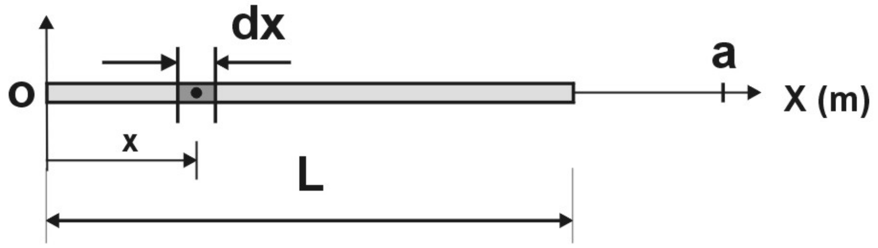
CARGAS UNIFORMEMENTE DISTRIBUIDAS

Se desea calcular la intensidad de campo eléctrico producida por cuerpos extensos uniformemente cargados. Un cuerpo extenso posee un tamaño comparable con la distancia al punto del campo cuya intensidad se desea calcular.

VARILLA CON CARGA ELÉCTRICA "q".



Se sabe que la distancia entre la carga y el punto de prueba "a", influye fuertemente ($1/d^2$) en el valor de intensidad de campo. Es lógico pensar que el sector derecho de la varilla (más cercano) contribuye en mayor medida que el sector izquierdo (más lejano) en la intensidad del campo eléctrico del punto "a".

La alinealidad entre causa y efecto impide promediar la influencia de ambos sectores.

Es una solución tomar solamente una porción de varilla de longitud lo suficientemente pequeña de modo tal que las diferencias antes mencionadas sean despreciables. Es decir que las diferencias de su efecto actúe el decimal que no se tenga en cuenta.

Este intervalo mínimo Δx ***puede ser considerado como un "dx".***

Se puede imaginar la varilla compuesta por infinidad de estos micro-intervalos asemejables a puntos con micro-cargas eléctricas. Cada uno de ellos tiende una coordenada "x".

Para conocer qué cantidad de carga le corresponde a ese elemento "dx" se procede así:

Se determina el coeficiente de distribución lineal (o densidad lineal) de carga: $\lambda = \frac{q}{L}$ C/m

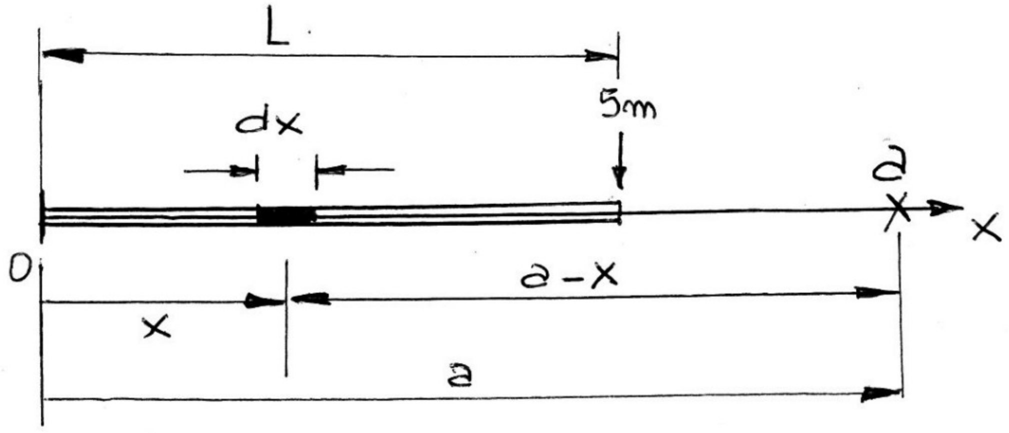
Por consiguiente la carga eléctrica del elemento es $dq = \lambda \cdot dx$

El campo creado por el "dq" es "$d\vec{E}$".

Los efectos totales surgen de sumar los efectos parciales: $\vec{E} = \int d\vec{E}$ (N/C)

Ejercicio 1

Dada un varilla de longitud “L” con una carga “q”, calcule la intensidad de campo eléctrico en el punto “a”.



