FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES.

Dada una función de varias variables $f: D \subset R^n \to R^m$, analizamos los casos particulares de acuerdo a los valores que toman *n* y *m*.

- **Campo vectorial**: $n \geq 2$, $m \geq 2$

En este caso, los elementos del dominio son vectores de R^n (por lo cual estas funciones se denominan campos) y las imágenes son vectores de R^m (por lo cual estas funciones se denominan vectoriales).

Ejemplo: $\overline{f}: D \subset R^2 \to R^3 \,/\, \overline{f}(x,y) = \left(e^{x+y}, \dfrac{2y}{y-1}, \dfrac{xy}{\sqrt{y-2x+4}} \right)$

(Cuestión de notación: se suele utilizar una raya sobre la letra que nombra la función para indicar que sus imágenes son vectores)

En general, definimos los campos vectoriales de la siguiente manera:

$$\overline{f}: D \subset R^n \to R^m \,/\, \overline{f}(X) = (\, f_1(X)\, ,\; f_2(X)\, , \ldots\ldots ,\; f_i(X)\, , \ldots\ldots ,\; f_{m-1}(X)\, ,\; f_m(X)\,)$$

Cada una de las funciones f_i son campos escalares de R^n en R, y se las llama ***funciones componentes***.

Para hallar el dominio de $\overline{f}$ tendremos que considerar en conjunto todas las restricciones de las funciones componentes. De este modo resulta:

$$\text{Dom } \overline{f} = \text{Dom } f_1 \cap \text{Dom } f_2 \ldots \cap \ldots \text{Dom } f_i \ldots \cap \ldots \text{Dom } f_m$$

Analicemos el dominio para el campo vectorial del ejemplo:

$$\overline{f}: D \subset R^2 \to R^3 \,/\, \overline{f}(x,y) = \left(e^{x+y}, \frac{2y}{y-1}, \sqrt{y-2x+4} \right)$$

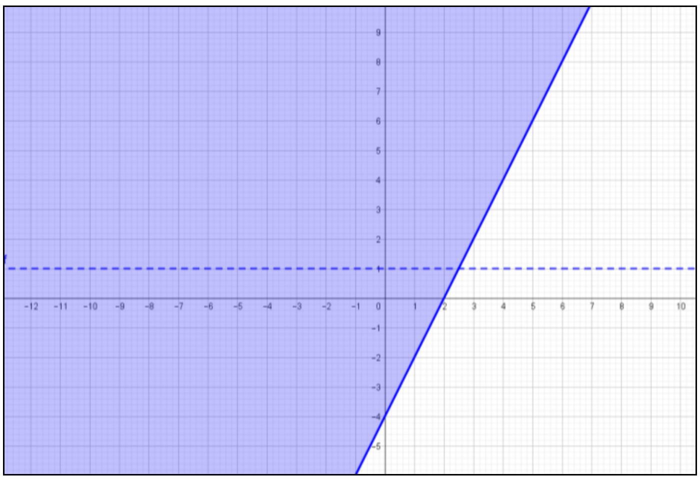
Para la primera componente f_1 : no hay restricciones algebraicas

Para la segunda componente f_2 : $y-1 \neq 0 \Rightarrow y \neq 1$

Para la tercera componente f_3 : $y-2x+4 \geq 0 \Rightarrow y \geq 2x-4$

Por lo tanto: Dom $\overline{f} = \left\{ (x,y) \in R^2 \,/\, y \geq 2x-4 \wedge y \neq 1 \right\}$

Graficamos el dominio del campo vectorial (región sombreada):



En el caso de los campos vectoriales, las interpretaciones geométricas se realizan para campos de R^2 en R^2, de R^3 en R^3, y de R^2 en R^3. Realizamos el análisis a continuación:

● **Campos vectoriales** $\overline{f} : D \subset R^2 \rightarrow R^2$

En este caso se acostumbra a graficar el vector imagen de cada punto con origen en dicho punto. Veamos un ejemplo:

