de un punto se pudo realizar de manera gráfica y analítca, debido a que las ecuaciones referían a curvas o superficies sencillas de graficar, y las ecuaciones tenían formas algebraicas que permitían despejar una de las variables en función de las otras. Sin embargo, puede plantearse el problema de analizar una ecuación donde la gráfica asociada a la misma se desconoce o es muy compleja, y donde resulte imposible despejar algebraicamente alguna de las varibles. En este caso, se necesita una herramienta más general que permita identificar qué ecuaciones definen funciones en entornos de un determinado punto. Esta herramienta es el teorema de la función implícita, que enunciaremos después de definir formalmente dichas funciones.

Definición

Para definir funciones implícitas consideramos el caso de ecuaciones de tres variables, ya que las ecuaciones de dos variables pueden considerarse un caso particular del anterior.

Sea la ecuación $F(x, y, z) = 0$, asociada al campo escalar $F : D \subset R^3 \to R$. Sea (x_0, y_0, z_0) punto interior de *D*, de modo que dicho punto verifica la ecuación, es decir que $F(x_0, y_0, z_0) = 0$. Se dice que la ecuación $F(x, y, z) = 0$ define implícitamente una función $z = f(x, y)$ en un entorno del punto (x_0, y_0) si se cumple que:

- $z_0 = f(x_0, y_0)$
- $F(x, y, f(x, y)) = 0 \quad \forall (x, y) \in E(x_0, y_0)$

Teorema de la función implícita (para ecuaciones de dos variables)

Sea la ecuación $F(x,y)=0$, asociada a la función $F:D\subset R^2\rightarrow R$. Sea (x_0,y_0) un punto interior de *D*. Si se cumple que:

1) $F(x_0,y_0)=0$
2) $F\in C^1$ en (x_0,y_0) (*F* es diferenciable en (x_0,y_0))
3) $F'_y(x_0,y_0)\neq 0$

Entonces:

1) La ecuación $F(x,y)=0$ define implícitamente una única función $y=f(x)$ en $\mathrm{E}(x_0,y_0)$, siendo f una función continua en x_0, con $y_0=f(x_0)$.
2) La función f es derivable con continuidad en x_0, y además $f'(x_0)=-\dfrac{F'_x(x_0,y_0)}{F'_y(x_0,y_0)}$

Aunque la función $y=f(x)$ no pueda obtenerse analíticamente mediante procedimientos algebraicos despejando las variables de la ecuación dada, se puede afirmar que dicha función está definida en un entorno de x_0, es continua en x_0, es derivable con continuidad en x_0, y puede calcularse el valor de la derivada en dicho punto.

Teorema de la función implícita (para ecuaciones de tres variables)

Sea la ecuación $F(x,y,z)=0$, asociada a la función $F:D\subset R^3\rightarrow R$. Sea (x_0,y_0,z_0) un punto interior de *D*. Si se cumple que:

1) $F(x_0,y_0,z_0)=0$
2) $F\in C^1$ en (x_0,y_0,z_0) (*F* es diferenciable en (x_0,y_0,z_0))
3) $F'_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$

Entonces:

1) La ecuación $F(x,y,z)=0$ define implícitamente una única función $z=f(x,y)$ en $\mathrm{E}(x_0,y_0,z_0)$, siendo f una función continua en (x_0,y_0), con $z_0=f(x_0,y_0)$.
2) La función f es derivable parcialmente con continuidad en (x_0,y_0), y además

$$f'_x(x_0,y_0)=-\frac{F'_x(x_0,y_0,z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)} \quad \wedge \quad f'_y(x_0,y_0)=-\frac{F'_y(x_0,y_0,z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)}$$

Aunque la función $z=f(x,y)$ no pueda obtenerse analíticamente mediante procedimientos algebraicos despejando las variables de la ecuación dada, se puede afirmar que dicha función está definida en un entorno de (x_0,y_0), es continua en (x_0,y_0), es derivable parcialmente con continuidad en (x_0,y_0), y puede calcularse el valor de las derivadas parciales en dicho punto. Como la función implícita tiene derivadas parciales continuas en (x_0,y_0), resulta que $f\in C^1$ en (x_0,y_0), por lo cual es diferenciable en dicho punto.

