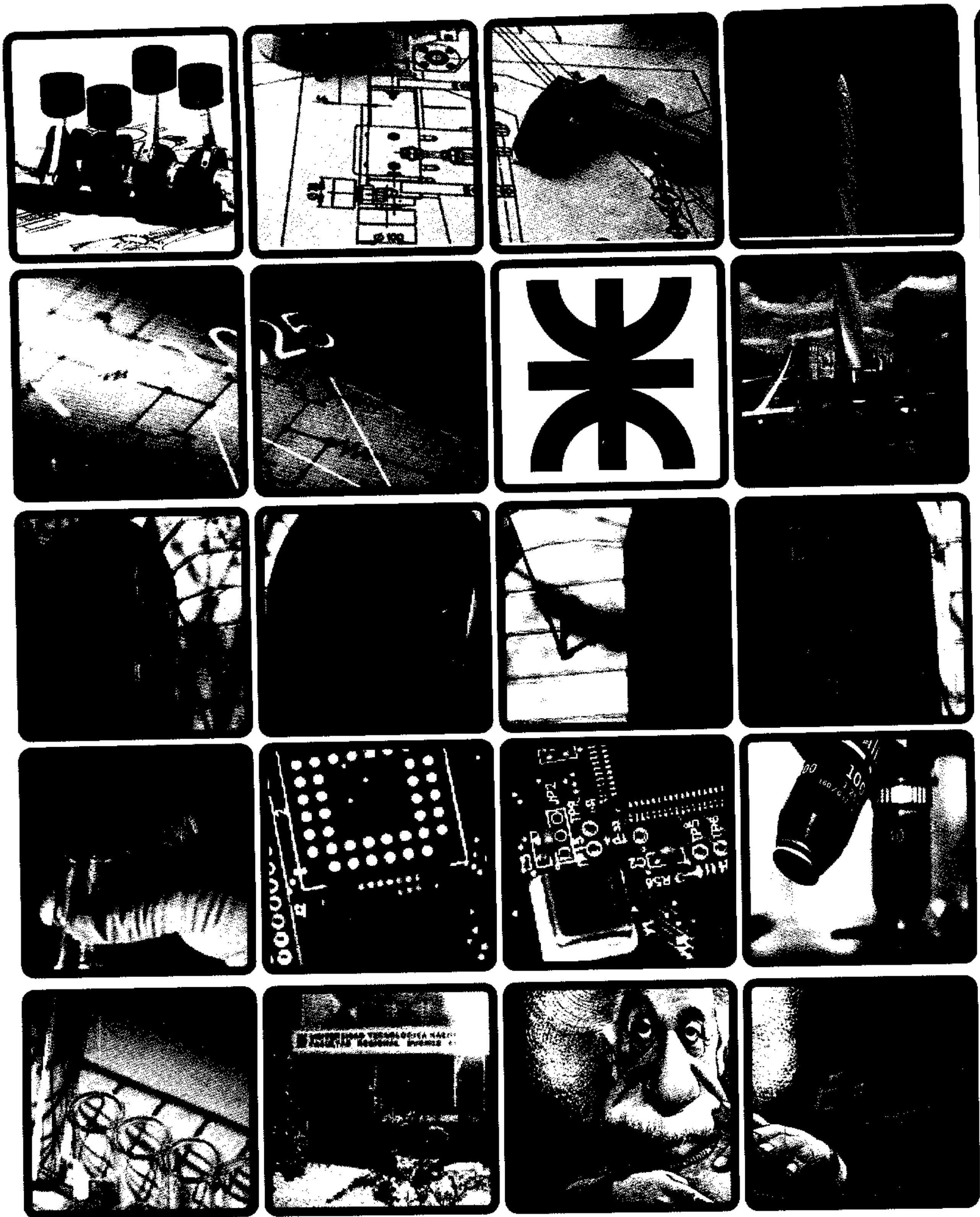


GUÍA DE EJERCICIOS RESUELTOS UNIDADES 5 - 8

ÁLGEBRA Y GEOMETRÍA ANALÍTICA

U.D.B. MATEMÁTICA AR1BP2

CENTRO de ESTUDIANTES de INGENIERIA TECNOLOGICA

UTN.BA
UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL
FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES

Trabajo Práctico N° 3

Transformaciones lineales

1) Determine cuáles de las siguientes funciones son transformaciones lineales

a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 / T(x, y) = (x, -y)$

b) $T: \mathbb{R}^{2x2} \to \mathbb{R} / T(A) =$ rango A

c) $T: \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R} / T(p(x)) = p(0)$

d) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} / T(\vec{v}) = \vec{v} \cdot \vec{a}$, donde $\vec{a}$ es un vector fijo de $\mathbb{R}^3$

e) $T: \mathbb{V} \to \mathbb{V} / T(\vec{v}) = \vec{v} + \vec{a}$, donde $\vec{a}$ $(\vec{a} \neq \vec{0})$ es un vector fijo de $\mathbb{V}$

f) $T: \mathbb{R}^{nxn} \to \mathbb{R}^{nxn} / T(A) = A + A^t$

Una TL cumple con las siguientes propiedades.

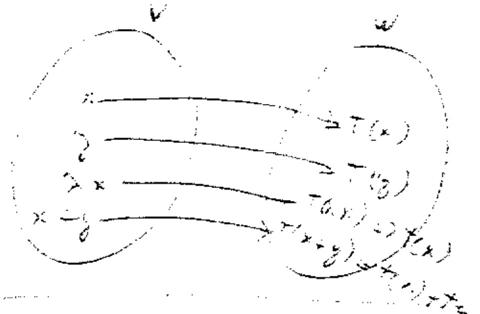
1°) $\forall \vec{x}, \vec{y} \in V \Rightarrow T(\vec{x} + \vec{y}) = T(\vec{x}) + T(\vec{y})$

2°) $\forall \lambda \in K$ en nuestro caso $\mathbb{R} \Rightarrow T(\lambda \vec{x}) = \lambda T(\vec{x})$

Ambas propiedades pueden resumirse en una sola $\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \wedge \vec{x}, \vec{y} \in V \Rightarrow$

$$T(\lambda_1 x + \lambda_2 y) = \lambda_1 T(x) + \lambda_2 T(y)$$

Gráficamente



Entonces debemos verificar si se cumplen las dos propiedades

a)

$T: R^2 \to R^2 / T(x, y) = (x, -y)$

1°) $T(\vec{x}) + T(\vec{y}) = T(\vec{x} + \vec{y})$

$T(x_1, y_1) = (x_1, -y_1)$ $\quad T(x_2, y_2) = (x_2, -y_2)$

$T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2) = (x_1 + x_2, -(y_1 + y_2))$ ①

$T(x + y) = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$

$T(\vec{x}+\vec{y}) = \boxed{(x_1+x_2,\ -y_1-y_2)}$ ②

① = ②

2°)

$T(\alpha\vec{x}) = \alpha\, T(\vec{x})$

$\alpha\vec{x} = (\alpha x, \alpha y) \Rightarrow T(\alpha\vec{x}) = \boxed{(\alpha x, -\alpha y)}$ ①

$T(\vec{x}) = (x, -y) \Rightarrow \alpha T(\vec{x}) = \alpha(x, -y) = \boxed{(\alpha x, -\alpha y)}$ ②

① = ②

T es transformación lineal

---

b) $T: R^{2\times 2} \to \mathbb{R} \,/\, T(A) = \text{rango } A$

1°)

Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $T(A) = 2$

$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $T(B) = 2$

$\Rightarrow \boxed{T(A) + T(B) = 4}$ ①

$(A+B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\boxed{T(A+B) = 1}$ ②

① ≠ ② no es TL

Es suficiente con dar un contraejemplo donde no se verifique alguna de las condiciones

---

c) $T: P_2 \to \mathbb{R} \,/\, T(p(x)) = p(0)$

1°) $T(\vec{x}) + T(\vec{y}) \overset{?}{=} T(\vec{x}+\vec{y})$

$x = a_1x^2 + b_1x + c_1$ $T(\vec{x}) = c_1$

$y = a_2x^2 + b_2x + c_2$ $T(\vec{y}) = c_2$ $\Rightarrow \boxed{T(\vec{x}) + T(\vec{y}) = c_1 + c_2}$ ①

$\vec{x}+\vec{y} = \ldots - c_1 + c_2$

$T(\vec{x}+\vec{y}) = c_1 - c_2$ ②

① = ②

2) $T(\lambda\vec{x}) \overset{?}{=} \lambda T(\vec{x})$

$\lambda(\vec{x}) = \lambda a x^2 + \lambda b x + \lambda c$

$T(\lambda\vec{x}) = \lambda c$ ①

$T(\vec{x}) = c \Rightarrow \lambda T(x) = \boxed{\lambda c}$ ②

① = ② es transformación lineal

---

a) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \,/\, T(\vec{r}) = \vec{r}\cdot\vec{a}$ donde $\vec{a}$ es un vector fijo

1) $T(\vec{x}) + T(\vec{y}) \overset{?}{=} T(\vec{x}+\vec{y})$

$\vec{x} = (x, y, z)$ $\vec{a} = (a, b, c)$

$\vec{y} = (x', y', z')$ $\vec{a} = (a, b, c)$

$T(\vec{x}) = ax + by + cz \Rightarrow \boxed{T(\vec{x}) + T(\vec{y}) = a(x+x') + b(y+y') + c(z+z')}$ ①

$T(\vec{y}) = ax' + by' + cz'$

$(\vec{x}+\vec{y}) = (x+x', y+y', z+z')$

$T(\vec{x}+\vec{y}) = a(x+x') + b(y+y') + c(z+z')$ ②

① = ②

2) $T(\lambda\vec{x}) \overset{?}{=} \lambda T(\vec{x})$

$\lambda\vec{x} = (\lambda x, \lambda y, \lambda z)$

[illegible]

7) $T: V \to V \,/\, T(\vec{r}) = \vec{r} + \vec{a}$ donde $\vec{a}$ $(\vec{a} \neq \vec{0})$ es un vector fijo

$\vec{X} = (2, 3, 1) \qquad \vec{Y} = (-2, -3, 5) \qquad \vec{a} = (a, b, c)$

$T(\vec{X}) = (2+a, 3+b, 1+c)$ $\quad \boxed{T(\vec{x}) + T(\vec{y}) = (2a, 2b, 6+2c)}$ ①

$T(\vec{Y}) = (-2+a, -3+b, 5+c)$

$(\vec{X}+\vec{Y}) = (0, 0, 6) \Rightarrow \boxed{T(\vec{x}+\vec{y}) = (a, b, 6c)}$ ②

① $\neq$ ②

No es TL

8) $T: \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n} \,/\, T(A) = A + A^T$

i) $T(A) + T(B) \overset{?}{=} T(A+B)$

$T(A) = A + A^T$

$T(B) = B + B^T$

$T(A) + T(B) = A + A^T + B + B^T$ $\qquad T(A+B) = A + B + (A+B)^T$ ②

$= (A+B) + (A+B)^T$ ① $\qquad$ ① = ②

por propiedad transpuesta

ii) $T(\lambda A) \overset{?}{=} \lambda T(A) \qquad T(\lambda A) = \lambda(A + A^T) = $ ③ $\qquad$ ③ = ④

Es T Lineal $\qquad \lambda T(A) = \lambda(A + A^T) =$ ④

2) Sea $F: \mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal. Pruebe:

a) $F(0_V) = 0_W$

b) $F(-v) = -F(v)$ para todo $v \in \mathbb{V}$

a) [illegible]

[illegible] transformado del vector nulo del espacio [illegible] es el vector nulo del espacio vectorial de llegada → [illegible] •

Demostración

$0_v = 0 \cdot x$ $\quad x \in V$

$T(0_v) = T(0 \cdot x)$ por ser T.L. $\quad T = F$

$T(0_v) = 0 \cdot T(x)$

$T(0_v) = 0_W \quad w \in W$

$$\boxed{T(0_v) = 0_W}$$

b) El transformado del vector opuesto es el opuesto del vector transformado •

$T(-x) = -T(x)$

$= -1\, T(x)$ por ser T.L.

$$\boxed{T(-x) = -T(x)}$$

3) Si T: V → V es una transformación lineal, determine T(v) y T(w), tales que T(v−2w)=3v-w y T(v-w)= 2v-4w

$T(v)$ y $T(w)$ Aplicamos definición de T.L.

Se sabe que 1) $T(v+2w) = 3v - w$

por ser T.L. $\boxed{T(v) + 2T(w) = 3v - w}$ ① → Abre la transparencia lineal •

2) $T(v-w) = 2v - 4w$

por ser T.L. $\boxed{T(v) - T(w) = 2v - 4w}$ ②

Operamos con ① y ②, en realidad [illegible] planteamos un sistema

$T(v) + 2T(w) = 3v - w$ ①

$T(v) - T(w) = 2v - 4w$ ②

$$\Rightarrow T(v) = 3v - w - 2T(w) \quad (3)$$

$$T(v) = 2v - w + T(w) \quad (3)$$

Igualamos

$$3v - w - 2T(w) = 2v - w + T(w)$$

$$3v - 2v - w - 4w = T(w) - 2T(w)$$

$$v - 3w = 3T(w)$$

$$\boxed{\frac{1}{3} v + w = T(w)}$$

$$\text{Si } T(v) = 3v - w - 2\left(\frac{1}{3}v + w\right)$$

$$T(v) = 3v - w - \frac{2}{3}v - 2w$$

$$\boxed{T(v) = \frac{7}{3}v - 3w}$$

4) Sea $C = \{v_1, v_2, v_3\} \subset \mathbb{R}^3$. Considere una transformación lineal $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$/ $T(v_1) = (1, 1, 1)$, $T(v_2) = (0, -1, 3)$ y $T(v_3) = (2, 5, -7)$.

a) Analice la existencia y unicidad de T para los siguientes casos:
   i) $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, $v_3 = (2, -1, 2)$.
   ii) $v_1 = (1, 1, 1)$, $v_2 = (0, 1, 0)$, $v_3 = (1, 0, 1)$.
   iii) $v_1 = (1, 0, 3)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (1, 0, 0)$.

b) Para aquellos casos en que T existe y es única obtenga la expresión analítica de T.

c) ¿Qué condiciones debe cumplir el conjunto C para que respetando las asignaciones hechas a los vectores v_1, v_2 y v_3 T exista y sea única ?

i) $T(1, 1, 1) = (1, 1, 1)$

$T(0, 1, 0) = (0, -1, 3)$

$T(2, -1, 2) = (2, 5, -7)$

Para resolver este ejercicio usamos el "Teorema de existencia y unicidad de las TL. "Sean los espacios vectoriales V y W de dimensión finita, tal que $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ es una base del espacio vectorial V y $A = \{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_n\}$ es un conjunto de vectores del espacio vectorial W. Entonces existe y es única la TL que $T: V \to W$ / $T(\vec{v}_i) = \vec{w}_i$ $\forall i = 1, 2, \dots, n$.

Conclusión el conjunto de vectores debería ser L.I. para formar una base.

