INTEGRALES MÚLTIPLES

INTEGRALES TRIPLES

Condiciones de integrabilidad

Sea el campo escalar $f : D \subset R^3 \to R$.

1) Si f es continua en *D*, entonces *f* es integrable en *D*
2) Si f es continua en *D*, excepto en un subconjunto de *D* de medida nula, entonces *f* es integrable en *D*.

Conjunto de puntos de medida nula.

Intuitivamente, podemos decir que un subconjunto del espacio de medida nula será aquel que "no tenga volumen", por ejemplo puntos aislados, segmentos, curvas, superficies, etc.

Una vez establecidas las condiciones de integrabilidad, vamos a enunciar un teorema que me permita efectuar el cálculo de la integral triple, a través del cálculo de integrales simples sucesivas.

Teorema (integrales triples en recintos paralelepípedos)

Sea $f : D \subset R^3 \to R$ integrable en $D = [a\,,b] \times [c\,,d] \times [e\,,h]$.

Si $\forall x \in [a\,,b]$, $\exists\, g(x) = \int_c^d dy \int_e^h f(x,y,z)\, dz$, entonces:

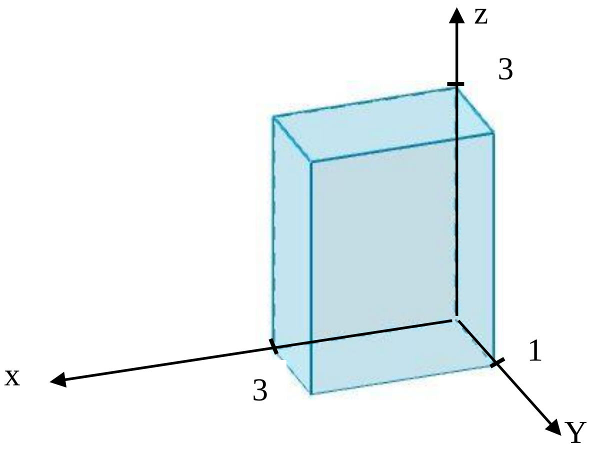
$$\iiint_D f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^h f(x,y,z)\, dz$$

De manera análoga, puede integrarse en cualquier otro orden de integración. Por ejemplo:

$\iiint_D f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_c^d dy \int_e^h dz \int_a^b f(x,y,z)\, dx = \int_e^h dz \int_a^b dx \int_c^d f(x,y,z)\, dy$, etc.

Veamos un ejemplo. Calcular la integral $\iiint_D (2x+y+z)\, dx\, dy\, dz$, siendo $D = [0,3] \times [0,1] \times [0,3]$

Como la función es polinómica, es continua en R^3 y por lo tanto es integrable en *D*. Graficamos el recinto de integración.



Aplicando el teorema anterior, realizamos los cálculos en uno de los órdenes de integración posible.

$$\iiint_D (2x+y+z)\, dx\, dy\, dz = \int_0^3 dx \int_0^1 dy \int_0^3 (2x+y+z)\, dz = \int_0^3 dx \int_0^1 dy \left[2xz + yz + \frac{z^2}{2} \right]_0^3 = \int_0^3 dx \int_0^1 dy\, (6x + 3y + \frac{9}{2}) =$$

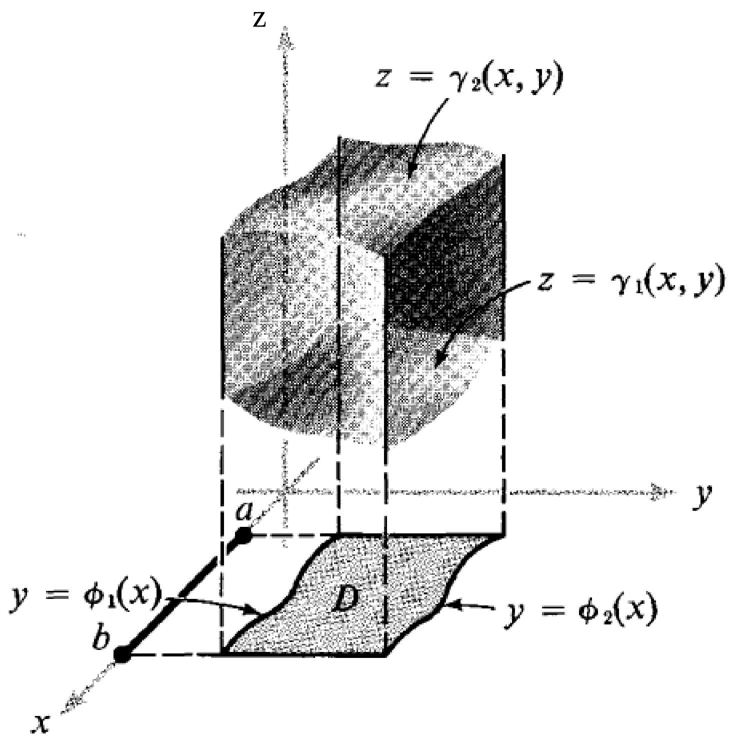
$$= \int_0^3 dx \left[6xy + 3\frac{y^2}{2} + \frac{9}{2}y \right]_0^1 = \int_0^3 dx\,(6x + \frac{3}{2} + \frac{9}{2}) = \int_0^3 (6x+6)\,dx = \left[3x^2 + 6x\right]_0^3 = 27 + 18 = 45$$

Integrales en recintos no paralelepípedos

Debemos ahora generalizar el cálculo de integrales triples a recintos más generales, no necesariamente paralelepípedos rectos rectangulares.

Sea el campo escalar $f : D \subset R^3 \to R$, siendo f integrable en *D*.

$V = \{(x, y, z) \in R^3 \,/\, a \le x \le b \quad \wedge \quad \phi_1(x) \le y \le \phi_2(x) \quad \wedge \quad \gamma_1(x, y) \le z \le \gamma_2(x, y)\}$ Las funciones ϕ_1 , ϕ_2 , γ_1 y γ_2 son continuas. El recinto plano D es la proyección del sólido V en el plano (xy)

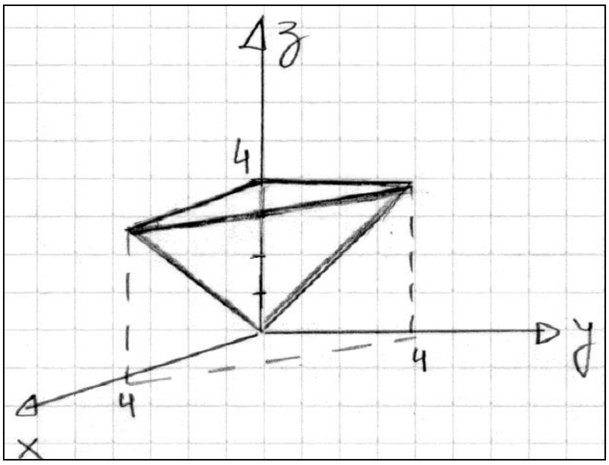


$$\iiint_V f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} dy \int_{\gamma_1(x,y)}^{\gamma_2(x,y)} f(x, y, z)\,dz$$

Se procede de manera análoga a la anterior si se realiza la proyección de V sobre algún otro de los planos coordenados.

