FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES

Dada una función de varias variables $f : D \subset R^n \rightarrow R^m$, analizamos los casos particulares de acuerdo a los valores que toman *n* y *m*.

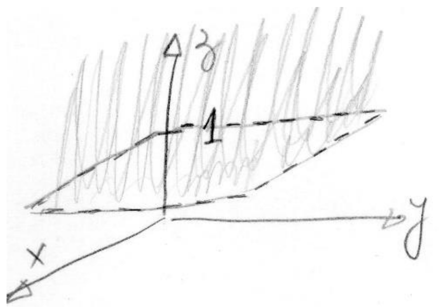
- **Campo escalar**: $n \geq 2$, $m = 1$

En este caso, los elementos del dominio son vectores de R^n y las imágenes son números reales. Ejemplo: $f : Domf \subset R^3 \rightarrow R \ / \ f(x,y,z) = \dfrac{2xy + z^2}{\sqrt{z-1}}$

Para hallar el dominio de un campo escalar se consideran las restricciones que se presentan en la estructura algebraica de su expresión. En el caso del campo escalar del ejemplo, tenemos que: $z - 1 > 0 \Rightarrow z > 1$

Por lo tanto: $Dom\ f = \{ (x,y,z) \in R^3 / z > 1 \}$

Gráficamente, el dominio resulta:



(El plano z = 1 se dibuja en línea punteada porque los puntos de dicho plano no pertenecen al dominio del campo escalar)

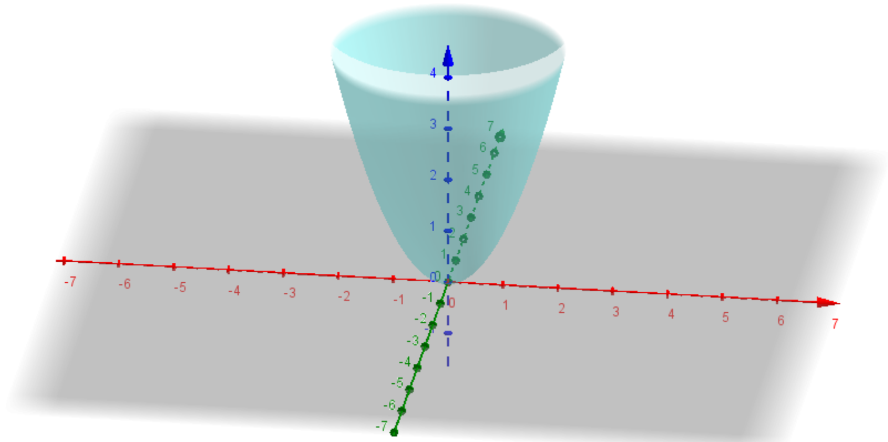
En el caso de los campos escalares, geométricamente nos interesa la gráfica para campos de R^2 en R. En ese caso definimos:

$$\text{Gráfica } f = \{ (x,y,z) \in R^3 / z = f(x,y) \wedge (x,y) \in Dom\ f \}$$

Veamos un ejemplo. Si definimos el campo escalar $f : R^2 \rightarrow R / f(x,y) = x^2 + y^2$, tenemos que la gráfica de f corresponde a la siguiente ecuación:

$$z = f(x,y) \Rightarrow z = x^2 + y^2$$

La ecuación corresponde a una superficie en R^3, en este caso particular, un paraboloide circular.



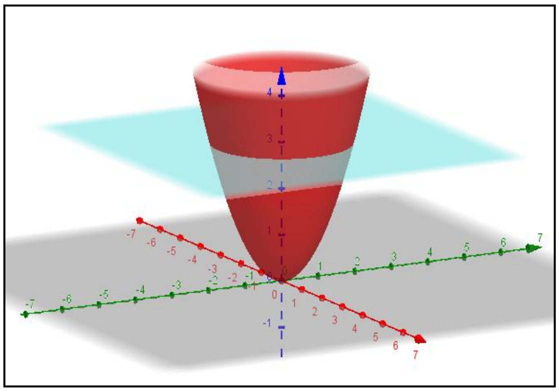
Para el caso de gráficas de campos escalares, el conjunto imagen se asocia al eje z, y el dominio es un subconjunto del plano xy (recuerden que en las funciones escalares de AMI, el conjunto imagen se asocia al eje y, y el dominio es un subconjunto del eje x).