De manera análoga al teorema anterior pueden enunciarse los teoremas que indican bajo qué condiciones la ecuación $F(x,y,z)=0$ define implícitamente una función $y=g(x,z)$ o un a función $x=h(y,z)$.

Estos teoremas de la función implícita son una condición necesaria pero no suficiente para decidir si una ecuación define implícitamente una función. Puede darse el caso de ecuaciones que no verifiquen las condiciones de hipótesis, y sin embargo definen implícitamente una función en un entorno de un punto. Veamos un ejemplo: analizamos la ecuación $F(x,y)=x-y^3=0$ en el punto (0,0)

1) $F(0,0)=0$
2) $F\in C^1$ en (0,0) por ser una función polinómica

3) $F'_y(0,0) = (-3y^2)\big|_{(x,y)=(0,0)} = 0$

No se verifica la condición 3) que pide el teorema, por la cual la derivada $F'_y(0,0)$ debería ser no nula.

Sin embargo, podemos despejar la variable *y* de la ecuación, de lo cual resulta:

$$x - y^3 = 0 \Rightarrow y^3 = x \Rightarrow y = \sqrt[3]{x}$$

En este caso, $y = \sqrt[3]{x}$ es una función para cualquier valor real de *x*. Por lo tanto, la ecuación $F(x,y) = x - y^3 = 0$ define implícitamente una función en un entorno de (0,0), aún cuando no verifica las condiciones de hipótesis del teorema correspondiente.

Demostración de la fórmula de derivación

Para realizar la deducción de la fórmula de cálculo de las derivadas parciales de una función definida implícitamente, suponemos que la ecuación $F(x,y,z) = 0$ cumple las condiciones de hipótesis del teorema en el punto (x_0, y_0, z_0), punto interior de su dominio. Por ello, queda definida una única función $z = f(x,y)$ en $\mathrm{E}(x_0, y_0, z_0)$, siendo f una función continua en (x_0, y_0), con $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Tenemos entonces que $\mathrm{E}(x_0, y_0, z_0)$: $\quad F(x,y,z) = 0 \quad \rightarrow \quad F(x,y,f(x,y)) = 0$

$$z = f(x,y)$$

Para realizar la demostración definimos la función auxiliar:

$\overline{g} : E(x_0, y_0) \subset R^2 \rightarrow R^3 \,/\, \overline{g}(x,y) = (x, y, f(x,y))$

Realizamos la siguiente composición:

$$(F \circ \overline{g})(x,y) = F(\overline{g}(x,y)) = F(x,y,f(x,y)) = 0 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow (F \circ \overline{g})(x,y) = 0$$

Derivamos miembro a miembro la última expresión, y aplicamos el teorema de derivación de funciones compuestas (regla de la cadena matricial):

$$D(F \circ \overline{g})(x,y) = D(0) \Rightarrow D(F \circ \overline{g})(x,y) = \overline{0}$$

$$DF(\overline{g}(x,y)).D\overline{g}(x,y) = \nabla F(\overline{g}(x,y)).D\overline{g}(x,y) = \nabla F(x,y,f(x,y)).\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f'_x & f'_y \end{pmatrix} = \overline{0}$$

$$(F'_x, F'_y, F'_z)\big|_{(x,y,f(x,y))} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f'_x & f'_y \end{pmatrix} = \overline{0}$$

Evaluamos la expresión para $(x,y) = (x_0, y_0)$

$$(F'_x, F'_y, F'_z)\big|_{(x_0, y_0, f(x_0,y_0))} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f'_x(x_0,y_0) & f'_y(x_0,y_0) \end{pmatrix} = \overline{0} \quad \Rightarrow \quad (F'_x, F'_y, F'_z)\big|_{(x_0,y_0,z_0)} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f'_x(x_0,y_0) & f'_y(x_0,y_0) \end{pmatrix} = \overline{0} \quad \Rightarrow$$

$$(F'_x(x_0,y_0,z_0) + F'_z(x_0,y_0,z_0)\, f'_x(x_0,y_0) \quad F'_y(x_0,y_0,z_0) + F'_z(x_0,y_0,z_0)\, f'_y(x_0,y_0)) = \overline{0} \quad \Rightarrow$$

$$\begin{cases} F'_x(x_0,y_0,z_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)\ f'_x(x_0,y_0)=0 \\ F'_y(x_0,y_0,z_0)+F'_z(x_0,y_0,z_0)\ f'_y(x_0,y_0)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f'_x(x_0,y_0)=-\dfrac{F'_x(x_0,y_0,z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)} \\ f'_y(x_0,y_0)=-\dfrac{F'_y(x_0,y_0,z_0)}{F'_z(x_0,y_0,z_0)} \end{cases}$$

Resolvemos el ejercicio 10 del TP 6.