Resolvamos un ejemplo en diferentes órdenes de integración. Calcular $\iiint_V (xz)\,dx\,dy\,dz$ siendo $V = \{(x, y, z) \in R^3 \,/\, z \ge x + y \ \wedge \ z \le 4$, 1er. octante$\}$

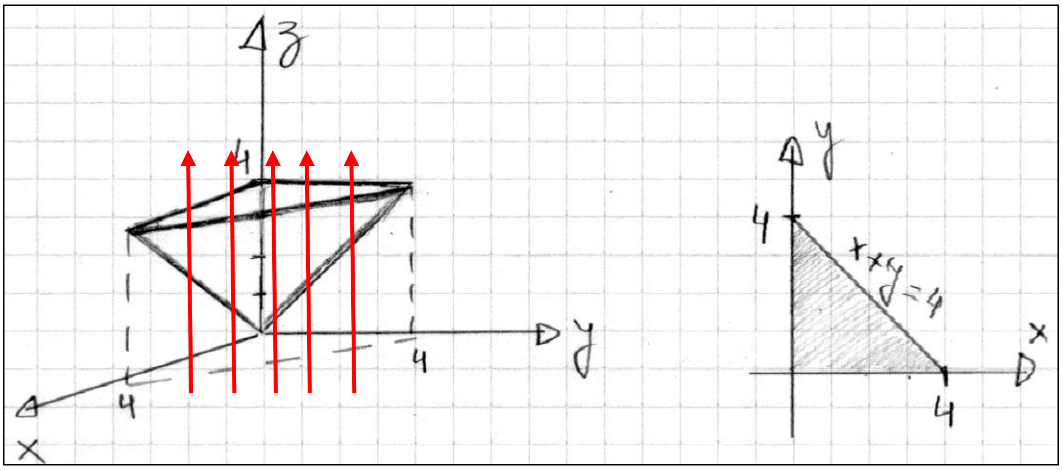
Graficamos el recinto de integración:



1) Resolvemos proyectando el sólido en el plano (xy).

Hallamos la ecuación de la recta oblicua en el recinto proyección del plano (xy). Dicha recta resulta la proyección de la intersección de los planos $z = x + y$ y $z = 4$. Analíticamente tenemos que:

$$\left.\begin{matrix} z = x + y \\ z = 4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x + y = 4$$



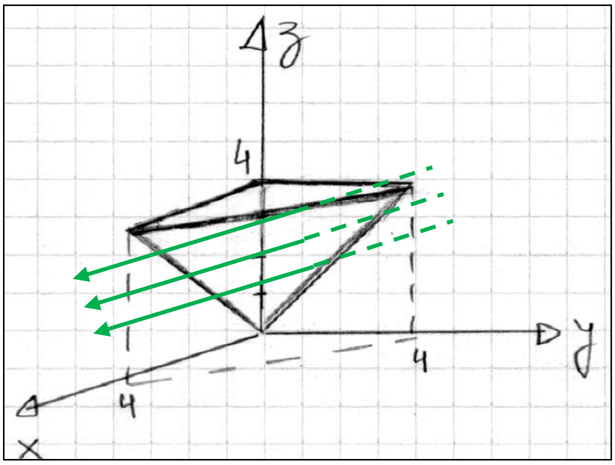
$$\iiint_V (xz)\,dx\,dy\,dz = \int_0^4 dx \int_0^{4-x} dy \int_{x+y}^{4} (xz)\,dz = \int_0^4 dx \int_0^{4-x} dy \left[x\,\frac{z^2}{2} \right]_{x+y}^{4} = \int_0^4 dx \int_0^{4-x} \left(8x - x\,\frac{(x+y)^2}{2}\right) dy =$$

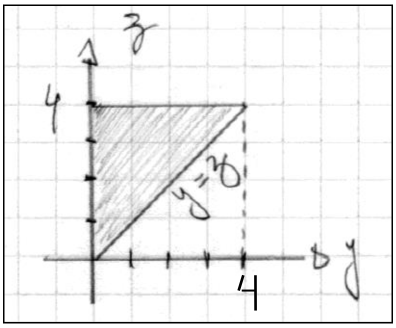
$$= \int_0^4 dx \left[8xy - \frac{x}{2}\,\frac{(x+y)^3}{3} \right]_0^{4-x} = \int_0^4 dx \left[8x(4-x) - \frac{x}{2}\,\frac{(x+4-x)^3}{3} - 0 + \frac{x}{2}\,\frac{x^3}{3} \right] = \int_0^4 \left(\frac{x^4}{6} - 8x^2 + \frac{64}{3}x\right) dx =$$

$$= \left[\frac{1}{6}\,\frac{x^5}{5} - 8\,\frac{x^3}{3} + \frac{64}{3}\,\frac{x^2}{2} \right]_0^4 = \frac{512}{15}$$

2) Resolvemos proyectando el sólido en el plano (yz).

La recta oblicua en el recinto proyección del plano (yz) es la traza del plano $z = x + y$ en el mencionado plano coordenado.





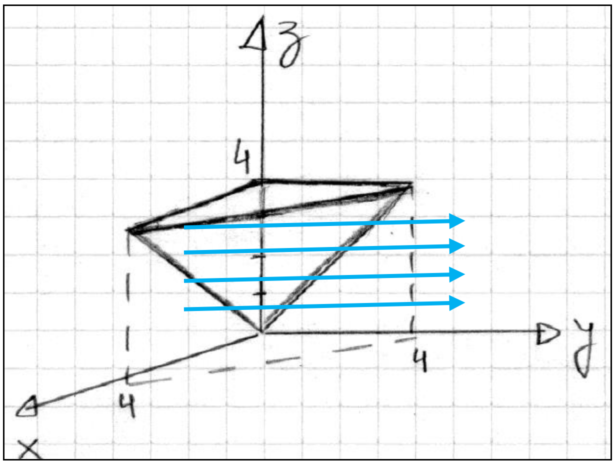
$$\iiint_V (xz)\,dx\,dy\,dz = \int_0^4 dy \int_y^4 dz \int_0^{z-y} (xz)\,dx = \int_0^4 dy \int_y^4 dz \left[z\frac{x^2}{2} \right]_0^{z-y} = \int_0^4 dy \int_y^4 (z\frac{(z-y)^2}{2})\,dz = \int_0^4 dy \int_y^4 \frac{1}{2}(z^3 - 2z^2 y + zy^2)\,dz =$$

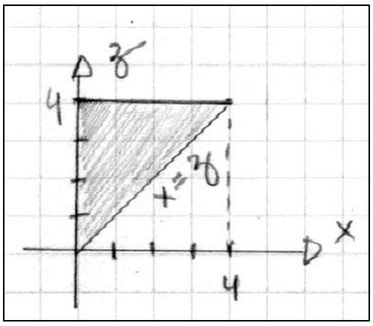
$$= \frac{1}{2}\int_0^4 dy \left[\frac{z^4}{4} - 2y\frac{z^3}{3} + y^2\frac{z^2}{2} \right]_y^4 = \frac{1}{2}\int_0^4 dy \left[64 - \frac{128}{3}y + 8y^2 - \frac{y^4}{4} + \frac{2}{3}y^4 - \frac{y^4}{2} \right] = \frac{1}{2}\int_0^4 (-\frac{1}{12}y^4 + 8y^2 - \frac{128}{3}y + 64)\,dy =$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{12}\frac{y^5}{5} + 8\frac{y^3}{3} - \frac{128}{3}\frac{y^2}{2} + 64y \right]_0^4 = \frac{1}{2}(-\frac{1}{12}\frac{1024}{5} + 8\frac{64}{3} - \frac{128}{3}8 + 256) = \frac{512}{15}$$

3) Resolvemos proyectando el sólido en el plano (xz).

