INTEGRALES DE SUPERFICIE - FLUJO

ÁREA DE UNA SUPERFICIE ALABEADA

Definición de superficie. Superficie regular. Superficie simple. Líneas coordenadas

Repasamos algunos conceptos:

Definición de superficie. Sea el campo vectorial $\overline{f}: D \subset R^2 \to R^3$. Si se cumple que:

1) D es un conjunto conexo
2) $\overline{f}$ es continua en D

Entonces el conjunto $S = \operatorname{Im} \overline{f}$ es una superficie de R^3.

Punto regular de una superficie. Sea $\overline{f}: D \subset R^2 \to R^3$ asociada a la superficie *S*, y sea (u_0, v_0) punto interior de *D*. Si se cumple que:

1) $\exists \frac{\partial \overline{f}}{\partial u}(u_0, v_0) \quad \wedge \quad \exists \frac{\partial \overline{f}}{\partial v}(u_0, v_0)$ y ambas derivadas son continuas en (u_0, v_0)
2) $\overline{n} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial u}(u_0, v_0) \times \frac{\partial \overline{f}}{\partial v}(u_0, v_0) \neq \overline{0}$

Entonces se dice que $\overline{f}(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0)$ es un punto regular de *S*.
Una superficie es regular cuando todos sus puntos son regulares.

Definición de superficie simple. Sea $\overline{f}: D \subset R^2 \to R^3$ asociada a la superficie *S*. Si la función $\overline{f}$ es inyectiva en D, entonces la superficie *S* es una superficie simple.

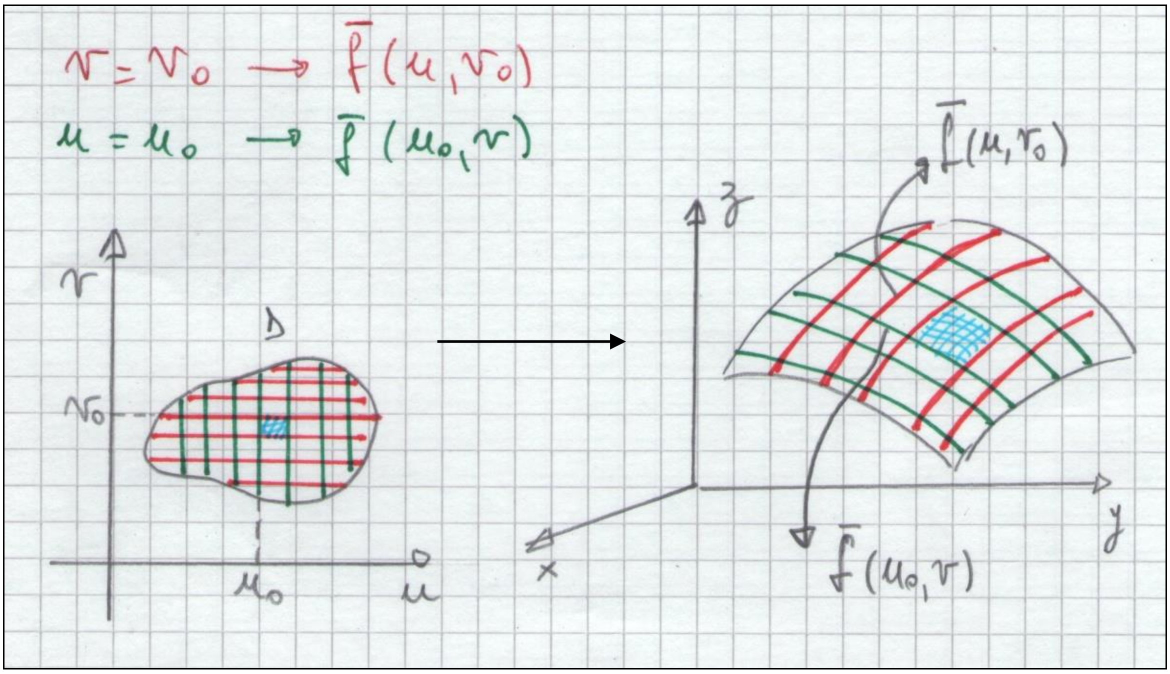
Definición de línea coordenada. Sea el campo vectorial $\overline{f}: D \subset R^2 \to R^3$ asociado a una superficie $S \subset R^3$, con $(u_0, v_0) \in Dom\ \overline{f}$

Se denomina **línea coordenada *u* = *u*₀** a la curva imagen de $\overline{f}(u_0, v)$

Se denomina **línea coordenada *v* = *v*₀** a la curva imagen de $\overline{f}(u, v_0)$

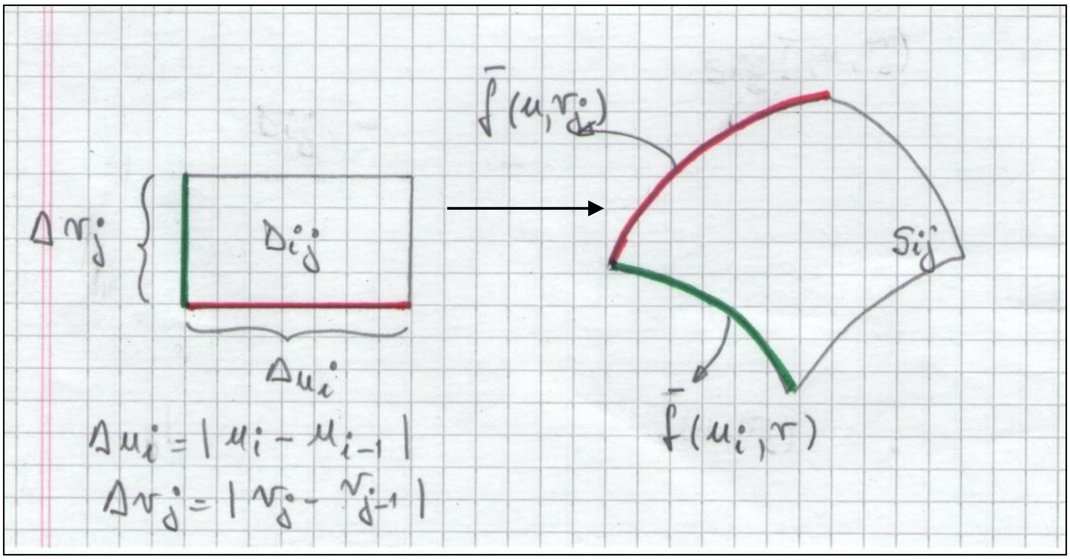
Área de una superficie alabeada

Dada una superficie S, regular y simple, asociada a $\overline{f}: D \subset R^2 \to R^3$, la idea es hallar el área de la superficie S. Para ello vamos a considerar una subdivisión de S mediante una red de sus líneas coordenadas. Si se efectúa una partición en el recinto D mediante segmentos paralelos a los ejes coordenados, dicha partición induce una partición de S a través de sus líneas coordenadas.

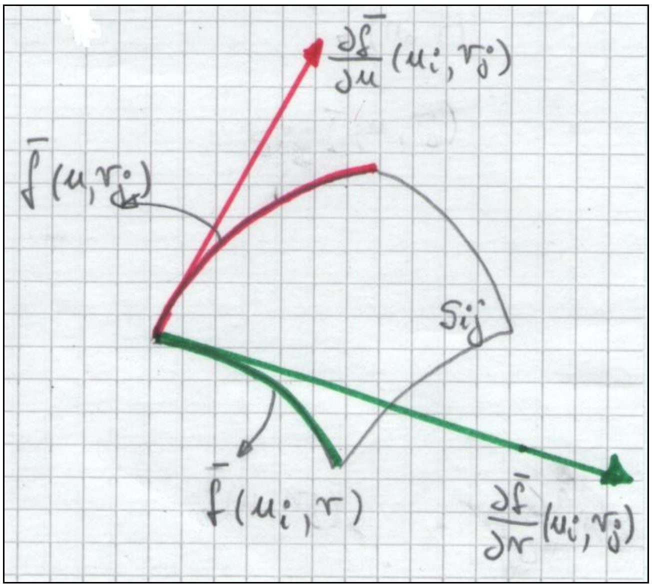


Cada subrecinto D_{ij} del dominio se transforma a través de $\overline{f}$ en el cuadrilátero curvilíneo S_{ij} (ambos marcados en celeste en la figura).