En general, las gráficas de campos escalares de R^2 en R de ecuación $z = f(x,y)$ son superficies en el espacio. Decimos “en general”, ya que más adelante veremos la definición formal de superficie, que implica ciertas condiciones especiales para el campo escalar.

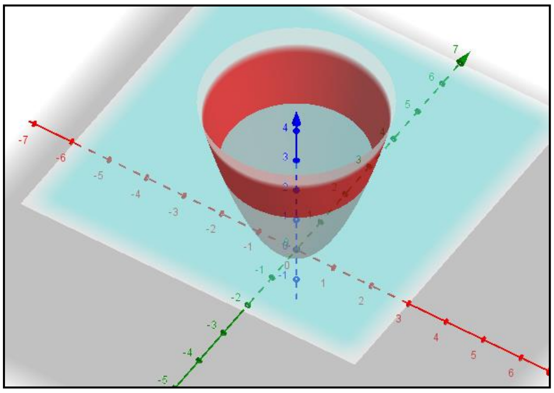
En el caso del ejemplo anterior, la ecuación de su gráfica asociada es la ecuación de una superficie conocida. Sin embargo, la gráfica de un campo escalar puede resultar una superficie no tradicional. Para hacer una gráfica aproximada podemos realizar intersecciones de la superficie con planos paralelos al plano (xy), y proyectar estas curvas de corte en el dominio de la función (algo similar a las trazas de superficies que trabajaron en AGA).

Tenemos entonces la ecuación de la superficie gráfica $z = f(x,y)$, y buscamos la intersección con planos paralelos al plano (xy) de ecuación $z = k$, siendo k un número real. Hay que considerar que el número k tiene que tomar valores de la imagen del campo escalar, para que la intersección entre ambas superficies (gráfica y plano) sea posible. Una vez determinada la curva intersección, se proyecta dicha curva en el dominio de la función. Este nuevo gráfico realizado en R^2 puede darnos una idea de la forma de la gráfica del campo escalar.

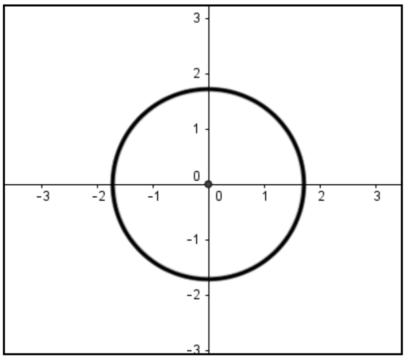
Continuando con el ejemplo anterior, tenemos la gráfica de ecuación $z = x^2 + y^2$ y realizamos la intersección con un plano paralelo al (xy), por ejemplo, z = 3. Obtenemos una circunferencia, y realizamos la proyección de la misma en el dominio de la función $Dom\ f = R^2$.



(Vista de costado)