La recta oblicua en el recinto proyección del plano (xz) es la traza del plano $z = x + y$ en el mencionado plano coordenado.





$$\iiint_V (xz)\,dx\,dy\,dz = \int_0^4 dx \int_x^4 dz \int_0^{z-x} (xz)\,dy = \int_0^4 dx \int_x^4 dz \left[xzy \right]_0^{z-x} = \int_0^4 dx \int_x^4 [xz(z-x)]\,dz = \int_0^4 dx \int_x^4 (xz^2 - zx^2)\,dz =$$

$$= \int_0^4 dx \left[x\frac{z^3}{3} - x^2\frac{z^2}{2} \right]_x^4 = \int_0^4 dx \left[\frac{64}{3}x - 8x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^4}{2} \right] = \int_0^4 (\frac{64}{3}x - 8x^2 + \frac{1}{6}x^4)\,dx =$$

$$=\left[\frac{64}{3}\frac{x^2}{2}-8\frac{x^3}{3}+\frac{1}{6}\frac{x^5}{5}\right]_0^4=\frac{64}{3}8-8\frac{64}{3}+\frac{1}{6}\frac{1024}{5}=\frac{512}{15}$$

En este ejemplo en particular, los tres órdenes de integración resultan sencillos para evaluar los extremos de integración y realizar el cálculo. Sin embargo, en algunos casos puede ser más fácil evaluar la integral en uno de los órdenes de integración que en los otros.

Interpretaciones físicas de la integral triple

Volumen de un sólido: Vol V $=\iiint_V 1\; dx\, dy\, dz$

Consideramos la función $\delta(x,y,z)$ como la función densidad puntual.

Masa : $m=\iiint_V \delta(x,y,z)\; dx\, dy\, dz$

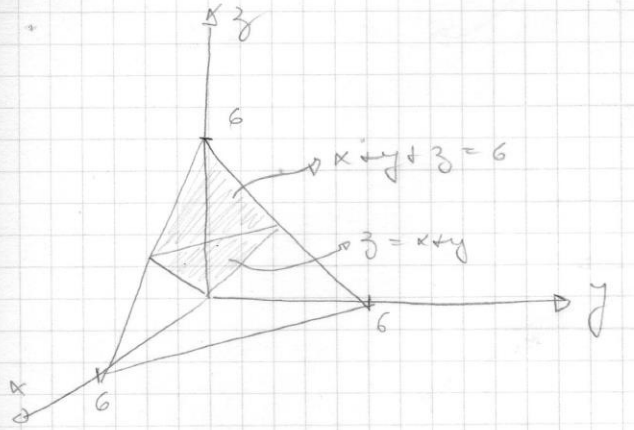
Se pueden generalizar para integrales triples las interpretaciones físicas vistas en integrales dobles para el cálculo de momentos y del centro de gravedad.

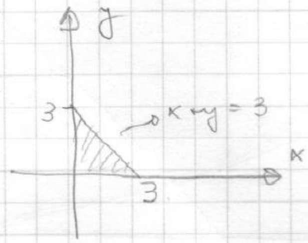
Resolvemos algunos ejercicios del TP9

12)b) Calcule mediante integrales triples el volumen del cuerpo H, usando el sistema de coordenadas que crea más conveniente.

$$H = \{(x,y,z) \in R^3 \,/\, x+y+z \leq 6 \quad \wedge \quad z \geq x+y \quad \wedge \quad x \geq 0 \quad \wedge \quad y \geq 0\}$$

12)b) $x+y+z \leq 6 \qquad z \geq x+y \qquad x \geq 0 \qquad y \geq 0$





$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=6 \\ z=x+y \end{array}\right\} \Rightarrow x+y+x+y=6 \Rightarrow 2(x+y)=6 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x+y=3$$

$$\text{Vol } V = \int_0^3 dx \int_0^{3-x} dy \int_{x+y}^{6-x-y} dz = \int_0^3 dx \int_0^{3-x} dy \left[6-x-y-x-y\right] =$$

$$= \int_0^3 dx \int_0^{3-x} \left[6-2x-2y\right] dy = \int_0^3 dx \left[6y-2xy-y^2 \Big|_0^{3-x}\right] =$$

$$= \int_0^3 dx \left[6(3-x) - 2x(3-x) - (3-x)^2\right] =$$

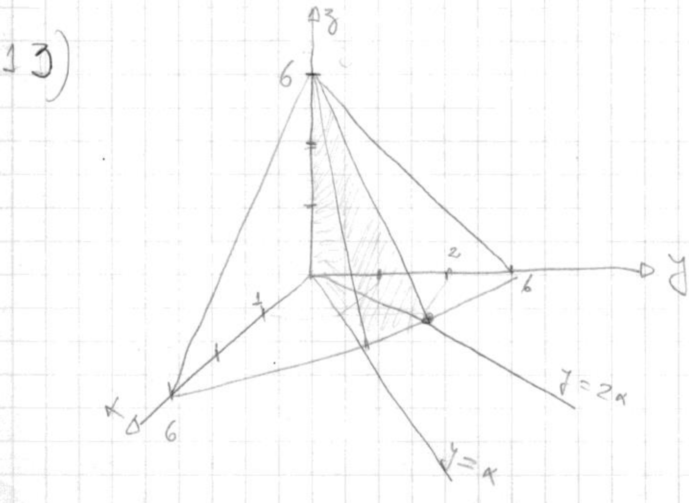
$$= \int_0^3 \left[18-6x-\cancel{6x}+2x^2-9-x^2+\cancel{6x}\right] dx =$$

$$= \int_0^3 \left[x^2-6x+9\right] dx = \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x \Big|_0^3\right] =$$

$$= \frac{\overset{9}{\cancel{27}}}{\cancel{3}} - \cancel{27} + \cancel{27} = 9$$

13) (Adaptado) Determine la masa del cuerpo limitado por $y = x$, $y = 2x$, $x + y + z = 6$, $z = 0$, si la densidad en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al plano (yz).

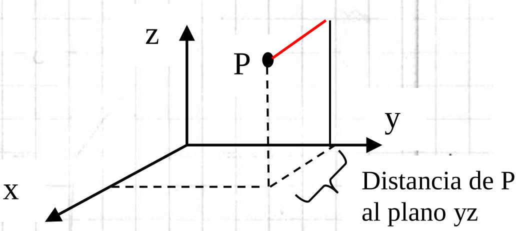
13)

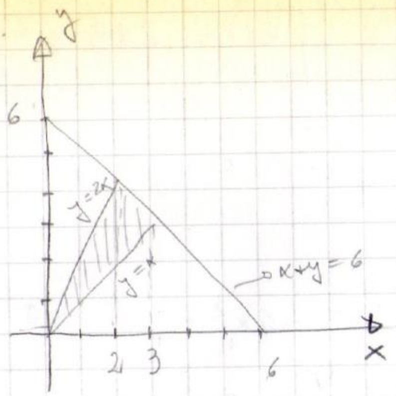


$\delta = k \text{ dist } P(yz)$

$\delta = k|x| \quad (k \in \mathbb{R}^+)$

$\delta = kx$ por ser 1° octante





$$\text{Masa} = \iiint_V \delta \, dx\, dy\, dz = \iiint_V kx \, dx dy dz =$$

$$= \int_0^2 dx \int_x^{2x} dy \int_0^{6-x-y} kx \, dz + \int_2^3 dx \int_x^{6-x} dy \int_0^{6-x-y} kx \, dz =$$

$$= k \, \frac{15}{2}$$

$$\left.\begin{array}{l} y = x \\ x + y = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow 2x = 6 \Rightarrow x = 3$$

$$\left.\begin{array}{l} y = 2x \\ x + y = 6 \end{array}\right\} \Rightarrow x + 2x = 6 \Rightarrow x = \frac{6}{3} = 2$$