[illegible]

[illegible] son li

1) [illegible] la CL [illegible]

2) Hallar el rango de la matriz que [illegible] determinante si el rango es = al orden de la matriz son li si el rango es menor son ld

3) Plantear el determinante, si $| \ | = 0$ son ld si $| \ | \neq 0$ son li

Hacemos el primero planteando la CL

i) $(0,0,0) = \lambda(1,1,1) + \beta(0,1,0) + \delta(2,-1,2)$ no son base

① $0 = \lambda + 2\delta \Rightarrow \lambda = -2\delta$

② $0 = \lambda + \beta - 2\delta$

③ $0 = \lambda + 2\delta \Rightarrow \lambda = -2\delta$

Reemplazamos en ② $0 = 2\delta + \beta - 2\delta$

$\beta = 0$

$\beta = 0$ pero no podemos asegurar que $\lambda = 0$ y $\delta = 0$ pues hemos establecido una relación entre λ y δ

$\boxed{\text{Concluimos ld existe no es única}}$

luego veremos si existe

ii) Hacemos el siguiente buscando el rango de la matriz

[illegible] rango 2

[illegible] no son base

Concluimos [illegible]

iii [illegible]

[illegible]

$$= \Rightarrow [illegible]$$

El conjunto [illegible]
Concluimos [illegible]

2da parte - Vamos a averiguar si existe la [illegible]
Para encontrar la expresión de la TL se debe:

1°) se plantea la CL de los vectores de V igualando a un vector genérico

iii

$$(x,y,z) = \alpha(1,0,3) + \beta(0,1,1) + \gamma(1,0,0)$$

$$\begin{cases} x = \alpha + \gamma & \Rightarrow x - \alpha = \gamma \Rightarrow x - \dfrac{(z-y)}{3} = \gamma \Rightarrow \dfrac{3x - z + y}{3} = \gamma \\ y = \beta & \\ z = 3\alpha + \beta & \Rightarrow z = 3\alpha + y \Rightarrow \dfrac{z-y}{3} = \alpha \end{cases}$$

2°) Reemplazo α, β y γ y T se aplica a derecha

$$T(x,y,z) = \alpha T(1,0,3) + \beta T(0,1,1) + \gamma T(1,0,0)$$

$$= \frac{z-y}{3}(1,1,1) + y(0,-1,3) + \frac{3x-z+y}{3}(2,5,-7)$$

$$= \left(\frac{z-y}{3} + \frac{2}{3}(3x-z+y),\ \frac{z-y}{3} - y + \frac{5}{3}(3x-z+y),\ \frac{z-y}{3} + 3y - \frac{7}{3}(3x-z+y)\right)$$

$$T(x,y,z) = \left(2x - \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z,\ 5x + \frac{1}{3}y - \frac{4}{3}z,\ -7x + \frac{1}{3}y + \frac{8}{3}z\right)$$

iv

[illegible] determinar [illegible] la TL [illegible]
[illegible]
[illegible]
[illegible]

Comprobamos que el conjunto de [illegible] vectores
transformados [illegible]
Calculamos el determinante: si $| \; | = 0 \to$ LD
si $| \; | \neq 0 \to$ LI

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & -7 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{es LD}$$

- Buscamos los escalares de la CL de los transformados
$(1,1,1) = \alpha(0,-1,3) + \beta(2,5,-7) \Rightarrow$

$$\begin{cases} 1 = 2\beta \\ 1 = -\alpha + 5\beta \\ 1 = 3\alpha - 7\beta \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \beta = \frac{1}{2} \\ \alpha = \frac{3}{2} \end{array}} \quad (1)$$

- Buscamos los escalares de la CL de
(i) e (ii)

(i) $(1,1,1) = \alpha(0,1,0) + \beta(2,-1,2) \Rightarrow$

$$\begin{cases} 1 = 2\beta \\ 1 = \alpha - \beta \\ 1 = 2\beta \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \beta = \frac{1}{2} \\ \alpha = \frac{3}{2} \end{array}} \quad (2)$$

(ii) $(1,1,1) = \alpha(0,1,0) + \beta(1,0,1) \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} \beta = 1 \\ \alpha = 1 \end{array}} \quad (3)$

De (1) y (2) iguales escalares, la TL existe
y sería [illegible] la única
Como (ii) tiene otros escalares la TL
no existe [illegible] (1) y (2)

5) Halle una transformacion lineal $T:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ que verifique $T(1,2)=(3,-1)$ y $T(0,-1)=(1,5)$

¿Es única? Justifique

$T(1,2) = (3,-1)$

$T(0,-1) = (1,5)$

Como $\{(1,2),(0,-1)\}$ es base [illegible] de $\mathbb{R}^2$ se puede [illegible]

Planteamos la CL que lleva a un vector genérico.

$$(x,y) = \alpha(1,2) + \beta(0,-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\alpha - \beta \end{cases} \quad y - 2x = -\beta \quad \beta = 2x - y$$

$$T(x,y) = \alpha T(1,2) + \beta T(0,-1)$$

$$= x(3,-1) + (2x-y)\cdot(1,5)$$

$$= (3x + 2x - y \;,\; -x + 5(2x-y))$$

$$= (5x - y \;,\; -x + 10x - 5y)$$

$$\boxed{T(x,y) = (5x - y \;,\; 9x - 5y)}$$

Es única

6) Sea $T:\mathbb{P}_2\to\mathbb{P}_3$ / $T(x^2)=x^3$, $T(x+1)=0$, $T(x-1)=x$, obtenga $T(2-x+4x^2)$

Para encontrar el $T(2-x+4x^2)$ [illegible] [illegible] de los [illegible] que [illegible] de T

[illegible]

[illegible]

Los bases del dominio

$T(0,0,1) = (0,0,0,1)$

$T(1,1,0) = (0,0,0,0)$

$T(-1,+1,0) = (0,1,0,0)$

Verifiquemos que $\{(0,0,1),(1,1,0),(-1,+1,0)\}$ sea base

Buscamos el determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & +1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & +1 \end{vmatrix} = 1(+2) \neq 0$$

son LI

Planteamos la CL igualando a un vector genérico teniendo en cuenta que $P(x) = a + bx + cx^2$

$$(a, b, c) = \alpha(0,0,1) + \beta(1,1,0) + \delta(-1,+1,0)$$

$$\begin{cases} a = \beta - \delta & (1) \\ b = \beta + \delta & (2) \\ c = \alpha \end{cases}$$

$(1)+(2) = a + b = 2\beta \Rightarrow \beta = \frac{a+b}{2}$

$(1)-(2) = a - b = -2\delta \Rightarrow \delta = \frac{a-b}{-2}$

$c = \alpha$

$$T(a, b, c) = c(0,0,0,1) + \frac{a+b}{2}(0,0,0,0) + \frac{b-a}{2}(0,1,0,0)$$

$$= \left(0, \frac{b-a}{2}, 0, c\right)$$

Entonces

[illegible]

$T(2 - x + \ldots x^2) = \ldots$ [illegible]

[illegible] polinomios

7) Determine una aplicación lineal $T: \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^{2x2}$ tal que

$T(1+x)=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $T(2x-x^2)=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $T(-1-x^2)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

• Siempre que se enumeran casos, ver que sean base

Buscamos la expresión de la T.L. Primero verificamos que $\{(1+x), (2x+x^2), (-1-x^2)\}$ ~~sean~~ base

$c \quad x \quad x^2$ → otro orden pero da igual pues son intercalables

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} =$$

$1.(-2) - 1 \neq 0$ es LI

Nuevamente trabajamos asociando los polinomios a vectores formados con los coeficientes

$(1+x) \equiv (1,1,0)$
$(2x+x^2) \equiv (0,2,1)$
$(-1-x^2) \equiv (-1,0,-1)$

Planteamos la combinación lineal teniendo en cuenta que $P(x) = a + bx + cx^2$

$(a,b,c) = \alpha(1,1,0) + \beta(0,2,1) + \delta(-1,0,-1)$

$$\begin{cases} a = \alpha - \delta & (1) \\ b = \alpha + 2\beta & (2) \\ c = \beta - \delta & (3) \end{cases}$$

[illegible]

$$\boxed{\beta = \frac{c-b-a}{3}} \quad (5)$$

Reemplazando [illegible] en [illegible]

$$b - 2\beta = \alpha$$

$$b - 2\left(\frac{c+b-a}{3}\right) = \alpha$$

$$b - \frac{2}{3}c - \frac{2}{3}b + \frac{2}{3}a = \alpha$$

$$\frac{3}{3}b - \frac{2}{3}c - \frac{2}{3}b + \frac{2}{3}a = \alpha$$

$$\boxed{\frac{1}{3}b - \frac{2}{3}c + \frac{2}{3}a = \alpha}$$

de (3) $\delta = \beta - c$

Reemplazando β por (5)

$$\delta = \frac{c+b-a}{3} - c$$

$$\delta = \frac{c+b-a-3c}{3} \Rightarrow \boxed{\delta = \frac{-2c+b-a}{3}}$$

Reemplazando

$$T(a,b,c) = \alpha\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{b-2c+2a}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{c+b-a}{3}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{-2c+b-a}{3}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$T(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} \frac{c+b-a}{3} & \frac{b-2c+2a}{3} \\ \frac{-2c+b-a}{3} & \frac{c+b-a}{3} \end{pmatrix}$$

---

8) Halle la expresión analítica de cada una de las siguientes transformaciones ($\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$):

a) simetría respecto de la recta $y = 3x$

b) rotación de un ángulo de $-\dfrac{\pi}{3}$

c) proyección sobre la recta $y = -x$

---

a. [illegible] de la recta $y = 3x$

[illegible]

lo solicitado.

Fórmula para obtener la TL que determine:

- proyección sobre la recta $y = mx$

$$\boxed{T(x,y) = \left(\frac{x + y\,m}{1 + m^2} \, ; \, \frac{x\,m + y\,m^2}{1 + m^2} \right)}$$

Siendo m la pendiente

Fórmula para obtener la TL que determine

- simetría con respecto a la recta $y = mx$ pág. 600 – Algebra lineal

$$T(x,y) = \left(\frac{1 - m^2}{1 + m^2} x + \frac{2\,m}{1 + m^2} y \, ; \, \frac{2m}{1 + m^2} x + \frac{1 - m^2}{1 + m^2} y \right)$$

~~Lezcano – Mestrelli~~ Varalenga

$y = 3x \Rightarrow m = 3$

Lo hacemos primero con la fórmula y [illegible] armando los vectores, buscamos la [illegible] [illegible], [illegible]

$$T(x,y) = \left(\frac{1 - 9}{1 + 9} x - \frac{6}{1 + 9} y \, ; \, \frac{6}{1 + 9} x + \frac{[illegible]}{[illegible]} y \right)$$

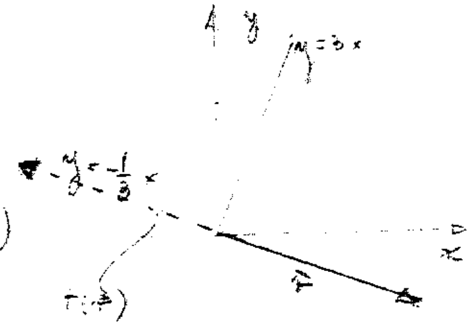
$$= \frac{[illegible]}{5} x - \frac{[illegible]}{5} y \quad \frac{[illegible]}{5} x + \frac{[illegible]}{5} [illegible]$$

[illegible]

Debemos buscar otra recta que sea LI con (1,3) y encontrar su transformado teniendo en cuenta que debe ser simétrico respecto de la recta $y = 3x$

Buscamos la ecuación de la recta perpendicular a $y = 3x$ que pasa por $(0,0)$

$y = -\frac{1}{3}x$



Si las rectas son ⊥ entonces el T(v) es el opuesto)

$\vec{v} = (3,-1)$ y $T(\vec{v}) = (-3,1)$

ya podemos armar la TL

$T(1,3) = (1,3)$
$T(3,-1) = (-3,1)$

$(x,y) = \alpha(1,3) + \beta(3,-1)$

$\begin{cases} x = \alpha + 3\beta & \text{I} \\ y = 3\alpha - \beta & \text{II} \end{cases}$ Resolvemos el sistema despejando α y β en función de x e y

③ · ⓞ $\begin{cases} 3x = 3\alpha - 9\beta & ③ \\ y = 3\alpha - \beta & ④ \end{cases}$ ③ − ④

$3x - y = 10\beta$

$$\frac{3x - y}{10} = \beta$$

Buscamos α

② × 3 $\begin{cases} x = \alpha + 3\beta & ① \\ 3y = 9\alpha - 3\beta & ③② \end{cases}$ ① + ③

$$x + 3y = 10\alpha$$

$$\boxed{\frac{x+3y}{10} = \alpha}$$

Reemplazamos

$$T(x,y) = \frac{x+3y}{10}(1,3) + \frac{3x-y}{10}(-3,1)$$

$$= \left(\frac{x+3y}{10} + (-3)\frac{(3x-y)}{10} \ , \ \frac{3(x+3y)}{10} + \frac{3x-y}{10} \right)$$

$$= \left(\frac{x+3y-9x+3y}{10} \ , \ \frac{3x+9y+3x-y}{10} \right)$$

$$= \left(\frac{-8x+6y}{10} \ , \ \frac{6x+8y}{10} \right)$$

$$T(x,y) = \left(\frac{-4x+3y}{5} \ , \ \frac{3x+4y}{5} \right)$$

b) rotación de un ángulo de $-\frac{\pi}{3}$

Fórmula que determina la rotación de un ángulo dado

$$T(x,y) = (\cos\theta\, x - \operatorname{sen}\theta\, y \ , \ \operatorname{sen}\theta\, x + \cos\theta\, y)$$

$$= (\cos -\tfrac{\pi}{3}\, x - \operatorname{sen} -\tfrac{\pi}{3}\, y \ , \ \operatorname{sen} -\tfrac{\pi}{3}\, x + \cos -\tfrac{\pi}{3}\, y)$$

$$T(x,y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \ , \ -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \right)$$

[illegible] $y = -x$

[illegible]

[illegible]

$$[\text{illegible}] = \frac{x - [\text{illegible}]}{1 + m^2} \qquad \frac{[\text{illegible}]}{[\text{illegible}]} \qquad m = -$$

$$= \frac{x-y}{2} \qquad \frac{-x+y}{2}$$

Lo verificamos como [illegible]

[illegible] $\qquad T(-1,1) = (-1,1)$

$y = -x$ $\quad$ Buscamos otro vector $\vec{v}_2$ que sea $\perp$ con $\vec{v}_1$, luego determinamos su proyección sobre la recta $y = -x$

Como las proyecciones son ortogonales, es decir perpendiculares, la proyección de $(1,1)$ será $(0,0)$

Entonces $\quad T(-1,1) = (-1,1) \qquad \vec{v}_1$ y $\vec{v}_2$ son [illegible]

$\qquad\qquad T(1,1) = (0,0)$

$$(x,y) = \alpha(-1,1) + \beta(1,1) \begin{cases} x = -\alpha + \beta & ① \\ y = \alpha + \beta & ② \end{cases}$$

$$① + ② \quad = \frac{x+y}{2} = \beta$$

$$① - ② = x - y = -2\alpha$$

$$= \frac{y-x}{2} = \alpha$$

$$T(x,y) = \frac{y-x}{2}(-1,1) + \frac{x+y}{2}(0,0)$$

[illegible]

[illegible]

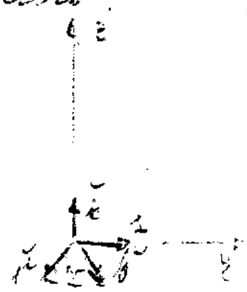
9) Halle la expresión analítica de cada una de las siguientes transformaciones ($\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$)

a) reflexión respecto del plano x=y

b) reflexión respecto del plano y+z=0

a) reflexión respecto del plano $x=y$

reflexión = simetría. Como trabajamos en $\mathbb{R}^3$ debemos buscar 3 vectores LI y sus transformados (es decir sus simétricos respecto al plano $x=y$). Hacemos un gráfico aproximado de "[illegible]"!



El plano $x=y$ $\quad x-y=0$ es un plano bisector que contiene al eje z

el versor $\breve{k}$ está incluido en el plano y por ello su transformado es el mismo versor

$$T(\overset{\breve{k}}{0,0,1}) = (\overset{\breve{k}}{0,0,1})$$

$$T(\overset{\breve{i}}{1,0,0}) = (\overset{\breve{j}}{0,1,0})$$

$$T(1,1,0) = (1,1,0)$$

Verificamos que $\{(0,0,1), (1,0,0), (1,1,0)\}$ son LI

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \quad \text{son LI}$$

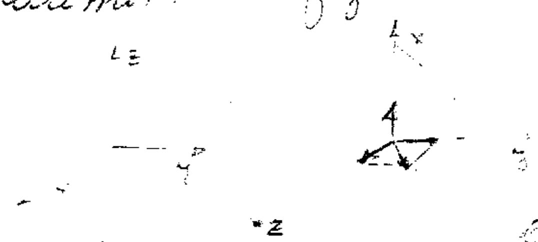
$$T(x,y,z) = (y,\ x-y+z,\ z)$$

$$T(x,y,z) = (y,\ x,\ z)$$

b) reflexión respecto del plano $y+z=0$

simetría respecto del plano $y=-z$

Hacemos una figura de análisis.



El gráfico tiene los ejes rotados pero es al sólo efecto de que satisfaga en forma gráfica y sea ella las condiciones del ejercicio.