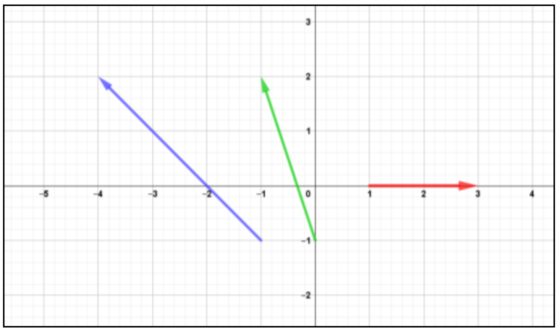
$$\overline{f} : R^2 \rightarrow R^2 \ / \ \overline{f}(x, y) = (2x + y, -3y)$$

Consideremos algunos casos particulares para realizar la gráfica:

$\overline{f}(1,0) = (2,0)$ con origen en (1 , 0) graficamos el vector (2 , 0) (en rojo)

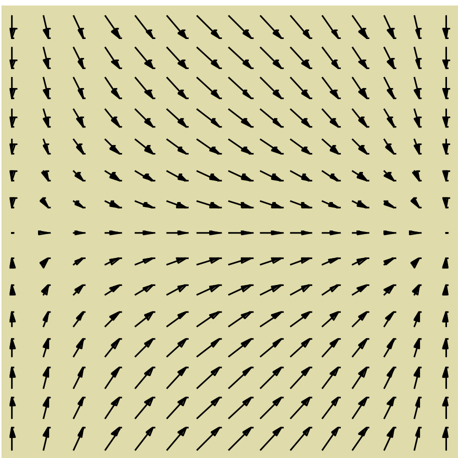
$\overline{f}(0,-1) = (-1,3)$ con origen en (0 , -1) graficamos el vector (-1 , 3) (en verde)

$\overline{f}(-1,-1) = (-3,3)$ con origen en (-1 , -1) graficamos el vector (-3 , 3) (en azul)

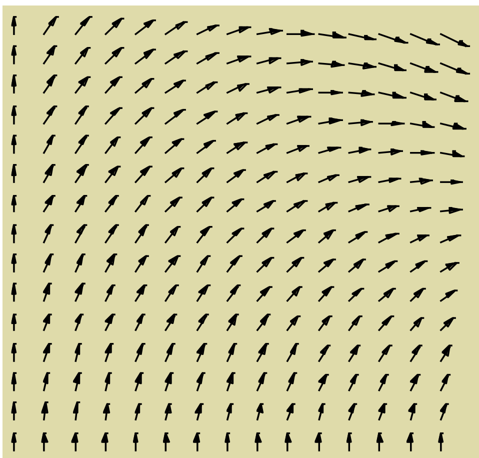


El proceso se repite hasta obtener una cantidad de vectores imágenes que permita identificar cuál es el comportamiento del campo vectorial. Este tipo de gráfica resulta muy útil para analizar magnitudes físicas vectoriales. Por ejemplo, campos de velocidades, campos eléctricos, campos magnéticos, etc. En estos casos, el vector indica la magnitud del campo que le corresponde a cada partícula del plano.

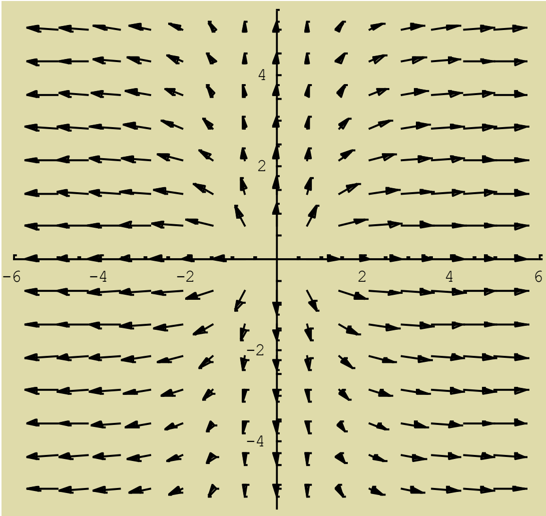
Las gráficas de campos vectoriales son muy complicadas para hacer a mano, pero pueden realizarse más fácilmente con la computadora. Les dejo algunos ejemplos:



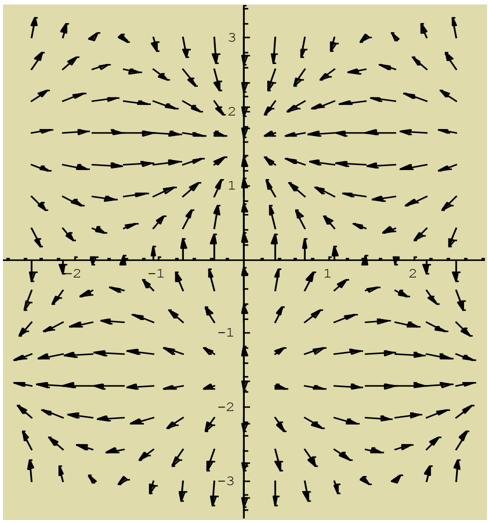
$\overline{f}(x, y) = (\sin x, \cos y)$



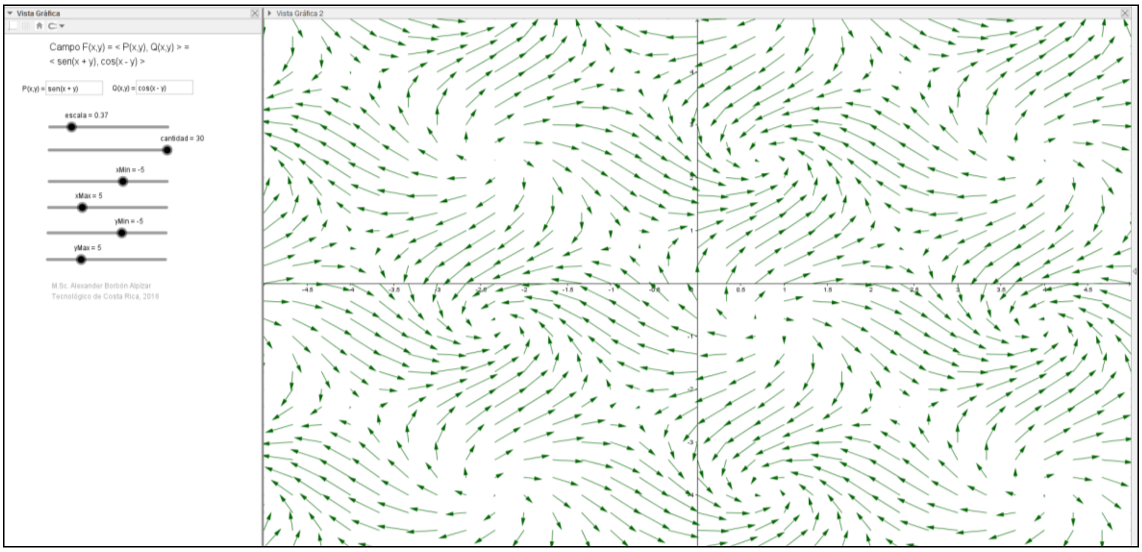
$\overline{f}(x, y) = \left(\sqrt[3]{xy^2}, \cos(xy)\right)$



$\overline{f}(x,y)=\left(-\sin x \sin y, \cos x \cos y\right)$



$\overline{f}(x,y)=\left(\dfrac{x^3}{(x^4+2y^2)^{3/4}}, \dfrac{y}{(x^4+2y^2)^{3/4}}\right)$