CAMBIO DE COORDENADAS EN INTEGRALES TRIPLES

Sistema de coordenadas cilíndricas: definición

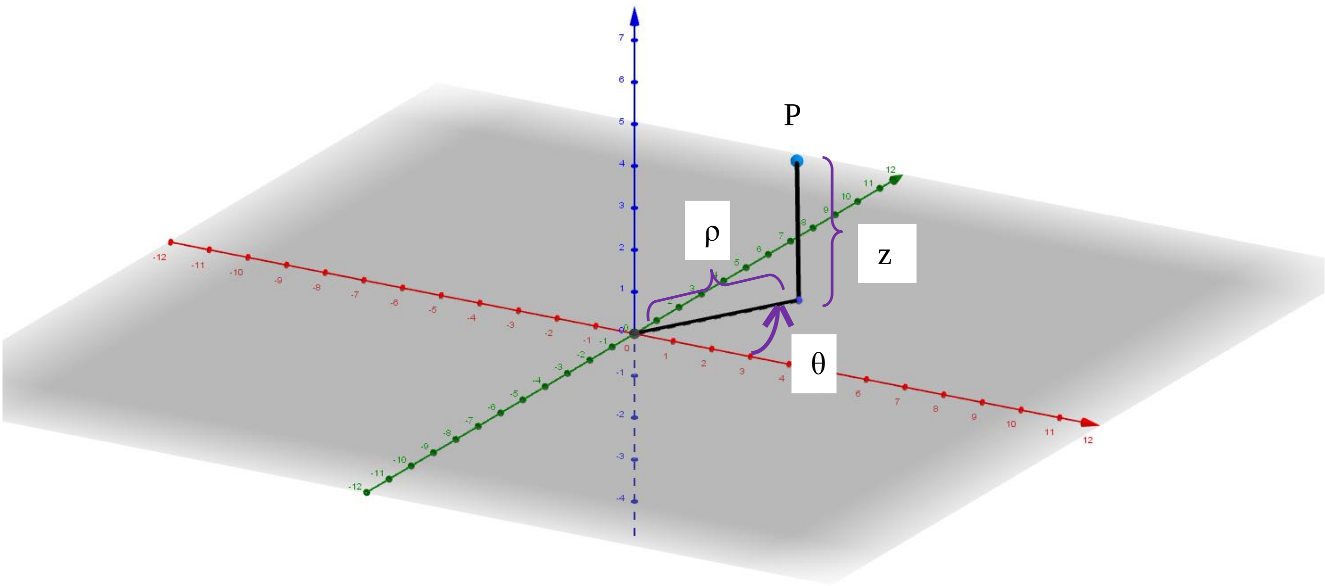
El sistema de coordenadas cilíndricas asocia a cada punto $P=(x,y,z)$ una terna (ρ,ϑ,z), donde (ρ,ϑ) son las coordenadas polares de la proyección P' del punto P en el plano xy, es decir que (ρ,ϑ) son las coordenadas polares del punto $P'=(x,y,0)$.

La tercera coordenada z del sistema cartesiano es la misma que la tercera coordenada del sistema de coordenadas cilíndricas.

Se dice entonces que la terna (ρ,ϑ,z) son las coordenadas cilíndricas del punto P.

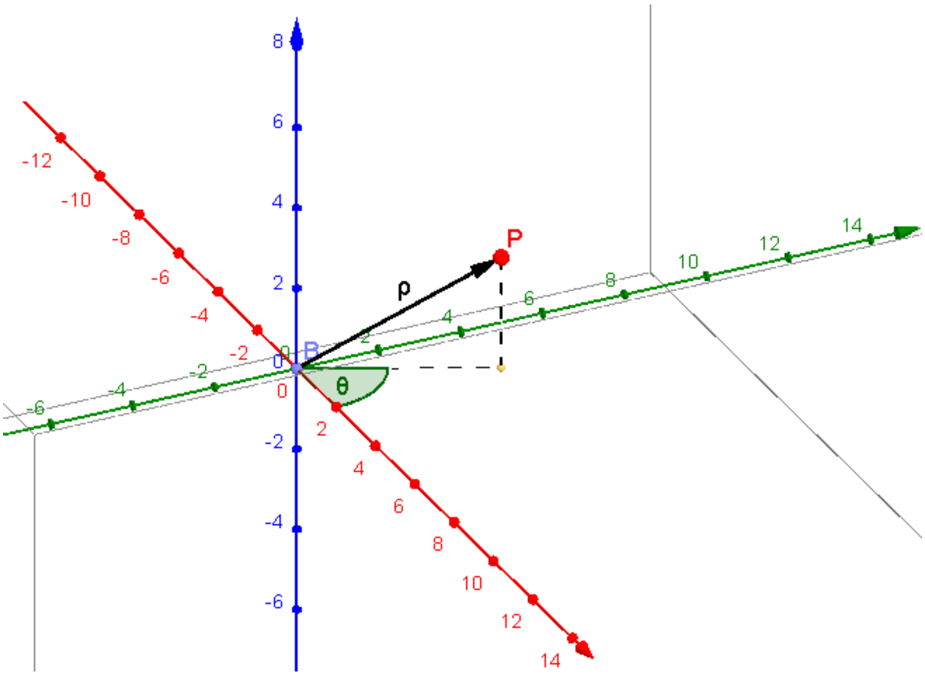
Para que la relación que vincula las coordenadas cilíndricas con las cartesianas sea una función biyectiva, los rangos de variación de las coordenadas cilíndricas se toman como:

$$\rho \geq 0 \qquad , \qquad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \qquad , \qquad -\infty < z < +\infty$$



La vinculación entre coordenadas cartesianas y cilíndricas se produce mediante la siguiente transformación:

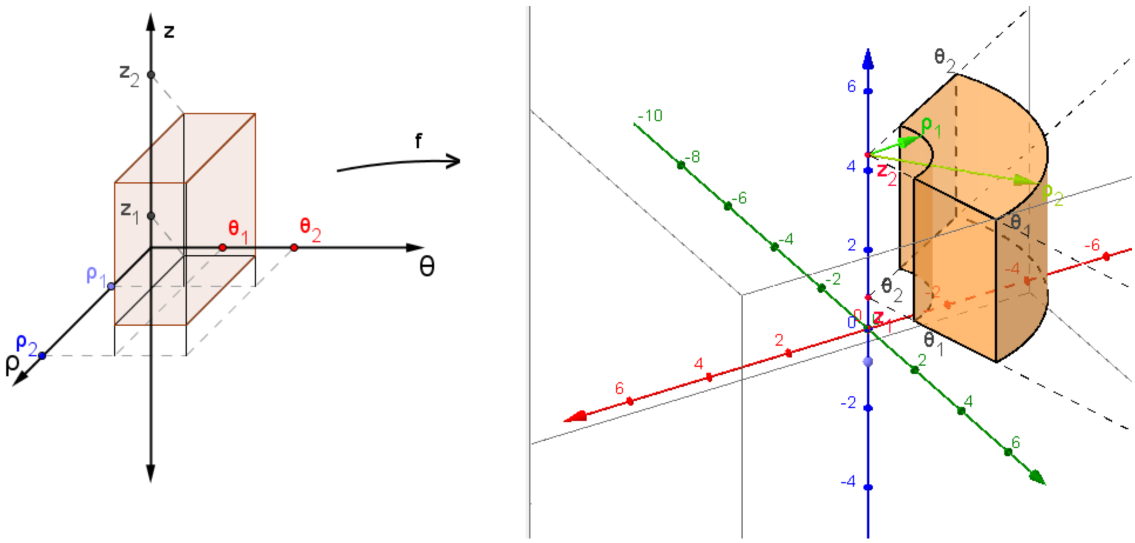
$$\begin{cases} x=\rho\cos\vartheta \\ y=\rho\,sen\vartheta \\ z=z \end{cases}$$



Acceder al applet dinámico "Sistema coord. Cilíndricas" (Conexión a internet y Java necesarios).

Interpretación geométrica del diferencial de volumen

El paralelepípedo rectangular en el espacio $\rho\vartheta z$, que se corresponde con las inecuaciones $R_1 \leq \rho \leq R_2$, $\vartheta_1 \leq \vartheta \leq \vartheta_2$, $z_1 \leq z \leq z_2$ se transforma mediante este cambio de coordenadas en un paralelepípedo "cilíndrico", como se muestra en la siguiente figura:



Acceder al applet dinámico "Diferenc volumen coord cilindircas" (Conexión a internet y Java necesarios).