10) La ecuación $xy-e^{z-x}=\ln z$ define implícitamente una $z=f(x,y)$. Halle una expresión lineal que permita aproximar los valores de f en un entorno del punto (1 , 1).

10) $xy-e^{z-x}=\ln z \to G(xyz)=xy-e^{z-x}-\ln z=0$

$G(x,y,z)=0$ define implícitam. $z=f(x,y)$

Expresión lineal que aproxime la función $f \to$ plano tgte $z_p \cong f(x,y)$ en $E(1,1)$

$z_p-z_0=f'_x(1,1)\ (x-1)+f'_y(1,1)\ (y-1)$

$f'_x=-\dfrac{G'_x}{G'_z}$

$f'_x(1,1)=-\dfrac{G'_x(1,1,1)}{G'_z(1,1,1)}$

$f'_x(1,1)=-\dfrac{2}{-2}=1$

$f'_y=-\dfrac{G'_y}{G'_z}$

Calc aux

$G(x,y,z)=xy-e^{z-x}-\ln z=0$

$G(1,1,z_0)=1.1-e^{z_0-1}-\ln z_0=0 \to z_0=1$

$G'_x=y+e^{z-x} \Rightarrow G'_x(1,1,1)=1+1=2$

$G'_y=x \Rightarrow G'_y(1,1,1)=1$

$G'_z=-e^{z-x}-\dfrac{1}{z} \Rightarrow G'_z(1,1,1)=-2$

$f'_y(1,1)=-\dfrac{G'_y(1,1,1)}{G'_z(1,1,1)}=-\dfrac{1}{-2}=\dfrac{1}{2}$

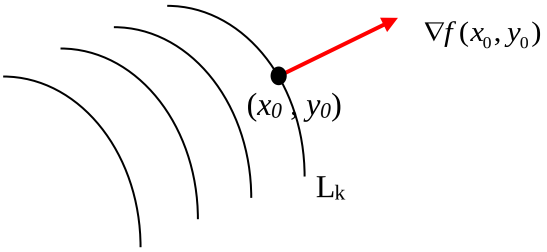
$z_p-1=1(x-1)+\dfrac{1}{2}(y-1) \Rightarrow z_p=x+\dfrac{1}{2}y-\dfrac{1}{2}$

$\boxed{f(x,y)\cong x+\dfrac{1}{2}y-\dfrac{1}{2} \text{ en } E(1,1)}$

Perpendicularidad del gradiente respecto de los conjuntos de nivel

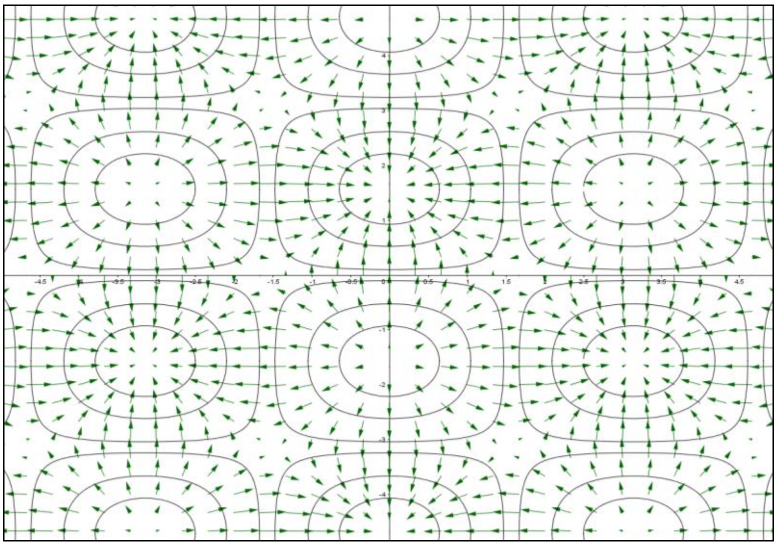
Una propiedad muy útil, y que puede demostrase con los conocimientos adquiridos en esta unidad temática, es la perpendicularidad del gradiente de un campo escalar respecto de los conjuntos de nivel.

