DERIVADA DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES.

DERIVADA DE CAMPOS VECTORIALES

En el caso de los campos vectoriales, también vamos a definir la derivada como límite del cociente incremental. En este caso, como en el de los campos escalares, además de indicar el punto del dominio en el cual se calcula la derivada, hay que dar un vector que indique la dirección de incremento.

Debido a que existen infinitos vectores para indicar la dirección de derivación, cada campo vectorial tiene infinitas derivadas en un punto (siempre que estén definidas).

Definición: derivada de un campo vectorial respecto de un VECTOR

Sea $\overline{f}: D \subset R^n \to R^m$, sea $\overline{X}_0$ punto interior de D y sea $\overline{v} \in R^n$, $\overline{v} \neq \overline{0}$. Se define la derivada de $\overline{f}$ en $\overline{X}_0$ respecto del vector $\overline{v}$ al siguiente límite:

$$\overline{f}\,'(\overline{X}_0, \overline{v}) = \frac{\partial \overline{f}}{\partial \overline{v}}(\overline{X}_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\overline{f}(\overline{X}_0 + h\overline{v}) - \overline{f}(\overline{X}_0)}{h} \quad \text{si el límite existe y es finito}$$

La derivada de un campo vectorial en un punto, si existe, es un vector.

Análogamente a la situación de los campos escalares, podemos particularizar la definición anterior para el caso de versores, con lo cual tenemos las derivadas direccionales.

Definición: derivada direccional de un campo vectorial (respecto de un VERSOR)

Sea $\overline{f}: D \subset R^n \to R^m$, sea $\overline{X}_0$ punto interior de D y sea $\breve{v} \in R^n$. Se define la derivada de $\overline{f}$ en $\overline{X}_0$ respecto del versor $\breve{v}$ al siguiente límite:

$$\overline{f}\,'(\overline{X}_0, \breve{v}) = \frac{\partial \overline{f}}{\partial \breve{v}}(\overline{X}_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\overline{f}(\overline{X}_0 + h\breve{v}) - \overline{f}(\overline{X}_0)}{h} \quad \text{si el límite existe y es finito}$$

La derivada direccional es un caso particular de la derivada respecto de un vector, ya que se define para vectores de módulo 1. Cuando se analice la derivabilidad de un campo vectorial, se analizará la existencia de sus derivadas direccionales.

De todos los versores del espacio vectorial R^n, podemos considerar el caso particular de los versores de la base canónica. Con ellos vamos a realizar una nueva definición: las derivadas parciales, que resultan un caso particular de las derivadas direccionales.

Definición: derivada parcial de un campo vectorial

Sea $E = \{ \breve{e}_1, \breve{e}_2, ..., \breve{e}_i, ..., \breve{e}_n \}$ base canónica de R^n.

Sea $\overline{f}: D \subset R^n \to R^m$, sea $\overline{X}_0$ punto interior de D. Se define la derivada parcial de $\overline{f}$ en $\overline{X}_0$ respecto a $\breve{e}_i$ al siguiente límite:

$$\overline{f}\,'_{x_i}(\overline{X}_0) = \frac{\partial \overline{f}}{\partial x_i}(\overline{X}_0) = \overline{f}\,'(\overline{X}_0, \breve{e}_i) = \frac{\partial \overline{f}}{\partial \breve{e}_i}(\overline{X}_0) = \lim_{h\to 0} \frac{\overline{f}(\overline{X}_0 + h\breve{e}_i) - \overline{f}(\overline{X}_0)}{h} \quad \text{si el límite existe y es finito}$$

Si existen todas sus derivadas parciales en un punto, un campo vectorial definido de un subconjunto de R^n en R^m tendrá n derivadas parciales.

Para el cálculo de la derivada de un campo vectorial en un punto, se calcula la derivada de cada una de sus componentes en dicho punto (recordemos que las componentes de un campo vectorial son campos escalares). Enunciamos a continuación el teorema correspondiente.