Podemos pensar en aproximar el área de cada S_{ij} mediante el área de una parte de su plano tangente en un punto cualquiera de la misma. Para hallar luego el área de S, se sumarán las áreas de las S_{ij} que la componen. Analizamos particularmente esta situación.

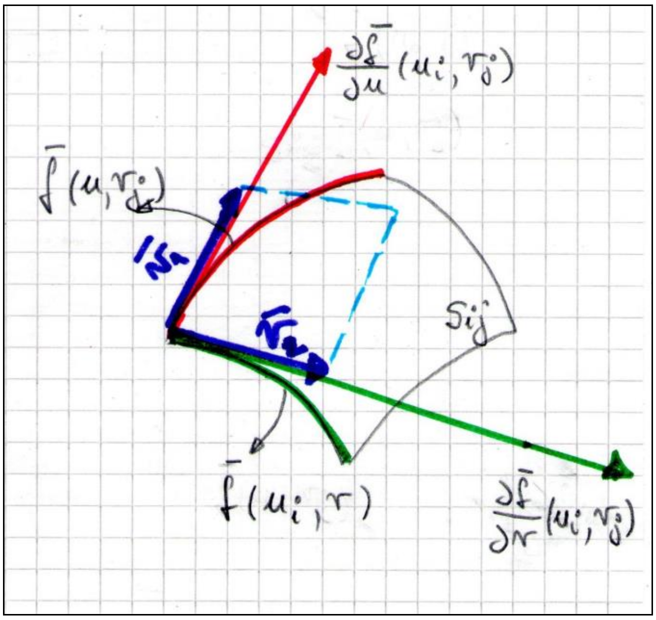


Si derivamos las funciones que determinan las líneas coordenadas $\overline{f}(u, v_j)$ y $\overline{f}(u_i, v)$, se obtienen los vectores $\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial u}(u_i, v_j)$ y $\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial v}(u_i, v_j)$, que resultan tangentes a dichas líneas coordenadas en el punto $\overline{f}(u_i, v_j)$.



Dado que la superficie S es regular en todos sus puntos, es regular en $\overline{f}(u_i, v_j)$, y los vectores $\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial u}(u_i, v_j)$ y $\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial v}(u_i, v_j)$ determinan un plano tangente a S_{ij} en dicho punto. Para aproximar el área de S_{ij}, consideramos un paralelogramo tangente a dicha superficie (el paralelogramo debe estar incluido en el plano tangente a S_{ij}). Los lados de este paralelogramo son segmentos incluidos en los vectores $\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial u}(u_i, v_j)$ y $\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial v}(u_i, v_j)$. Para que estos segmentos tengan una longitud infinitesimal asociada a D_{ij}, generamos los siguientes vectores:

$$\overline{v_1} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial u}(u_i, v_j)\,\Delta u_i \qquad\qquad \overline{v_2} = \frac{\partial \overline{f}}{\partial v}(u_i, v_j)\,\Delta v_j$$



El paralelogramo de lados $\overline{v_1}$ y $\overline{v_2}$ es tangente al cuadrilátero curvilíneo S_{ij}, de modo que el área de dicho paralelogramo aproxima el área de S_{ij}.

$$\text{Área paralelog}\,(\overline{v_1}\ ,\ \overline{v_2}) = \left\| \overline{v_1} \times \overline{v_2} \right\| = \left\| \frac{\partial \overline{f}}{\partial u}(u_i,v_j)\Delta u_i \times \frac{\partial \overline{f}}{\partial v}(u_i,v_j)\Delta v_j \right\| = \left\| \frac{\partial \overline{f}}{\partial u}(u_i,v_j) \times \frac{\partial \overline{f}}{\partial v}(u_i,v_j) \right\| \Delta u_i\ \Delta v_j$$

Entonces: $\quad \text{Área } S_{ij} \cong \left\| \frac{\partial \overline{f}}{\partial u}(u_i,v_j) \times \frac{\partial \overline{f}}{\partial v}(u_i,v_j) \right\| \Delta u_i\ \Delta v_j$

Luego: $\quad \text{Área S} \cong \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} S_{ij} \cong \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \left\| \frac{\partial \overline{f}}{\partial u}(u_i,v_j) \times \frac{\partial \overline{f}}{\partial v}(u_i,v_j) \right\| \Delta u_i\ \Delta v_j$

Para obtener el área de S podemos considerar el límite de la anterior sumatoria cuando *n* y *m* tienden a infinito:

$$\text{Área S} = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \left\| \frac{\partial \overline{f}}{\partial u}(u_i,v_j) \times \frac{\partial \overline{f}}{\partial v}(u_i,v_j) \right\| \Delta u_i\ \Delta v_j$$

En el límite, la doble sumatoria será una integral doble, y los incrementos $\Delta u_i\ \Delta v_j$ se transforman en los diferenciales *du dv*. Proponemos entonces la siguiente definición.

Definición: área de superficie alabeada

Sea la superficie S, siendo S simple y regular, asociada a la función $\overline{f} : D \subset R^2 \to R^3$. Definimos el área de S mediante la siguiente expresión:

$$\text{Área S} = \iint_D \underbrace{\left\| \frac{\partial \overline{f}}{\partial u} \times \frac{\partial \overline{f}}{\partial v} \right\| du\ dv}_{d\sigma} = \iint_S d\sigma$$

El diferencial de superficie es $d\sigma = \left\| \frac{\partial \overline{f}}{\partial u} \times \frac{\partial \overline{f}}{\partial v} \right\| du\ dv$, y la integral $\iint_S d\sigma$ es una integral de superficie.

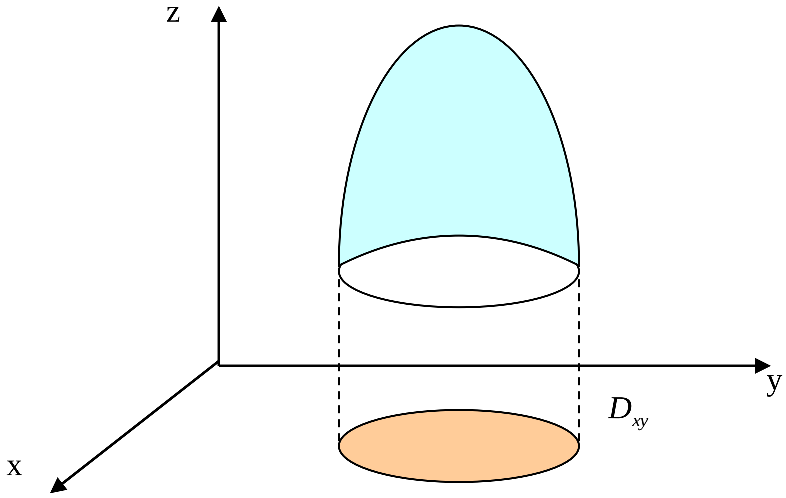
Nótese que, aunque la notación para las integrales de superficie sea similar a las integrales dobles, los recintos de integración, los diferenciales y el concepto en sí mismo son diferentes.

La expresión anterior permite el cálculo del área de S siempre que tengamos la superficie parametrizada. Evaluaremos ahora los casos en que la superficie está definida mediante una ecuación cartesiana, en forma explícita o implícita.

Superficie dada en forma explícita.

Si la superficie S (simple y regular), está dada mediante una ecuación explícita, dicha ecuación será del tipo $z = f(x, y) \quad \vee \quad x = g(y, z) \quad \vee \quad y = m(x, z)$

1) Analizamos en primer lugar el caso $z = f(x, y)$



En este caso podemos parametrizar la superficie de la siguiente manera:

$\bar{h} : D_{xy} \subset R^2 \to R^3 \,/\, \bar{h}(x, y) = (x, y, f(x, y))$, siendo D_{xy} la proyección de la superficie S sobre el plano (xy). Utilizando la fórmula para el cálculo del área de S obtenemos:

$$\text{Área S} = \iint_S d\sigma = \iint_{D_{xy}} \left\| \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} \times \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} \right\| dx\, dy \qquad \otimes$$

Realizamos los cálculos para hallar el producto vectorial de la expresión $\otimes$.