DATOS

$a = 9m$

$L = 5m$

$Q = 100\,\mu C$

$$\boxed{\lambda = \frac{Q}{L} = \text{TASA}}$$

Se Toma un elemento de carga de la varilla. $\equiv dq = \lambda\, dx$

Su posición es "x".

La distancia al punto "a" $\equiv (a - x) \therefore (9 - x)$

La contribución de este elemento es: $d\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\dfrac{\lambda\, dx}{(9-x)^2}\,\hat{i}$

$$\lambda = 20\,\frac{\mu C}{m} \quad y \quad \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9\times10^9\,\frac{N\cdot m^2}{C^2} \therefore$$

$$dE = 18\times10^4\,\frac{dx}{(9-x)^2} \Rightarrow E = \int dE = \int_{0m}^{5m} 18\times10^4\,\frac{dx}{(9-x)^2} \equiv \left(N/C\right)$$

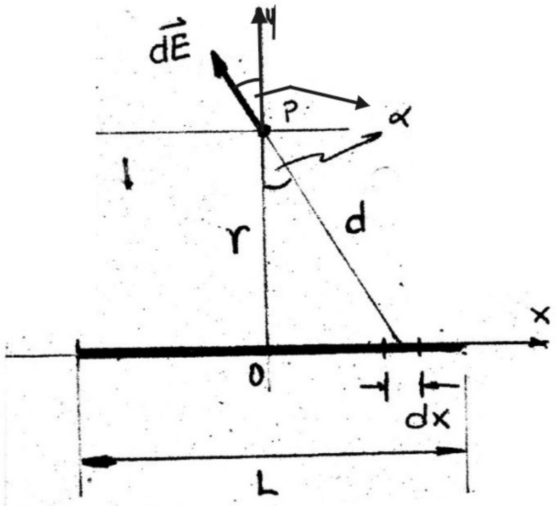
$$E = 18\times10^4 \cdot \int_0^5 \frac{d(9-x)}{(9-x)^2}\,(-1) = 18\cdot10^4\,\frac{1}{(9-x)}\Bigg|_{0m}^{5m} \Rightarrow$$

$$E = 18\times10^4\left[\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right] = 18\times10^4\cdot\frac{5}{36}\,\frac{N}{C} \therefore$$

$$\boxed{E = 2{,}5\times10^4\ N/C}$$

Ejercicio 2

Dada un varilla de longitud "L" con una carga "q", calcule la intensidad de campo eléctrico en el punto "P".



$dq = \lambda dx$

$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{dq}{d^2}$ siendo $d^2 = x^2 + r^2$

$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{\lambda\, dx}{x^2 + r^2}$. Por simetría, los dE horizontales se cancelan con los producidos por la otra mitad de varilla.

Sólo queda la componente en y de los $d\vec{E}$. siendo $\boxed{dE_y = dE \cos\alpha}$

Siendo $\cos\alpha = \frac{r}{d} = \frac{r}{\sqrt{r^2 + x^2}}$

$$\therefore\ E_y = \int_{-L/2}^{+L/2} dE \cos\alpha = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda\, dx}{x^2 + r^2} \cdot \left(\frac{r}{\sqrt{r^2 + x^2}}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \lambda r \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

De Tabla de Integrales - pag 11 - Integral 196 - $\int \frac{dx}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{x}{r^2 \sqrt{x^2 + r^2}}$ — queda

$$\frac{\lambda r}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{dx}{(x^2 + r^2)^{3/2}} = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}}\right]_{-L/2}^{L/2} = \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r} \left[\frac{x}{\sqrt{x^2 + r^2}}\right]_0^{L/2} =$$

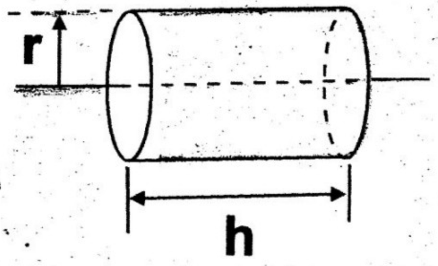
$$= \frac{2\lambda}{4\pi\varepsilon_0 r} \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 + \left(\frac{L}{2}\right)^2}} = \boxed{\frac{\lambda L}{4\pi\varepsilon_0 r} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 + L^2/4}} = E(r)}$$