Nuevamente buscamos los vectores con los que armaremos la T

$$T(0,0,-1) = (0,1,0)$$

$$T(\ldots) = (1,0,\ldots)$$

$$T(0,1,\ldots) = (0,1,-1)$$

NÚCLEO

$x = 0$
$y = 0$
$z = -y - 0 \Rightarrow 0 = -z - y$

Reemplazando

$$T(x,y,z) = (-z-y)(0,1,0) + x(1,0,0) + y(0,1,-1)$$

$$= (x, -z-y+y, -y)$$

$$\boxed{= (x, -z, -y)}$$

Las dos demostraciones se encuentran al finalizar el T.Práctico Ejercicio 10 - Página 30

11) Sea la transformación lineal $T: \mathbb{R}^{nxn} \rightarrow \mathbb{R}^{nxn} / T(A) = A - A^t$. demuestre que:

a) el Nu(T) está formado por matrices simétricas

b) la Im(T) está formado por matrices antisimétricas

a) Nu(T) está formado por matrices simétricas

$$T(A) = A - A^t$$

Para hallar el Nu(T) igualamos a la matriz nula $\Rightarrow A - A^t = N$

$$A = A^t$$

Definición matriz simétrica $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ es simétrica $\Leftrightarrow A = A^t$

b) matriz antisimétrica: A es antisimétrica

$$\Rightarrow A = -A^t$$

[illegible]

Núcleo de una Transformación lineal: Es el subconjunto del espacio de salida formado por todos los vectores, tales que su imagen mediante T es el vector nulo del espacio vectorial de llegada.

Dimensión del Núcleo: es el número de vectores que forman su base. Para hallar el núcleo de una TL cualquiera se igualan las condiciones de la TL al vector nulo del espacio de llegada. Ejemplo: Hallar el núcleo de la siguiente TL

$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 / T(x,y,z) = (y, 2x+2y+3z, 2x+4y+3z)$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 2x+2y+3z = 0 \\ 2x+4y+3z = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Para encontrar el Nu(T) trabajamos con las ecuaciones que quedan

$2x + 3z = 0$ y $y = 0$

$x = -\frac{3}{2}z$

Entonces Base Nu(T) $= \left\{\left(-\frac{3}{2}, 0, 1\right)\right\}$ dimensión Nu(T) $= 1$

$\left(-\frac{3}{2}z, 0, z\right)$

Si no se hubiera encontrado ningún Nu, decimos que su dimensión es igual a 0 y está formado por el vector nulo de salida [illegible] la TL [illegible]

[illegible]

[illegible] se trabaja con la matriz [illegible]

[illegible] se escriben como [illegible] de las condiciones de la transformación. Es por eso que la [illegible]

Trabajamos con el ejemplo anterior

$$\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & a \\ 2 & 2 & 3 & b \\ \cdot & 4 & 3 & c \\ \hline 0 & 1 & 0 & a \\ 2 & 2 & 3 & b \\ 0 & 4 & 0 & 2c-2b \\ \hline 0 & 1 & 0 & a \\ 2 & 0 & 3 & b-2a \\ 0 & 0 & 0 & 2c-4a-2b \end{array}$$

→ Para que el sistema tenga solución $2c-4a-2b=0$

$\Rightarrow$ Genérico $(a, b, 2a+b)$

$Im(T) = gen\{(1,0,2), (0,1,1)\}$

Si no hubiera ninguna fila anulada, no hubiéramos podido encontrar las condiciones para obtener la imagen, entonces la misma coincide con el espacio de llegada y la transformación sería sobreyectiva. Como también [illegible] sería [illegible] inyectiva [illegible]. Es importante aclarar que en el ejemplo [illegible] el término de las dimensiones

Dimensión (= dimensión del Nu(T) + dimensión de Im T)

12)(Relacionado con ej.n°6 de Sistemas) Dada la transformación lineal:

$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 / T(x, y, z) = (x - 2y - 2z, y - 2x - 4z, -x + 3y + 2z)$

a) Obtenga una base del Nu (T) e indique su dimensión.

b) Obtenga una base de Im (T) e indique su dimensión.

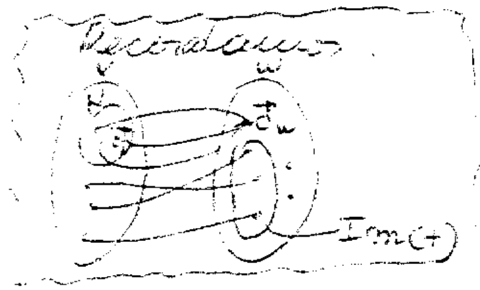
Para (x,y,z) igualamos la Transformación a (0,0,0)

$(0,0,0) = (x+2y-2z,\ -2x+y+4z,\ -x+3y+2z)$

$0 = x+2y-2z$ Sistema homogéneo

$0 = -2x+y+4z$ Sistema compatible

$0 = -x+3y+2z$ (0,0,0) solución trivial



$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 4 & 0 \\ -1 & 3 & +2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x+2y-2z=0 & (1) \\ 5y=0 & \Rightarrow y=0 \end{cases}$$

Reemplazamos $y=0$ en (1) $x-2z=0$

$x=2z$

vector genérico $(2z, 0, z)$

$\boxed{Nu(T) = gen\{(2,0,1)\},\ \dim Nu(T) = 1}$

Para determinar la Imagen de la T igualamos a un genérico

$$\left(\begin{array}{ccc|c} +1 & 2 & -2 & a \\ -2 & 1 & 4 & b \\ -1 & 3 & +2 & c \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & a \\ 0 & 5 & 0 & b+2a \\ 0 & 5 & 0 & c+a \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -2 & a \\ 0 & 5 & 0 & b+2a \\ 0 & 0 & 0 & c+a-b-2a \end{array}\right) \quad \boxed{c-a-b}$$

$c-a-b=0 \Rightarrow$

$c=b+a$

dim Im(T) = 2

Teorema de la dimensión

Sean V y W dos espacios vectoriales sobre $\mathbb{R}$ y la dimensión de V finita = n
Sea T una transformación lineal de V en W
Entonces se cumple: "la dimensión del núcleo de la T, más la dimensión de la imagen es igual a la dimensión del espacio vectorial de salida"

$$\dim V = \dim Nu(T) + \dim Im(T)$$

13) Si $T: \mathbb{R}^{2x2} \to \mathbb{R} / T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a+b-c-d$ encuentre una base del Nu(T) y de la Im(T)

$$T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a+b-(c+d)$$

Para hallar el Nu(T), $a+b-(c+d)=0$

$\Rightarrow a+b-c = d$ como el $Nu(T) \subset V$

entonces genera $\begin{pmatrix} a & b \\ c & a+b-c \end{pmatrix}$

Base $Nu(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_a, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}_b, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}_c \right\}$ con lo cual

el $Nu(T) = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \right\}$ $\dim Nu(T) = 3$

$$\dim V = \dim Nu(T) + \dim Im(T)$$
$$4 = 3 + 1$$

Base $Im(T) = \{1\}$ (es un número $\mathbb{R}$)

$\dim Im(T) = 1$

14) Encuentre una transformación lineal $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $Nu(T) = S$ y la $Im(T) = W$, siendo

$S = \begin{cases} x + y - z = 0 \\ 2x + z = 0 \end{cases}$ y $W = \text{gen}\{(2,-1,0),(0,1,-2)\}$

$r: x + y - z = 0$

$2x + z = 0$

Sea una recta definida como intersección de planos. Buscamos el dir. de la recta

Tiene que ... que es el núcleo, como el núcleo es un subconjunto de V irá en la primera columna

Recordamos $\pi_1 : x + y - z = 0 \Rightarrow \vec{u}_{\pi_1} = (1, 1, -1)$

$\pi_2 : 2x + z = 0 \Rightarrow \vec{u}_{\pi_2} = (2, 0, 1)$

$$\vec{dr} = \vec{u}_{\pi_1} \times \vec{u}_{\pi_2} \quad \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\vec{i} - 3\vec{j} - 2\vec{k}$$

$T(1,-3,-2) = (0,0,0)$ para completar * debemos buscar dos vectores LI con $(1,-3,-2)$

$T(1,\overset{*}{0},0) = (2,-1,0)$

$T(0,\overset{*}{1},0) = (0,1,-2)$

Es más sencillo trabajar con la canónica; nos aseguramos que $\{(1,-3,-2)\ (1,0,0)\ (0,1,0)\}$ sea LI $| \ | \neq 0$

Buscamos la TL

$$(x, y, z) = \alpha(1,-3,-2) + \beta(1,0,0) + \delta(0,1,0)$$

$x = \alpha + \beta \Rightarrow \boxed{x + \frac{z}{2} = \beta}$

$y = -3\alpha + \delta \Rightarrow y = \frac{3}{2}z + \delta \Rightarrow \boxed{\delta = y - \frac{3}{2}z}$

$z = -2\alpha \Rightarrow \boxed{\alpha = -\frac{z}{2}}$

$$T(x,y,z) = -\frac{z}{2}(0,0,0) + (x + \frac{z}{2})(2,-1,0) + (y - \frac{3}{2}z)(0,1,-2)$$

$$= (2x + z,\ -x - \frac{z}{2} + y - \frac{3}{2}z,\ -2y + 3z)$$

$$= (2x + z,\ -x + y - 2z,\ -2y + 3z)$$

[illegible]

15) Encuentre una transformación lineal $T:\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ $Nu(T) = S$ siendo $S = \begin{cases} x + y = 0 \\ z - w = 0 \end{cases}$

$Nu(T) \subset S = \mathbb{R}^4 \quad \begin{cases} x+y=0 \\ z-w=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=-y \\ z=w \end{matrix}$

genérico $(-y, y, w, w)$ — un vector por cada letra

Base $Nu(T) = \{(-1,+1,0,0),(0,0,1,1)\}$

$T(-1,+1,0,0) = (0,0,0)$ — agrego 2 vectores LI con los del $Nu(T)$

$T(0,0,1,1) = (0,0,0)$

$T(0,1,0,0)^{*} = (0,1,0)$

$T(0,0,1,0)^{*} = (0,0,1)$

Uso el teorema de la unicidad

$(x, y, z, w) = \alpha(-1,+1,0,0) + \beta(0,0,1,1) + \delta(0,1,0,0) + \theta(0,0,1,0)$

$\begin{cases} x = -\alpha \\ y = +\alpha + \delta \Rightarrow x + y = \delta \\ z = \beta + \theta \Rightarrow z - w = \theta \\ w = \beta \end{cases}$

$T(x,y,z,w) = x(0,0,0) + w(0,0,0) + (x+y)(0,1,0) + (z-w)(0,0,1)$

$= (0, x+y, z-w)$ [illegible]

[illegible]

16) $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es una transformacion lineal cuyo $Nu(T)= \{(x, y, z) / x=2y=-z\}$

Demuestre que la imagen de T es un plano que pasa por el origen.

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$T(2,1,2) = (0,0,0)$ * Completamos con 2 vectores tal que el conjunto

$T(1,0,0) = (1,0,0)$ $\{(2,1,2);(1,0,0),(0,0,1)\}$ sea base

$T(0,0,1) = (0,0,1)$

Buscamos la expresión de la T

$(x,y,z) = \alpha(2,1,2) + \beta(1,0,0) + \delta(0,0,1)$

$$\begin{cases} x = 2\alpha + \beta & \Rightarrow \beta = x-2y \\ y = \alpha & \\ z = 2\alpha + \delta & \Rightarrow \delta = z-2y \end{cases}$$

$T(x,y,z) = y(0,0,0) + (x-2y)(1,0,0) + (z-2y)(0,0,1)$

$= (x-2y \;,\; 0 \;,\; z-2y)$

$M_E(T) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ para obtener la $Im(T)$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & -2 & 1 & c \end{array}\right) \to b=0$$

genéricos de la $Im(T)$

$(a,0,c)$

Base $Im(T) = \{(1,0,0),(0,0,1)\}$

$Im(T) = gen\{(1,0,0),(0,0,1)\}$

$Im(T) = \{(x,y,z) / y=0\}$

Nota

$\dim V = \dim Nu(T) + \dim Im(T)$

$3 = 1 + 2$

Si la dim $Im(T)$ es 2, y si una base tiene dos vectores genera **un plano**. Como la $Im(T)$ es un subespacio de V, el mismo pasa por el origen de coordenadas. Podemos deducirlo directamente

CLASIFICACIONES

[illegible]
[illegible] $\bar{5}$

19) (Relacionado con ej.n°8 de Sistemas) Sea la transformación lineal $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ /

$T(x, y, z) = (-2x - 2y - 2z, (k-1)x - (1-k)y + (k^2-1)z, -x - y - z)$

a) Halle los valores de k para los cuales T es <u>no</u> invectiva.
b) Halle los valores de k para los cuales la dimensión de Nu(T) = 2
c) Halle los valores de k para los cuales la dimensión de Im(T) = 2

a) T es no inyectiva

Si no es inyectiva entonces dim Nu(T) ≠ 0

Recordamos: para obtener el Nu(T) igualamos al nulo la T.L.

$T(x,y,z) = (-2x+2y-2z, (k-1)x+(1-k)y+(k^2-1)z, -x+y-z)$

$(0,0,0) = (-2x+2y-2z, (k-1)x+(1-k)y+(k^2-1)z, -x+y-z)$

$\begin{cases} 0 = -2x+2y-2z \\ 0 = (k-1)x+(1-k)y+(k^2-1)z \\ 0 = -x+y-z \end{cases}$ sistema homogéneo; debemos obtener k para que sea C I

$$\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & -2 & 0 \\ (k-1) & (1-k) & (k^2-1) & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ \hline -2 & 2 & -2 & 0 \\ (k-1) & (1+k) & (k^2-1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Analizamos: el sistema es C I para todo k, debido que los vectores $(-2,2,-2)$ y $(-1,1,-1)$ tienen sus componentes proporcionales

b) Valores de k para que la dim Nu(T) = 2

Por tener una fila de (0,0,0) ya la dimensión es 1, entonces si queremos dimensión 2

$(k-1, 1-k, k^2-1) = \vec{0}$ o bien $(k-1, 1-k, k^2-1) \equiv (-2, 2, -2)$

$\begin{cases} k-1 = 0 \Rightarrow k = 1 \\ 1-k = 0 \Rightarrow k = 1 \\ k^2-1 = 0 \Rightarrow |k| = 1 \end{cases}$ (1)

$\frac{k-1}{-2} = \frac{1-k}{2} = \frac{k^2-1}{-2}$ (2)

Para armar el sistema [illegible] formas 1) que [illegible] $(0\ 0\ 0)$ o bien que se obtiene son rectas cuyas componentes son proporcionales al $(-2, 2, -2)$

c) valores de k para que la dim de $Im(T) = 2$ entonces la dim $Nu(T) = 1$ para ello vimos que sólo debo tener una fila nula entonces así tendremos $\begin{cases} \dim Nu(T) = 1 \\ \dim Im(T) = 2 \end{cases}$

entonces $k \neq 0;\ k \neq 1$

20) Clasifique la transformación lineal definida por $T: \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^{2x2} / T(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a-c \end{pmatrix}$.