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial x} = (1, 0, f'_x) \qquad \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} = (0, 1, f'_y)$$

$\frac{\partial \bar{h}}{\partial x} \times \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 1 & 0 & f'_x \\ 0 & 1 & f'_y \end{vmatrix} = (-f'_x, -f'_y, 1)$. Este vector resulta siempre distinto del vector nulo, ya que su tercera componente es una constante distinta de cero. Por lo tanto, para calcular el área de S evaluamos la norma del vector obtenido.

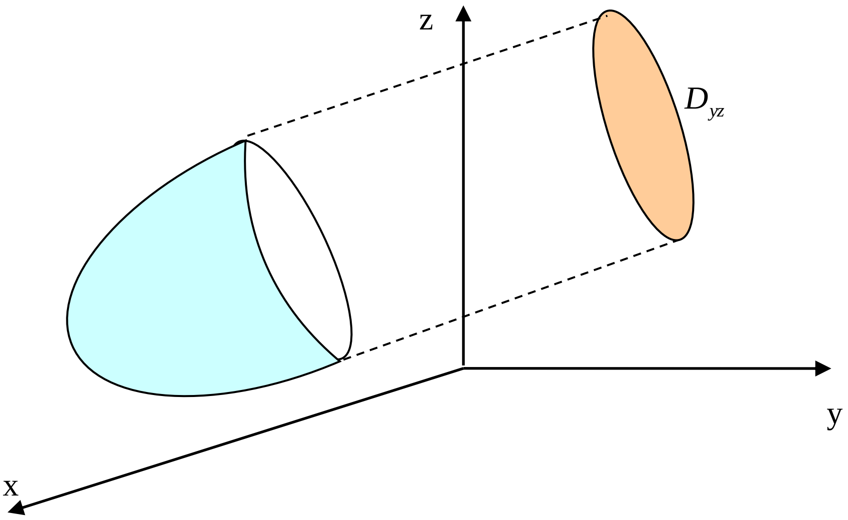
$$\left\| \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} \times \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} \right\| = \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1}$$

Reemplazando en la expresión $\otimes$ resulta:

Área S = $\iint_S d\sigma = \iint_{D_{xy}} \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1}\ dx\, dy$ siendo D_{xy} el recinto que resulta de proyectar la superficie S en el plano (xy).

El diferencial de superficie se expresa como: $d\sigma = \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1}\ dx\, dy$

2) Analizamos el caso $x = g(y,z)$



En este caso podemos parametrizar la superficie de la siguiente manera:

$\bar{h}: D_{yz} \subset R^2 \to R^3 \,/\, \bar{h}(y,z) = (g(y,z), y, z)$, siendo D_{yz} la proyección de la superficie S sobre el plano (yz). Utilizando la fórmula para el cálculo del área de S obtenemos:

$$\text{Área S} = \iint_S d\sigma = \iint_{D_{xy}} \left\| \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} \times \frac{\partial \bar{h}}{\partial z} \right\| dy\, dz \qquad \otimes$$

Realizamos los cálculos para hallar el producto vectorial de la expresión $\otimes$.

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial y} = \left(g'_y \,,1\,,0\right) \qquad \frac{\partial \bar{h}}{\partial z} = \left(g'_z \,,0\,,1\right)$$

$\dfrac{\partial \bar{h}}{\partial y} \times \dfrac{\partial \bar{h}}{\partial z} = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ g'_y & 1 & 0 \\ g'_z & 0 & 1 \end{vmatrix} = \left(1\,, -g'_y \,, -g'_z\right)$. Este vector resulta siempre distinto del vector nulo, ya que su primera componente es una constante distinta de cero. Por lo tanto, para calcular el área de S evaluamos la norma del vector obtenido.

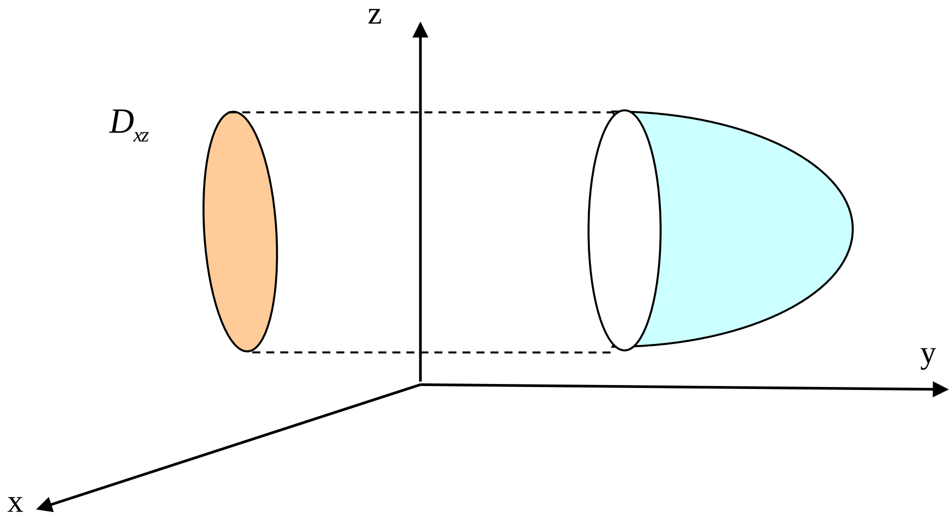
$$\left\| \frac{\partial \bar{h}}{\partial y} \times \frac{\partial \bar{h}}{\partial z} \right\| = \sqrt{\left(g'_y\right)^2 + \left(g'_z\right)^2 + 1}$$

Reemplazando en la expresión $\otimes$ resulta:

Área S = $\iint_S d\sigma = \iint_{D_{yz}} \sqrt{\left(g'_y\right)^2 + \left(g'_z\right)^2 + 1}\; dy\, dz$ siendo D_{yz} el recinto que resulta de proyectar la superficie S en el plano (yz).

El diferencial de superficie se expresa como: $d\sigma = \sqrt{\left(g'_y\right)^2 + \left(g'_z\right)^2 + 1}\; dy\, dz$

3) Analizamos el caso $y = m(x,z)$



En este caso podemos parametrizar la superficie de la siguiente manera:

$\bar{h} : D_{xz} \subset R^2 \to R^3 \, / \, \bar{h}(x,z) = (x, m(x,z), z)$, siendo D_{xz} la proyección de la superficie S sobre el plano (xz).
Utilizando la fórmula para el cálculo del área de S obtenemos:

$$\text{Área S} = \iint_S d\sigma = \iint_{D_{xy}} \left\| \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} \times \frac{\partial \bar{h}}{\partial z} \right\| dx\, dz \qquad \otimes$$

Realizamos los cálculos para hallar el producto vectorial de la expresión $\otimes$.

$$\frac{\partial \bar{h}}{\partial x} = (1 \, , \, m'_x \, , \, 0) \qquad \frac{\partial \bar{h}}{\partial z} = (0 \, , \, m'_z \, , \, 1)$$

$\frac{\partial \bar{h}}{\partial x} \times \frac{\partial \bar{h}}{\partial z} = \begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 1 & m'_x & 0 \\ 0 & m'_z & 1 \end{vmatrix} = (m'_x \, , -1 \, , \, m'_z)$. Este vector resulta siempre distinto del vector nulo, ya que su segunda componente es una constante distinta de cero. Por lo tanto, para calcular el área de S evaluamos la norma del vector obtenido.

$$\left\| \frac{\partial \bar{h}}{\partial x} \times \frac{\partial \bar{h}}{\partial z} \right\| = \sqrt{(m'_x)^2 + (m'_z)^2 + 1}$$

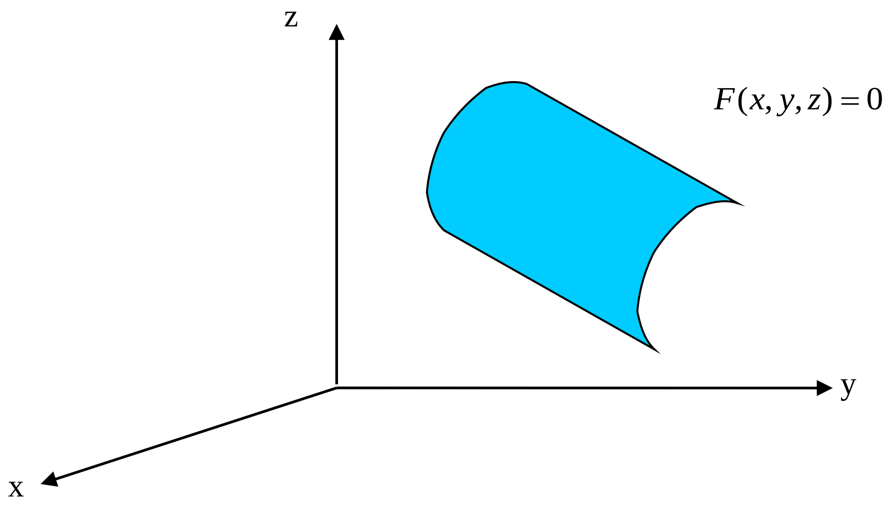
Reemplazando en la expresión $\otimes$ resulta:

Área S = $\iint_S d\sigma = \iint_{D_{xz}} \sqrt{(m'_x)^2 + (m'_z)^2 + 1} \; dx\, dz$ siendo D_{xz} el recinto que resulta de proyectar la superficie S en el plano (xz).