Teorema (la derivada se calcula componente a componente)

La demostración del teorema de derivación componente a componente puede hacerse en relación a la derivada respecto de un vector, ya que es la más abarcativa de las derivadas. Recordemos que la derivada direccional es un caso particular de la derivada respecto de un vector, y la derivada parcial es un caso particular de la derivada direccional. Por ello, demostrar el teorema para derivadas respecto de un vector implica hacerlo para todos sus casos particulares (derivadas direccionales y parciales).

Sea $\overline{f}: D \subset R^n \to R^m \,/\, \overline{f}(\overline{X}) = (f_1(\overline{X}), f_2(\overline{X}), \ldots, f_i(\overline{X}), \ldots, f_m(\overline{X}))$, sea $\overline{X}_0$ punto interior de *D*, y sea $\overline{v} \in R^n$, $\overline{v} \neq \overline{0}$.

$$\exists\, \overline{f}'(\overline{X}_0, \overline{v}) \Leftrightarrow \exists\, f_i'(\overline{X}_0, \overline{v}) \quad \forall i: 1 \leq i \leq m$$

Demostración:

$$\exists\, \overline{f}'(\overline{X}_0, \overline{v}) = \lim_{h\to 0} \frac{\overline{f}(\overline{X}_0 + h\overline{v}) - \overline{f}(\overline{X}_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(f_1(\overline{X}_0 + h\overline{v}), f_2(\overline{X}_0 + h\overline{v}), \ldots, f_i(\overline{X}_0 + h\overline{v}), \ldots, f_m(\overline{X}_0 + h\overline{v})) - (f_1(\overline{X}_0), f_2(\overline{X}_0), \ldots, f_i(\overline{X}_0), \ldots, f_m(\overline{X}_0))}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{(f_1(\overline{X}_0 + h\overline{v}) - f_1(\overline{X}_0)\;, f_2(\overline{X}_0 + h\overline{v}) - f_2(\overline{X}_0), \ldots, f_i(\overline{X}_0 + h\overline{v}) - f_i(\overline{X}_0), \ldots, f_m(\overline{X}_0 + h\overline{v})) - f_m(\overline{X}_0))}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \left(\frac{f_1(\overline{X}_0 + h\overline{v}) - f_1(\overline{X}_0)}{h}, \frac{f_2(\overline{X}_0 + h\overline{v}) - f_2(\overline{X}_0)}{h}, \ldots, \frac{f_i(\overline{X}_0 + h\overline{v}) - f_i(\overline{X}_0)}{h}, \ldots, \frac{f_m(\overline{X}_0 + h\overline{v}) - f_m(\overline{X}_0)}{h} \right) =$$

Por teorema del cálculo del límite de un campo vectorial componente a componente

$$= \left(\underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{f_1(\overline{X}_0 + h\overline{v}) - f_1(\overline{X}_0)}{h}}_{f_1'(\overline{X}_0, \overline{v})}, \ldots, \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{f_i(\overline{X}_0 + h\overline{v}) - f_i(\overline{X}_0)}{h}}_{f_i'(\overline{X}_0, \overline{v})}, \ldots, \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{f_m(\overline{X}_0 + h\overline{v}) - f_m(\overline{X}_0)}{h}}_{f_m'(\overline{X}_0, \overline{v})} \right) =$$

$$= (f_1'(\overline{X}_0, \overline{v}), \ldots, f_i'(\overline{X}_0, \overline{v}), \ldots, f_m'(\overline{X}_0, \overline{v})) \Leftrightarrow$$

Por definición de derivada de función escalar en un punto

$$\Leftrightarrow \exists\, f'_i(\overline{X}_0, \overline{v}) \quad \forall i: 1 \leq i \leq m$$

Veamos un ejemplo de aplicación de este teorema.