Clasificar $T: P_2 \to R^{2x2} / T(a+bx+cx^2) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a+c \end{pmatrix}$

Recordamos $\underbrace{\dim V}_{3} = \underbrace{\dim Nu(T)}_{0} + \underbrace{\dim Im(T)}_{3}$

$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a+c \end{pmatrix}$ Buscamos la Imagen directa $\longrightarrow Nu(T) = \{0, 0, 0\}$

$\begin{cases} 0 = a \\ 0 = b \\ 0 = b \\ 0 = a+c \end{cases}$ $\quad c = 0$ $\quad \dim Nu(T) = 0 \Rightarrow$ inyectiva

10) Sea $T: V \rightarrow W$ una transformación lineal, demuestre que:

a) el Nu(T) es un subespacio vectorial de V

b) la Im(T) es un subespacio vectorial de W

a) Demostramos las condiciones de subespacio vectorial (condiciones necesarias y suficientes)

1) $Nu(T) \neq \emptyset$

El vector $\vec{0}_V \in V$ está en el núcleo de T por definición de Núcleo y propiedad de la TL

$$\vec{0}_V \in V : T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W \Rightarrow \vec{0}_V \in Nu(T)$$

2) si $x \in V$ y $y \in V \Rightarrow x + y \in V$

(la suma en el Nu(T) es ley de composición interna)

si $\vec{u}$ y $\vec{r}$ son vectores del núcleo de T entonces $(\vec{u}+\vec{r}) \in Nu(T)$

$$\forall \vec{u} \in Nu(T), \forall \vec{r} \in Nu(T) \Rightarrow T(\vec{u}) = \vec{0}_W \wedge T(\vec{r}) = \vec{0}_W$$

por definición de Núcleo

$$\Rightarrow \underbrace{T(\vec{u}) + T(\vec{r}) = T(\vec{u}+\vec{r})}_{\text{por ser TL}} = \vec{0}_W \Rightarrow (\vec{u}+\vec{r}) \in Nu(T)$$

por definición de núcleo

Por lo tanto $(\vec{u}+\vec{r}) \in Nu(T)$

3) El producto de un escalar por un vector en el Nu(T) es ley de composición interna

Si $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\vec{u} \in Nu(T) \Rightarrow \lambda \vec{u} \in Nu(T)$

Entonces

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \vec{u} \in Nu(T) \Rightarrow T(\vec{u}) = \vec{0}_W \wedge \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow$$

por def Nu(T)

$$\Rightarrow T(\alpha \vec{u}) = \alpha T(\vec{u}) = \alpha \vec{0}_W = \vec{0}_W$$ por def de núcleo $\Rightarrow \alpha \vec{u} \in Nu(T)$

por ser TL

[illegible]

$Im(T) \neq \emptyset$ [illegible]

$\vec{0}_V \in$ [illegible] $Im(T)$

$\vec{0}_V \in V \Rightarrow$ [illegible] $T(\vec{0}_V) = \vec{0}_W \Rightarrow \vec{0}_W \in Im(T)$

por propiedades de la TL — por definición de imagen

2) Ver si la suma en la $Im(T)$ es ley de composición interna.

$\forall \vec{w}_1 \in Im(T), \forall \vec{w}_2 \in Im(T) \underset{\text{por def. de imagen}}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow \exists \vec{u} \in V \wedge \exists \vec{v} \in V / T(\vec{u}) = \vec{w}_1 \wedge T(\vec{v}) = \vec{w}_2 \underset{\text{por def. de TL}}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow \vec{w}_1 + \vec{w}_2 = T(\vec{u}) + T(\vec{v}) = T(\vec{u} + \vec{v}) \Rightarrow$ por def. de Imag.

$(\vec{w}_1 + \vec{w}_2) \in Im(T) \subset W \wedge (\vec{u} + \vec{v}) \in V$

Por lo tanto $(\vec{w}_1 + \vec{w}_2) \in Im(T)$

3) El producto de un escalar por un vector de T es ley de composición externa

Entonces

$\forall \vec{w} \in Im(T), \forall \lambda \in \mathbb{R} \underset{\text{por definición de Im}}{\Rightarrow} \exists \vec{v} \in V / T(\vec{v}) = \vec{w} \underset{\text{por ser TL}}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow \lambda \vec{w} = \lambda T(\vec{v}) = T(\lambda \vec{v}) \underset{\text{por def. de } Im(T)}{\Rightarrow}$

$\Rightarrow (\lambda \vec{w}) \in Im(T) \subset W \wedge (\lambda \vec{v}) \in V$

[illegible] $Im(T)$ [illegible] TL

BASES

21) Para cada una de las transformaciones lineales halle la matriz asociada respecto de las bases canonicas.

a) $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 / T(x, y) = (x - 2y, -x + y)$

b) $T: P_2 \to \mathbb{R}^3 / T(a + bx + cx^2) = (a - c, 2b, a - c)$

c) $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 / T(x, y, z) = (3x + 4y + z, 2x - 5y + 3z, x - 2y + z)$

Explicación en clase

36

Apoc de Teoría: la manera correcta esta en el [illegible] de la el TP de transformaciones)

Sabemos que podemos representar cualquier vector mediante n-uplas como (2,3) o (2,4,-5,1) y las transformaciones lineales mediante matrices que son las llamadas matrices asociadas a la TL, referidas a una base. Nos preguntamos ¿cómo cambia la representación si elegimos otra base? Debe quedarnos claro que no cambia el vector (cuando cambiamos de base) podríamos pensarlo fijo en el plano y lo que cambia es el sistema de referencia. Entonces debe quedar claro que la matriz cambio de base permite escribir el mismo vector en otro sistema de referencia. La matriz asociada a la T lineal de cambio de [illegible], una proyección cualquier movimiento del vector en el plano.

Importante la matriz cambio de base es sólo con transformaciones endomorfismos (de V en V)

Matriz cambio de base

Sean $\{e_1, e_2, e_3 \ldots\}$ una base de V y $H = \{f_1, f_2, \ldots f_n\}$ un conjunto de vectores

$f_1 = a_{11} e_1 + a_{12} e_2 + \ldots a_{1n} e_n$

$f_2 = a_{21} e_1 + a_{22} e_2 + \ldots a_{2n} e_n$

$f_n = a_{n1} e_1 + a_{n2} e_2 + \ldots a_{nn} e_n$

[illegible]

base B

$$T(1,1) = (2,3) = a(1,1) - b(-1,0) \quad ①$$

$$T(-1,0) = (-4,-2) = c(1,1) - d(-1,0) \quad ②$$

$\begin{cases} 2 = a - b \\ 3 = a \end{cases}$ $\quad\quad$ $\begin{cases} -4 = c - d \\ -2 = c \end{cases}$ $\quad\quad$ $P = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$\therefore b = 1$ $\quad\quad$ $\therefore d = 2$ $\quad\quad$ $M(T)_B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

---

2) Hallar P (matriz cambio de base) de E (base canónica) a B

$$P_{E \to B}$$

$\{(1,0),(0,1)\} \qquad \{(1,1),(-1,0)\}$

Se escriben como C.L. los vectores de E respecto B

$$(1,0) = \alpha_1(1,1) + \beta_1(-1,0) \quad ①$$

$$(0,1) = \alpha_2(1,1) + \beta_2(-1,0)$$

$① \begin{cases} 1 = \alpha_1 - \beta_1 \\ 0 = \alpha_1 \end{cases} \Rightarrow \beta_1 = -1 \qquad ② \begin{cases} 0 = \alpha_2 - \beta_2 \\ 1 = \alpha_2 \end{cases} \Rightarrow \beta_2 = 1$

$$P_{E \to B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

---

3) Hallar Q (matriz de pasaje) de B a E

$$Q_{B \to E} \Rightarrow$$

$$(1,1) = \alpha_1(1,0) + \beta_1(0,1) \quad ①$$

$$(-1,0) = \alpha_2(1,0) + \beta_2(0,1)$$

[illegible]

$$Q_{B \to E} = [illegible]$$

4) Hallar la matriz de la transformación respecto de E

como $T(x, y) = (x - 2y,\ 2x + y)$ [illegible] canónica (E)

5) Verificar que $\quad M_E = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$P \quad M_E \quad Q = M_B$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Siendo P y Q matrices de cambio de base también se verifica

$$\underset{Q}{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \underset{M_B}{\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}} \underset{P}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}} = \underset{M_E}{\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}$$

Además $P^{-1} = Q$ son matrices inversas y M_E y M_B son matrices semejantes (representan la misma transformación lineal)

6) Hallar las coordenadas del vector $v = (1, 2)$ referidas a la base B

como $x = (1, 2)$ está referido a la base canónica entonces para obtener las coordenadas referidas a la base B,

$$[v]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} [v]_E$$

$$[v]_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} [illegible]$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

$P_{B\to B'}$ [illegible]

[illegible]

$P_{B'\to B}$

Ejemplo encontrar las coordenadas del vector x referidas de la base B a la base B' siendo $B = \{(1,0,1), (0,1,0) (1,1,0)\}$ y $B' = \{(2,0,0), (1,1,0) (0,0,1)\}$

$x = (1,0,2)$

Como x está referido a la base B obtenemos encontrar la matriz de pasaje de $B \to B'$

$(1,0,1) = \alpha(2,0,0) + \beta(1,1,0) + \delta(0,0,1)$ ①

$(0,1,0) = \alpha_1(2,0,0) + \beta_1(1,1,0) + \delta_1(0,0,1)$ ②

$(1,1,0) = \alpha_2(2,0,0) + \beta_2(1,1,0) + \delta_2(0,0,1)$ ③

$$\begin{cases} 1 = 2\alpha + \beta \\ 0 = \beta \\ 1 = \delta \end{cases} ① \qquad \begin{cases} 0 = 2\alpha_1 + \beta_1 \\ 1 = \beta_1 \\ 0 = \delta_1 \end{cases} ② \qquad \begin{cases} 1 = 2\alpha_2 + \beta_2 \\ 1 = \beta_2 \\ 0 = \delta_2 \end{cases} ③$$

$\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 0$, $\delta = 1$ $\qquad$ $\alpha_1 = -\frac{1}{2}$, $\beta_1 = 1$, $\delta_1 = 0$ $\qquad$ $\alpha_2 = 0$, $\beta_2 = 1$, $\delta_2 = 0$

$$P_{B\to B'} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Entonces las coordenadas de x son [illegible]

[illegible]

[illegible]

$T(1,0) = $ [illegible] $\Rightarrow (1,-1) = \alpha_1$ [illegible]

$T(0,1) = (2,$ [illegible] $\Rightarrow$ [illegible] $= \alpha_2$ [illegible]

① $\begin{cases} 1 = \alpha_1 \\ -1 = \beta_1 \end{cases}$ ② $\begin{cases} 2 = \alpha_2 \\ 1 = \beta_2 \end{cases}$

$$M_{EE} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$ si observamos la expresión de la transformación $(x+2y, -x+y)$

$$= (\underbrace{1x + 2y}_{\text{primera fila}}, \underbrace{-1x + 1y}_{\text{segunda fila}})$$

② Hacemos los otros casos directamente

$T: P_2 \to R^3 / T(a+bx+cx^2) = (a-c, 2b, a+c)$

$$M_{EE} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

③ $T: R^3 \to R^3 / T(x,y,z) = (3x+4y+z, 2x+5y+3z, x+2y+z)$

$$M_{EE} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

22) Sea T: $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ / tal que su matriz asociada respecto de las bases canónicas es

$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ -3 & a & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ indique los valores de $a \in \mathbb{R}$ tal que:

a) rang(A)=2
b) T sea inyectiva

$$(-3, a, 1, 0) = \alpha(2, 1, -1, 0) + \beta(-1, 2, 0, 0)$$

$$\begin{cases} -3 = 2\alpha - \beta & (2) \\ a = \alpha + 2\beta & (3) \\ 1 = -\alpha & (1) \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Encontramos con (1) y (2) y reemplazamos en (3)

$\alpha = -1$; $\beta = 1$ Reemplazando en (3)

$a = -1 + 2 \cdot 1$

$\boxed{a = 1}$

Nota: si observamos y se hace $f_3 - f_1$ se obtiene

$(-3, 1, 1, 0)$

b) Hallar a para que sea inyectiva. Recordando que si T es inyectiva el $Nu(T) = \{0_V\}$. Teniendo en cuenta el teorema de las dimensiones

dim V = dim Nu(T) + dim Im(T)

$4 = 1 + 3 \longrightarrow$ si $a \neq 1$

Conclusión $\boxed{\text{no existe } a}$ para que T sea inyectiva.

$\nexists\, a$

23) Sea el subespacio $\mathbb{S} = \text{gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & k+1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2k & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\right\} \subset \mathbb{R}^{2\times 2}$.

a) Obtenga, si es posible, los valores de k para los cuales se puede definir una transformación lineal $T : \mathbb{R}^{2x2} \to \mathbb{R}^3$ tal que T sea un epimorfismo y Nu (T) = $\mathbb{S}$.

b) Para k = 0, halle la expresión analítica de la transformación lineal $T : \mathbb{R}^{2x2} \to \mathbb{R}^3$ tal que

VERDADERO Y FALSO

$$\begin{cases} \alpha - 2\beta k = 0 & (1) \\ -\alpha - 2\beta = 0 & (2) \\ \alpha(k+1) + 4\beta = 0 \end{cases}$$ de (1) y (2) $k = 1$

$\alpha(k+1)+4\beta = 0 \quad k = 1 \Rightarrow \alpha = -2\beta$

Con $k=1$ $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow C$ es l.d.

b) $k=0 \Rightarrow S = \text{gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \right\}$

$T\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ Buscamos la expresión de la T.L.

$T\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{cases} x = \alpha + \delta \\ y = -\alpha - 2\beta \\ z = \gamma \\ w = \alpha + 4\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} \gamma = z \\ \beta = \frac{y+w}{2} \\ \alpha = -2y - w \\ \delta = x + 2y + w \end{array} \Rightarrow$

$T\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$T\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = (-2y-w)(0,0,0) + \frac{y+w}{2}(0,0,0) + z(1,1,0) + (x+2y+w)(2,1,3)$

$T\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = (2x+4y+z+2w,\ x+2y+z+w,\ 3x+6y+3w)$

24) Analice el valor de verdad de las siguientes proposiciones. Justifique su respuesta (demuestre la proposición si es verdadera y exhiba un contraejemplo si es falsa).

Sea T: $\mathbb{V} \to \mathbb{W}$ una transformación lineal, siendo $\mathbb{V}$ y $\mathbb{W}$ espacios vectoriales de dimensión finita:

a) Si $\dim\mathbb{V}=5$ y $\dim \mathbb{W}=3$ y $\dim Nu(T)=2$, entonces T es sobreyectiva.

b) Si $\dim\mathbb{V}=5$ y $\dim \mathbb{W}=4$, entonces T no es inyectiva.

c) Si T es inyectiva, entonces $\dim \mathbb{V} \leq \dim\mathbb{W}$.

d) Si $\dim\mathbb{V}=3$ y $\dim \mathbb{W}=5$, entonces T es sobreyectiva.

e) Si $\dim\mathbb{V}=3$ y $\dim \mathbb{W}=7$, entonces el rango de la matriz asociada a T está comprendido entre 3 y 7.

a) Si dim V = 5 y dim W = 3 y dim Nu(T) = 2 $\Rightarrow$ T es sobreyectiva

$$\underset{5}{\dim V} = \underset{2}{\dim Nu} + \underset{3}{\dim Im}$$

Si T es sobreyectiva $\Rightarrow \dim Im = \dim W$

$$3 = 3$$

Verdadero

b) Si dim V = 5 y dim W = 4 $\Rightarrow$ T no inyectiva

Si T no inyectiva $\Rightarrow Nu(T) \neq 0$ y la dimensión $\neq 0$ → nulo no tiene dimensión

$$\underset{5}{\dim V} = \underset{1}{\dim Nu(T)} + \underset{4}{\dim Im(T)}$$

Verdadero: si la dim Nu(T) es 2 ó 3 también se puede verificar el teorema de la dimensión y lo T siempre será no inyectiva

c) Si T es inyectiva, entonces dim V = dim W

Si T es inyectiva $\Rightarrow \dim Nu(T) = 0$

$$\dim V = \underbrace{\dim Nu(T)}_{0} + \dim Im(T)$$ → nulo dimensión 0 [Verdadero]

$$\dim V = \dim Im(T) \Rightarrow \dim V \leq \dim W$$

d) Si dim V = 3 y dim W = 5 entonces T es sobreyectiva

$$\underset{3}{\dim V} = \dim Nu(T) + \dim Im(T)$$

Si T es sobreyectiva $\Rightarrow \underset{5}{\dim W} = \underset{5}{\dim Im(T)}$

Imposible - Falso

e) Si dim V = 3 y dim W = 7 entonces el rango de la matriz asociada a T está comprendido entre 3 y 7

$$\underset{3}{\dim V} = \dim Nu(T) + \dim Im(T)$$

El rango de la matriz asociada a T está [illegible] de la dim Im [illegible]

[illegible]

25) Indique si las transformaciones del ejercicio 21 admiten transformación inversa, si es así determine la expresión analítica para T^{-1}.