Para el caso de varilla infinita $L \to \infty$ operamos así.

$$E(r) = \frac{\lambda L}{4\pi\varepsilon_0 r} \cdot \frac{1}{\sqrt{r^2 + L^2/4}} = \frac{\lambda L}{4\pi\varepsilon_0 r} \cdot \frac{1}{L\left[\sqrt{\frac{1}{4} + \frac{r^2}{L^2}}\right]}$$

Si $L \to \infty$ entonces

$$\boxed{E(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}} \longrightarrow \text{LÍNEA DE CARGA INFINITA.}$$



La varilla tiene una carga lineal uniforme.

Las líneas del campo $\vec{E}$ tienen que forzosamente adoptar una dirección RADIAL debido a la SIMETRÍA del problema.

SUPERFICIE GAUSSIANA: Cilindro Circular de radio "r" y longitud "h" cerrado en ambos extremos con tapas planas normales al eje

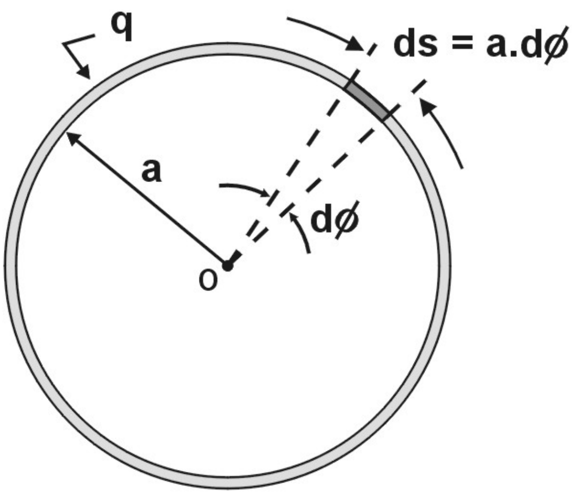
E es constante en toda la superficie cilíndrica. El flujo de $\vec{E}$ que pasa por esa superficie es $E.(2\pi r.h)$ siendo $(2\pi.r.h)$ el área de dicha superficie. Además NO HAY FLUJO por las tapas circulares.

La CARGA ENCERRADA por la superficie gaussiana es λh. Entonces siendo que la LEY DE GAUSS dice que $\epsilon_0 \oint \vec{E}.d\vec{S} = q$, podemos remplazar según lo arriba mencionado resultando

$$\epsilon_0 E.(2\pi r h) = \lambda h. \text{ donde.}$$

$$\boxed{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = E(r)}$$

ARO CON CARGA ELÉCTRICA "q".



Dado un aro de radio "a" con carga eléctrica "q"

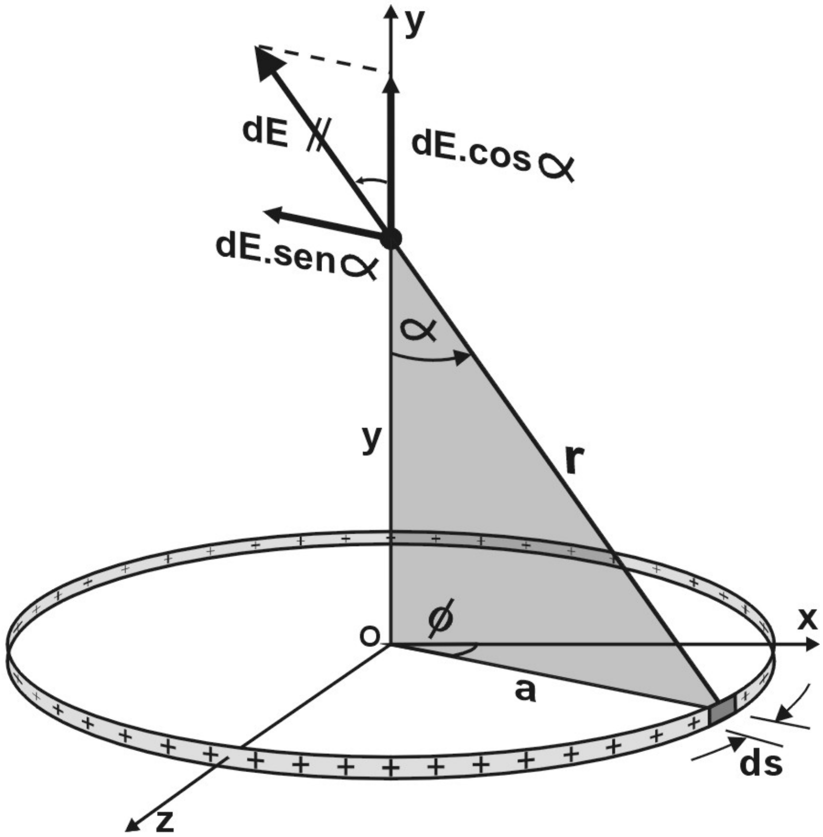
Se tiene una densidad lineal de carga: $\lambda = \dfrac{q}{2\pi a}$ C/m