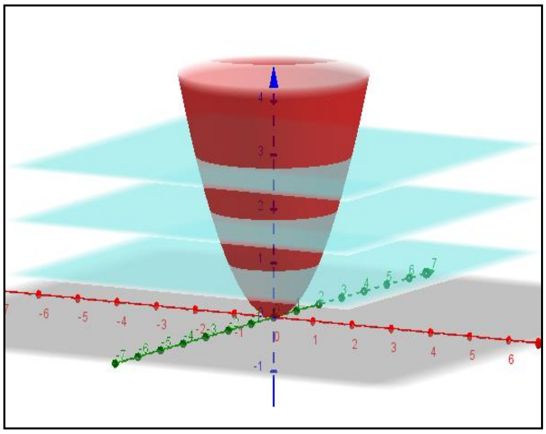


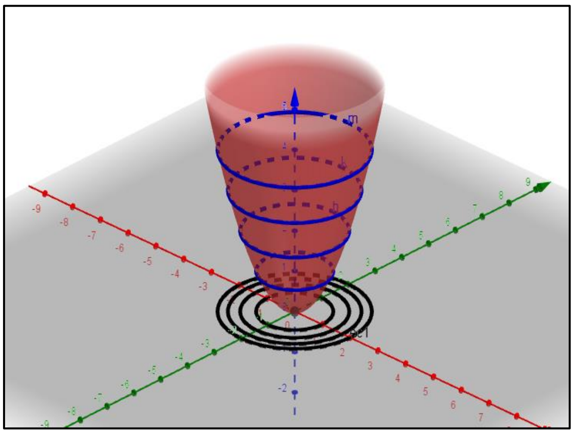
(Vista de arriba)



Circunferencia proyección: $x^2+y^2 = 3$ (centro en el origen y radio $\sqrt{3}$)

Análogamente puede realizarse este proceso para otros planos paralelos al plano (xy) de ecuación $z = k$, siempre considerando que $k \in \operatorname{Im} f = R_0^+$





Planos z=1 , z=2 , z=3 , z=4

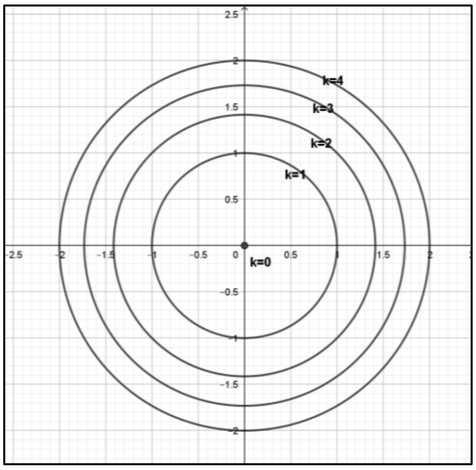


Gráfico de la proyección de las circunferencias en el dominio

Las curvas obtenidas (en este caso, las circunferencias de ecuación $x^2+y^2 = k$), es lo que vamos denominar curvas de nivel. Como se ve en el gráfico, es habitual indicar qué valor de k corresponde a cada una de las curvas.

Analíticamente, para hallar las curvas de nivel del campo escalar que estamos analizando, efectuamos los siguientes cálculos:

$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = k \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = k \quad \text{(con } k \in \operatorname{Im} f = R_0^+ \text{)}$$

Si evaluamos algunos valores k, resulta:

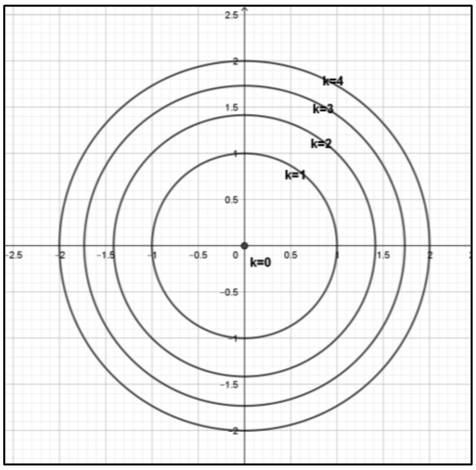
$k = 0$: $x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow (x,y) = (0,0)$

$k = 1$: $x^2 + y^2 = 1$ (circunferencia con centro en (0,0) y radio 1)

$k = 2$: $x^2 + y^2 = 2$ (circunferencia con centro en (0,0) y radio $\sqrt{2}$)