$\overline{f}(x,y)=\left(\sin(x+y), \cos(x-y)\right)$

● **Campos vectoriales** $\overline{f}: D \subset R^3 \rightarrow R^3$

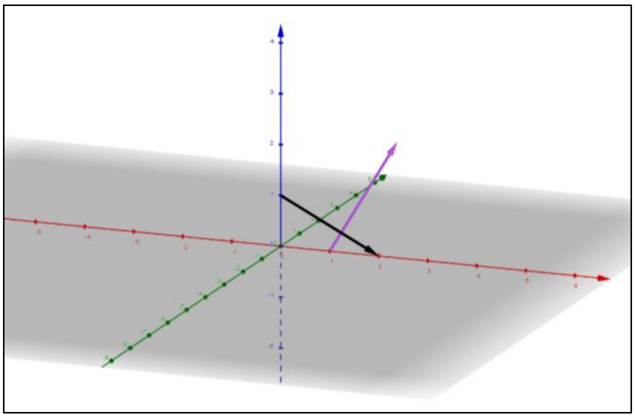
Como en el caso anterior, para estos campos vectoriales se grafica el vector imagen de cada punto con origen en dicho punto. Veamos un ejemplo:

$$\overline{f}: R^3 \rightarrow R^3 \,/\, \overline{f}(x,y,z)=\left(x-y+2z, y+x, -z+2y+2x\right)$$

Consideremos algunos casos particulares para realizar la gráfica:

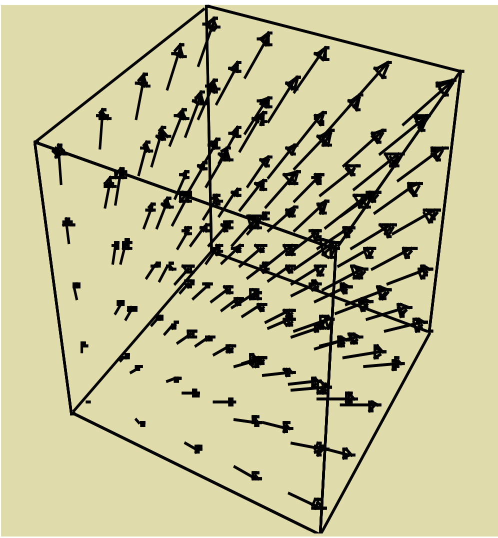
$\overline{f}(1,0,0)=\left(1,1,2\right)$ con origen en (1,0,0) graficamos el vector (1,1,2) (en violeta)

$\overline{f}(0,0,1)=\left(2,0,-1\right)$ con origen en (0 ,0,1) graficamos el vector (2 ,0,-1) (en negro)

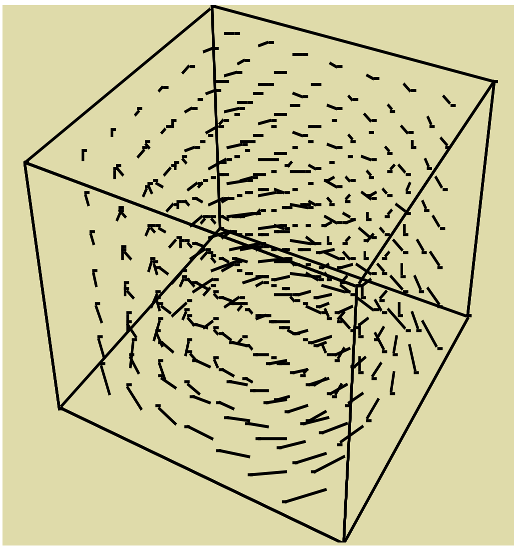


El proceso se repite hasta obtener una cantidad de vectores imágenes que permita identificar cuál es el comportamiento del campo vectorial. Como en el caso anterior, las gráficas de campos vectoriales son más fáciles de hacer con la computadora.