La carga de un elemento "ds" : $dq = \lambda . ds$ (C)

$dq = \lambda . a . d\phi$ (C)

Se procede a calcular la intensidad de campo eléctrico sobre el eje "y".

$$dE = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_o . r^2} = \frac{\lambda . a . d\phi}{4\pi\varepsilon_o . r^2} \text{ (N/C)}$$



Dado que los efectos de todos los elementos de carga del aro se superponen, resultan canceladas las componentes horizontales. Por lo tanto sólo se calcula la proyección de dE sobre el eje "y".Siendo cos α = y/r

$$dE.\cos\alpha = \frac{\lambda . a . d\phi . y}{4\pi\varepsilon_o . r^3} \text{ (N/C)}$$

$$E_y = \int dE.\cos\alpha = \int_{\alpha=0}^{\phi=2\pi} \frac{\phi . y}{4\pi\varepsilon_o . r^3} \text{ (N/C)}$$

CUIDADO !!!:
La variable de integración es Ø

$$E_y = \frac{\lambda . a . y}{4\pi\varepsilon_o . r^3}\int_{\phi=0}^{\phi=2\pi} d\phi \text{ (N/C)} \quad \therefore \quad E_y = \frac{\overbrace{\lambda\ 2\pi . a}^{\text{carga “q”}} . y}{4\pi\varepsilon_o . \underbrace{r^3}_{(a^2+y^2)^{3/2}}} \text{ (N/C)} \quad \therefore \quad \boxed{E_y = \frac{q . y}{4\pi\varepsilon_o (a^2+y^2)^{3/2}}}$$

De la expresión final puede verse que:

- **Si y = 0** $\Rightarrow$ **Ey = 0 N/C** $\Rightarrow$ ***Suma vectorial nula***
- **Si y >>a** $\Rightarrow$ $\boxed{E_y = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_o y^2} \text{ N/C}}$ $\Rightarrow$ ***De lejos el aro se funciona como una carga puntual***

DISCO CON CARGA ELÉCTRICA "q".

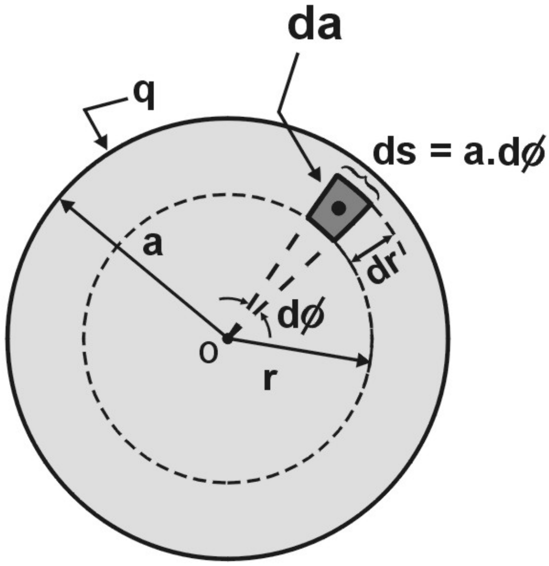
Dado un disco de radio "a" con carga eléctrica "q"