Si consideamos el campo escalar $f(x,y)$ diferenciable en un punto (x_0, y_0) interior de su dominio, y siendo $f(x_0,y_0)=k$, tenemos la curva de nivel L_k que pasa por (x_0,y_0). El vector $\nabla f(x_0,y_0)$ es normal a la curva nivel L_k en (x_0,y_0).

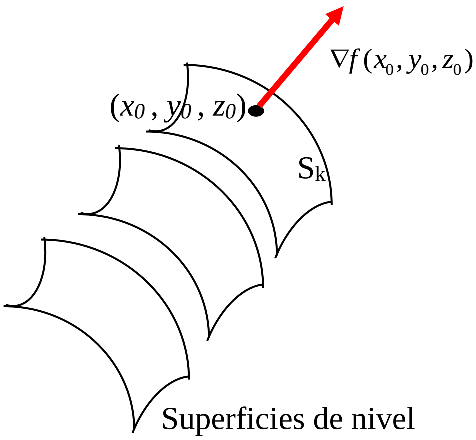


Curvas de nivel

La siguiente figura es el gráfico de las curvas de nivel del campo escalar $f(x,y)=\cos x.\sin y$, en superposición con su campo de gradientes $\nabla f=(-\sin x.\sin y\,,\cos x\,.\cos y)$. Puede verse la perpendicularidad de los vectores gradientes respecto de dichas curvas.



Análogamente, para el campo escalar $f(x,y,z)$ diferenciable en un punto (x_0,y_0,z_0) interior de su dominio, y siendo $f(x_0,y_0,z_0)=k$, tenemos la superficie de nivel S_k que pasa por (x_0,y_0,z_0). El vector $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$ es normal a la superficie de nivel S_k en (x_0,y_0,z_0).



Superficies de nivel

Teorema (perpendicularidad del gradiente para las curvas de nivel)

Demostramos el teorema para curvas de nivel, asociadas a campos escalares definidos de R^2 en R.

Sea $f: D \subset R^2 \to R$, y sea (x_0, y_0) un punto interior de *D*, con $f \in C^1$ en (x_0, y_0), de modo que $f(x_0, y_0) = k$. Sea la curva de nivel L_k que pasa por (x_0, y_0). Entonces, $\nabla f(x_0, y_0)$ es perpendicular a la curva de nivel L_k en el punto (x_0, y_0).

Demostración:

Siendo L_k una curva, está asociada a una función vectorial que la describe mediante su conjunto imagen. Tenemos entonces:

L_k asociada a $\overline{g}: A \subset R \to R^2$, de modo que $\exists t_0 \in A / \overline{g}(t_0) = (x_0, y_0)$ ya que la curva de nivel pasa por (x_0, y_0).

Evaluamos los valores de f sobre los puntos de la curva de nivel L_k

$$f(\overline{g}(t)) = k \Rightarrow (f \circ \overline{g})(t) = k$$

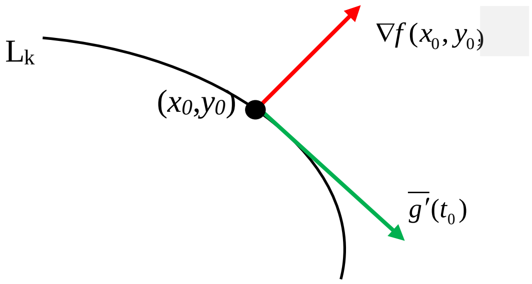
Derivamos miembro a miembro le expresión anterior:

$$D(f \circ \overline{g})(t) = D(k) \quad \Rightarrow \quad Df(\overline{g}(t)).D\overline{g}(t) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla f(\overline{g}(t)).\overline{g}'(t) = 0$$

Evaluamos la última expresión para $t = t_0$:

$$\nabla f(\overline{g}(t_0)).\overline{g}'(t_0) = 0 \quad \Rightarrow \quad \nabla f(x_0, y_0).\overline{g}'(t_0) = 0$$

Tenemos entonces que el producto escalar entre los vectores $\nabla f(x_0, y_0)$ y $\overline{g}'(t_0)$ es igual a cero, por lo cual ambos vectores son perpendiculares. Por otro lado, recordemos que el vector derivado $\overline{g}'(t_0)$ es tangente a la curva asociada L_k en el punto $\overline{g}(t_0) = (x_0, y_0)$. Por ello resulta entonces $\nabla f(x_0, y_0)$ perpendicular a la curvan de nivel L_k en (x_0, y_0).



