INTEGRALES MÚLTIPLES

INTEGRALES TRIPLES DE RIEMANN

Para definir las integrales triples, generalizamos el procedimiento establecido para la definición de las integrales dobles.

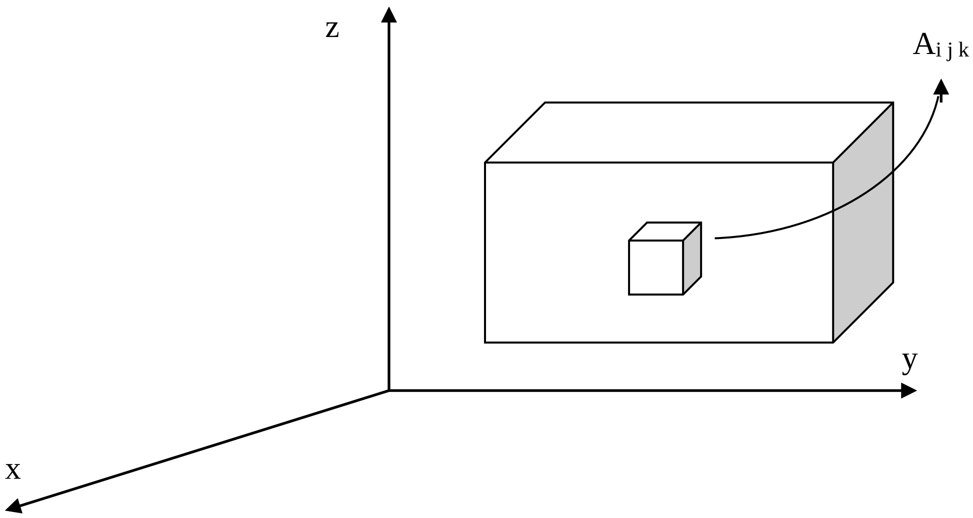
Consideramos una función $f : D \subset R^3 \rightarrow R$, definida y acotada en el recinto $[a, b] \times [c, d] \times [e, h] \subset D$. Denominamos $A = [a, b] \times [c, d] \times [e, h]$.
Particionamos el recinto A mediante la partición P, de la siguiente manera:

$[a, b] \rightarrow a = x_1 < x_2 < ..... < x_i < ..... < x_{n-1} < x_n = b$ (n puntos)

$[c, d] \rightarrow c = y_1 < y_2 < ..... < y_j < ..... < y_{m-1} < y_m = d$ (m puntos)

$[e, h] \rightarrow e = z_1 < z_2 < ..... < z_k < ..... < z_{s-1} < z_s = h$ (s puntos)

Esta partición genera pequeños subrecintos paralelepípedos recto rectángulos ("cajas de zapatos"). Se generan $n \times m \times s$ subrecintos, obtenidos a partir de la partición P.



En este caso también denominamos:

$\Delta x_i = | x_{i-1} - x_i |$ $\qquad \Delta y_j = | y_{j-1} - y_j |$ $\qquad \Delta z_k = | z_{k-1} - z_k |$

El volumen de cada subrecinto A_{ijk} se puede calcular como:

Vol. $A_{ijk} = \Delta A_{ijk} = \Delta x_i \, \Delta y_j \, \Delta z_k$

Si la función f está acotada en A, también estará acotada en cada A_{ijk}, por lo que f tendrá cota superior e inferior en A_{ijk}. Por lo tanto f tiene supremo e ínfimo en A_{ijk}.
Utilizamos la siguiente notación:

- Supremo de f en A_{ijk} : M_{ijk}
- Ínfimo de f en A_{ijk} : m_{ijk}

Análogamente a lo realizado para las integrales dobles, establecemos los siguientes productos:

1) M_{ijk} . Volumen $(A_{ijk}) = M_{ijk}$. $\Delta A_{ijk} = M_{ijk} \, (\Delta x_i \, \Delta y_j \, \Delta z_k)$