Se tiene una densidad superficial de carga:

$$\sigma = \frac{q}{\pi\, a^2} \quad C/m^2$$

La carga de un elemento "da" :

$$dq = \sigma \,.\, da = \sigma \,.\, r \,.\, ds \,.\, dr \qquad (C)$$



Se procede a calcular la intensidad de campo eléctrico sobre el eje "y".

$$dE = \frac{\sigma \,.\, r \,.\, d\phi \,.\, dr}{4\pi\varepsilon_o\,(y^2 + a^2)} \Rightarrow$$

$$dE_y = \frac{\sigma \,.\, r \,.\, d\phi \,.\, dr}{4\pi\varepsilon_o\,(y^2 + a^2)} \cdot \underbrace{\frac{y}{(y^2 + r^2)^{1/2}}}_{\cos\alpha} \Rightarrow$$

$$dE_y = \frac{\sigma \,.\, r \,.\, d\phi \,.\, dr}{4\pi\varepsilon_o\,(y^2 + r^2)^{3/2}} \cdot y \Rightarrow$$

$$E_y = \frac{\sigma \,.\, y}{4\pi\varepsilon_o} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a \frac{r \,.\, dr}{(y^2 + r^2)^{3/2}} =$$

INTEGRAL N°197

$$= \frac{\sigma \,.\, y}{4\pi\varepsilon_o} \cdot 2\pi \cdot \left[\frac{-1}{(y^2 + r^2)^{1/2}}\right]_{r=0}^{r=a} =$$

$$= \frac{\sigma \,.\, y}{2\,\varepsilon_o} \left[\frac{-1}{(y^2 + a^2)^{1/2}} - \left(-\frac{1}{y}\right)\right] =$$

$$\boxed{\frac{\sigma}{2\,\varepsilon_o} \cdot \left[1 - \frac{y}{(y^2 + a^2)^{1/2}}\right] = E_y}$$

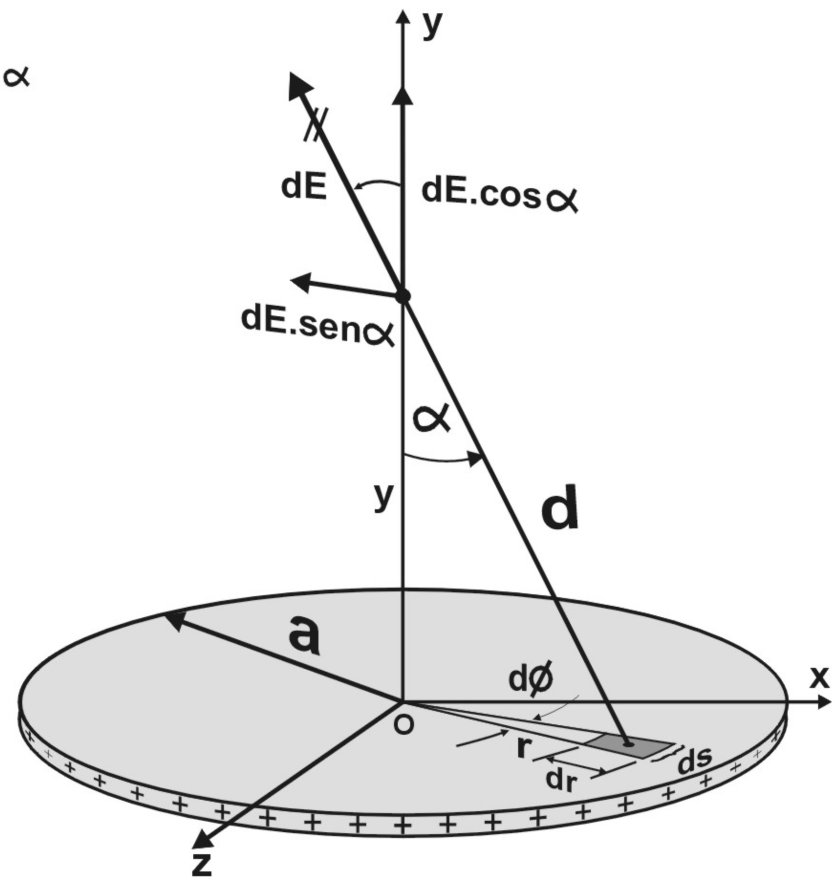
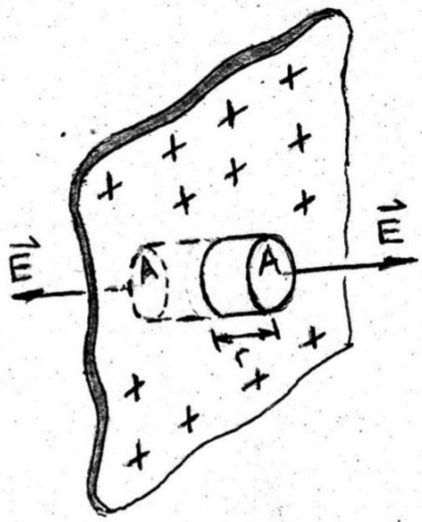