La perpedicularidad del gradiente respecto de los conjuntos de nivel puede utilizarse para obtenerlas las ecuaciones del plano tangente y la recta normal a una superficie (que se explicita como superficie de nivel). Asimismo puede aplicarse la propiedad mencionada para determinar la ecuación de la recta tangente y la recta normal a una curva que pueda expresarse como curva de nivel de un campo escalar.

Plano tangente y recta normal a una superficie

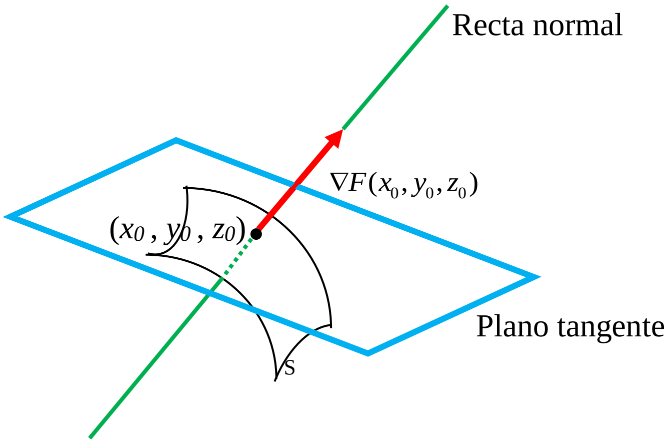
Sea el campo escalar $F: D \subset R^3 \to R$, y sea (x_0, y_0, z_0) un punto interior de *D*, con $F \in C^1$ en (x_0, y_0, z_0), y tal que $\nabla F(x_0, y_0, z_0) \neq \overline{0}$. Sea la superficie de nivel S de ecuación $F(x, y, z) = 0$, de modo que $F(x_0, y_0, z_0) = 0$ (es decir que el punto (x_0, y_0, z_0) pertenece a dicha superficie de nivel S).

Ecuación del plano tangente a la superficie S de ecuación $F(x, y, z) = 0$ en (x_0, y_0, z_0)

$$[(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)].\nabla F(x_0, y_0, z_0) = 0$$

<u>Ecuación de la recta normal</u> a la superficie S de ecuación $F(x,y,z)=0$ en (x_0,y_0,z_0)

$$(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+\lambda\,.\,\nabla F(x_0,y_0,z_0) \qquad (\lambda\in R)$$



Recta tangente y recta normal a una curva plana

Sea el campo escalar $F: D\subset R^2 \to R$, y sea (x_0,y_0) un punto interior de D, con $F\in C^1$ en (x_0,y_0), y tal que $\nabla F(x_0,y_0)\neq \bar{0}$. Sea la curva de nivel C de ecuación $F(x,y)=0$, de modo que $F(x_0,y_0)=0$ (es decir que el punto (x_0,y_0) pertenece a dicha curva de nivel C).

<u>Ecuación de la recta normal</u> a la curva C de ecuación $F(x,y)=0$ en (x_0,y_0)

$$(x,y)=(x_0,y_0)+\lambda\,.\,\nabla F(x_0,y_0) \qquad (\lambda\in R)$$

<u>Ecuación de la recta tangente</u> a la curva C de ecuación $F(x,y)=0$ en (x_0,y_0)

El vector director de la recta tangente a C en (x_0,y_0) es un vector perpendicular al vector $\nabla F(x_0,y_0)$, que es normal a dicha curva en el punto.