Sistema de coordenadas esféricas: definición

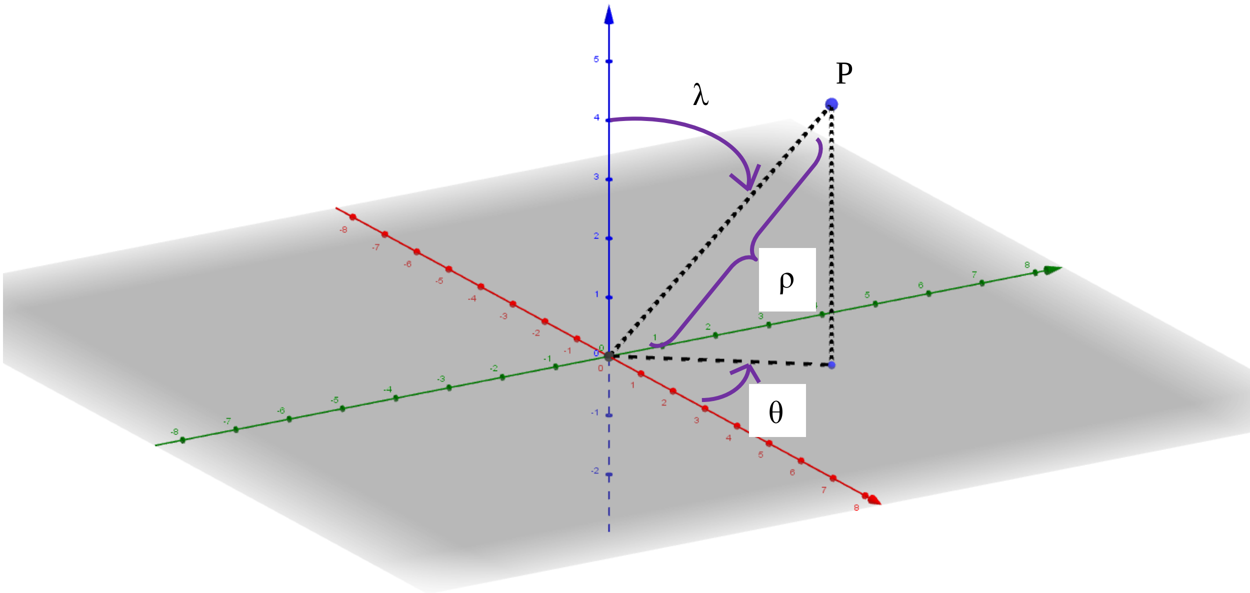
Un sistema de coordenadas muy importante en el espacio R^3 es el que corresponde a las coordenadas esféricas. Este sistema localiza los puntos en el espacio tridimensional con los siguientes tres parámetros:

- la distancia del punto $P=(x,y,z)$ al origen de coordenadas, que llamaremos ρ
- el ángulo que forma (en el plano xy) el segmento que une el origen de coordenadas con el punto $P'=(x,y,0)$ (la proyección de P en el plano xy) con la parte positiva del eje x, que llamaremos ϑ
- el ángulo que forma el vector $P=(x,y,z)$ con la parte positiva del eje z, que llamaremos λ

Se dice entonces que la terna (ρ,ϑ,λ) son las coordenadas esféricas del punto P.

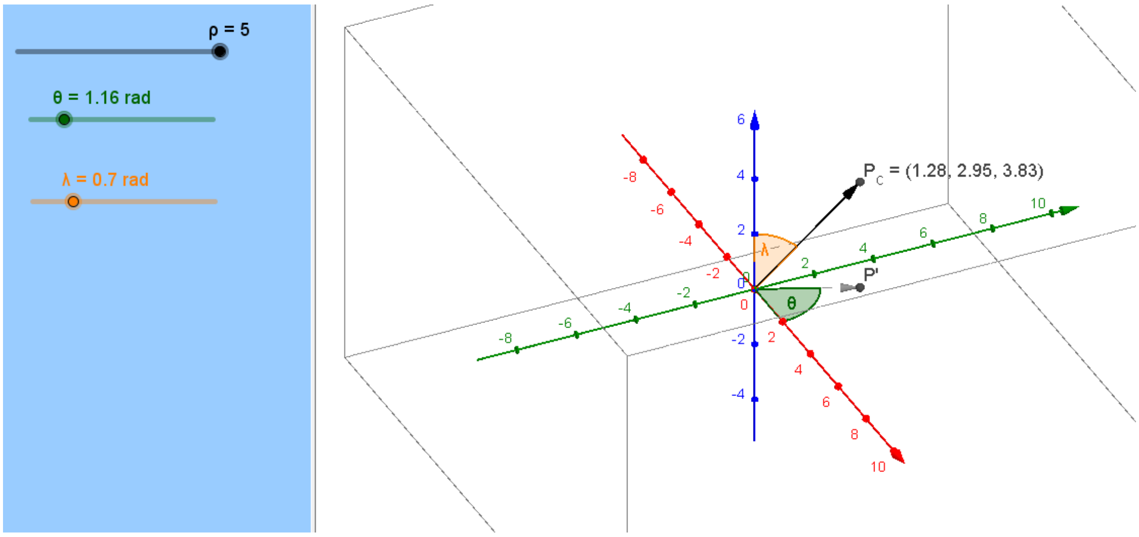
Para que la relación que vincula las coordenadas esféricas con las cartesianas sea una función biyectiva, los rangos de variación de las coordenadas esféricas se toman como:

$$\rho \geq 0 \quad , \quad 0 \leq \vartheta \leq 2\pi \quad , \quad 0 \leq \lambda \leq \pi$$



La vinculación entre coordenadas cartesianas y esféricas se produce mediante la siguiente transformación:

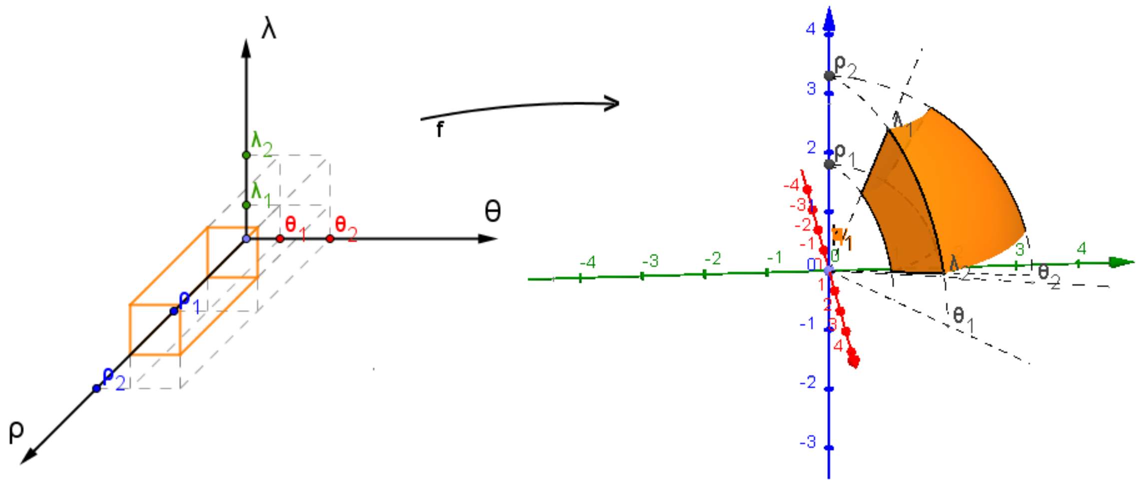
$$\begin{cases} x = \rho \cos\vartheta \; sen\lambda \\ y = \rho \; sen\vartheta \; sen\lambda \\ z = \rho \cos\lambda \end{cases}$$



Acceder al applet dinámico "Sistema coord. Esféricas" (Conexión a internet y Java necesarios).