LÁMINA DE CARGA



•) Lámina NO CONDUCTORA, delgada, "infinita" –

•) Infinita ⇒ consideraremos puntos NO CERCANOS a los bordes y cuya distancia a la lámina sea pequeña comparada con las dimensiones de ésta –

•) La lámina posee una DENSIDAD SUPERFICIAL DE CARGA σ (carga por unidad de área = $Coul/m^2$). constante

•) Una superficie gaussiana conveniente es una "caja de píldoras" de sección transversal de área A y altura 2r. colocada atravesando el plano.

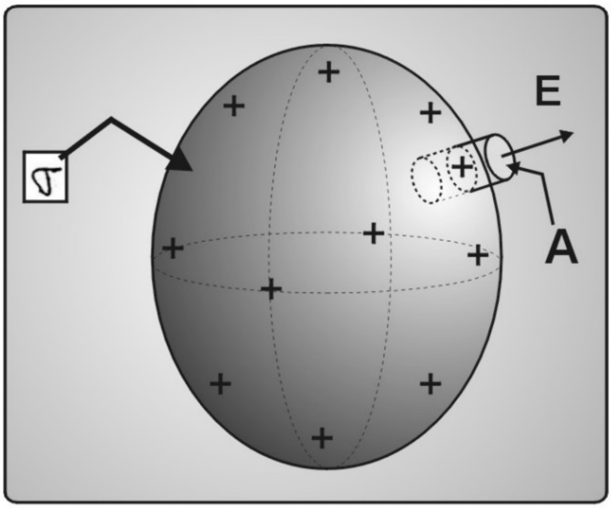
•) Por simetría, $\vec{E}$ apunta perpendicularmente a las tapas extremas, y alejándose del plano. $\vec{E}$ no atraviesa la superficie cilíndrica, no contribuye al flujo por esa parte.

•) La ley de Gauss dice. $\varepsilon_0 \oint \vec{E} \cdot d\vec{s} = q \quad \therefore \quad \varepsilon_0 (EA + EA) = \sigma A$.

$$\Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

•) IMPORTANTE: E es igual para todos los puntos en cada lado del plano.

CONDUCTOR CARGADO



Conductor, en su superficie tiene una densidad superficial de carga σ que varía de un punto a otro

•) $\vec{E}$ debe ser siempre normal a la superficie

•) $E = 0$ en el interior del conductor.

•) Ley de Gauss ≡ $\epsilon_0 \oint \vec{E}\,d\vec{S} = q$ siendo q la carga neta dentro de la sup. gaussiana.

Entonces $\epsilon_0 E A = \sigma A \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}}$

•) Para una dada carga encerrada por la caja de píldoras, σA, todo el campo eléctrico sale por la tapa exterior. puesto que la tapa interior está dentro del conductor, lugar donde NO existe campo eléctrico.

<u>COMPARANDO CON LA LÁMINA NO CONDUCTORA</u>: En la lámina no conductora con carga superficial idéntica σA, existía campo eléctrico a ambos lados de la lámina. En el conductor, también tiene una densidad superficial de carga σA pero el campo E apunta sólo hacia un lado (el externo).

Como ambos poseen la misma carga encerrada σA, entonces ambos tendrán el mismo flujo.

Por esto, el campo E en el conductor debe ser el doble porque el área es la mitad que la de la lámina no conductora $\Rightarrow E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$ en la <u>NO CONDUCTORA</u>