2) $m_{i\,j\,k}$. Volumen $(A_{i\,j\,k}) = m_{i\,j\,k}$. $\Delta A_{i\,j\,k} = m_{i\,j\,k}\ (\Delta x_i\ \Delta y_j\ \Delta z_k)$

Definimos ahora la Suma Superior de f en A : $\overline{S}(f, A, P) = \sum\limits_{\substack{i=1..n \\ j=1..m \\ k=1...s}} M_{i\,j\,k}\ \Delta x_i\ \Delta y_j\ \Delta z_k$

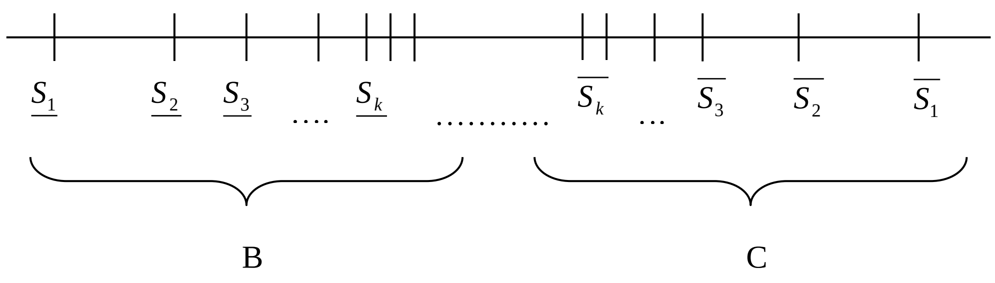
El valor de la suma superior depende de la función f, del recinto A y de la partición P que se ha establecido en dicho recinto.
Análogamente definimos la Suma Inferior de f en A : $\underline{S}(f, A, P) = \sum\limits_{\substack{i=1..n \\ j=1..m \\ k=1...s}} m_{i\,j\,k}\ \Delta x_i\ \Delta y_j\ \Delta z_k$

Este valor también dependerá de la función f, del recinto A y de la partición P que se ha establecido en dicho recinto.
Tanto $\overline{S}$ como $\underline{S}$ son números reales, que cumplen ciertas propiedades (que pueden demostrarse):

1) Si P es una partición de A, entonces $\underline{S}(f, A, P) \leq \overline{S}(f, A, P)$
2) Si P_1 es un refinamiento de la partición de A, entonces $\begin{cases} \underline{S}(f, A, P) \leq \underline{S}(f, A, P_1) \\ \overline{S}(f, A, P) \geq \overline{S}(f, A, P_1) \end{cases}$
3) Si P_1 y P_2 son dos particiones distintas (no refinamientos) se cumple que $\underline{S}(f, A, P_1) \leq \overline{S}(f, A, P_2)$

Según lo establecido por estas tres propiedades una suma inferior nunca puede superar a una suma superior.

Para definir entonces la integral triple, se realiza una partición sobre el conjunto A, y se refina sucesivamente esta partición. Se calculan los valores de las sumas inferiores y superiores para estas sucesivas particiones, y representamos los valores de $\overline{S}$ y $\underline{S}$ obtenidos en la recta real.



Establecemos dos conjuntos: el conjunto B con los valores de las sumas inferiores, y el conjunto C con los valores de las sumas superiores.
B está acotado superiormente (cualquiera de las $\overline{S}$ es cota superior), por lo que B tendrá supremo. Asimismo, C está acotado inferiormente (cualquier de las $\underline{S}$ es cota inferior), por lo que tendrá ínfimo. Utilizaremos dichos ínfimo y supremo mencionados para definir la integral inferior y superior.

Integral inferior: $\underline{\iiint_A} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz =$ supremo de B

Integral superior: $\overline{\iiint_A} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz =$ ínfimo de C

Cuando ambos valores coincidan, podremos definirlo como la integral triple de f en *A*.

Definición

Sea $f: D \subset R^3 \to R$, definida y acotada en el recinto $A = [a\,,b] \times [c\,,d] \times [e\,,h] \subset D$. Si se cumple que $\underline{\iiint_A} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \overline{\iiint_A} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$ se dice que el campo escalar f es integrable en *A*, y a ese valor común se lo define como la integral triple de la función *f* en *A*.