Interpretación geométrica del diferencial de volumen

El paralelepípedo rectangular en el espacio $\rho\vartheta\lambda$, que se corresponde con las inecuaciones $R_1 \le \rho \le R_2$, $\vartheta_1 \le \vartheta \le \vartheta_2$, $\lambda_1 \le \lambda \le \lambda_2$ se transforma mediante este cambio de coordenadas en un paralelepípedo "esférico", como se muestra en la siguiente figura:



Acceder al applet dinámico "Diferencial volumen coord. esféricas" (Conexión a internet y Java necesarios).

Teorema de cambio de variables en integrales triples

Sea $f : D \subset R^3 \rightarrow R$, f integrable en *D*.

Sea $\bar{h} : W \rightarrow D \,/\, \bar{h}(u,v,w) = (x(u,v,w)\,,\, y(u,v,w)\,,\, z(u,v,w))$, con $\bar{h} \in C^1$ en *W*. Si se cumple que:

1) $\bar{h}$ es una función biyectiva (o biunívoca, o uno a uno) de *W* en *D*.

2) $\forall (u,v,w) \in W$ se cumple que: $J = \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \det\begin{pmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{pmatrix} \neq 0$

Entonces:

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_W f(x(u,v,w),\, y(u,v,w),\, z(u,v,w))\,|\,J\,|\,du\,dv\,dw$$

El teorema sigue siendo válido si las condiciones 1) y 2) no se cumplen en un subconjunto de medida nula.

$J = \dfrac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \det\begin{pmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{pmatrix}$ se denomina jacobiano de transformación.

Cálculo del jacobiano de transformación para coordenadas cilíndricas

Calculamos el jacobiano de transformación a coordenadas cilíndricas dado por $\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta \\ y = \rho\, sen\vartheta \\ z = z \end{cases}$

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\vartheta,z)} = \det\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\rho\, sen\vartheta & 0 \\ sen\vartheta & \rho\cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1\cdot\det\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\rho\, sen\vartheta \\ sen\vartheta & \rho\cos\vartheta \end{pmatrix} =$$

$$= \rho\cos^2\vartheta + \rho\, sen^2\vartheta = \rho(\cos^2\vartheta + sen^2\vartheta) = \rho$$

Siendo $J = \rho$, analizamos el módulo del jacobiano para realizar el cambio de variables en integrales triples, de acuerdo con el teorema correspondiente:

$$|\,J\,| = |\,\rho| = \rho$$

Cálculo del jacobiano de transformación para coordenadas esféricas

Calculamos el jacobiano de transformación a coordenadas esféricas dado por $\begin{cases} x = \rho\cos\vartheta\, sen\lambda \\ y = \rho\, sen\vartheta\, sen\lambda \\ z = \rho\cos\lambda \end{cases}$

$$J = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\vartheta,\lambda)} = \det\begin{pmatrix} \cos\vartheta\, sen\lambda & -\rho\, sen\vartheta\, sen\lambda & \rho\cos\vartheta\cos\lambda \\ sen\vartheta\, sen\lambda & \rho\cos\vartheta\, sen\lambda & \rho\, sen\vartheta\cos\lambda \\ \cos\lambda & 0 & -\rho\, sen\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \cos\lambda \quad \det\begin{pmatrix} -\rho\, sen\vartheta\, sen\lambda & \rho\cos\vartheta\cos\lambda \\ \rho\cos\vartheta\, sen\lambda & \rho\, sen\vartheta\cos\lambda \end{pmatrix} - \rho\, sen\lambda \quad \det\begin{pmatrix} \cos\vartheta\, sen\lambda & -\rho\, sen\vartheta\, sen\lambda \\ sen\vartheta\, sen\lambda & \rho\cos\vartheta\, sen\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= \cos\lambda\,(-\rho^2 sen\lambda\cos\lambda\, sen^2\vartheta - \rho^2\cos^2\vartheta\, sen\lambda\cos\lambda) - \rho\, sen\lambda\,(\rho\, sen^2\lambda\cos^2\vartheta + \rho\, sen^2\lambda\, sen^2\vartheta) =$$
$$= -\rho^2 sen\lambda\cos^2\lambda(sen^2\vartheta + \cos^2\vartheta) - \rho^2 sen^3\lambda\,(sen^2\vartheta + \cos^2\vartheta) = -\rho^2 sen\lambda(\cos^2\lambda + sen^2\lambda) =$$
$$= -\rho^2 sen\lambda$$

Siendo $J = -\rho^2 sen\lambda$, analizamos el módulo del jacobiano para realizar el cambio de variables en integrales triples, de acuerdo con el teorema correspondiente:

$$|\,J\,| = |-\rho^2 sen\lambda\,| = |-\rho^2\,|\,|\,sen\lambda\,| = \rho^2 sen\lambda$$

El módulo de $sen\lambda$ se analiza considerando que $0 \le \lambda \le \pi$, por lo cual $sen\lambda \ge 0$.

Resolvemos ejercicios del TP9

17)a) Calcular la masa del cuerpo limitado por $z = 4 - x^2 - y^2$, $z = 8 - 2x^2 - 2y^2$, si la densidad en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al eje z.

17) a) $z = 4 - x^2 - y^2$ $\quad z = 8 - 2x^2 - 2y^2$

Busco la proyección en el pl (xy) de la curva intersecc. de las superficies

$4 - x^2 - y^2 = 8 - 2x^2 - 2y^2 \Rightarrow \boxed{x^2 + y^2 = 4}$

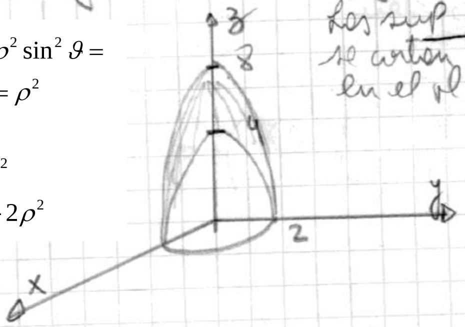
$x^2 + y^2 = \rho^2 \cos^2 \vartheta + \rho^2 \sin^2 \vartheta =$

$= \rho^2 (\cos^2 \vartheta + \sin^2 \vartheta) = \rho^2$

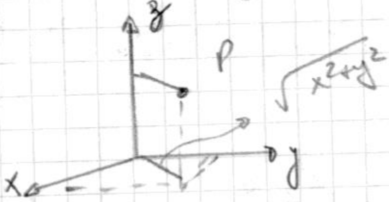
Entonces:

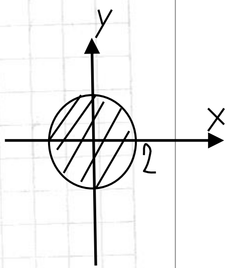
$z = 4 - x^2 - y^2 = 4 - \rho^2$

$z = 8 - 2x^2 - 2y^2 = 8 - 2\rho^2$



Los sup se cortan en el pl (xy) → $z = 4 - \underbrace{4}_{x^2+y^2} = 0$





$\delta = k\sqrt{x^2+y^2} \quad (k \in \mathbb{R}^+)$

$M = \iiint_V \delta \, dx \, dy \, dz = k \int_0^{2\pi} d\vartheta \int_0^2 d\rho \int_{4-\rho^2}^{8-2\rho^2} dz \; \rho \sqrt{\rho^2} =$

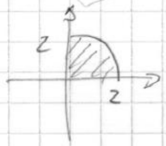
$= k \, 2\pi \int_0^2 d\rho \; \rho^2 (8 - 2\rho^2 - 4 + \rho^2) = 2k\pi \int_0^2 d\rho \left(4\rho^2 - \rho^4\right) =$

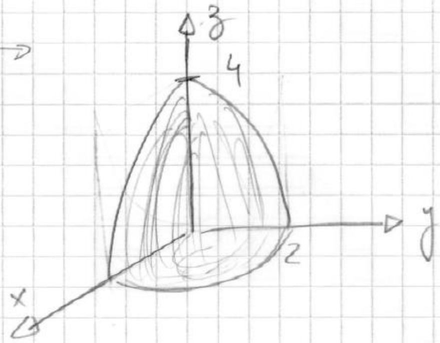
$= 2k\pi \left(\frac{4\rho^3}{3} - \frac{\rho^5}{5} \Big|_0^2 \right) = 2k\pi \left(\frac{32}{3} - \frac{32}{5} \right) = 2k\pi \, \frac{64}{15} = \frac{128k\pi}{15}$

11) Dada $\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^2 d\rho \int_0^{4-\rho^2} \rho^2 \, dz$ planteada en coordenadas cilíndricas, represente la región de integración en el espacio xyz, plantee la integral en coordenadas cartesianas y resuélvala en alguno de los sistemas de coordenadas.