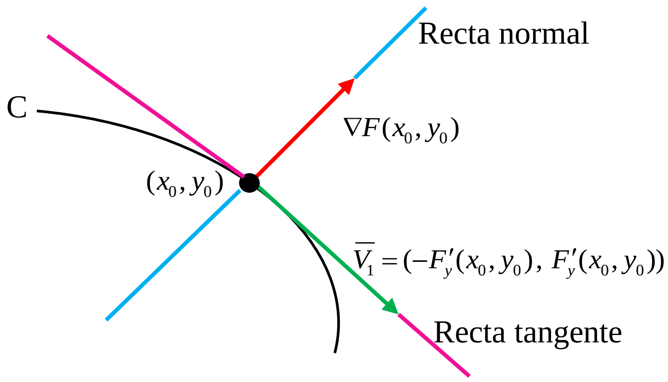
Siendo $\nabla F(x_0,y_0)=(F'_x(x_0,y_0)\,,\,F'_y(x_0,y_0))$, podemos obtener rápidamente dos vectores perpendiculares al dado, invirtiendo sus componentes y cambiando de signo una de ellas:

$$\bar{V}_1=(-F'_y(x_0,y_0)\,,\,F'_x(x_0,y_0)) \qquad \bar{V}_2=(F'_y(x_0,y_0)\,,\,-F'_x(x_0,y_0))$$

De este modo, la ecuación de la recta tangente a la curva C de ecuación $F(x,y)=0$ en (x_0,y_0) es:

$$(x,y)=(x_0,y_0)+\lambda\,.\,(-F'_y(x_0,y_0)\,,\,F'_x(x_0,y_0)) \qquad (\lambda\in R)$$

$$(x,y)=(x_0,y_0)+\lambda\,.\,(F'_y(x_0,y_0)\,,\,-F'_x(x_0,y_0)) \qquad (\lambda\in R)$$



Resolvemos un ejercicio de final, Tema 47, ejercicio 1)b)

Sea N_0 la recta normal a la superficie de ecuación $xy - z\ln x + y e^{z-1} - 4 = 0$ en (1 , 2, z_0). Halle el punto de intersección de N_0 con la superficie de ecuación $\overline{X} = (u - v, 2u, v)$ con $(u,v) \in R^2$

Para hallar N_0 necesito un punto por el cual pasa la recta, y un vector director (vector normal a la superficie)

$$F(x,y,z) = xy - z \ln x + y e^{z-1} - 4 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 \\ y = 2 \end{array}\right] \quad 1 \cdot 2 - z_0 \ln 1 + 2 \cdot e^{z_0 - 1} - 4 = 0 \rightarrow z_0 = 1$$

- Punto por el cual pasa N_0 : $(1,2,1)$
- $\nabla F(1,2,1)$ es normal a la sup en $(1,2,1)$

$$\nabla F(x,y,z) = \left(y - \frac{z}{x},\ x + e^{z-1},\ -\ln x + y e^{z-1}\right)$$

$$\nabla F(1,2,1) = \left(2 - \frac{1}{1},\ 1 + e^{1-1},\ -\ln 1 + 2 e^{1-1}\right)$$

$$\nabla F(1,2,1) = (1, 2, 2)$$

$$\boxed{N_0 : (x,y,z) = (1,2,1) + \lambda\,(1,2,2)} \quad \lambda \in R$$

$$N_0 \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 2 + 2\lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \quad \lambda \in R$$

$\overline{X} = (u - v, 2u, v)$ hallo la ecuación cartesiana

$$\left.\begin{array}{l} x = u - v \\ y = 2u \\ z = v \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} x = u - v \\ u = y/2 \\ v = z \end{cases} \Rightarrow x = \frac{y}{2} - z \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{z = \frac{y}{2} - x}$$

Verifico si los puntos de N_0 cumplen la ecuación cartesiana de la sup para algún valor de λ

$$z = \frac{y}{2} - x \Rightarrow 1+2\lambda = \frac{2+2\lambda}{2} - (1+\lambda) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 1+2\lambda = \cancel{1}+\cancel{\lambda}-\cancel{1}-\cancel{\lambda} \Rightarrow \lambda = -1/2$$

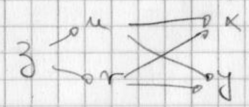
Punto de intersección:

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = 1-1/2 \\ y_0 = 2+2(-1/2) \\ z_0 = 1+2(-1/2) \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{(x_0, y_0, z_0) = \left(\tfrac{1}{2}, 1, 0\right)}$$