Por lo tanto: $\iiint_A f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \underline{\iiint_A} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \overline{\iiint_A} f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$

Condiciones de integrabilidad

Debemos analizar ahora bajo qué condiciones se cumple que el valor de la integral superior de una función en un determinado recinto coincida con el valor de la integral inferior, para que la integral triple quede definida.

Enunciaremos las condiciones de integrabilidad, que pueden demostrarse.

Sea $f: D \subset R^3 \to R$, definida y acotada en el recinto $A = [a\,,b] \times [c\,,d] \times [e\,,h] \subset D$.

1) Si $\forall \varepsilon > 0\,, \exists$ una partición *P* del recinto *A* tal que $\overline{S}(f,D,P) - \underline{S}(f,D,P) < \varepsilon$, entonces f es integrable en *A*.
2) Si f es continua en *A*, entonces f es integrable en *A*
3) Si f es continua en *A*, excepto en un subconjunto de *A* de medida nula, entonces f es integrable en *A*.

En este caso, intuitivamente podemos decir que un subconjunto del espacio de medida nula será aquel que “no tenga volumen”, por ejemplo puntos aislados, segmentos, curvas, superficies, etc.

Una vez establecidas las condiciones de integrabilidad, vamos a enunciar un teorema que me permita efectuar el cálculo de la integral triple, a través del cálculo de integrales simples sucesivas.

Teorema

Sea $f: D \subset R^3 \to R$ integrable en $D = [a\,,b] \times [c\,,d] \times [e\,,h]$.

Si $\forall x \in [a\,,b]$, $\exists\, g(x) = \int_c^d dy \int_e^h f(x,y,z)\, dz$, entonces:

$$\iiint_D f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^h f(x,y,z)\, dz$$

De manera análoga, puede integrarse en cualquier otro orden de integración. Por ejemplo:

$\iiint_D f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \int_c^d dy \int_e^h dz \int_a^b f(x,y,z)\, dx = \int_e^h dz \int_a^b dx \int_c^d f(x,y,z)\, dy$, etc.

Integrales en recintos no paralelepípedos

Debemos ahora generalizar la definición de integral triple a recintos más generales, no necesariamente paralelepípedos recto rectángulos.

Sea $f : D \subset R^3 \to R$, siendo D un conjunto acotado. Suponemos f integrable y D no paralelepípedo. Para poder definir $\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$, incluimos al conjunto D en un paralelepípedo $[a\,,b]\times[c\,,d]\times[e\,,h]$.

Definimos la denominada función característica del conjunto *D*:

$$\delta(x,y,z)=\begin{cases}1 & \forall (x,y,z)\in D\\ 0 & \forall (x,y,z)\notin D\end{cases}$$

Luego redefinimos la función *f* de la siguiente manera: $f^*(x,y,z)=f(x,y,z)\,.\,\delta(x,y,z)$

De este modo, la función redefinida f^* resultará:

$$f^*(x,y,z)=\begin{cases}f(x,y,z) & \forall (x,y,z)\in D\\ 0 & \forall (x,y,z)\notin D\end{cases}$$

Siendo $A=[a\,,b]\times[c\,,d]\times[e\,,h]$, resulta $D\subset A$. De esta manera definimos la integral triple de f sobre el recinto *D* de la siguiente manera:

$$\iiint_D f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint_A f^*(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Para que la definición tenga sentido y sea correcta, debemos garantizar que f^* sea integrable en *A*. Por la forma en que dicha función está definida, las discontinuidades de f^* en *D* serán las mismas discontinuidades de *f*. Dado que *f* es integrable, estas discontinuidades no afectarán la integrabilidad de f^*. Ahora debemos analizar el caso de posible discontinuidad en la frontera de *D*, pero aún cuando se presente una discontinuidad en dicho conjunto, se trata de un conjunto de medida nula (es una superficie en el espacio) que no afecta la integrabilidad de f^*. Por todo lo expuesto, resulta f^* una función integrable en *A*.