El diferencial de superficie se expresa como: $d\sigma = \sqrt{(m'_x)^2 + (m'_z)^2 + 1} \; dx\, dz$

Superficie dada en forma implícita.

Si la superficie S (simple y regular), está dada en forma implícita, la ecuación que la describe será del tipo $F(x, y, z) = 0$ (en este caso la superficie S es la superficie de nivel 0 de la función F).



1) $F(x, y, z) = 0$ define implícitamente a $z = f(x, y)$

Suponemos que la función F cumple las condiciones para definir implícitamente una función $z = f(x, y)$ (recordar el teorema de las funciones definidas en forma implícita o de Cauchy-Dini). En este caso podemos parametrizar la superficie S de la siguiente manera: $\bar{h}: D \subset R^2 \to R^3 / \bar{h}(x, y) = (x, y, f(x, y))$

Recordando el análisis anterior, el área de S puede calcularse como:

$$\text{Área S} = \iint_S d\sigma = \iint_D \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1} \; dx\, dy$$

En el caso de las funciones definidas implícitamente, las derivadas parciales quedan dadas por:

$$f'_x = -\frac{F'_x}{F'_z} \qquad f'_y = -\frac{F'_y}{F'_z}$$

Reemplazando en la expresión para el cálculo del área de S, obtenemos:

$$\text{Área S} = \iint_S d\sigma = \iint_D \sqrt{(f'_x)^2 + (f'_y)^2 + 1} \; dx\, dy = \iint_D \sqrt{\left(-\frac{F'_x}{F'_z}\right)^2 + \left(-\frac{F'_y}{F'_z}\right)^2 + 1} \; dx\, dy$$

$$= \iint_D \sqrt{\frac{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}{(F'_z)^2}} \, dx\, dy = \iint_D \frac{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}{|F'_z|} \, dx\, dy$$

Por lo tanto, podemos definir el diferencial de superficie como:

$$d\sigma = \frac{\sqrt{(F'_x)^2 + (F'_y)^2 + (F'_z)^2}}{|F'_z|} \, dx\, dy$$

2) $F(x,y,z)=0$ define implícitamente a $y=g(x,z)$

Si consideramos ahora que la función F cumple las condiciones para definir implícitamente una función $y=g(x,z)$, podemos parametrizar la superficie S de la siguiente manera: $\bar{h}: D \subset R^2 \to R^3 \,/\, \bar{h}(x,z)=(x, g(x,z), z)$

En este caso, el área de S puede calcularse como:

$$\text{Área S} = \iint_S d\sigma = \iint_D \sqrt{(g'_x)^2+(g'_z)^2+1}\ dx\,dz$$

En el caso de las funciones definidas implícitamente, las derivadas parciales quedan dadas por:

$$g'_x = -\frac{F'_x}{F'_y} \qquad g'_z = -\frac{F'_z}{F'_y}$$

Reemplazando en la expresión para el cálculo del área de S, obtenemos:

$$\text{Área S} = \iint_S d\sigma = \iint_D \sqrt{(g'_x)^2+(g'_z)^2+1}\ dx\,dz = \iint_D \sqrt{\left(-\frac{F'_x}{F'_y}\right)^2+\left(-\frac{F'_z}{F'_y}\right)^2+1}\ dx\,dz =$$

$$= \iint_D \sqrt{\frac{(F'_x)^2+(F'_y)^2+(F'_z)^2}{(F'_y)^2}}\ dx\,dz = \iint_D \frac{\sqrt{(F'_x)^2+(F'_y)^2+(F'_z)^2}}{|\,F'_y\,|}\ dx\,dz$$

Por lo tanto, podemos definir el diferencial de superficie como:

$$d\sigma = \frac{\sqrt{(F'_x)^2+(F'_y)^2+(F'_z)^2}}{|\,F'_y\,|}\,dx\,dz$$

3) $F(x,y,z)=0$ define implícitamente a $x=m(y,z)$

Análogamente, si consideramos ahora que la función F cumple las condiciones para definir implícitamente una función $x=m(y,z)$, podremos calcular el área de S mediante la siguiente expresión:

$$\text{Área S} = \iint_S d\sigma = \iint_D \sqrt{(m'_y)^2+(m'_z)^2+1}\ dy\,dz = \iint_D \sqrt{\left(-\frac{F'_y}{F'_x}\right)^2+\left(-\frac{F'_z}{F'_x}\right)^2+1}\ dy\,dz =$$

$$= \iint_D \sqrt{\frac{(F'_x)^2+(F'_y)^2+(F'_z)^2}{(F'_x)^2}}\ dy\,dz = \iint_D \frac{\sqrt{(F'_x)^2+(F'_y)^2+(F'_z)^2}}{|\,F'_x\,|}\ dy\,dz$$

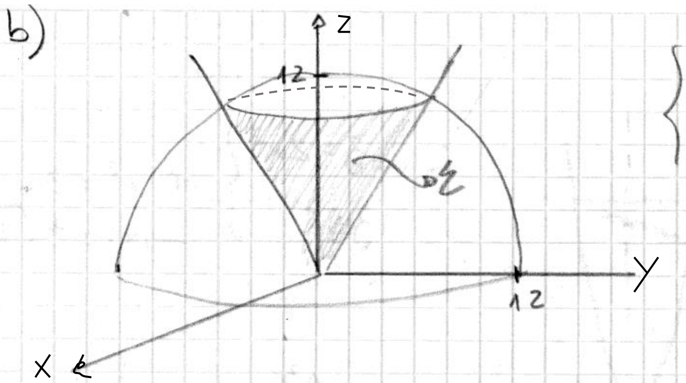
Por lo tanto, podemos definir el diferencial de superficie como:

$$d\sigma = \frac{\sqrt{(F'_x)^2+(F'_y)^2+(F'_z)^2}}{|\,F'_x\,|}\,dy\,dz$$

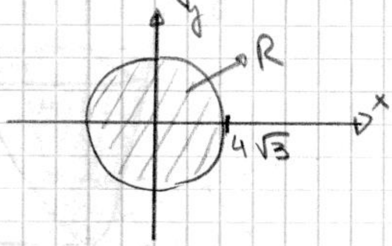
Resolvemos ejercicios del TP10

5)b) Calcular el área del trozo de superficie cónica $z = \sqrt{2x^2 + 2y^2}$ interior a la esfera de radio 12 con centro en el origen de coordenadas.

b)



$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 12^2 \\ z^2 = 2x^2+2y^2 \end{cases} \Rightarrow$$



$$\Rightarrow x^2+y^2+2x^2+2y^2 = 12^2 \Rightarrow 3(x^2+y^2) = 12^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x^2+y^2 = 12 \cdot 4 \Rightarrow x^2+y^2 = (4\sqrt{3})^2$$

$$\text{Área } \Sigma = \iint_\Sigma d\sigma = \iint_R \frac{\sqrt{F'^2_x+F'^2_y+F'^2_z}}{|F'_z|}\, dx\, dy = (*)$$

$$F(x,y,z) = z^2-2x^2-2y^2 = 0$$

$$(*) = \iint_R \frac{\sqrt{(-4x)^2+(-4y)^2+(2z)^2}}{|2z|}\, dx\, dy = \iint_R \frac{\sqrt{16x^2+16y^2+4z^2}}{2z}\, dx dy$$

$$= \iint_R \frac{\sqrt{8(2x^2+2y^2)+4z^2}}{2z}\, dx\, dy = \iint_R \frac{\sqrt{16x^2+16y^2+8x^2+8y^2}}{2\sqrt{2x^2+2y^2}}\, dx dy$$