Debe ser isomorfismo

① $M_{EE} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$

② $M_{EE} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

③ $M_{EE} = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

Para determinar una posible inversa de T^{-1} (inversa) debemos requerir que ①, ② y ③ sean invertibles. Para ello podemos calcular el | | y este sea $\neq 0$

① Tiene inversa

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ 0 & 1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}\right)$$

M inversa $= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

$T^{-1}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,/\, T^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

② $\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 + 2 = 4$

Admite inversa $\Rightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right) \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{array}\right)$$

$T^{-1}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \,/$

$T^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

③ $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

$= 3(5-6) - 4(2-3) - 1(4-5)$

$= 3(-1) - 4(-1) - 1(-1)$

$= -3 + 4 - 1 = 0 \Rightarrow$ no admite la transformación inversa (no es isomorfismo)

26) Siendo las transformaciones lineales $T_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \,/\, T_1(x,y,z) = (x-y, x+z)$ y $T_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \,/\, T_2(x,y) = (x, y, x-y)$. Encuentre las expresiones analíticas de $T_1 \circ T_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y $T_2 \circ T_1: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. Verifique usando las operaciones entre las matrices asociadas a cada una de las transformaciones lineales respecto de las bases canónicas.

Encontraremos primero las expresiones de $T_1 \circ T_2$ y $T_2 \circ T_1$ a partir de las fórmulas de cada una de las transformaciones, recordando la composición que se tiene en las definiciones (recordando que las T son funciones).
Finalmente verificaremos la composición a partir del producto de dos matrices.
Entonces,

$$\boxed{(T_2 \circ T_1)(x) = T_2(T_1(x))}$$

y se verifica también que

$$\boxed{[M(T_2 \circ T_1)]_{(v,w)} = [M(T_2)]_{(w,w')} \cdot [M(T_1)]_{(v,w)}}$$

1) $(T_2 \circ T_1)(x) = T_2(T_1(x))$

$$T_2(x-y, x-z)$$

Recordemos que $T_2(x,y) = (\overset{\text{primer componente}}{x}, \overset{\text{segunda}}{y}, \overset{\text{primera - la segunda}}{x-y})$

$\Rightarrow$ para $T_2(x-y, x+z) = (\underset{\text{primera}}{x-y}, \underset{\text{segunda}}{x+z}, \underset{\text{primera menos segunda}}{x-y-(x+z)})$

$$\Rightarrow \boxed{(T_2 \circ T_1)(x) = (x-y, x+z, -y-z)}$$

2) $(T_1 \circ T_2)(x) = T_1(T_2(x))$

$$= T_1(x, y, x-y)$$

$$= (x-y, x+x-y)$$

$$= (x-y, 2x-y)$$

Comparamos los resultados obtenidos a partir del producto de las matrices

$$M(T_1)_{EE} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} x - y + 0z \\ x + 0y + z \end{array} \quad 2\times 3$$

$$M(T_2)_{EE} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \leftarrow x + 0y \\ \leftarrow 0x + y \\ \leftarrow x - y \end{array} \quad 3\times 2$$

$$\overset{3\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} \overset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}} = \overset{3\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}} \; a^1$$

$M(T_2) \cdot M(T_1) = M(T_2 \circ T_1)$

$a^1 = a^2$

$$\overset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}} \overset{3\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}} = \overset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}} \; b^1$$

$M(T_1) \cdot M(T_2) = M(T_1 \circ T_2)$

$b^1 = b^2$

• Sabemos que $(T_1 \circ T_2)(x) = (x - y, 2x - y)$

$$M(T_1 \circ T_2)_{EE} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \; b^2$$

• Sabemos que $(T_2 \circ T_1)x = (x - y, x + z, -y - z)$

$$M(T_2 \circ T_1)_{EE} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \; a^2$$

$a^1 = a^2$

$\therefore 1 = 2$

---

27) Siendo las transformaciones lineales $T_1: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ / $M_{EE} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ y

$T_2: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ / $M_{EE} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Encuentre el $Nu(T_1 \circ T_2)$, la $Im(T_1 \circ T_2)$ y $Nu(T_1 \circ T_2^{-1})$

En este ejercicio resolveremos mediante el producto de matrices.

$$M(T_1)_{EE} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{2\times 3} \qquad M(T_2)_{EE} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}^{3\times 3}$$

Como vemos es posible obtener $(T_1 \circ T_2)$ pero no es posible encontrar $(T_2 \circ T_1)$.

$$\underbrace{2\times 3 \quad 3\times 3}_{\text{sí}} \qquad \underbrace{3\times 3 \quad 2\times 3}_{\text{no}}$$

a) para encontrar el $Nu(T_1 \circ T_2)$ primero hallamos la expresión de $T_1 \circ T_2$

$(T_1 \circ T_2)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{M(T_1 \circ T_2)_{EE}}$$

Para determinar el núcleo igualamos $M(T_1 \circ T_2)_{EE}$ al vector nulo

$$\overset{2\times 3}{\begin{pmatrix} 0 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \overset{3\times 1}{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}} = \overset{1\times 3}{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}} \Rightarrow \begin{cases} 2y + 4z = 0 \\ 2x = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad x = 0, \quad 2y = -4z$$
$$y = -2z$$

genérico $(0, -2z, z)$ $\qquad Nu(T_1 \circ T_2) = gen\{(0,-2,1)\}$

Base $Nu(T_1 \circ T_2) = \{(0, -2, 1)\}$

[illegible]

[illegible]

$\Rightarrow (T_1 \circ T_2) : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$\Rightarrow \underbrace{\dim V}_{3} = \underbrace{\dim Nu(T_1 \circ T_2)}_{1} + \underbrace{\dim Im(T_1 \circ T_2)}_{2}$ $\quad Im(T_1 \circ T_2) = \mathbb{R}^2$

Como $W = \mathbb{R}^2 \Rightarrow$ Base de la $Img(T_1 \circ T_2) = \{(1,0),(0,1)\}$

---

d) Para obtener $Nu(T_1 \circ T_2^{-1})$

Es necesario primero hallar T_2^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$ cambio de lugar las filas

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$T_2^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Verificamos

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$$

$T_1 \circ T_2^{-1} \Rightarrow M(T_1) \cdot M(T_2)^{-1}$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallamos el $Nu(T_1 \circ T_2^{-1})$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$Nu(T_1 \circ T_2^{-1}) = gen\{(1,-1,1)\}$

$$\begin{cases} 2x + 2y = 0 \\ -2x + 2z = 0 \end{cases} \qquad \begin{matrix} x = -y \\ x = z \end{matrix} \Rightarrow \text{genérico} : (x, -x, x)$$

Base $Nu(T_1 \circ T_2^{-1}) = \{(1,-1,1)\}$

PASAJE
INVERSA

Ejercicio 22 – página 53

29) Sean B_1 y B_2 bases de R^2 tales que $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz de cambio de base de B_1 a B_2.

a) Si $[u]_{B1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, calcule $[u]_{B2}$.

b) Si $[v]_{B2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, calcule $[v]_{B1}$.

c) Sea $B_1 = \{ (1, 0), (1, -1) \}$. Obtenga la base B_2. ¿Es única?

Recordar definiciones pág 35

$$[v_2] = P_{B_1 \to B_2} [v_1] \quad y \quad [v_1] = P_{B_2 \to B_1} [v_2]$$

Si A es $P_{B_1 \to B_2} \Rightarrow A^{-1}$ es $P_{B_2 \to B_1}$

$$P_{B_1 \to B_2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{Buscamos } P_{B_2 \to B_1} = A^{-1}$$

$$\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \\ \hline 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{1}{2} \end{array}$$

$$A^{-1} = P_{B_2 \to B_1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Verificamos que sea la inversa

$$A \cdot A^{-1} = I \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$

a) $[u]_{B_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$[u]_{B2} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

$[u]_{B2} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

b) $[v]_{B_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$[v]_{B_1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} \\ 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$[v]_{B_1} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \end{pmatrix}$

b) $B_1 = \{(1,0), (1,-1)\}$

$B_2 = \{(a,b), (c,d)\}$

Recordamos el procedimiento para determinar la matriz de pasaje

Entonces

$$\begin{cases} (1,0) = \alpha\,(a,b) + \beta\,(c,d) \\ (1,-1) = \alpha_1(a,b) + \beta_1(c,d) \end{cases} \Rightarrow P = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha_1 \\ \beta & \beta_1 \end{pmatrix}$$

Con los datos del ejercicio

$$\begin{cases} (1,0) = 1\,(a,b) - 2\,(c,d) \\ (1,-1) = 1\,(a,b) + 0\,(c,d) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = a - 2c \\ 0 = b - 2d \\ 1 = a \\ -1 = b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{matrix} a = 1 \\ b = -1 \\ c = 0 \\ d = -\frac{1}{2} \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad B_2 = \left\{(1,-1), \left(0, -\tfrac{1}{2}\right)\right\}$$

30) Halle la matriz asociada a la transformación lineal $T: \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ / $T(a+bx+cx^2) = (a+c, 3b)$ respecto de las bases: a) $B_1 = \{1, x, x^2\}$, $B_2 = \{(-1,1), (1,0)\}$
b) $B_1 = \{x^2+x, -x+1, 3\}$ y $B_2 = \{(-1,1), (1,0)\}$

a) $B_1 = \{1, x, x^2\}$ $\qquad B_2 = \{(-1,1); (1,0)\}$

Para simplificar la resolución asociamos cada polinomio a una terna ordenada.

$$\begin{array}{lcl} & & \begin{matrix} a & b & c \end{matrix} \\ P(x) = 1 & \Rightarrow & (1, 0, 0) \\ P(x) = x & \Rightarrow & (0, 1, 0) \\ P(x) = x^2 & \Rightarrow & (0, 0, 1) \end{array}$$

① B_1 a canónica la identidad

$3\times2 \to$ matriz $\to 2\times3$

$T(1,0,0) = (1,0)$

$T(0,1,0) = (0,3) \Rightarrow$

$T(0,0,1) = (1,0)$

$(1,0) = \alpha\,(-1,1) + \beta\,(1,0)$

$(0,3) = \alpha\,(-1,1) + \beta\,(1,0)$

$(1,0) = \alpha\,(-1,1) + \beta\,(1,0)$

② Transformo B_1 de ①

③ La transformada de B_1 a B_2

$\begin{cases} 1 = -\alpha + \beta \\ 0 = \alpha \end{cases}$ $\begin{cases} 0 = -\alpha_1 - \beta_1 \\ 3 = \alpha_1 \end{cases}$ $\begin{cases} 1 = -\alpha_2 + \beta_2 \\ 0 = \alpha_2 \end{cases}$

$\Downarrow$ $\Downarrow$ $\Downarrow$

$\alpha = 0 ; \beta = 1$ $\alpha_1 = 3$ y $\beta_1 = -3$ $\alpha_2 = 0 ; \beta_2 = 1$

$$\boxed{M(T)_{B_1 B_2} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}}$$

b) Resolvemos igual que en (a)

$P(x) = x^2 + x$ $(0,1,1)$ (1) Base canónica

$P(x) = -x + 1$ $(1,-1,0)$

$P(x) = 3$ $(3,0,0)$

(2) Transformo B_1 de (1)

Buscamos los escalares

$T(0,1,1) = (1,3)$

$T(1,-1,0) = (1,-3)$

$T(3,0,0) = (3,0)$

$(1,3) = \alpha(-1,1) + \beta(1,0)$ (1)

$(1,-3) = \alpha_1(-1,1) + \beta_1(1,0)$ (2)

$(3,0) = \alpha_2(-1,1) + \beta_2(1,0)$ (3)

(3) La transformada de B_1 a B_2

Resolvemos

(1) $\begin{cases} 1 = -\alpha + \beta \\ 3 = \alpha \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 1 = -\alpha_1 + \beta_1 \\ -3 = \alpha_1 \end{cases}$ $\begin{cases} 3 = -\alpha_2 + \beta_2 \\ 0 = \alpha_2 \end{cases}$

$\Downarrow$ $\Downarrow$ $\Downarrow$

$\alpha = 3$ y $\beta = 4$ $\alpha_1 = -3$ y $\beta_1 = -2$ $\alpha_2 = 0$ y $\beta_2 = 3$

$$\boxed{M(T)_{B_1 B_2} \begin{pmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 4 & -2 & 3 \end{pmatrix}}$$

31) Sea la transformación lineal $T: \mathbb{P}_1 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz asociada es $M(T)_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Si $B = \{1, x\}$ y $B' = \{(1,0,0), (1,1,1), (0,0,1)\}$
halle todos los $p \in \mathbb{P}_1$ tales que $T(p) = (2, 1, 0)$

Consideramos la base canónica de $\mathbb{P}^2$

$P : 1 \longrightarrow (1,0)$

$P : x \longrightarrow (0,1)$

(1) Canónica B_1

2) B_1 en B_2 $2\times 3 \to$ matriz $\to 3\times 2$

$T(1,0) = \alpha(1,0,0) + \beta(1,1,1) + \delta(0,0,1)$

$T(0,1) = \alpha_1(1,0,0) + \beta_1(1,1,1) + \delta_1(0,0,1)$

$M(T)_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

$M(T)_{BB'} = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha_1 \\ \beta & \beta_1 \\ \delta & \delta_1 \end{pmatrix}$

Entonces $T(1,0) = 1(1,0,0) + 2(1,1,1) + 1(0,0,1)$

$= (3,2,3)$

$T(0,1) = 0(1,0,0) + 1(1,1,1) + 2(0,0,1)$

$= (1,1,3)$

Buscamos la expresión de la transformación

$T(1,0) = (3,2,3)$

$T(0,1) = (1,1,3)$

$(x,y) = \alpha(1,0) + \beta(0,1) \Rightarrow x = \alpha \quad y = \beta$

$T(x,y) = x(3,2,3) + y(1,1,3)$

$= (3x+y,\ 2x+y,\ 3x+3y)$

Si el transformado de p es $(2,1,0)$

$T(p) = (2,1,0)$

$T(x,y) = (3x+y,\ 2x+y,\ 3x+3y)$

$(2,1,0) = (3x+y,\ 2x+y,\ 3x+3y)$

Resolviendo el sistema
3 ecuaciones con dos incógnitas $\begin{cases} 2 = 3x+y \\ 1 = 2x+y \\ 0 = 3x+3y \end{cases}$

trabajamos con dos y verificamos con la tercera

finalmente $x = 1 \quad y = -1 \quad (1,-1)$

Como se trabajó con polinomios $V = P_1$

$T(1-x) = (2,1,0)$

32) Sea una transformación lineal $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ / $T(x,y,z)=(x-z,-2x-y-z,-3y)$:

a) Encuentre la matriz asociada a dicha transformación lineal respecto de las bases: canónica de partida y la base $B=\{(3,0,3),(0,1,2),(0,0,-2)\}$ de llegada

b) Calcule $T(2,-1,1)$ verificando el resultado.