11) $\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^2 d\rho \int_0^{4-\rho^2} \underbrace{\rho^2}_{\underbrace{\rho}_{\text{jacob}} \cdot \underbrace{\rho}_{\sqrt{x^2+y^2}}} dz$

$0 \le \varphi \le \pi/2 \qquad 0 \le \rho \le 2 \qquad 0 \le z \le \underbrace{4-\rho^2}_{4-x^2-y^2}$





$\int_0^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} dy \int_0^{4-x^2-y^2} \sqrt{x^2+y^2} \, dz$

Resuelvo en coordenadas cilíndricas

$\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^2 d\rho \int_0^{4-\rho^2} \rho^2 \, dz = \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^2 \rho^2 \underbrace{(4-\rho^2)}_{4\rho^2-\rho^4} d\rho$

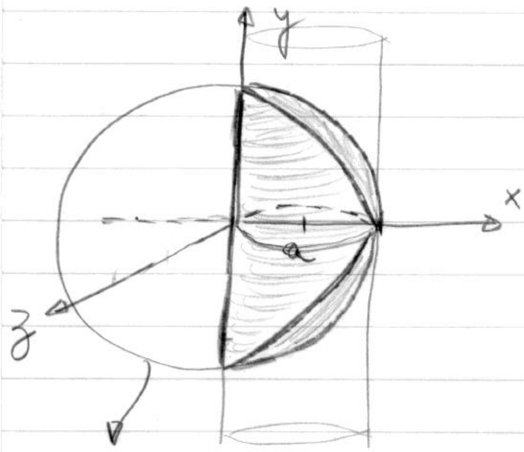
$= \frac{\pi}{2} \left[\frac{4\rho^3}{3} - \frac{\rho^5}{5} \Big|_0^2 \right] = \frac{\pi}{2} \left[\frac{4 \cdot 8}{3} - \frac{32}{5} \right] =$

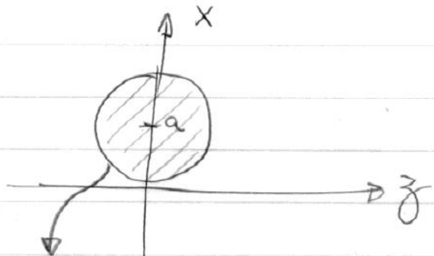
$= \frac{\pi}{2} \cdot \frac{64}{15} = \frac{32\pi}{15}$

12)c) Calcule mediante integrales triples el volumen del cuerpo H, usando el sistema de coordenadas que crea más conveniente.
H definido por $x^2 + z^2 \le 2ax$, interior a la esfera de radio $2a$ con centro en el origen de coordenadas

12)c) $x^2+z^2 \le 2ax$ interior a la esfera de radio $2a$ con centro en $\bar{O}$

$x^2+z^2=2ax \Rightarrow x^2-2ax+z^2=0 \Rightarrow x^2-2ax+a^2+z^2=a^2$
$\Rightarrow (x-a)^2+z^2=a^2$





$x^2+z^2=2ax \Rightarrow$
$\Rightarrow \rho^2 = 2a\rho \operatorname{sen}\theta \Rightarrow$
$\Rightarrow \rho = 2a \operatorname{sen}\theta$

$x^2+y^2+z^2=4a^2 \Rightarrow |y| = \sqrt{4a^2-x^2-z^2} \Rightarrow |y| = \sqrt{4a^2-\rho^2}$

$$\operatorname{Vol} V = \iiint_V dx\,dy\,dz = \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2a\operatorname{sen}\theta} d\rho \int_{-\sqrt{4a^2-\rho^2}}^{\sqrt{4a^2-\rho^2}} \rho\, dy =$$

$$= \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2a\operatorname{sen}\theta} d\rho \left[\rho y \Big|_{-\sqrt{4a^2-\rho^2}}^{\sqrt{4a^2-\rho^2}} \right] =$$

$$= \int_0^{\pi} d\theta \int_0^{2a\operatorname{sen}\theta} 2\rho\sqrt{4a^2-\rho^2}\, d\rho = \int_0^{\pi} d\theta \left[-\frac{2}{3}\sqrt{(4a^2-\rho^2)^3} \Big|_0^{2a\operatorname{sen}\theta} \right] =$$

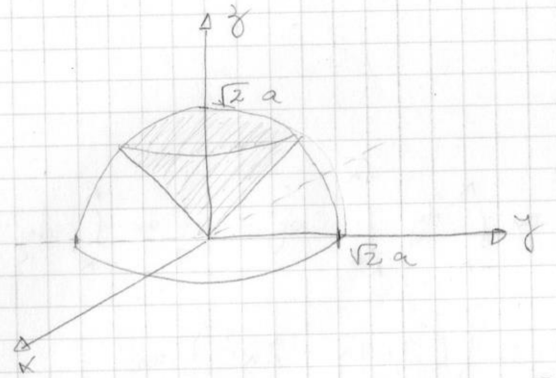
$$= \int_0^{\pi} d\theta \left[-\frac{2}{3}\sqrt{(4a^2-4a^2\operatorname{sen}^2\theta)^3} + \frac{2}{3}\sqrt{(4a^2)^3} \right] =$$

$$= \frac{16}{9} a^3 (3\pi - 4)$$

12)d) Calcule mediante integrales triples el volumen del cuerpo H, usando el sistema de coordenadas que crea más conveniente.

H definido por $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$, $x^2+y^2+z^2 \leq 2a^2$ con $a > 0$.

d) $z \geq \sqrt{x^2+y^2}$; $x^2+y^2+z^2 \leq 2a^2$



$$Vol = \iiint_V dx\,dy\,dz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/4} d\lambda \int_0^{\sqrt{2}a} d\rho\ \rho^2 \operatorname{sen}\lambda =$$

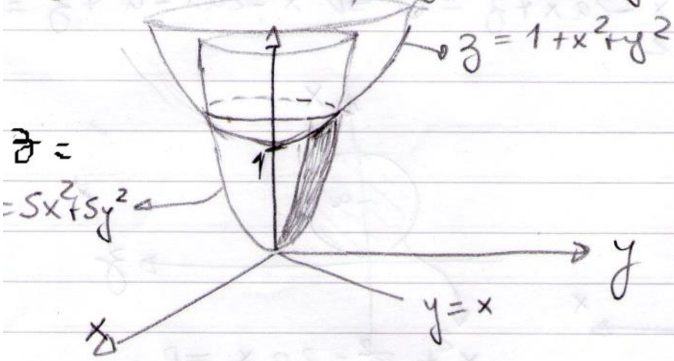
$$= 2\pi \int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}\lambda\, d\lambda \left[\frac{\rho^3}{3} \Big|_0^{\sqrt{2}a} \right] = 2\pi\, \frac{2\sqrt{2}\,a^3}{3} \left[-\cos\lambda \Big|_0^{\pi/4} \right] =$$

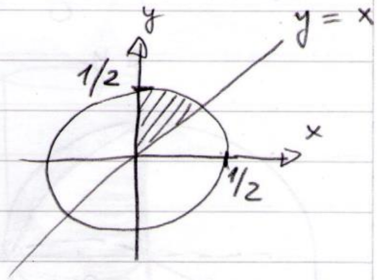
$$= \frac{4\pi\sqrt{2}\,a^3}{3} \left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \right) = \frac{4\pi\sqrt{2}\,a^3}{3} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = (\sqrt{2}-1)\, \frac{4\pi a^3}{3}$$

Resolvemos algunos ejercicios de finales.