Dado el campo vectorial $\overline{f}: R^3 \to R^2 \,/\, \overline{f}(x, y, z) = (e^{xyz}, x^2 z + 2y)$, hallar sus derivadas parciales. Utilizando el teorema anterior, derivamos parcialmente componente a componente.

$$\overline{f}_x' = (yz\,e^{xyz}, 2xz) \qquad \overline{f}_y' = (xz\,e^{xyz}, 2) \qquad \overline{f}_z' = (xy\,e^{xyz}, x^2)$$

Matriz Jacobiana de un campo vectorial

De acuerdo a lo que estuvimos desarrollando hasta el momento, sabemos que un campo vectorial $\overline{f}: D \subset R^n \to R^m$ tiene *n* derivadas parciales (si es que todas ellas están definidas). A su vez, cada una de estas derivadas parciales tiene *m* componentes.

Las derivadas parciales de un campo vectorial se organizan en una matriz, llamada matriz Jacobiana, que se define de la siguiente manera:

Sea $\overline{f}: D \subset R^n \to R^m \,/\, \overline{f}(\overline{X}) = (f_1(\overline{X}), f_2(\overline{X}), ..., f_i(\overline{X}), ..., f_m(\overline{X}))$, sea $\overline{X}_0$ punto interior de *D*. Si existen todas las derivadas parciales $\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial x_i}(\overline{X}_0) \quad \forall i: 1 \le i \le n$, se define la matriz Jacobiana de $\overline{f}$ en $\overline{X}_0$ de la siguiente manera:

$$D\,\overline{f}(\overline{X}_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1}(\overline{X}_0) & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2}(\overline{X}_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}(\overline{X}_0) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}(\overline{X}_0) & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}(\overline{X}_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}(\overline{X}_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_i}{\partial x_1}(\overline{X}_0) & \dfrac{\partial f_i}{\partial x_2}(\overline{X}_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_i}{\partial x_n}(\overline{X}_0) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_1}(\overline{X}_0) & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_2}(\overline{X}_0) & \cdots & \dfrac{\partial f_m}{\partial x_n}(\overline{X}_0) \end{pmatrix}$$

La matriz Jacobiana es una matriz de *m* filas y *n* columnas (*m* × *n*). Sus **columnas** corresponden a las **derivadas parciales del campo vectorial**, y sus **filas** son los **gradientes de las funciones componentes**.

Ejemplo Nro. 1: dado el campo vectorial $\overline{f}: R^2 \to R^3 \,/\, \overline{f}(x,y) = (3xy + 2x, x^2y^2, 4x - y^2 + 1)$, hallar su matriz Jacobiana.

La matriz pedida es una matriz de 3×2. Para armar dicha matriz por columnas, debemos hallar las derivadas parciales del campo, que serán las columnas de la matriz:

$$\overline{f}_x{}' = (3y + 2, 2xy^2, 4) \qquad \overline{f}_y{}' = (3x, 2x^2y, -2y)$$

$$D\,\overline{f} = \begin{pmatrix} 3y+2 & 3x \\ 2xy^2 & 2x^2y \\ 4 & -2y \end{pmatrix}$$

Ejemplo Nro. 2: dado el campo vectorial $\overline{f}: R^3 \to R^3 \,/\, \overline{f}(x,y,z) = (z^2 y,\, x - y^2 + 2z, -xz + 1)$, hallar su matriz Jacobiana.

La matriz pedida es una matriz de 3×3. Para armar dicha matriz por filas, debemos hallar los gradientes de sus funciones componentes, que serán las filas de la matriz:

$$\nabla f_1 = (0,\, z^2, 2zy) \qquad \nabla f_2 = (1, -2y,\, 2) \qquad \nabla f_3 = (-z,\, 0, -x)$$

$$D\,\overline{f} = \begin{pmatrix} 0 & z^2 & 2zy \\ 1 & -2y & 2 \\ -z & 0 & -x \end{pmatrix}$$