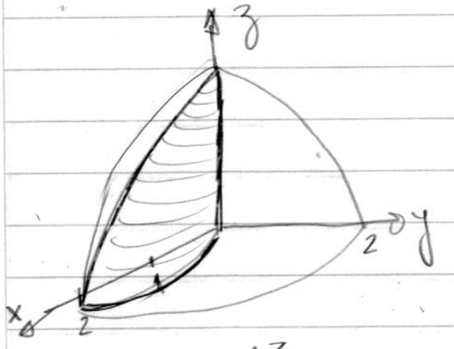
$$= \iint_R \frac{\sqrt{24}\,\cancel{\sqrt{x^2+y^2}}}{2\sqrt{2}\,\cancel{\sqrt{x^2+y^2}}}\, dx\, dy = \sqrt{3}\iint_R dx\, dy =$$

$$= \sqrt{3} \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{4\sqrt{3}} d\rho\, \rho = \sqrt{3}\, 2\pi \left[\frac{\rho^2}{2} \Big|_0^{4\sqrt{3}} \right] =$$

$$= \sqrt{3}\, \frac{\cancel{2}\pi}{\cancel{2}}\, 16 \cdot 3 = 48\sqrt{3}\,\pi$$

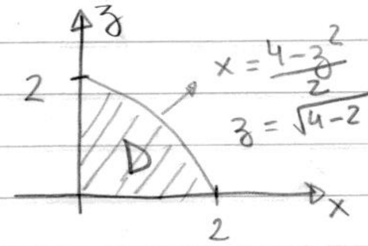
5)e) Calcular el área del trozo de superficie cilíndrica $x^2+y^2=2x$ con $x^2+y^2+z^2\le 4$ en el 1er. octante.

5)e) $x^2+y^2=2x$ con $x^2+y^2+z^2\le 4$; 1° oct



$$x^2+y^2=2x$$
$$x^2-2x+1+y^2=1$$
$$(x-1)^2+y^2=1$$

$$F(x,y,z)=x^2+y^2-2x=0$$



$$\left.\begin{array}{l} x^2+y^2=2x \\ x^2+y^2+z^2=4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2x+z^2=4 \Rightarrow x=\frac{4-z^2}{2}$$
$$z=\sqrt{4-2x}$$

$$\text{Área } S=\iint_S d\sigma=\iint_D \frac{\sqrt{(F'_x)^2+(F'_y)^2+(F'_z)^2}}{|F'_y|}\,dx\,dz=$$

$$=\iint_D \frac{\sqrt{(2x-2)^2+4y^2}}{|2y|}\,dx\,dz=\iint_D \frac{\cancel{2}\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{\cancel{2}y}\,dx\,dz=$$

$$=\iint_D \frac{\sqrt{\cancel{x^2}-\cancel{2x}+1+\cancel{2x}-\cancel{x^2}}}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx\,dz=\iint_D \frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx\,dz=$$

$$=\int_0^2 dx\int_0^{\sqrt{4-2x}}\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,dz=\int_0^2\frac{\sqrt{4-2x}}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx=$$

$$=\int_0^2\sqrt{\frac{2\cancel{(2-x)}}{x\cancel{(2-x)}}}\,dx=\sqrt{2}\int_0^2\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx=\sqrt{2}\left[2\sqrt{x}\Big|_0^2\right]=$$

$$=\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}=4$$

Integral de un campo escalar sobre una superficie

Sea la superficie *S*, regular y simple, asociada a $\overline{g}: D \subset R^2 \to R^3$. Sea el campo escalar $f: A \subset R^3 \to R$, con $f \in C^1$ en *A*, de modo que $S \subset A$. Se define la integral del campo escalar *f* sobre la superficie *S* a la siguiente integral:

$$\iint_S f(x,y,z)\, d\sigma = \iint_D f(\overline{g}(u,v)) \left\| \frac{\partial \overline{g}}{\partial u} \times \frac{\partial \overline{g}}{\partial u} \right\| du\, dv$$

Interpretaciones físicas:

Consideramos la función $\delta(x,y,z)$ como la función densidad puntual.

Masa : $m = \iint_S \delta(x,y,z)\, d\sigma$

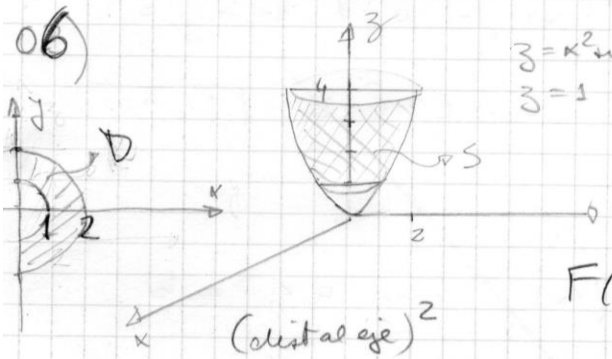
Se pueden generalizar para integrales de superficies de campos escalares las interpretaciones físicas vistas en integrales dobles para el cálculo de momentos y del centro de gravedad.

Resolvemos el ejercicio 6) del TP10

Calcule el momento de inercia respecto del eje z de una chapa en forma de paraboloide $z = x^2 + y^2$, con $x \geq 0 \ \wedge \ 1 \leq z \leq 4$, si la densidad superficial en cada punto de la chapa es $\delta(x,y,z) = \dfrac{k}{x^2+y^2}$, con *k* constante.

06)

$\begin{cases} z = x^2+y^2 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2 = 1$ $\qquad \begin{cases} z = x^2+y^2 \\ z = 4 \end{cases} \Rightarrow x^2+y^2 = 4$



sólo el frente $\Rightarrow x \geq 0$

$$F(x,y,z) = x^2+y^2-z = 0$$

$(\text{dist al eje})^2$

$$I_z = \iint_S (x^2+y^2)\,\delta(x,y,z)\, d\sigma = \iint_S \cancel{(x^2+y^2)} \frac{k}{\cancel{x^2+y^2}}\, d\sigma =$$

$$= k \iint_D \frac{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}{|-1|}\, dx\, dy = k \iint_D \sqrt{4(x^2+y^2)+1}\, dx\, dy =$$

$$= k \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \int_1^2 d\rho\ \rho \sqrt{4\rho^2+1} = k \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \left[(4\rho^2+1)^{3/2}\, \frac{2}{3}\, \frac{1}{8} \Big|_1^2 \right] =$$

$$= k \int_{-\pi/2}^{\pi/2} d\theta \left[\frac{1}{12} \left(17^{3/2} - 5^{3/2} \right) \right] = k\, \cancel{2} \cdot \frac{\pi}{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{12} \left(17^{3/2} - 5^{3/2} \right) =$$

$$= \frac{k\pi}{12} \left(17^{3/2} - 5^{3/2} \right)$$

Orientación de superficies

Para definir la integral de un campo vectorial sobre una superficie, previamente debemos definir el concepto de superficie orientable.

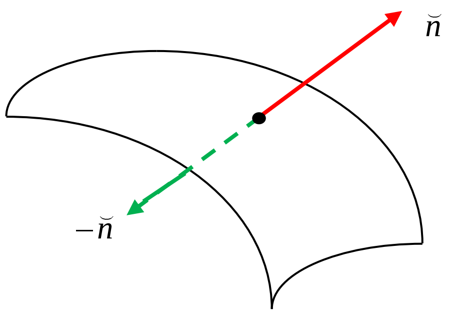
a) Superficies abiertas

Sea la superficie *S*, regular y simple, asociada a $\overline{f}: D \subset R^2 \to R^3$, donde el recinto *D* está limitado por curvas regulares a trozos. Si en todo punto de la superficie *S* está definido el versor normal

$$\breve{n}(u,v) = \frac{\dfrac{\partial \overline{f}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \overline{f}}{\partial v}}{\left\| \dfrac{\partial \overline{f}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \overline{f}}{\partial v} \right\|}$$

de modo tal que sea un campo vectorial continuo sobre *S*, se dice que S es una **superficie orientable**. El campo vectorial $\breve{n}(u,v)$ define una orientación sobre *S*.

Si $\breve{n}(u,v)$ da una orientación de S, el campo de versores $-\breve{n}(u,v)$ será otra orientación de la misma superficie. Puede demostrarse que no existen otras orientaciones posibles.