Transpuesta
① En base B_1

$T(1,0,0) = (1,-2,0)$ Buscamos con la ecuación de
$T(0,1,0) = (0,1,-3)$ la transformación, los términos
$T(0,0,1) = (1,1,0)$ mediante la base canónica

② Transpuesta a base B_2

$(1,-2,0) = \alpha\,(3,0,3) + \beta\,(0,1,2) - \delta\,(0,0,-2)$ ①
$(0,1,-3) = \alpha_1(3,0,3) + \beta_1(0,1,2) + \delta_1(0,0,-2)$ ②
$(1,1,0) = \alpha_2(3,0,3) + \beta_2(0,1,2) + \delta_2(0,0,-2)$ ③

$3\times 3 \rightarrow$ matriz $\rightarrow 3\times 3$

①
$$\begin{cases} 1 = 3\alpha \\ -2 = \beta \\ 0 = 3\alpha - 2\delta - 2\beta \end{cases} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3},\ \beta = -2,\ \delta = -\frac{3}{2}$$

②
$$\begin{cases} 0 = 3\alpha_1 \\ 1 = \beta_1 \\ -3 = 3\alpha_1 - 2\delta_1 + 2\beta_1 \end{cases} \Rightarrow \alpha_1 = 0,\ \beta_1 = 1,\ \delta_1 = \frac{5}{2}$$

③
$$\begin{cases} 1 = 3\alpha_2 \\ 1 = \beta_2 \\ 0 = 3\alpha_2 - 2\delta_2 + 2\beta_2 \end{cases} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{1}{3},\ \beta_2 = 1,\ \delta_2 = \frac{3}{2}$$

Cada una es columna

$$\boxed{M_{B B'}(T) = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}}$$

i) Para encontrar el transformado primero lo hacemos a partir de la expresión

$T(x,y,z) = (x-z,\ -2x+y+z,\ -3y)$
$\boxed{T(2,-1,1) = (3,\ -4,\ +3)}$

Ahora buscamos el transformado a partir de la matriz

$$\underset{M_{B_1 B_2}}{\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ -2 & 1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & \frac{5}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}} \underset{\vec{X}_{B_1}}{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \underset{\vec{X}_{B_2}}{\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}}$$

$T(2,-1,1) = 1\,(3,0,3) - 4\,(0,1,2) + (-4)(0,0,-2)$ $\vec{X}_{B_2} \cdot B_2$ = Ecuación
$= (3,\ -4,\ 3)$ $\quad T(\vec{X}_{B_1})_{B_1} = \vec{X}_{B_2} \cdot B_2$

33) Si $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ / $M_{BB'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$ siendo las bases $B = \{(1,1,0),(0,-1,0),(0,0,-1)\}$,

$B' = \{(1,1,-1),(2,-1,0),(1,0,0)\}$, encuentre $a \in \mathbb{R}$ / $T(1,2,3) = (4,2,1)$

EXPRESIÓN ANALÍTICA

[illegible] a partir de la $M_{B_1B_2} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$

$(x,y,z) = \alpha(\ldots) + \beta(0,-1,0) + \delta(0,0,-1)$

Vdos B_1

$\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha - \beta \\ z = -\delta \end{cases} \Rightarrow x - y = \beta$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ x-y \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x \\ x-2y \\ 3x-2y-az \end{pmatrix}$$

$T(1,2,3) = (4,2,1)$ Transformada en B_2

$T(x,y,z) = -x(1,1,-1) + (x-2y)(2,-1,0) + (3x-2y-az)(1,0,0)$

$T(x,y,z) = \left(\underbrace{4x-6y-az}_{4},\ \underbrace{-2x+2y}_{2},\ \underbrace{x}_{1}\right)$

$T(1,2,3) =$

$\Rightarrow \begin{cases} 4x-6y-az = 4 \ (3) \\ -2x+2y = 2 \ (2) \\ x = 1 \ (1) \end{cases}$ Resolvemos el sistema con (1) y (2) y luego obtenemos a con (3)

Si $\overset{(1)}{x=1} \Rightarrow \overset{(2)}{-2+2y=2} \Rightarrow y = 2$

En (3) $\underbrace{4\cdot 1 - 6\cdot 2 - a\cdot 3}_{\text{Valores pedidos}} = 4 \Rightarrow 4-12-3a=4$

$-3a = 12$

$\boxed{a = -4}$

34) Sea $T:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3 / [T(x)]_{B2} = M_{B1B2}[x]_{B1}$. Halle la expresión analítica de la transformación lineal, su núcleo, una base del núcleo y la dimensión de la imagen.

c. transforma

Formula

$B_1=\{(1,0,0),(0,2,0),(0,1,1)\}$; $B_2=\{(2,0,0),(0,0,1),(0,-2,0)\}$, $M_{B1B2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Buscaremos la expresión analítica a partir de la matriz $M_{B_1B_2}$

(1) Genérico en B_1

$(x,y,z) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,2,0) + \delta(0,1,1)$

$\begin{cases} x = \alpha \\ y = 2\beta + \delta \\ z = \delta \end{cases} \Rightarrow \dfrac{y-z}{2} = \beta$

② Aplico la fórmula

$\begin{pmatrix} x \\ \frac{y-z}{2} \\ z \end{pmatrix}$ son las coordenadas en la B_1

Entonces

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ \frac{y-z}{2} \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ \frac{3y-3z}{2} + z \\ 2x + \frac{y-z}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x \\ \frac{3y-z}{2} \\ \frac{4x+y-z}{2} \end{pmatrix}$$

③ Multiplico por B_2 para llevar a canónica

$$T(x)_{B_2} = x(2,0,0) + \frac{3y-z}{2}(0,0,1) + \frac{4x+y-z}{2}(0,-2,0)$$

$$= \left(2x,\ -4x-y+z,\ \frac{3y-z}{2}\right)$$

$$\left(x(2)+0+0,\ 0+0-2\left(\frac{4x+y-z}{2}\right),\ 0+\frac{3y-z}{2}(1)+0\right)$$

• Para encontrar el núcleo

$$\left(2x,\ -4x-y+z,\ \frac{3y-z}{2}\right) = (0,\ 0,\ 0)$$

$$\begin{cases} 2x = 0 \Rightarrow x = 0 \\ -4x - y + z = 0 \Rightarrow y = z \\ \frac{3y-z}{2} = 0 \Rightarrow \frac{3y-y}{2} = 0 \Rightarrow y = 0,\ z = 0 \end{cases}$$

$x = 0,\ y = 0,\ z = 0$ $\quad Nu(T) = \{(0,0,0)\}$

dimensión $Nu(T) = 0$)

$$\underset{3}{\dim V} = \underset{0}{\dim Nu} - \underset{3}{\dim Im}$$

~~Base Im = {(1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)}~~

$Im = \mathbb{R}^3$

Ejercicio 17

Pruebe que: la transformación lineal identidad: $V \to V$ es biyectiva

Lo probamos partiendo del teorema de las dimensiones

Sabemos que

$$\dim V = \dim Nu(T) + \dim Im(T)$$

Si $V = n$

$\dim Nu(T) = 0 \quad \Rightarrow \quad Nu(T) = \{\vec{0}\}$

es inyectiva

$$\dim V = \dim Nu(T) + \dim Im(T)$$
$$n = 0 + \dim Im(T)$$

si $\dim Im(T) = n \quad \Rightarrow Im(T) = V$

$\Rightarrow T$ es sobreyectiva

si es sobreyectiva e inyectiva es biyectiva

Ej 18

Demuestre que $T: R^n \to R^n$ es una TL inyectiva $\Leftrightarrow$ es sobreyectiva

Demostremos que

T iny $\Leftrightarrow T$ sobreyectiva

1) Si T es inyectiva $\Rightarrow Nu(T) = \{\vec{0}\} \therefore \dim Nu(T) = 0$

$$\dim V = \dim Nu(T) + \underbrace{\dim Im(T)}_{n}$$
$$n = 0$$

Si $Im(T)$ tiene dimensión n es sobreyectiva

2) Si T es sobreyectiva $\Rightarrow \dim Im(T) = n$

para que se verifique que

$$\dim V = \dim Nu(T) + \dim Im(T)$$
$$n = \underbrace{\quad}_{0} \quad n$$

la dimensión del núcleo debe ser = 0 ⇒

T es inyectiva

28) Halle $M(\underline{\mathbf{Id}})_{B_1B_2}$

a) Si $B_1 = \{(2,1),(1,-2)\}$ y B_2 es la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

b) Si B_1 es la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $B_2=\{(3,0,0),(-1,1,0),(1,-1,1)\}$

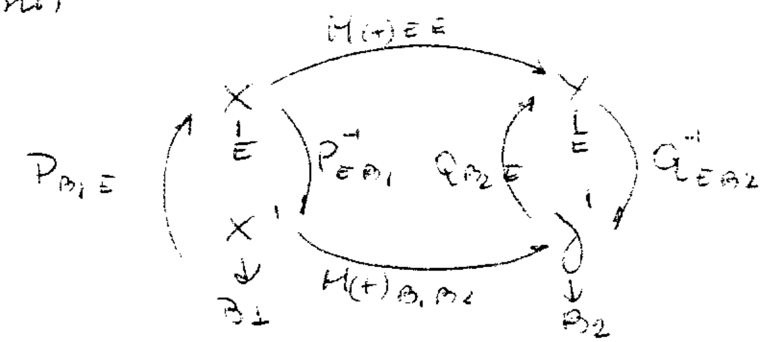
c) Si $B_1=\{(3,0,0),(-1,1,0),(1,-1,1)\}$ y $B_2 =\{(1,2,-1),(1,-1,0),(0,-1,2)\}$

Recordamos el ejercicio 21, se presentaba la expresión de la transformación y podíamos obtener la matriz asociada en las bases canónicas. Ejemplo:

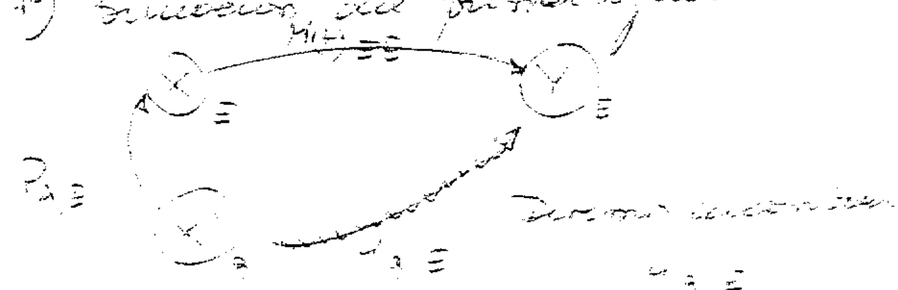
$$T(x,y,z) = \left(-4x - z,\ \frac{1}{3}x - 2y,\ 3x + y - 6z\right)$$

$$M(T)_{EE} = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -1 \\ \frac{1}{3} & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

Retomamos el ejercicio, para ello recordamos



1°) Situación del primer ejercicio



Entonces

$$M_{EB_2} = M_{EE} \circ P_{B_1E}$$

Porque $M(\underset{\sim}{Id})_{B_1B_2}$ la M asociada a la transformación será la matriz identidad

para a) $\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$$M_{EB_2} = \begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} \circ P_{B_1E}$$

Obtenemos P_{B_1E}

$$\begin{aligned}(2,1) &= \alpha(1,0)+\beta(0,1)\\ (1,-2) &= \alpha_1(1,0)+\beta_1(0,1)\end{aligned} \Rightarrow \begin{cases}2=\alpha\\1=\beta\end{cases} \quad \begin{cases}1=\alpha_1\\-2=\beta_1\end{cases}$$

$$M_{EB_2} = P_{EB_2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{M_{B_1E} = \begin{pmatrix}2&1\\1&-2\end{pmatrix}}$$

b)

$$\begin{tikzcd}
\underset{E}{X} \arrow[r, bend left, "M(T)_{EE}"] \arrow[dr, "M_{EB_2}"'] & \underset{E}{Y} \arrow[d, bend left, "P_{EB_2}"] \\
& \underset{B_2}{Y}
\end{tikzcd}$$

$$M_{EB_2} = P_{EB_2} \cdot M_{EE\,T}$$

$$M_{EB_2} = P_{EB_2} \cdot \begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$B_1 = \{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$

$B_2 = \{(3,0,0),(-1,1,0),(1,-1,1)\}$

$$(x, y, z) = \alpha(3,0,0) + \beta(-1,1,0) + \delta(1,-1, \ )$$

$$\begin{cases} x = 3\alpha + \beta - \delta \\ y = \beta - \delta \\ z = \delta \end{cases} \qquad \begin{array}{l} \text{si } z = \delta \\ \beta = y + z \\ \alpha = \dfrac{x+y}{3} \end{array}$$

$$T(x,y,z) = \frac{x+y}{3}(1,0,0) + (y+z)(0,1,0) + z(0,0,1)$$

$$= \left(\frac{x+y}{3}, \ y+z, \ z\right)$$

$$\boxed{= M_{EB_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

• Deducción como producto de matrices

$$(1,0,0) = \alpha(3,0,0) + \beta(-1,1,0) + \delta(1,-1,0) \quad ①$$

$$(0,1,0) = \alpha_1(3,0,0) + \beta_1(-1,1,0) + \delta_1(1,-1,0) \quad ②$$

$$(0,0,1) = \alpha_2(3,0,0) + \beta_2(-1,1,0) + \delta_2(1,-1,0) \quad ③$$

① $\begin{cases} 1 = 3\alpha - \beta + \delta \\ 0 = +\beta - \delta \\ 0 = \delta \end{cases}$ $\quad 1 = 3\alpha \Rightarrow \boxed{\alpha = \frac{1}{3}}$ $\quad \Rightarrow \beta = \delta$ $\quad \beta = 0 \ \ \delta = 0$ $\quad \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

② $\begin{cases} 0 = 3\alpha_1 - \beta_1 + \delta_1 \\ 1 = +\beta_1 - \delta_1 \\ 0 = \delta_1 \end{cases}$ $\quad \Rightarrow \alpha_1 = \frac{1}{3}$ $\quad \Rightarrow \beta_1 = 1$ $\quad \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

③ $\begin{cases} 0 = 3\alpha_2 - \beta_2 + \delta_2 \\ 0 = \beta_2 - \delta_2 \\ 1 = \delta_2 \end{cases}$ $\quad \Rightarrow \alpha_2 = 0$ $\quad \Rightarrow \beta_2 = \delta_2 \Rightarrow \beta_2 = 1$ $\quad \begin{pmatrix} 0 \\ \\ \end{pmatrix}$

$$M_{EB_2} = P_{EB_2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_{EB_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{= \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

e)

$$\begin{tikzcd} X_E \arrow[r, "M_{EE}"] & Y_E \arrow[d, "P_{EB_2}"] \\ X'_{B_1} \arrow[u, "P_{B_1E}"] \arrow[r, "M_{B_1B_2}"'] & Y'_{B_2} \end{tikzcd}$$

$$M_{B_1B_2} = P_{EB_2} \cdot M_{EE} \cdot P_{B_1E}$$

$$= P_{EB_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P_{B_1E}$$

$B_1 = \{(3,0,0), (-1,1,0), (1,-1,1)\}$ y $B_2 = \{(1,2,-1), (1,-1,0), (0,-1,2)\}$

$(3,0,0) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \delta(0,0,1)$ ①

$(-1,1,0) = \alpha_1(1,0,0) + \beta_1(0,1,0) + \delta_1(0,0,1)$ ②

$(1,-1,1) = \alpha_2(1,0,0) + \beta_2(0,1,0) + \delta_2(0,0,1)$ ③

① $3 = \alpha$, $0 = \beta$, $0 = \delta$

② $-1 = \alpha_1$, $1 = \beta_1$, $0 = \delta_1$

③ $1 = \alpha_2$, $-1 = \beta_2$, $1 = \delta_2$

$$\boxed{P_{B_1E} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

Para determinar $P_{\equiv B_2}$

$$(1,0,0) = \alpha(1,2,-1) + \beta(1,-1,0) + \delta(0,-1,2) \quad ①$$

$$(0,1,0) = \alpha_1(1,2,-1) + \beta_1(1,-1,0) + \delta_1(0,-1,2) \quad ②$$

$$(0,0,1) = \alpha_2(1,2,-1) + \beta_2(1,-1,0) + \delta_2(0,-1,2) \quad ③$$

$$① \begin{cases} 1 = \alpha + \beta \\ 0 = 2\alpha - \beta - \delta \\ 0 = -\alpha + 2\delta \end{cases} \qquad ② \begin{cases} 0 = \alpha_1 + \beta_1 \\ 1 = 2\alpha_1 - \beta_1 - \delta_1 \\ 0 = -\alpha_1 + 2\delta_1 \end{cases} \qquad ③ \begin{cases} 0 = \alpha_2 + \beta_2 \\ 0 = 2\alpha_2 - \beta_2 - \delta_2 \\ 1 = -\alpha_2 + 2\delta_2 \end{cases}$$

$\alpha = 2\delta$ ⊗

$0 = 4\delta - \beta - \delta$

$0 = 3\delta - \beta \Rightarrow \beta = 3\delta$ ⊗

por ⊗ y ⊗

$1 = 2\delta + 3\delta \Rightarrow$

$\delta = \frac{1}{5}$; $\alpha = \frac{2}{5}$; $\beta = \frac{3}{5}$

$\alpha_1 = \frac{2}{5}$

$\beta_1 = -\frac{2}{5}$

$\delta_1 = \frac{1}{5}$

$\alpha_2 = \frac{1}{5}$

$\beta_2 = -\frac{1}{5}$

$\delta_2 = \frac{3}{5}$

$$P_{\equiv B_2} \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

$$M_{B,B_2} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{= \begin{pmatrix} \frac{6}{5} & 0 & \frac{1}{5} \\ \frac{9}{5} & -1 & \frac{4}{5} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}}$$

Trabajo práctico N°6

Autovalores y autovectores

Algo de Teoria:

Subespacios invariantes por una transformación lineal

Consideremos la transformación lineal

T(x,y)=(3x,3y)

¿Cuál es su matriz asociada?

$$M_{(T)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x \\ 3y \end{bmatrix}$$

Una pregunta que nos podríamos hacer ante esta Transformación lineal es ¿cuáles son los subespacios vectoriales que quedan invariantes por T? → es invariante si lo que transforma ∈ al mismo subespacio

Es una transformación lineal de R^2 en R^2, analizamos el caso para

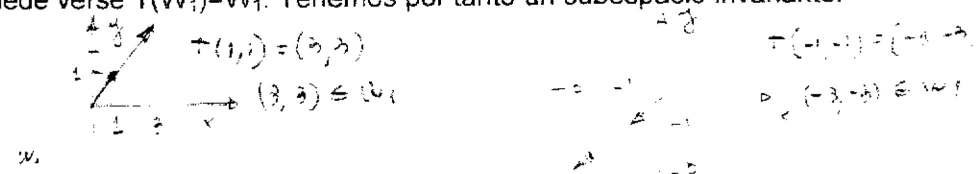
$W_1 = \{(x,y) \in R^2 / x = y\}$ Se trata de la recta generada por el vector (1,1)

Veamos cuales son los transformados, los vectores de este subespacio por la transformacion T :

T(1,1) = (3,3)

T(-1,-1) = (-3,-3)

Como puede verse $T(W_1)=W_1$. Tenemos por tanto un subespacio invariante.