Calcular el volumen del cuerpo definido por $z \geq 5x^2+5y^2$, $z \leq 1+x^2+y^2$, $y \geq x$, $x \geq 0$

$z \geq 5x^2+5y^2$; $z \leq 1+x^2+y^2$; $y \geq x$; $x \geq 0$





Busco la ecuación de la proyección de la curva intersecc. entre los paraboloides

$$\left.\begin{array}{l} z = 5x^2+5y^2 \\ z = 1+x^2+y^2 \end{array}\right\} \Rightarrow 5x^2+5y^2 = 1+x^2+y^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+y^2 = 1/4$$

$$\text{Vol } V = \iiint_V dx\,dy\,dz = \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \int_0^{1/2} d\rho \int_{5\rho^2}^{1+\rho^2} dz\,\rho =$$

$$= \int_{\pi/4}^{\pi/2} d\theta \int_0^{1/2} \rho\,(1+\rho^2-5\rho^2)\,d\rho =$$

$$\left(\pi/2 - \pi/4\right)\left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{\cancel{4}\rho^4}{\cancel{4}}\right|_0^{1/2} = \frac{\pi}{4}\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{16}\right) =$$

$$= \frac{\pi}{4}\cdot\frac{1}{16} = \frac{\pi}{64}$$

Calcular el volumen del cuerpo cuyos puntos cumplen con: $x^2+y^2\le 4x$, $x+z\le 6$, $x-z\le 6$

$x^2+y^2\le 4x$, $x+z\le 6$, $x-z\le 6$

$x^2+y^2=4x \Rightarrow x^2-4x+4+y^2=4 \Rightarrow (x-2)^2+y^2=4$

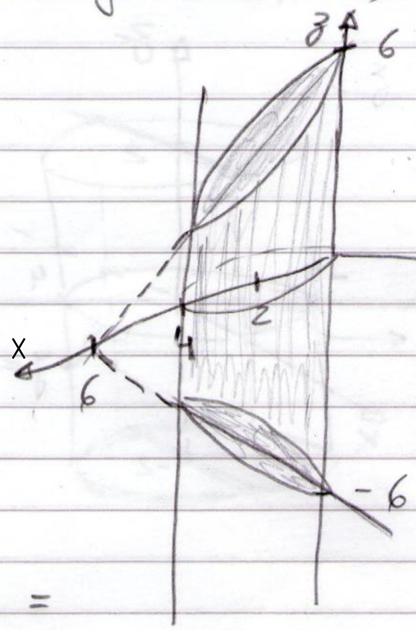
$x+z\le 6 \Rightarrow z\le 6-x$

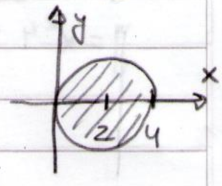
$x-z\le 6 \Rightarrow z\ge x-6$

$x^2+y^2=4x$

$\rho^2=4\rho\cos\theta$

$\rho=4\cos\theta$





$$\text{Vol } V=\iiint_V dx\,dy\,dz =$$

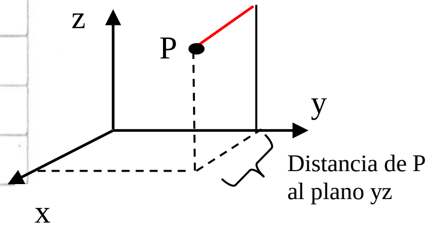
$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{4\cos\theta} d\rho \int_{\rho\cos\theta-6}^{6-\rho\cos\theta} dz\,\rho =$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_0^{4\cos\theta} \overbrace{\left[6-\rho\cos\theta-\rho\cos\theta+6\right]\rho}^{12\rho-2\rho^2\cos\theta}\,d\rho =$$

$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \left[6\rho^2-\frac{2\rho^3}{3}\cos\theta \Big|_0^{4\cos\theta}\right] =$$

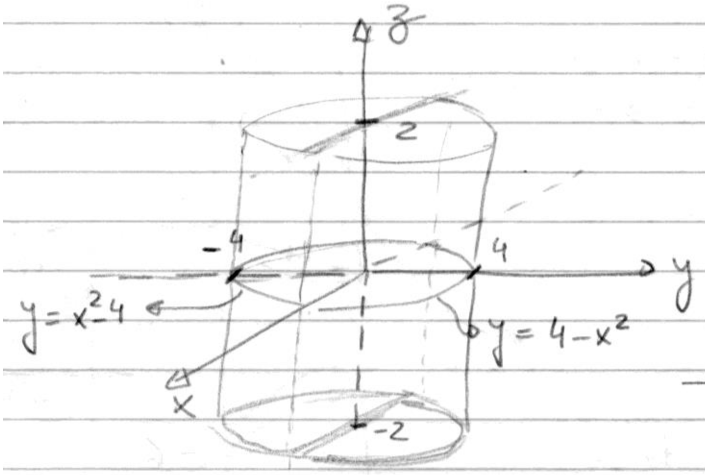
$$=\int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \left[6\cdot 16\cos^2\theta-\frac{2}{3}\cdot 64\cos^4\theta\right] = \boxed{32\pi}$$

Calcular la masa del cuerpo definido por $y \le 4 - x^2$, $y \ge x^2 - 4$, $|z| \le 2$, con densidad en cada punto proporcional a la distancia desde el punto al plano yz.



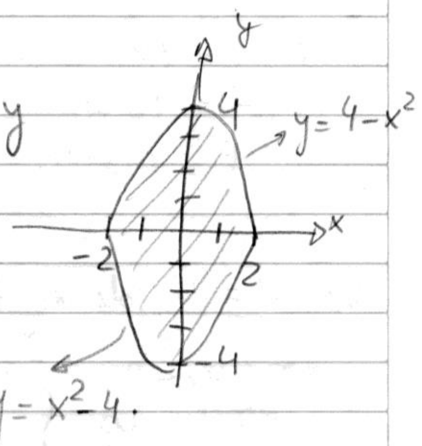
Masa $\quad y \le 4 - x^2$, $y \ge x^2 - 4$, $|z| \le 2$

$\delta \to$ proporc a la distancia al pl (yz)



$\delta = k\,|x|$

$k \in R^+$



$$\text{Masa} = \iiint_V \delta \, dx\, dy\, dz = \iiint_V k|x| \, dx\, dy\, dz =$$

$$= \int_{-2}^{2} dx \int_{x^2-4}^{4-x^2} dy \int_{-2}^{2} k|x| \, dz = k \int_{-2}^{2} dx\, |x| \int_{x^2-4}^{4-x^2} dy \cdot 4 =$$

$$= 4k \int_{-2}^{2} dx\, |x| \, (\underbrace{4 - x^2 - x^2 + 4}_{8-2x^2}) = 4k \left[\int_{-2}^{0} -8x + 2x^3 \, dx \right. +$$

$$+ \int_{0}^{2} 8x - 2x^3 \, dx = 4k \left(\left[-4x^2 + \frac{2x^4}{4} \Big|_{-2}^{0} \right] + \left[4x^2 - \right.\right.$$

$$\left. - \frac{2x^4}{4} \Big|_{0}^{2} \right] = 4k \left(+16 - \frac{1}{2} \cdot 16 + 16 - \frac{1}{2} \cdot 16 \right) = 64k$$