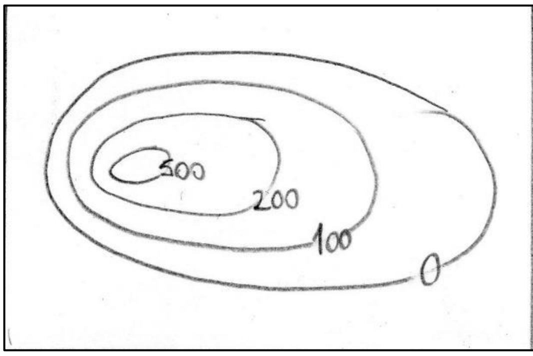
$\vdots$

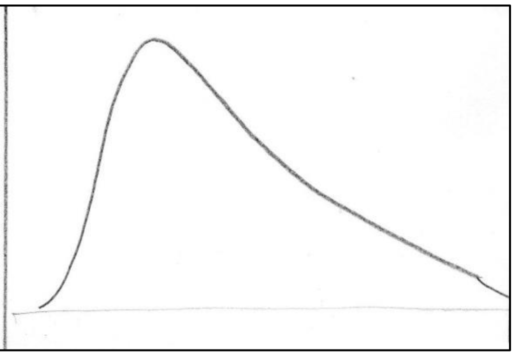
Por lo cual, el gráfico de las curvas de nivel es el obtenido previamente



Si no conociéramos la superficie gráfica, con el análisis de las curvas de nivel podemos tener una idea de la representación geométrica de dicha superficie. Para este caso, en los cortes de la superficie con planos horizontales se obtienen circunferencias centradas en el origen, cuyo radio aumenta a medida que aumentan los valores de z. Si “apilamos” dichas circunferencias, obtenemos una idea de la gráfica del campo escalar, que en este caso es un paraboloide circular.

Este tipo de situaciones se presenta, por ejemplo, en los mapas físicos: las curvas o líneas de nivel representan distintas altitudes del terreno, que en muchos casos se indican también con diferentes colores. Por ejemplo, si tuvieran el siguiente esquema de las altitudes de un terreno (curvas de nivel), se podría dibujar un corte transversal del mismo y tener una idea aproximada de la forma del terreno.





Altitud del terreno en metros sobre el nivel del mar		Corte transversal del terreno

Los mapas de isotermas o isobaras son también ejemplos de la utilización de curvas de nivel.

Este concepto de curvas de nivel puede generalizarse para definir conjuntos de nivel para campos escalares de R^n en R. Definimos:

Sea el campo escalar $f: D \subset R^n \to R$. Se denomina conjunto de nivel k al siguiente conjunto:

$$L_k = \{ \overline{X} \in Dom\ f \ / \ f(\overline{X}) = k \quad \wedge \quad k \in \operatorname{Im} f \ \}$$

Si el campo escalar está definido de R^2 en R, la ecuación de los conjuntos de nivel será:

$$f(x, y) = k \quad (\text{con} \quad k \in \operatorname{Im} f\ )$$

Los conjuntos de nivel también podrán graficarse cuando se trate de campos escalares de R^3 en R, y su ecuación será:

$$f(x, y, z) = k \quad (\text{con} \quad k \in \operatorname{Im} f\ )$$

En este caso, los conjuntos de nivel pueden tener una interpretación física, asociada a la modelización que se realiza a través del campo escalar. En este sentido, la función se asocia alguna magnitud física escalar para cada punto del espacio. Por ejemplo, podemos definir un campo escalar R^3 en R que modelice la temperatura de cada punto del espacio, o su densidad. Los conjuntos de nivel indicarán qué puntos del espacio tienen la misma temperatura o la misma densidad.

Veamos un ejemplo: sea el campo escalar $f: R^3 \rightarrow R / f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$

Hallamos analíticamente los conjuntos de nivel:

$$x^2 + y^2 + z^2 = k \quad (\text{con } k \in \operatorname{Im} f = R_0^+)$$

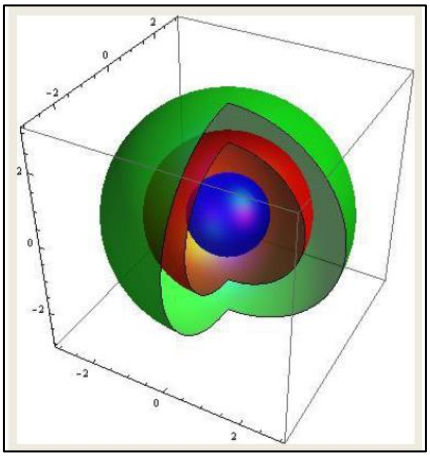
k=0 : $x^2 + y^2 + z^2 = 0 \Rightarrow (x,y,z) = (0,0,0)$

k=1 : $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (casquete esférico con centro en (0,0,0) y radio 1)

k=2 : $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ (casquete esférico con centro en (0,0,0) y radio $\sqrt{2}$)