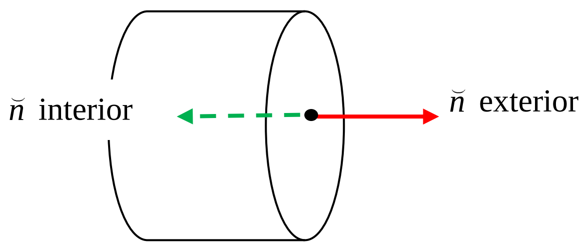


Se elige arbitrariamente una orientación como positiva y otra como negativa.

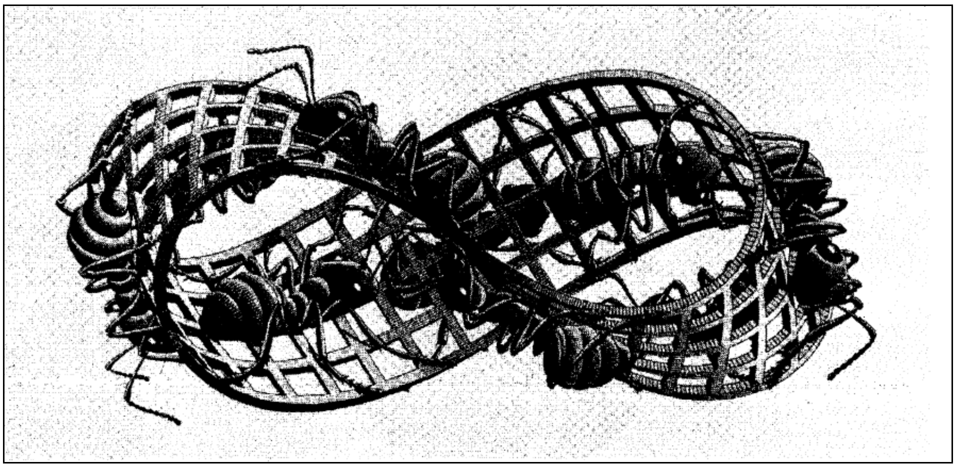
Una superficie que tiene fija una de sus orientaciones, se denomina **orientada**.

a) Superficies cerradas

Puede demostrarse que cualquier superficie cerrada, suave a trozos, que constituye la frontera de cierta región del espacio tridimensional, es una superficie orientable. En este caso, las orientaciones se denominan interior y exterior.



La definición dada de superficie orientable supone que dicha superficie tiene dos lados o dos caras. Sin embargo, existen superficies que no son orientables. Un ejemplo es la cinta de Mobius, que tiene una sola cara. En la siguiente figura de la cinta de Mobius, dibujada por Escher, se puede ver a un grupo de hormigas caminando a los largo de la banda. Después de dar una vuelta alrededor de la cinta, y sin cruzar por un costado, terminan en el “lado opuesto” de la superficie.



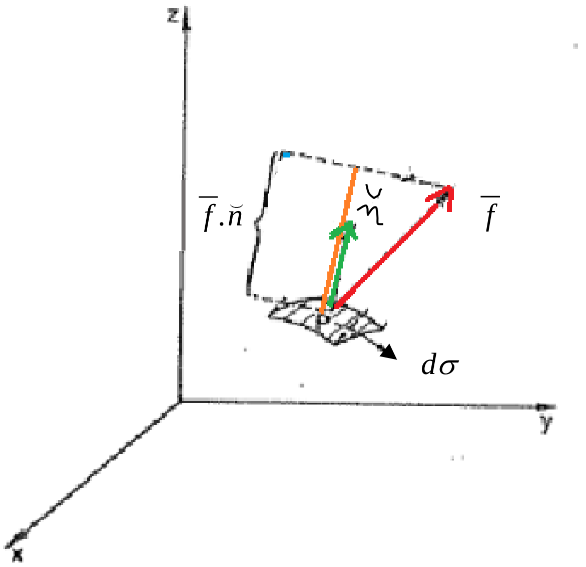
Integral de un campo vectorial sobre una superficie (flujo)

Sea la superficie *S*, regular y simple, asociada a $\overline{g}: D \subset R^2 \to R^3$. Sea el campo vectorial $\overline{f}: A \subset R^3 \to R^3$, con $\overline{f} \in C^1$ en *A*, de modo que $S \subset A$. Se define la integral del campo vectorial $\overline{f}$ sobre la superficie *S* a la siguiente integral:

$$\iint_S \overline{f}\ \breve{n}\ d\sigma = \iint_D \overline{f}(\overline{g}(u,v))\ \underbrace{\frac{\dfrac{\partial \overline{g}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \overline{g}}{\partial u}}{\left\| \dfrac{\partial \overline{g}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \overline{g}}{\partial u} \right\|}}_{\breve{n}}\ \underbrace{\left\| \frac{\partial \overline{g}}{\partial u} \times \frac{\partial \overline{g}}{\partial u} \right\| du\ dv}_{d\sigma} = \iint_D \overline{f}(\overline{g}(u,v))\ \frac{\partial \overline{g}}{\partial u} \times \frac{\partial \overline{g}}{\partial u}\ du\ dv$$

Interpretación física (flujo):

Consideremos el campo vectorial $\overline{f}$, que describe el campo de velocidades de las partículas de un fluido. Suponemos que en un punto P perteneciente a la superficie, un cierto líquido fluye con velocidad $\overline{f}$. Consideramos alrededor de P un trozo infinitesimal de superficie $d\sigma$.



En este caso, solamente la componente normal del vector velocidad $\overline{f}$ tiene efecto en el transporte del líquido. Dicha componente normal resulta $\overline{f}.\breve{n}$, ya que este producto escalar indica la proyección de $\overline{f}$ en la dirección de $\breve{n}$. La cantidad efectiva de líquido que atraviesa la superficie $d\sigma$ será por efecto de la componente del campo de velocidades que resulta normal a la superficie. La componente tangencial sólo hace circular el líquido al ras de la superficie y no hace que la atraviese.

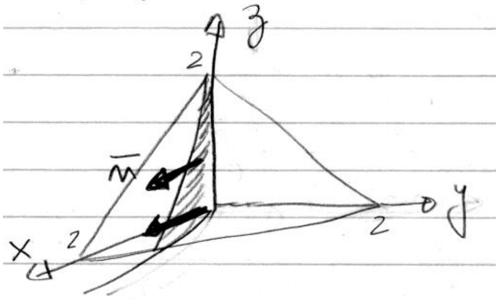
Por lo tanto, el producto escalar $\overline{f}.\breve{n}$ está evaluando la cantidad de fluido que atraviesa la superficie $d\sigma$ en una unidad de tiempo. La integral indica que se están sumando todos estos flujos elementales, por lo cual, la integral $\iint_S \overline{f}\ \breve{n}\ d\sigma$ se denomina flujo del campo $\overline{f}$ a través de la superficie S.

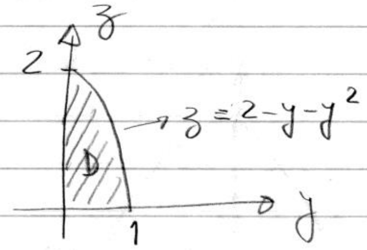
Si el signo de esta integral es positivo, esto indica que, en promedio, el líquido está pasando por S en la dirección y sentido del normal $\breve{n}$ elegido para orientar la superficie. Si el valor del flujo obtenido es negativo, significa que el flujo, en promedio, atraviesa la superficie en sentido opuesto al normal $\breve{n}$ que orienta la superficie.

Resolvemos ejercicios de final

Calcular el flujo de $\overline{f}(x,y,z)=(xy,x,zy)$ a través de la porción de superficie $x=y^2$ en el primer octante, con $x+y+z\le 2$. Indicar gráficamente la orientación del versor normal que ha elegido.