De la misma forma se podría comprobar que el subespacio

$$W_2 = \{(x,y) \in \Re^2 / x = 2y\}$$ es recta generada por (2y ; y)

vuelve a ser un subespacio invariante por T. Efectivamente, si calculamos la imagen por T de cualquier vector de W_2 de manera analítica tendremos que

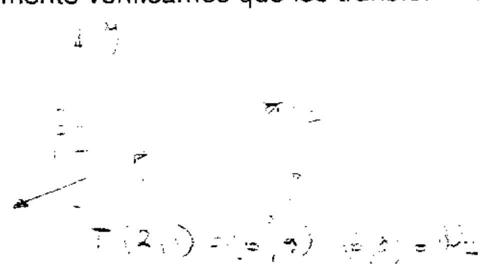
T(2,1) = (6,3)

T(-2,-1) = (-6,-3)

T(c,c) = (c,c)

Por lo que la imagen vuelve a ser un vector del subespacio W_2.

Geométricamente verificamos que los transformados tambien pertenecen a W_2.



1)Sea los subespacios vectoriales

$\mathbb{S}_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y=x\}$

$\mathbb{S}_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x=0\}$

$\mathbb{S}_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, -5x=2y\}$

a) determine si permanecen invariantes respecto de la siguiente transformación lineal

$T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \,/\, T(x,y) = (-2x-2y, -5x+y)$

b) Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas, justificando la respuesta:

b1) $T(x,x) = -4(x,x)$

b2) $T(-2,5) = \lambda\,(-2,5)\,,\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$

a) $S_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, y = x\}$

$T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \,/\, T(x,y) = (-2x-2y, -5x+y)$

$T(1,1) = (-4,-4)$ $\quad (1,1) \in S_1 \quad (-4,-4) \in S_1$

$T(3,3) = (-12,-12)$ $\quad (3,3) \in S_1 \quad (-4,-4) \in S_1$

S_1 permanece invariante respecto T

b) $S_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, x = 0\}$

Geométricamente representa el eje de ordenadas

$T(0,1) = (-2, 1)$ $\quad (0,1) \in S_2 \quad (-2,1) \notin S_2$

$T(0,-3) = (-6, 3)$ $\quad (0,-3) \in S_2 \quad (-6,3 \notin S_2$

S_2 no permanece invariante respecto T

c) $S_3 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, -5x = 2y\}$

Buscamos vectores que pertenezcan a S_3, le aplicamos la T y verificamos si el transformado del vector $\in$ o no a S_3

generación de S_3 $(-\frac{2}{5}y; y)$

$x = -\frac{2}{5}y$

$(-\frac{2}{5}, 1) \in S_3$ $\quad T(-\frac{2}{5}, 1) = (-\frac{6}{5}, 3) \in S_3$

$(-2, 5) \in S_3$ $\quad T(-2, 5) = (-6, 15) \in S_3$

S_3 permanece invariante respecto de T

b) Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas, justifique

b1) $T(x, x) = 4(x, x)$ ✓

b2) $T(-2, 5) = \lambda(-2, 5)$ $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ (F)

tenemos las propiedades de los autovalores por
- Dos autovectores distintos no tienen autovectores comunes por eso b2 es falso.
- Un autovector admite un solo autovalor por eso b1 es verdadero

---

2) Sea una transformación lineal T: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ / $T(x, y, z) = (x + y + 3z,\ x + 5y + z,\ 3x + y + z)$

encuentre los valores de $\lambda \in \mathbb{R}$ y de $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ / tales que $T(\vec{v}) = \lambda.\vec{v}$.

Indique si los valores $\vec{v} \in \mathbb{R}^3$ encontrados determinan una base de $\mathbb{R}^3$, en caso afirmativo halle dicha base.

$M_{T_{EE}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ecuación característica $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$

Resolvemos el determinante pero primero, realizamos operaciones elementales para simplificar su resolución

$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ 3-(1-\lambda) & 0 & 1-\lambda-3 \end{pmatrix} \sim$ $E_3 - E_1$

$\sim \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ \lambda+2 & 0 & -(\lambda+2) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 3 \\ 1 & 5-\lambda & 1 \\ \lambda+2 & 0 & -\lambda-2 \end{vmatrix} = (\lambda+2)\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5-\lambda & 1 \end{vmatrix} - (\lambda+2)\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\lambda+2)(1-3(5-\lambda)) - (\lambda+2)((1-\lambda)(5-\lambda) - 1) = 0$ $\quad (\lambda+2)[1-15+3\lambda - (5-\lambda-5\lambda+\lambda^2-1)] =$

$= (\lambda-2)(-\lambda^2+9\lambda-18) = 0 \Rightarrow -(\lambda+2)(\lambda-3)(\lambda-6) = 0$ autovalores $\{-2, 3, 6\}$

[illegible]

$\lambda = -2$ $\qquad$ $\lambda = 6$ $\qquad$ $\lambda = 6$

[illegible]

Solución $(-z, 0, z)$ $\qquad$ Solución $(-z, z, z)$ $\qquad$ Solución $(x, x, \frac{4}{3}x)$

$\vec{v}_1 = (-1, 0, 1)$ $\qquad$ $\vec{v}_2 = (-1, 1, 1)$ $\qquad$ $\vec{v}_3 = (1, 1, \frac{4}{3})$

---

3) Determine para cada una de las siguientes matrices : el polinomio característico, sus autovalores y autovectores.

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ b) $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad$ c) $C=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1$

Por triangular superior

Para resolver este ejercicio ver teoría página 9

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad$ ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2 = 0$$

polinomio característico

• Determinamos los autovalores (son las raíces del polinomio)

$\boxed{\lambda_1 = 1 \quad , \lambda_2 = 1}$ $\quad$ 1 es de multiplicidad 2

• Determinamos el subespacio generado por los mismos, "subespacio asociado del autovalor"

$\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow y = 0$ $\quad$ solución $(x, 0)$ autovectores

$\vec{v}_1 = (1, 0)$ asociado a $\lambda = 1$

[illegible] multiplicidad 2, [illegible]

El subespacio que genera $\lambda = 2$ es de dimensión 1

---

b)

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ec. característica

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 0-\lambda & 1 \\ 1 & 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} = $$

Resolvemos: [illegible]

$$(0-\lambda)\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & 0-\lambda \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix} 1 & 0-\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$-\lambda(\lambda^2-1) - 1(-\lambda-1) + 1(1+\lambda) = P(\lambda)$$

polinomio característico

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0$$
$$-(\lambda-2)(\lambda+1)^2 = 0$$

$$\boxed{= \text{autovalores } \{-1, -1, 2\}}$$

$$\begin{array}{r|rrrr} & -1 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & & -2 & -4 & -2 \\ \hline & -1 & -2 & -1 & \underline{0} \\ -1 & & 1 & 1 & \\ \hline & -1 & -1 & \underline{0} & \end{array}$$

Buscamos el subespacio generado por los autovalores obtenidos

$\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Recordemos que el número de variables libres determina la dimensión del subespacio asociado.

Nº de v. libres = nº − rango de la matriz

$$2 = 3 - 1$$

Entonces $\lambda_1 = -1$ genera un subespacio de dimensión 2, es decir dos vectores li [illegible] a λ_1 [illegible] diagonalizable con el autovalor ...

Importante tener como resumen de los ejercicios siguientes, la matriz $A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$ no será diagonalizable, la matriz $B=\begin{pmatrix}2&1\\&2\end{pmatrix}$ no diagonalizable

para $\lambda=-1$

$$x+y+z=0 \Rightarrow x=-y-z$$

genérico $(-y-z,\ y, z)$

$\vec{v}_1=(-1,1,0)$ $\quad \vec{v}_2=(-1,0,1)$

Subespacio generado $=\boxed{\{(-1,1,0),\ (-1,0,1)\}}$

para $\lambda=2$

$$\begin{pmatrix}-2&1&1\\1&-2&1\\1&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-2&1&1\\0&-3&3\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-3y+3z=0 \Rightarrow y=z\\-2x+y+z=0\Rightarrow x=z\end{cases}$$

genérico (x,x,x)

$\boxed{\vec{v}_3=(1,1,1)}$

$$\boxed{\{(1,1,1),\ (-1,1,0),(-1,0,1)\}}$$

c) ecuación característica

$$C=\begin{pmatrix}2&1&1\\0&1&0\\1&-1&2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{vmatrix}2-\lambda&1&1\\0&1-\lambda&0\\1&-1&2-\lambda\end{vmatrix}=0$$

$$(2-\lambda)\begin{vmatrix}1-\lambda&0\\-1&2-\lambda\end{vmatrix}-1\underbrace{\begin{vmatrix}0&0\\1&2-\lambda\end{vmatrix}}_{=0}+1\begin{vmatrix}0&1-\lambda\\1&-1\end{vmatrix}=0$$

por props. de los det. anteriores

$(2-\lambda)\left[(1-\lambda)(2-\lambda)\right] - (1-\lambda) = 0$

$(2-\lambda)^2(1-\lambda) - (1-\lambda) = 0$

$(1-\lambda)\left[(2-\lambda)^2 - 1\right] = 0$ factor común de grupos

$1-\lambda = 0 \quad \vee \quad (2-\lambda)^2 - 1 = 0$

$\lambda = 1 \quad \vee \quad (2-\lambda)^2 = 1$

$|2-\lambda| = 1$

$2-\lambda = 1 \quad \vee \quad 2-\lambda = -1$

$\lambda = 1 \quad \vee \quad \lambda = 3$

Otra forma

$(2-\lambda)^2 - 1 = 0$

$4 + \lambda^2 - 4\lambda - 1 = 0$

$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$

$\lambda_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2}$

$\boxed{\text{Autovalores} \quad \{1, 1, 3\}}$

• Buscamos los autovectores asociados a los autovalores

<u>Recordemos</u> que como el autovalor $\lambda = 1$ es de multiplicidad 2, para que la matriz C sea diagonalizable, $\lambda = 1$ debe generar dos autovectores L.I.

<u>Recordemos</u> también que la dimensión del subespacio que genera es igual al nº de variables libres.

$\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

paso para de (1) a (2) equivalencia Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$\begin{pmatrix} & & \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x - y + z = 0 & x = -z \\ -2y = 0 & y = 0 \end{cases}$$

Vectores $(-z, 0, z)$ $\boxed{\vec{v}_1 = (-1, 0, 1)}$

El autovalor $\lambda = 1$ de multiplicidad 2 pero posee un autovector del mismo

$\lambda = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + y + z = 0 & x = z \\ -2y = 0 & y = 0 \end{cases}$$

Serían $(x, 0, x)$ $\boxed{\vec{v}_2 = (1, 0, 1)}$

Subespacio asociado

$\boxed{\{(-1, 0, 1), (1, 0, 1)\}}$ ejercicio N° 4 pag. 18

Las demostraciones de los ejercicios 5-6-7-8 en pizarra

9) Si la transformación lineal T es una reflexión sobre el plano z = 0, determine una base formada por los autovectores de T y encuentre la matriz asociada a T respecto a la base de autovectores.

Reflexión sobre el plano $z = 0$

$T(0, 0, 1) = (0, 0, -1)$

$T(0, 1, 0) = (0, 1, 0)$

$T(1, 0, 0) = (1, 0, 0)$

Buscamos la TL $\Rightarrow (x, y, z) = \alpha(0, 0, 1) + \beta(0, 1, 0) + \delta(1, 0, 0)$

$x = \delta, \quad y = \beta, \quad z = \alpha$

$T(x, y, z) = z(0, 0, -1) + y(0, 1, 0) + x(1, 0, 0)$

$T(x, y, z) = (x, y, -z)$

$$M_{BB}(T) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Por su matriz diagonal

$\{1, 1, -1\}$

Autovalores

AUTO VALORES • PROPIEDADES
• EXPRESION CARACTERISTICA

Autovalores y autovectores

Sea T: V→V una transformación lineal. (endomorfismo) a partir de la cual se verifica que para todos los vectores v∈V sus transformados son paralelos a v, verificándose la siguiente expresión.

$T(x) = \lambda x$ el vector es múltiplo escalar de su transformado

Si $x \neq \bar{0}$ y $\lambda \in \Re$ satisface la igualdad anterior, diremos que <u>λ es un autovalor o</u> valor propio de T y x es un autovector de T correspondiente al autovalor λ.

Otras definiciones:

"El escalar $\lambda \in \Re$, es un valor propio o autovalor, si existe un vector distinto del nulo tal que $T(v) = \lambda v$ "

"Todo vector distinto del nulo que satisfaga $T(v) = \lambda v$ se llama vector propio o autovector de la transformación lineal asociado al valor propio λ"

"Un vector propio de un endomorfismo es un vector distinto del nulo cuya imagen es un múltiplo escalar del mismo".

Propiedades:

1.- Dos autovalores distintos no tiene autovectores comunes.
Es equivalente a decir: "Un autovector admite solo un autovalor".
El reciproco, no es verdadero.

2.- A y A^t tienen los mismos autovalores.

3.- Si λ es autovalor de A; $k\lambda$ es un autovalor de kA.

4.- Si λ es un autovalor de A, **λ-k** es un autovalor de A -kI.

5.- Si λ es un autovalor de A, y A es regular $(|A| \neq 0)$, $1/\lambda$ **es autovalor de A**

6.- Autovectores correspondientes a autovalores distintos son linealmente independientes.

7.- Si λ es autovalor de A *entonces* λ^k es autovalor de A^k

<u>Autovalores y autovectores asociados a una matriz A^{nxn}</u>

Decimos que el escalar λ es un valor propio o autovalor de la matriz cuadrada A y el vector $x \neq \bar{0}$ es el autovector asociado λ si se verifica la expresión

$$Ax = \lambda \mathbf{x}$$

$$Ax = \lambda \mathbf{I}\mathbf{x} \quad \textbf{I matriz identidad}$$

Para hallar los autovalores plantemos :

$$Ax - \lambda \mathbf{I}\mathbf{x} = \vec{0}$$

$$(A - \lambda \mathbf{I})\mathbf{x} = \bar{0}$$

Como lo que ha quedado planteado es un sistema homogéneo, para que λ se autovalor deben existir otras soluciones además de la trivial por lo que

$|A - \lambda I| = 0$

Expresión que se denomina ecuación característica y al desarrollarla obtenemos el polinomio característico.

10) Sea una transformación lineal $T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ / $T(x,y,z)=(2x-3y-5z, -y+5z, 4z)$

a) Si es posible ,halle una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que la matriz $M_B(T)$ sea diagonal.

b) Halle otra transformación lineal distinta de la dada que tenga los mismos autovalores que T.