⋮

El gráfico de los conjuntos de nivel es:



Puede decirse que todos los puntos que pertenecen a un determinado casquete esférico tienen la misma temperatura, y dicha temperatura aumenta a medida que aumenta el radio de los casquetes.

En el ejemplo anterior de un campo escalar de R^3 en R se observa que los conjuntos de nivel son superficies en R^3. Por otro lado, para el caso de campos escalares de R^2 en R los conjuntos de nivel son curvas en R^2. Por ello, los conjuntos de nivel reciben la siguiente denominación específica:

Conjunto de nivel para campo escalar $f: D \subset R^2 \rightarrow R$: **curva de nivel**

Conjunto de nivel para campo escalar $f: D \subset R^3 \rightarrow R$: **superficie de nivel**

Más adelante en el curso veremos otros conceptos y aplicaciones que involucran los conjuntos de nivel de campos escalares.

Resolvemos algunos ejercicios referidos a campos escalares del TP2.

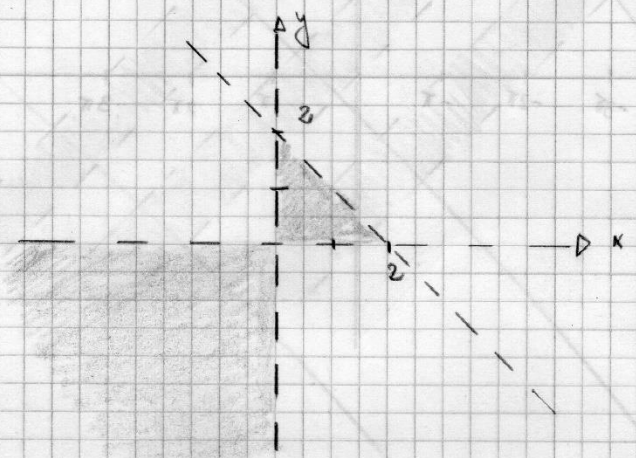
5)e) En los siguientes casos, determine y grafique el dominio natural D de la función

$$f(x,y) = \frac{\ln(x\,y)}{\sqrt{2-x-y}}$$

5)e) $2-x-y>0 \ \wedge \ xy>0 \Rightarrow y<2-x \ \wedge \ xy>0$

$\Rightarrow y<2-x \ \wedge \ \left[(x>0 \ \wedge \ y>0) \vee (x<0 \ \wedge \ y<0)\right]$

$\text{Dom } f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y<2-x \ \wedge \ xy>0\}$



6)d) Represente geométricamente los conjuntos de nivel de los siguientes campos escalares: $f(x,y)=|x|+y$