$x = y^2$ en el 1° octante con $x+y+z \le 2$





$$\begin{cases} x = y^2 \\ x+y+z=2 \end{cases} \Rightarrow y^2+y+z=2 \Rightarrow z = 2-y-y^2$$

$$\text{Si } z=0 \therefore 2-y-y^2=0 \begin{array}{l} \nearrow y=1 \\ \searrow \cancel{y=-2} \ (1^\circ \text{oct}) \end{array}$$

$$F(x,y,z) = x-y^2=0$$

$$\breve{n}(0,0,0)=(1,0,0)$$

$$\breve{n} = \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|} = \frac{(1,-2y,0)}{\sqrt{1+4y^2}}$$

$$\iint_S \overline{f}\,\breve{n}\, d\sigma = \iint_S (xy,x,zy)\frac{(1,-2y,0)}{\sqrt{1+4y^2}}\, d\sigma =$$

$$= \iint_S \frac{xy-2xy}{\sqrt{1+4y^2}}\, d\sigma = \iint_D \frac{-xy}{\cancel{\sqrt{1+4y^2}}} \frac{\cancel{\sqrt{1+4y^2}}}{|1|}\, dy\,dz =$$

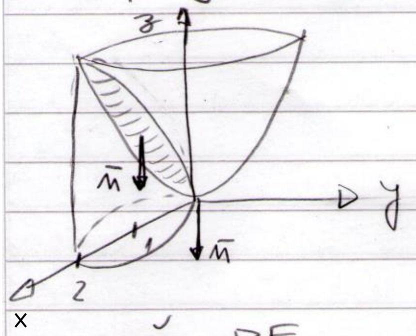
$$= \iint_D -\underset{x}{y^2}\cdot y \, dy\,dz = -\int_0^1 dy \int_0^{2-y-y^2} y^3\, dz =$$

$$-\int_0^1 dy\,\left[2-y-y^2\right]\cdot y^3 = -\left[2\frac{y^4}{4}-\frac{y^5}{5}-\frac{y^6}{6}\Big|_0^1\right] = -\frac{2}{15}$$

Calcule el flujo de $\overline{f}(x,y,z)=(y,-x,z)$ a través de la superficie $z=x^2+y^2$ con $x^2+y^2\le 2x$. Grafique el versor normal que ha elegido para orientar la superficie.

$f(x,y,z)=(y,-x,z)$

sup $z=x^2+y^2$ con $x^2+y^2\le 2x$



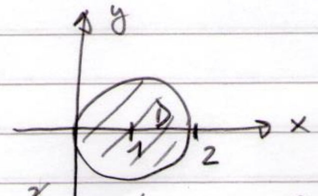
$x^2+y^2=2x$

$x^2-2x+1+y^2=1$

$(x-1)^2+y^2=1$

$F(x,y,z)=x^2+y^2-z=0$

$$\breve{n}=\frac{\nabla F}{\|\nabla F\|}=\frac{(2x,2y,-1)}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}$$



$\breve{n}(0,0,0)=(0,0,-1)$

$x^2+y^2=2x \Rightarrow \rho^{\cancel{2}}=2\cancel{\rho}\cos\theta \Rightarrow \rho=2\cos\theta$

$$\iint_S \bar{f}\,\breve{n}\,d\sigma=\iint_S (y,-x,z)\,\frac{(2x,2y,-1)}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\,d\sigma=$$

$$=\iint_S \frac{\cancel{2xy}-\cancel{2xy}-z}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\,d\sigma=$$

$$=\iint_D \frac{-z}{\cancel{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}}\,\frac{\cancel{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}}{|-1|}\,dx\,dy=$$

$$=\iint_D -(x^2+y^2)\,dx\,dy=-\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta\int_0^{2\cos\theta}d\rho\,\rho\,\rho^2=$$

$$=-\int_{-\pi/2}^{\pi/2}d\theta\left[\frac{\rho^4}{4}\Big|_0^{2\cos\theta}\right]=-\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\frac{16}{4}\cos^4\theta\,d\theta=$$

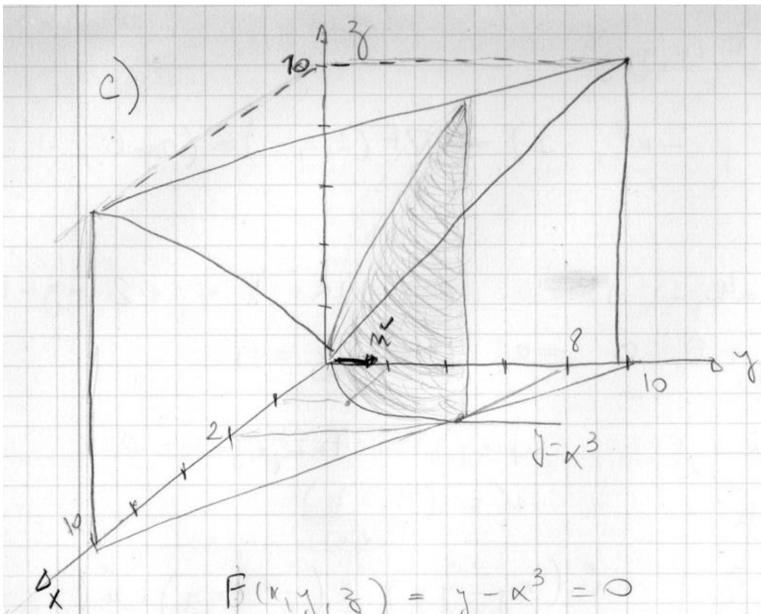
$$=-4\cdot\left(\frac{3}{8}\pi\right)=-\frac{3\pi}{2}$$

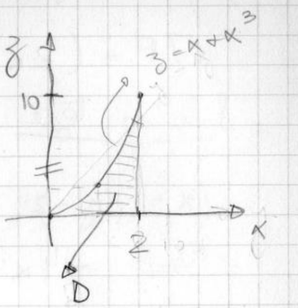
Resolvemos ejercicios del TP10

10)c) Calcular el flujo de $\overline{f}$ a través de la superficie S, indicando gráficamente la orientación del versor normal elegido.

$\overline{f}(x,y,z)=(xy,zx,y-xz^2)$ a través del trozo de superficie de ecuación $y=x^3$ con $0\le z\le x+y$, $x+y\le 10$.

c)





$$\begin{cases} y = x^3 \\ z = x+y \end{cases} \Rightarrow z = x + x^3$$

$x=0 \to z=0$

$x=2 \to z=10$

$x=1 \to z=2$

$$F(x,y,z) = y - x^3 = 0$$

$$\check{n} = \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|} = \frac{(-3x^2, 1, 0)}{\sqrt{9x^4+1}}$$

$$\begin{cases} x+y = 10 \\ y = x^3 \end{cases} \Rightarrow 10 - x = x^3$$

$\Rightarrow x^3 + x = 10$

$$\check{n}(0,0,0) = (0,1,0)$$

$$\iint_S \bar{f}\cdot\check{n}\, d\sigma = \iint_S (xy,\ zx,\ y-xz^2)\,\frac{(-3x^2, 1, 0)}{\sqrt{9x^4+1}}\, d\sigma =$$

$$= \iint_S \frac{(-3x^3y + zx)}{\sqrt{9x^4+1}}\, d\sigma = \iint_D \frac{(-3x^3y+zx)}{\cancel{\sqrt{9x^4+1}}}\,\frac{\cancel{\sqrt{9x^4+1}}}{|1|}\, dx\, dz$$

$$= \iint_D (-3x^3y + zx)\, dx\, dz = \iint_R (-3x^3\underbrace{x^3}_{y} + zx)\, dz\, dx =$$

$$= \int_0^2 dx \int_0^{x+x^3} dz\, (-3x^6 + zx) = \int_0^2 dx \left[-3x^6 z + \frac{z^2}{2}x \Big|_0^{x+x^3} \right] =$$

$$= \int_0^2 \left[-3x^6 (x + x^3) + \frac{(x+x^3)^2}{2} x \right] dx = \int_0^2 \left[-3x^7 - 3x^9 + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{x^2}{2} + \frac{x^6}{2} + x^4 \right) x \right] dx = \int_0^2 \left(-3x^7 - 3x^9 + \frac{x^3}{2} + \frac{x^7}{2} + x^5 \right) dx =$$

$$= \int_0^2 \left(-3x^9 - \frac{5}{2} x^7 + x^5 + \frac{x^3}{2} \right) dx = \left[-\frac{3x^{10}}{10} - \frac{5}{2}\frac{x^8}{8} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^4}{8} \right|_0^2$$

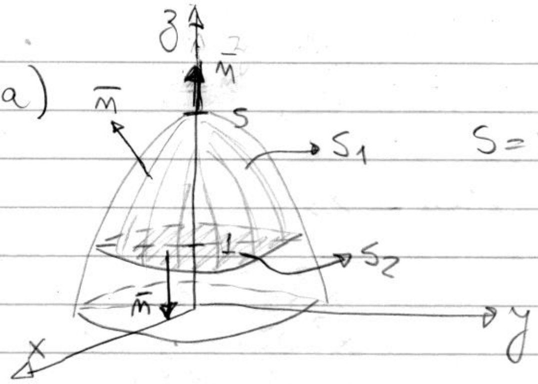
$$= -\frac{3 \cdot 2^{10}}{10} - \frac{5 \cdot 2^8}{2 \cdot 8} + \frac{2^6}{6} + \frac{2^4}{8} = -\frac{3072}{10} - \frac{1280}{16} + \frac{64}{6} + 2 =$$

$$= -\frac{5618}{15}$$

10)a) (Adaptado) Calcular el flujo de $\overline{f}$ a través de la superficie S, indicando gráficamente la orientación del versor normal elegido.