Resolvemos ejercicios del TP6

17) Dada $z = u + v e^{u-v}$ con $(u,v) = (f(x,y), y^2)$ resulta $z = h(x,y)$. Halle las direcciones $\breve{r}$ tales que $h'((2,1),\breve{r}) = 0$, si la función f queda definida implícitamente mediante la ecuación $2y - ux - \ln u = 0$

17) $z = u + v e^{u-v}$ con $\begin{cases} u = f(x,y) \rightarrow 2y - ux - \ln u = 0 \\ v = y^2 \end{cases}$



$h'((2,1), \breve{r}) = \nabla h(2,1) \cdot \breve{r} = 0$ donde $\breve{r} \perp \nabla h(2,1)$ (A)

Luego: debo hallar $\nabla h(2,1) = [h'_x(2,1) \, ; \, h'_y(2,1)]$

- $h'_x = z'_x = z'_u \, u'_x + z'_v \, v'_x = (1 + v e^{u-v}) \cdot u'_x + (e^{u-v} - v e^{u-v}) \cdot 0 = (1 + v e^{u-v}) \, u'_x$

Cálculo de u'_x

$F(x,y,u) = 2y - ux - \ln u = 0$

$$u'_x = -\frac{F'_x}{F'_u} = -\frac{-u}{-x-\frac{1}{u}} = \frac{-u}{\frac{xu+1}{u}} = \frac{-u^2}{xu+1}$$

$$h'_x = (1 + v e^{u-v})\left(\frac{-u^2}{xu+1}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} x=2 \\ y=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2.1-u.2-\ln u=0 \\ v=1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} 2u+\ln u=2 \\ v=1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \begin{array}{l} u=1 \\ v=1 \end{array}$$

$$h'_x(2,1) = (1+1\,e^0)\left(\frac{-1}{2+1}\right) = 2\left(\frac{-1}{3}\right) = \frac{-2}{3}$$

b) $h'_y = z'_y = z'_u\; u'_y + z'_v\; v'_y = (1+v\,e^{u-v})\, u'_y +$
$+\,(1+e^{u-v} - v\,e^{u-v}) \,.\, 2y$

Cálculo u'_y

$$u'_y = -\frac{F'_y}{F'_u} = -\frac{2}{-x-\frac{1}{u}} = \frac{2u}{xu+1}$$

$$h'_y = (1+v e^{u-v})\,\frac{2u}{xu+1} + \left(e^{u-v} - v e^{u-v}\right) . 2y$$

$$h'_y(2,1) = (1+1\,e^0) . \frac{2}{2+1} + (1\,e^0 - 1\,e^0) . 2 =$$

$$= 2 . \frac{2}{3} + 0 = \frac{4}{3}$$

$$\nabla h(2,1) = \left(\frac{-2}{3}, \frac{4}{3}\right)$$

Por lo expresado en A :

$$\bar{n}_1 = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right) \Rightarrow \check{n}_1 = \frac{\left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)}{\sqrt{\frac{16+4}{9}}} = \frac{(4,2)}{\sqrt{20}} = \frac{(4,2)}{2\sqrt{5}} = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$$\bar{n}_2 = \left(\frac{-4}{3}, \frac{-2}{3}\right) \Rightarrow \check{n}_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{5}}, -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

21) Calcule la derivada direccional máxima de $h = f \circ \overline{g}$ en el punto (1 , 1) cuando $f(u,v)$ queda definida por $z - u^2 + v^2 + \ln(v+z) = 0$ siendo $\overline{g}(x,y) = (x\,y^2\,,\,y - x^2)$

21) $h'_{máx}(1,1) = \|\nabla h(1,1)\|$

$\nabla h(1,1) = \nabla f[\bar{g}(1,1)] \cdot D\bar{g}(1,1)$ (A)

- $D\bar{g} = \begin{pmatrix} y^2 & 2xy \\ -2x & 1 \end{pmatrix} \to D\bar{g}(1,1) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
- $\nabla f = (f'_u, f'_v)$