6) d) $|x|+y=k \quad \wedge \quad k\in\mathbb{R}$

$y=k-|x|$

$k=0 \rightarrow y=-|x|$

$k=1 \rightarrow y=1-|x|$

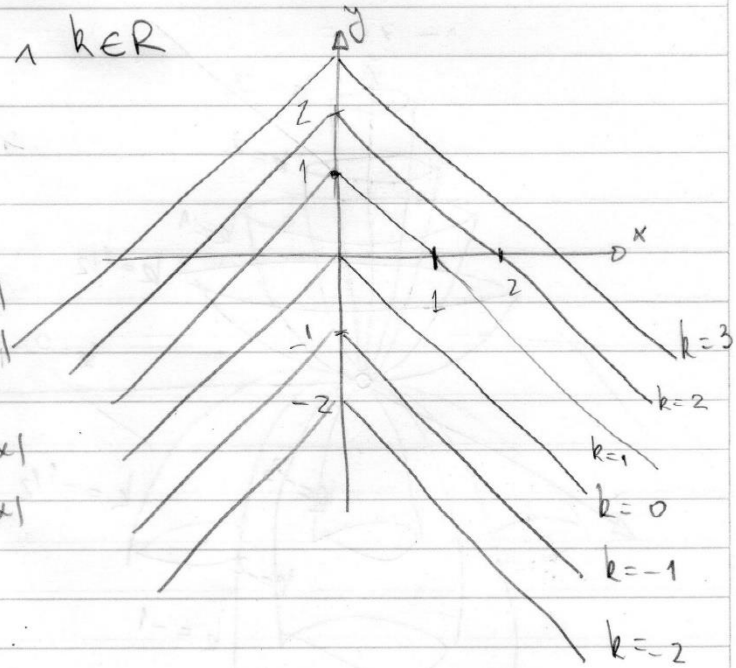
$k=2 \rightarrow y=2-|x|$

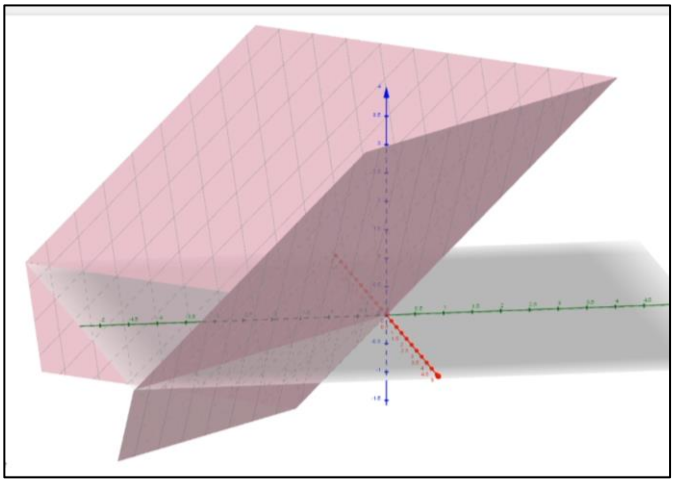
$\vdots$

$k=-1 \rightarrow y=-1-|x|$

$k=-2 \rightarrow y=-2-|x|$

$\vdots$





Gráfica del campo escalar $f(x,y)=|x|+y$

6)f) Represente geométricamente los conjuntos de nivel de los siguientes campos escalares: $f(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$

6) f) $f(x,y)=k \Rightarrow k=\dfrac{x}{x^2+y^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow k(x^2+y^2)=x$

$\boxed{k=0} \rightarrow x=0$

$\boxed{k\neq 0} \rightarrow x^2+y^2=\dfrac{x}{k} \Rightarrow x^2-\dfrac{x}{k}+y^2=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2-\dfrac{x}{k}+\dfrac{1}{4k^2}+y^2=\dfrac{1}{4k^2} \Rightarrow \left(x-\dfrac{1}{2k}\right)^2+y^2=\left(\dfrac{1}{2k}\right)^2$

$k=1 \rightarrow \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$

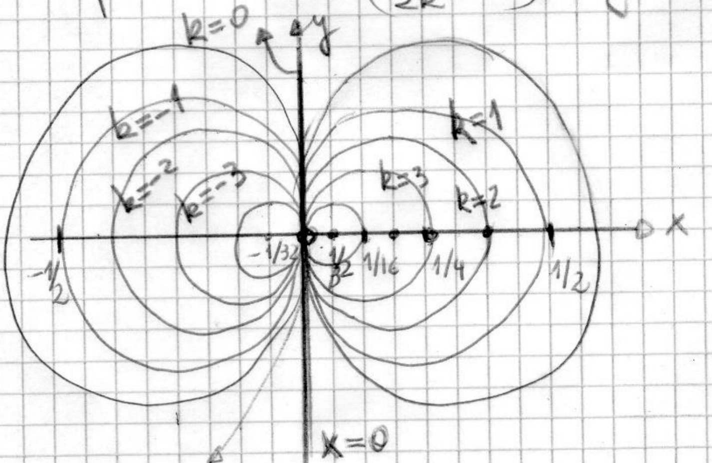
$k=2 \rightarrow \left(x-\dfrac{1}{4}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{16}$