$\overline{f}(x,y,z) = (x\,,\,y\,,\,z)$ a través de la superficie frontera del cuerpo definido por $1 \leq z \leq 5 - x^2 - y^2$.

10)a)



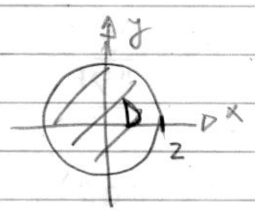
$S = S_1 \cup S_2$

$\overline{f}(x,y,z) = (x,y,z)$

$$\iint_S \overline{f}\,\check{n}\,d\sigma = \iint_{S_1} \overline{f}\,\check{n}\,d\sigma + \iint_{S_2} \overline{f}\,\check{n}\,d\sigma$$

$S_1)$ $\quad z = 5 - x^2 - y^2$ con $z \geq 1$

$$\begin{cases} z = 5 - x^2 - y^2 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$



$$F(x,y,z) = z + x^2 + y^2 - 5 = 0$$

$$\check{n} = \frac{(2x, 2y, 1)}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}} \qquad \check{n}(0,0,5) = (0,0,1)$$

$$\iint_{S_1} \overline{f}\,\check{n}\,d\sigma = \iint_{S_1} (x,y,z)\,\frac{(2x,2y,1)}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\,d\sigma =$$

$$= \iint_{S_1} \frac{2x^2+2y^2+z}{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}\,d\sigma =$$

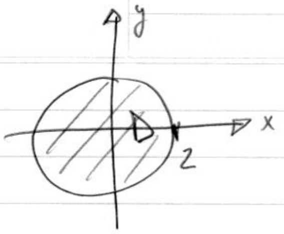
$$= \iint_D \frac{2x^2+2y^2+z}{\cancel{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}}\;\frac{\cancel{\sqrt{4x^2+4y^2+1}}}{|1|}\,dx\,dy =$$

$$= \iint_D (2x^2+2y^2+5-x^2-y^2)\,dx\,dy = \iint_D (5+x^2+y^2)\,dx\,dy =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 d\rho\,(5+\rho^2)\cdot\rho = 2\pi \cdot \left[5\frac{\rho^2}{2} + \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^2 \right] =$$

$$= 2\pi\,[10 + 4] = 28\pi$$

$\boxed{S_2}$



$$\begin{cases} z = 5 - x^2 - y^2 \\ z = 1 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 4$$

$S_2 \to z = 1 \qquad \check{n} = (0,0,-1)$

(porque debe ser orientación exterior, en concordancia con la orientación de S_1)

$G(x,y,z) = z - 1 = 0$

$$\iint_{S_2} \bar{f}\, \check{n}\, d\sigma = \iint_{S_2} (x,y,z)(0,0,-1)\, d\sigma =$$

$$= \iint_{S_2} -z\, d\sigma = \iint_D -z \underbrace{\frac{\sqrt{0^2+0^2+1}}{|1|}}_{=1} dx\, dy =$$

$$= -\iint_D \overbrace{1}^{z=1} dx\, dy = -\underbrace{\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 d\rho\, \rho}_{\text{área del círculo}} = -\pi \cdot 4$$

$$\iint_S \bar{f}\, \check{n}\, d\sigma = \boxed{\underbrace{28\pi}_{S_1} \underbrace{-4\pi}_{S_2}}$$

Observación: si la proyección no deforma la superficie (como en el caso de S_2) resulta

$$d\sigma = \underbrace{1}_{\frac{\sqrt{(F'_x)^2+(F'_y)^2+(F'_z)^2}}{|F'_z|} = 1} \cdot dx\, dy$$

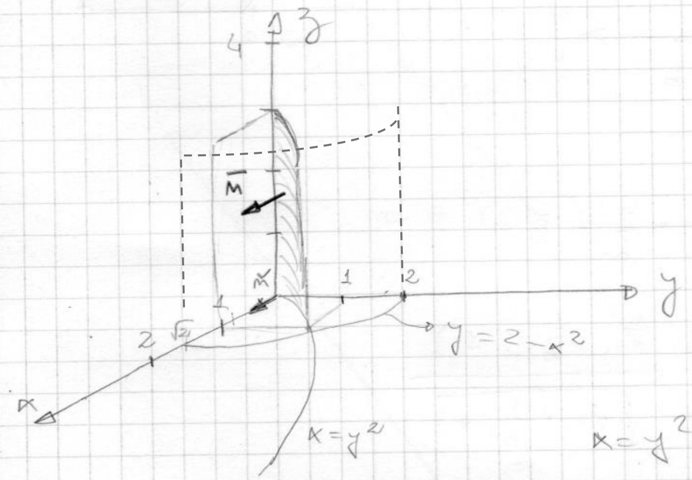
11) Sea $\overline{f}$ continuo tal que $\overline{f}(x,y,z)=(x-y\,,\,x-z\,,\,g(x,y,z))$. Calcular el flujo de $\overline{f}$ a través de la superficie de ecuación $x=y^2$ con $0\leq z\leq 4$, $0\leq y\leq 2-x^2$

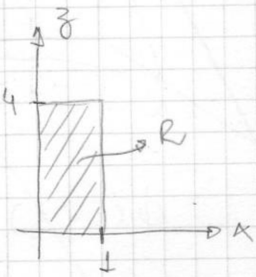
11)

$$\begin{cases} x = y^2 \\ y = 2 - x^2 \end{cases} \Rightarrow y = 2 - y^4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y^4 + y - 2 = 0 \quad \begin{cases} \to y = 1 \\ \to y^3 + y^2 + y + 2 = 0 \end{cases}$$

	1	0	0	1	-2
1		1	1	1	2
	1	1	1	2	$\boxed{0}$





$x = y^2 \Rightarrow |y| = \sqrt{x} \quad (x \geq 0)$

$y = \sqrt{x} \quad$ (xque $y \geq 0$)

$F(x,y,z) = x - y^2 = 0$

$$\check{n} = \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|} = \frac{(1, -2y, 0)}{\sqrt{1+4y^2}}$$

$$\iint_S \overline{f}\, \check{n}\, d\sigma = \iint_S (x-y, x-z, g(x,y,z)) \frac{(1, -2y, 0)}{\sqrt{1+4y^2}} \, d\sigma =$$

$$= \iint_R \frac{(x - y - 2xy + 2yz)}{\cancel{\sqrt{1+4y^2}}} \; \frac{\cancel{\sqrt{1+4y^2}}}{|-2y|} \, dx\, dz$$

$$= \int_0^1 dx \int_0^4 dz \; \frac{x - y - 2xy + 2yz}{2y} \, dx\, dz = \quad =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^4 dz \; \frac{x - \sqrt{x} - 2x\sqrt{x} + 2\sqrt{x} \cdot z}{\sqrt{x}} =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^4 \left(\sqrt{x} - 1 - 2x + 2z \right) dz =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\left(\sqrt{x} - 1 - 2x \right) z + \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} z^2 \Big|_0^4 \right] =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(4\sqrt{x} - 4 - 8x + 16 \right) dx = \frac{1}{2} \left[4 \cdot \frac{2}{3} x^{3/2} - 4x - \right.$$

$$\left. - \overset{4}{\cancel{8}} \frac{x^2}{\cancel{2}} + 16x \Big|_0^1 \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{8}{3} - 4 - 4 + 16 \right] = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\overset{16}{\cancel{32}}}{3} = \frac{16}{3}$$