Sea $F(u,v,z) = z - u^2 + v^2 + \ln(v+z) = 0$

$$z'_u = f'_u = -\frac{F'_u}{F'_z} = -\frac{-2u}{1 + \frac{1}{v+z}} = \frac{2u}{\frac{v+z+1}{v+z}} =$$

$$= \frac{2(v+z)u}{v+z+1}$$

$$z'_v = f'_v = -\frac{F'_v}{F'_z} = -\frac{2v + \frac{1}{v+z}}{\frac{v+z+1}{v+z}} =$$

$$= \frac{\frac{-2v(v+z)-1}{\cancel{v+z}}}{\frac{v+z+1}{\cancel{v+z}}} = \frac{-2v^2 - 2vz - 1}{v+z+1}$$

$$\nabla f = \left(\frac{2(v+z)u}{v+z+1} \,,\, \frac{-2v^2 - 2vz - 1}{v+z+1} \right)$$

$$\nabla f[g(1,1)] = \nabla f(1,0) = \left(\frac{2(0+1)\cdot 1}{0+1+1} \,,\, \frac{-0-0-1}{0+1+1} \right) = \left(1, -\frac{1}{2}\right)$$

auxiliares $\to u = 1 \wedge v = 0 \to z - 1 + 0 + \ln z = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow z + \ln z = 1 \to z = 1$

Reemplazando en (A) $\to \nabla h(1,1) = \left(1, -\frac{1}{2}\right) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} =$

$$= \left(1 + \frac{2}{2} \,,\, 2 - \frac{1}{2}\right) = \left(2 \,,\, \frac{3}{2}\right)$$

$$h'_{máx}(1,1) = \left\|\left(2, \frac{3}{2}\right)\right\| = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \frac{5}{2}$$

22) Dada $w = u^2 v + 3v^2$ con $\begin{cases} u = x + y^2 \\ v = g(x,y) \end{cases}$, resulta $w = h(x,y)$. Calcule aproximadamente $h(2.98, 2.01)$ sabiendo que g queda definida por $xv + \ln(v + y - 2) - 3 = 0$

22) Para calcular aprox $h(2{,}98 ; 2{,}01)$ utilizo la aprox lineal del plano tg

$$z_P - \omega_0 = h'_x(3,2)\underbrace{(x-3)}_{-0{,}02} + h'_y(3,2)\underbrace{(y-2)}_{0{,}01}$$

$$z_P = h'_x(3,2)(-0{,}02) + h'_y(3,2) \cdot 0{,}01 + \omega_0 \quad \text{(A)}$$

$$h: \omega \begin{cases} \to u \to x, y \\ \to v \to x, y \end{cases}$$

$x = 3$ $\quad v = 1$

$y = 2$ $\quad u = 3 + 2^2 = 7$

$$M(x,y,v) = xv + \ln(v + y - 2) - 3 = 0$$

$$3v_0 + \ln(v_0 + 2 - 2) - 3 = 0 \to v_0 = 1$$

$$v'_x = -\frac{M'_x}{M'_v} = -\frac{v}{x + \frac{1}{v+y-2}} \Rightarrow v'_x(3,2) = -\frac{1}{3 + \frac{1}{1+2-2}} = -\frac{1}{4}$$

$$v'_y = -\frac{M'_y}{M'_v} = -\frac{\frac{1}{v+y-2}}{x + \frac{1}{v+y-2}} \Rightarrow v'_y(3,2) = -\frac{1}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$h'_x = \omega'_u \cdot u'_x + \omega'_v \cdot v'_x = (2uv) \cdot 1 + (u^2 + 6v) \cdot v'_x$$

$$h'_x(3,2) = 2 \cdot 7 \cdot 1 + (49 + 6 \cdot 1)\left(-\frac{1}{4}\right) \Rightarrow h'_x(3,2) = \frac{1}{4}$$

$$h'_y = \omega'_u \, u'_y + \omega'_v \cdot v'_y = (2uv) \cdot 2y + (u^2 + 6v) \cdot v'_y$$

$$h'_y(3,2) = 2 \cdot 7 \cdot 4 + (49 + 6)\left(-\frac{1}{4}\right) \Rightarrow h'_y(3,2) = \frac{169}{4}$$

Retomando (A), calculamos $\omega_0 = \underbrace{7^2 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2}_{u^2 v + 3v^2} = 52$

$$z_P = \frac{1}{4}(-0{,}02) + \frac{169}{4} \cdot 0{,}01 + 52 = 52{,}4175 \cong h(2{,}98 ; 2{,}01)$$