$k=-1 \rightarrow \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$

⋮

Circunf de centro $\left(\dfrac{1}{2k},0\right)$ y radio $\left|\dfrac{1}{2k}\right|$

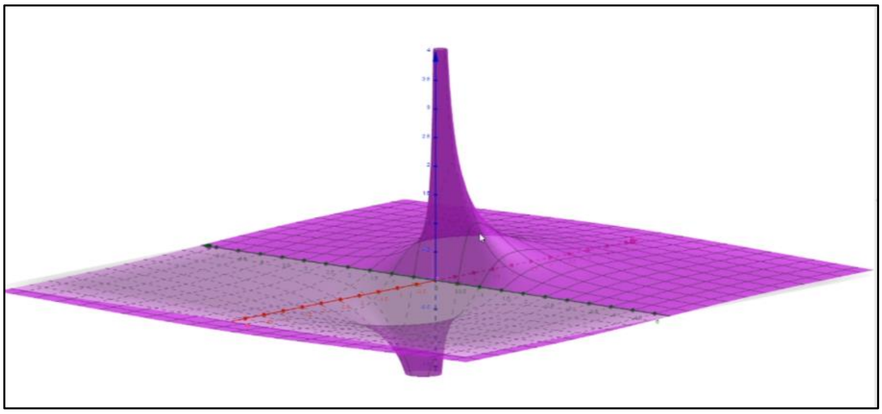
(con $k\neq 0$)



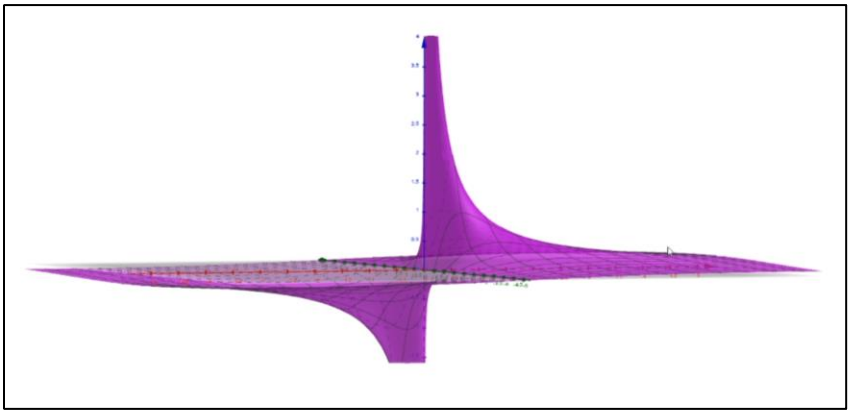
$(0,0)\notin \mathrm{Dom}\, f$ (las curvas de nivel no se cortan, porque $\bar{0}\notin \mathrm{Dom}\, f$)

$k=1/2 \rightarrow (x^2-1)^2+y^2=1$

$k=-1/2 \rightarrow (x+1)^2+y^2=1$



Gráfica del campo escalar $f(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$

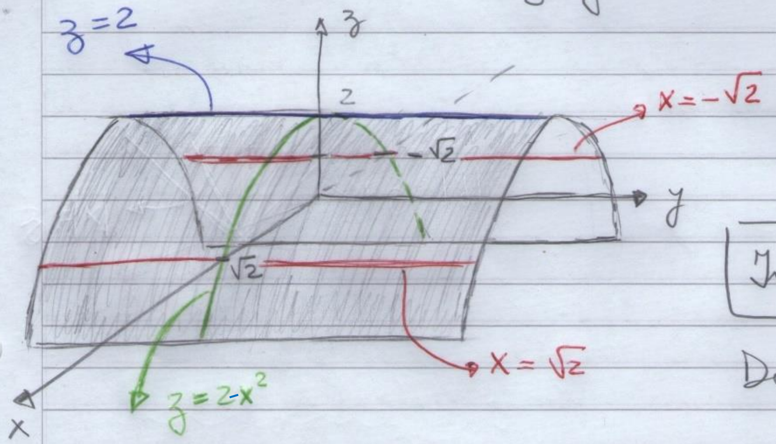


Gráfica del campo escalar $f(x,y)=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ (vista de costado)