Les dejo algunos ejemplos:



$\overline{f}(x,y,z)=(x,y,z)$



$\overline{f}(x,y,z)=\left(\dfrac{y}{z},-\dfrac{x}{z},0\right)$

● **Campos vectoriales** $\overline{f}:D\subset R^2 \to R^3$

En el caso de campos vectoriales de R^2 en R^3 nos interesa la geometría del conjunto imagen. Veamos un ejemplo:

$$\overline{f}:[0,2\pi]\times[-2,3]\subset R^2 \to R^3 \,/\, \overline{f}(u,v)=(\cos u,\sin u,v)$$

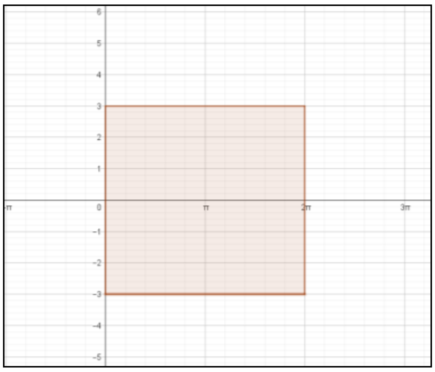
(Recuerden que el conjunto $[0,2\pi]\times[-2,3]$ refiere a los puntos del plano para los cuales se cumple que $0\le u\le 2\pi \quad \wedge \quad -2\le v\le 3$)

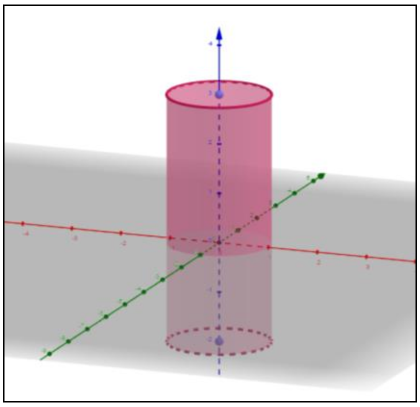
Para identificar qué subconjunto de R^3 es el conjunto imagen, eliminamos los parámetros *u* y *v*, para hallar las ecuaciones cartesianas que lo describen.

$$\begin{cases} x=\cos u \\ y=\sin u \\ z=v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2+y^2=\cos^2 u+\sin^2 u \\ z=v \end{cases} \quad \begin{cases} x^2+y^2=1 \\ -2\le z\le 3 \end{cases}$$

La primera de las ecuaciones cartesianas corresponde a un cilindro circular recto, centrado en el origen, de radio 1; y la segunda ecuación indica que esta superficie no presenta completa, sino que está limitada entre los planos z = -2 y z = 3

Graficamos:





Dom $\overline{f}$ Im $\overline{f}$

En este caso, el conjunto imagen de $\overline{f}$ es una superficie de R^3. En general, el conjunto imagen de un campo vectorial de R^2 en R^3 es una superficies en el espacio. Decimos “en general” ya que más adelante definiremos formalemente las superficies, lo cual implica que los campos vectoriales que las describan cumplan ciertas condiciones específicas (dominio conexo y función continua en ese dominio).

En el caso de los campos vectoriales de de R^2 en R^3 , se trabaja con la geometría del conjunto imagen que, en general, es una superficie en el espacio.

Resolvemos el ejercicio 5)b): En el siguiente caso, determine y grafique el dominio natural D de la función $\overline{f}(x,y) = \left(\sqrt{1-x}, (x+1)^{-1/2}, \ln(y-x)\right)$

5)b) $f_1 = \sqrt{1-x}$ $\quad f_2 = \dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ $\quad f_3 = \ln(y-x)$

Dom $\overline{f}$ = Dom $f_1 \cap$ Dom $f_2 \cap$ Dom f_3

i) $1-x \geq 0 \Rightarrow 1 \geq x \Rightarrow x \leq 1$

ii) $x+1 > 0 \Rightarrow x > -1 \Rightarrow -1 < x$

$\Rightarrow -1 < x \leq 1$

iii) $y-x > 0 \Rightarrow y > x$

Dom $\overline{f} = \{ (x,y) \in R^2 / -1 < x \leq 1 \wedge y > x \}$