7)e) Para cada uno de los siguientes campos escalares definidos en su dominio natural, determine: conjunto imagen, halle el conjunto de positividad, represente la gráfica en el espacio *xyz* y analice las intersecciones con los planos coordenados.

$$f(x,y) = 2 - x^2$$

7)e) $z = 2 - x^2$ superficie cilíndrica de eje y



$\boxed{Im\, f = (-\infty, 2]}$

$Dom\, f = \mathbb{R}^2$

intersecc pl(xy) → z=0

$$\left.\begin{array}{l} z=0 \\ z=2-x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} z=0 \\ 2-x^2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} z=0 \\ x^2=2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} z=0 \\ x=\pm\sqrt{2} \end{array}\right\}$$

dos rectas en el pl(xy)

intersecc pl(yz) → x=0

$$\left.\begin{array}{l} x=0 \\ z=2-x^2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} x=0 \\ z=2 \end{array}\right\}$$

recta en el pl(yz)

intersecc pl(xz) → y=0

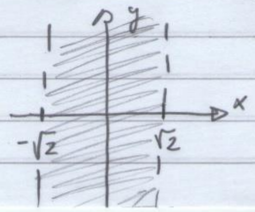
$$\left\{\begin{array}{l} y=0 \\ z=2-x^2 \end{array}\right.$$

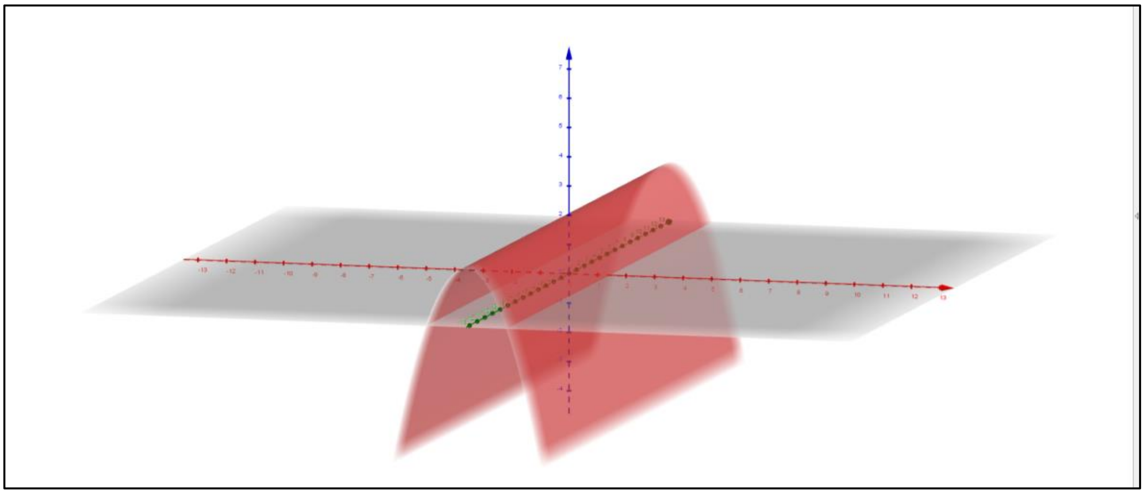
parábola en el pl(xz)

Positividad → $f(x,y) > 0 \Rightarrow 2 - x^2 > 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 < 2 \Rightarrow |x| < \sqrt{2} \Rightarrow -\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$

$C^+ = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / \ |x| < \sqrt{2}\right\}$





Gráfica del campo escalar $f(x,y) = 2 - x^2$ (Ecuación de la gráfica $z = 2 - x^2$)