Para saber qué es cada paso y empezar a explicar ver "Teoría página 11"
La matriz $M_B(T)$ será diagonal si es diagonalizable o sea los autovalores son distintos o al menos 3

· Hallamos los autovalores

$$M_E(T) = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & 5 \\ 0 & -1-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Recordemos M es una matriz triangular por lo que el | | es el producto de los elementos de la diagonal ppal.

$$(2-\lambda)\cdot(-1-\lambda)(4-\lambda) = 0$$

$$\Rightarrow \lambda = 2 \vee \lambda = -1 \vee \lambda = 4$$

Es posible encontrar la matriz diagonal pues $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_1$ autovalores $= \{-1, 2, 4\}$

· ~~Buscamos el autoespacio generado~~

Si $\lambda = 2$ buscamos vectores asociados a $\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -3y + 5z = 0 \Rightarrow y = 0 \\ 2z = 0 \Rightarrow z = 0 \end{cases}$$

no obtenemos información respecto de x, por lo que concluimos que y toma todos los valores

Entonces genérico $(x, 0, 0)$ $\quad \vec{v}_1 = (1, 0, 0)$

Si $\lambda = -1$

Buscamos autovector asociado a $\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 3x - 3y + 5z = 0 & x = y \\ z = 0 \end{cases}$$

genérico $(x, x, 0)$ $\quad \vec{v}_2 = (1, 1, 0)$

Si $\lambda = 4$

$$\begin{pmatrix} -2 & -3 & 5 \\ 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 3y + 5z = 0 & x = z \\ -5y + 5z \Rightarrow y = z \end{cases}$$

genérico (x, x, x) $\quad \vec{v}_3 = (1, 1, 1)$ $\quad M_B(T) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

base $= \{(0,1,0); (1,1,0), (1,1,1)\}$

b) Para obtener otra T_1 distinta que tenga los mismos autovalores, hacemos el camino inverso.

Escribimos la matriz de la T en la base canónica que sea triangular superior (diferente a la correspondiente a la T dada), colocando en la diagonal los autovalores indicados $\{-1, 2, 4\}$

$M(T_1) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ la $T_1(x, y, z) = (-x, -x + 2y, 5x + 4z)$

Verificamos que $T_1 \neq T$

$T_1(3, 2, [illegible]) = (5, 0, [illegible]) \Rightarrow T_1 \neq T$

$T(3, 2, [illegible]) = (-3, [illegible])$

Ejercicio 11 de pag 26

12) Sea la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ 2 & 1 & b \\ 2 & 2 & c \end{pmatrix}$

a) Calcule los valores de a, b, c $\in \mathbb{R}$ para que $\lambda_1 = 1$ es un autovalor de A y tiene como autovector asociado a $\vec{v}_1 = (1,1,1)$

b) Analice si A es diagonalizable

Planteamos $(A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & a \\ 2 & 1-\lambda & b \\ 2 & 2 & c-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Con $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b \\ 2 & 2 & c-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

pero como el autovector asociado a λ_1 es $\vec{v}_1 = (1,1,1)$

Entonces $\begin{pmatrix} 0 & 2 & a \\ 2 & 0 & b \\ 2 & 2 & c-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 2 + a = 0 \Rightarrow a = -2 \\ 2 + b = 0 \Rightarrow b = -2 \\ 2 + 2 + c - 1 = 0 \Rightarrow c = -3 \end{cases}$

b) Analizamos si es diagonalizable:

1) Obtenemos los 3 autovalores si $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \lambda_1$ $\Rightarrow$ es diagonalizable

2) En caso de que no se cumpla 1, y alguno de los autovalores tenga multiplicidad 2, será necesario obtener el subespacio asociado y si la dim del subespacio asociado coincide con la multiplicidad A será diagonalizable

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & -2 \\ 2 & 1-\lambda & -2 \\ 2 & 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 1-\lambda \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)\left((1-\lambda)(-3-\lambda)+4\right) - 2\left(2(-3-\lambda)+4\right) - 2\left(4-2(1-\lambda)\right) = 0$$

$$(1-\lambda)\left(-3-\lambda+3\lambda+\lambda^2+4\right) - 2\left(-6-2\lambda+4\right) - 2\left(4-2+2\lambda\right) = 0$$

$$(1-\lambda)\left(\lambda^2+2\lambda+1\right) - 2\left(-2\lambda-2\right) - 2\left(2\lambda+2\right) = 0$$

$$(1-\lambda)\left(\lambda^2+2\lambda+1\right) \cancel{+4\lambda} + \cancel{4} \cancel{-4\lambda-4} = 0$$

$$(1-\lambda)\left(\lambda^2+2\lambda+1\right) = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-4}}{2} = -\frac{2}{2} = -1$$

Autovalores

$$\lambda = 1, \ \underbrace{\lambda_{1,2} = -1}_{\text{multiplicidad } 2}$$

Para saber si es diagonalizable entonces debemos obtener el subespacio asociado a $\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Recordemos que el nº de vectores de una base determina la dimensión del subespacio asociado

nº de vectores = n − rango de la matriz

$$2 = 3 - 1 \searrow \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & -2 \end{vmatrix}$$

Entonces puede ser subespacio de dimensión 2

[illegible]

DIAGONALIZACIÓN

Matriz Diagonal

La simplicidad de los cálculos cuando se trabaja con matrices diagonales. sugiere plantearse la siguiente cuestión ¿dada una transformación lineal caracterizada por una matriz A , será posible encontrar otra matriz diagonal ~~semejante a~~ A que represente la misma transformación ?

~~Si esto suc~~ede diremos que la matriz D es semejante a la matriz A. Y se podrá plantear un cambio de base (a la base de las direcciones propias) y trabajar con la matriz semejante que es la matriz Diagonal. Este concepto lo aplicaremos cuando veamos rototraslación de cónicas.

Suponiendo que esto suceda dada la matriz A, es necesario encontrar los escalares que serán los elementos de la diagonal principal.

Los escalares serán los autovalores, cuya definición y cálculo lo hemos puntualizado.

Planteamos ahora el concepto y las propiedades de las matrices diagonalizables. **Dada una matriz cuadrada A , se dice que es diagonalizable si existen una matriz diagonal, D y una matriz regular, P , tales que: $A = PDP^{-1}$**

Habitualmente, se dice que dos matrices A y B son semejantes si, y sólo si, existe una matriz regular P tal que $P^{-1}AP = B$. De este modo, se tiene que una matriz cuadrada es diagonalizable si, y sólo si, es semejante a una diagonal.

- **A es la matriz diagonalizable**
- **D es la matriz diagonal** (los elementos de la diagonal son los autovalores)
- **P es la matriz cuyas columnas están formadas por los autovectores asociados a los autovalores.**
- **P^{-1} es la inversa de P** (P es inversible pues los autovectores asociados a los autovalores son li)
    - Una matriz A es diagonalizable si tiene todos sus autovalores distintos
    - Una matriz A es diagonalizable si la multiplicidad de los autovalores es igual a la dimensión del subespacio que generan.
    -

Las matrices **semejantes** tienen :

- El mismo determinante
- El mismo rango
- La misma traza
- El mismo polinomio característico
- La misma nulidad.
- Los mismos valores propios

<u>Diagonalización ortogonal</u>.

Sea A una matriz cuadrada de elementos reales. Se llama matriz ortogonal a aquella matriz que cumple que: $A^t = A^{-1}$

Además se cumple que si A es ortogonal entonces $|A| = \pm 1$.

Si existe una matriz ortogonal P tal que $P^{-1}AP$ es diagonal, entonces se dice que A es diagonalizable ortogonalmente.

P es la matriz cuyas columnas están formadas por los <u>autoversores</u> asociados a los autovalores.

13) Diagonalice ortogonalmente la matriz simétrica dada. Encuentre la matriz ortogonal P tal que $P^{-1}.A.P = P^{t}.A.P$

a) $A=\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

a)

$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$ ecuación característica

$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ 2 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0$

polinomio característico

$(3-\lambda)(-\lambda) - 4 = 0$

$-3\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$\boxed{\text{autovalores } \{-1, 4\}}$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{3 \pm 5}{2}$

$\lambda = 4 \vee \lambda = -1$

· Buscamos los autovectores y como hablamos de diagonalización "ortonormal", entonces determinamos los autoversores asociados

* $\lambda_1 = 4$

$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases}$ $x = 2y$

$\vec{v}_1$ genérico $(2y; y)$ $\vec{v}_1 = (2, 1)$ $|\vec{v}_1| = \sqrt{5}$

$\breve{v}_1 = \left(\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

* $\lambda_2 = -1$

$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$ $2x = -y$

$\vec{v}_2$ genérico $(x, -2x)$ $\vec{v}_2 = (1, -2)$ $|\vec{v}_2| = \sqrt{5}$

$\breve{v}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{-2}{\sqrt{5}}\right)$

$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Verificamos que como P es ortogonal $\Rightarrow P^{-1} = P^T$
entonces $P^{-1}AP = P^TAP$

$$\text{Si } P^{-1} = P^T \Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} \\ \frac{1}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} \\ \frac{1}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} \\ \frac{1}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Verificamos que</u>

$$P^{-1}AP = D$$

$$\underset{2\times2}{\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} \\ \frac{1}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5} \end{pmatrix}}\underset{2\times2}{\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}}\underset{2\times2}{\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} \\ \frac{1}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5} \end{pmatrix}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3\cdot\frac{2}{\sqrt5} + 2\frac{1}{\sqrt5} & 2\frac{2}{\sqrt5} + 0 \\ 3\frac{1}{\sqrt5} - 2\frac{2}{\sqrt5} & 2\frac{1}{\sqrt5} + 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} \\ \frac{1}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{8}{\sqrt5} & \frac{4}{\sqrt5} \\ -\frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} \\ \frac{1}{\sqrt5} & -\frac{2}{\sqrt5} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{8}{\sqrt5}\cdot\frac{2}{\sqrt5} + \frac{4}{\sqrt5}\frac{1}{\sqrt5} & \frac{8}{\sqrt5}\frac{1}{\sqrt5} + \frac{4}{\sqrt5}\left(-\frac{2}{\sqrt5}\right) \\ -\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{2}{\sqrt5} + \frac{2}{\sqrt5}\frac{1}{\sqrt5} & \left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\frac{1}{\sqrt5} + \frac{2}{\sqrt5}\left(-\frac{2}{\sqrt5}\right) \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{20}{5} & 0 \\ 0 & -\frac{5}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Se prueba la matriz D y P se reemplazan

con cambio a D y a P
Verificamos sólo como ejemplo que $P^{-1}AP = D$

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

polinomio característico

$$(1-\lambda)(1-\lambda) - 1 = 0$$

$$(1-\lambda)^2 - 1 = 0$$ [illegible] con módulo

$$(1-\lambda)^2 = 1$$

$$|1-\lambda| = 1$$

$$1-\lambda = 1 \quad \vee \quad 1-\lambda = -1$$

$$\lambda = 0 \quad \vee \quad \lambda = 2$$

autovalores $\{2, 0\}$

* $\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x + y = 0 \\ x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = y$$

$\vec{v}_1$ genérico (x, x) $\quad \vec{v}_1 = (1, 1) \quad |\vec{v}_1| = \sqrt{2}$

$$\vec{v}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

* $\lambda = 0$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{ x + y = 0 \Rightarrow x = -y$$

$\vec{v}_2$ genérico $(x, -x)$ $\quad \vec{v}_2 = (1, -1) \quad |\vec{v}_2| = \sqrt{2}$

$$\vec{v}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

4) En cada caso indicar si la matriz A es diagonalizable. Si lo es encontrar la matriz P tal que $P^{-1}.A.P$ sea diagonal

a) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$

Para determinar si A es diagonalizable, buscamos los autovalores si $\lambda_1 \neq \lambda_2 = \lambda_3$ es diagonalizable y $\exists P / P^{-1} A P = D$.

Si $\lambda_1 = \lambda_2$, entonces se deberá cumplir que la multiplicidad del autovalor sea igual a la dimensión del subespacio que genera, entonces será diagonalizable.

Buscamos los autovalores

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

ecuación característica

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 0 & 6 \\ 0 & -3-\lambda & 0 \\ 5 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollamos el determinante:

$$(3-\lambda)\begin{vmatrix} -3-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 0 & -3-\lambda \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$(3-\lambda)(-3-\lambda)(2-\lambda) - 30(-3-\lambda) = 0$$

$$(-3-\lambda)\left[(3-\lambda)(2-\lambda) - 30\right] = 0 \quad \text{factor común en grupos}$$

$$-(3+\lambda)(\lambda^2 - 5\lambda - 24) = 0$$

$$-(3+\lambda)(\lambda-8)(\lambda+3) = 0 \Rightarrow \boxed{\begin{matrix}\text{autovalores} \\ \{-3, 8, -3\}\end{matrix}}$$

Para determinar si A es diagonalizable $\lambda = -3$ debe generar un subespacio de dimensión 2

Buscamos el subespacio asociado

$\lambda = -3$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 6z = 0 \\ x = -z \end{cases}$$

No tenemos información respecto a y, significa que es cualquiera. Tomo todos los valores

genérico $\vec{v} = (-z, y, z)$

$\vec{v}_1 = (-1, 0, 1)$ $\quad \vec{v}_2 = (0, 1, 0)$

Buscamos el autovector asociado

$\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 6 \\ 0 & -11 & 0 \\ 5 & 0 & -6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5 & 0 & 6 \\ 0 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -11y = 0 \Rightarrow y = 0 \\ -5x + 6z = 0 \Rightarrow x = \frac{6}{5}z \end{cases}$$

genérico $\vec{v} = \left(\frac{6}{5}z, 0, z\right)$ $\quad \vec{v}_3 = \left(\frac{6}{5}, 0, 1\right)$

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \frac{6}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$ Verificamos $P^{-1} A P = D$

Buscamos P^{-1}

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & \frac{6}{5} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -\frac{6}{5} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -\frac{6}{5} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{5} & 1 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & \frac{6}{5} & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5/11 & 0 & 5/11 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -\frac{5}{11} & 0 & 6/11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5/11 & 0 & 5/11 \end{array}\right)$$

$P^{-1} P = I$

$$\begin{pmatrix} -\frac{5}{11} & 0 & \frac{6}{11} \\ 0 & 1 & 0 \\ 5/11 & 0 & 5/11 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & 0 & +\frac{6}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{11} & 0 & +\frac{6}{11} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{5}{11} & 0 & \frac{5}{11} \end{pmatrix}$$

[illegible]

$$P^{-1} A P = D$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{5}{11} & 0 & \frac{6}{11} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{5}{11} & 0 & \frac{5}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & +\frac{6}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \left(-\frac{5}{11}\right)\cdot 3 + 5\cdot\frac{6}{11} & 0 & \left(-\frac{5}{11}\right)6 + 2\cdot\frac{6}{11} \\ 0 & -3 & 0 \\ 3\cdot\frac{5}{11} + 5\cdot\frac{5}{11} & 0 & 6\cdot\frac{5}{11} + 2\cdot\frac{5}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & +\frac{6}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{15}{11} + \frac{30}{11} & 0 & -\frac{30}{11} + \frac{12}{11} \\ 0 & -3 & 0 \\ \frac{15}{11} + \frac{25}{11} & 0 & \frac{30}{11} + \frac{10}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & +\frac{6}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \frac{15}{11} & 0 & -\frac{18}{11} \\ 0 & -3 & 0 \\ \frac{40}{11} & 0 & \frac{40}{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & +\frac{6}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{15}{11} - \frac{18}{11} & 0 & \left(+\frac{6}{5}\right)\frac{15}{11} - \frac{18}{11} \\ 0 & -3 & 0 \\ -\frac{40}{11} - \frac{40}{11} & 0 & \frac{40}{11}\left(+\frac{6}{5}\right) + \frac{40}{11} \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & +8 \end{pmatrix}}$$

[illegible]

$$P^{-1} A P = D$$

b)

$$B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 4-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 2 \\ 2 & 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

ecuación característica

Desarrollamos por la 1° fila

$$(4-\lambda)\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 \\ 3 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (4-\lambda)\,[(2-\lambda)(1-\lambda) - 2\cdot 3] = 0$$

polinomio característico

$$(4-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 4) = 0 \quad \text{autovalores } \{4, -1, 4\}$$

$$(4-\lambda)(\lambda-4)(\lambda+1) = 0$$

Para determinar si B es diagonalizable $\lambda = 4$ deberá generar un subespacio de dimensión 2.

Para $\lambda = 4$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

la dimensión coincide con el número de variables libres

$$n^\circ \text{ v. libres} = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{orden}}}{n} - \text{rango } B$$

$$1 = 3 - 2$$

no es diagonalizable

$$\begin{cases} -2x + 2y = 0 \Rightarrow x = y \\ 2x + 3y - 3z = 0 \Rightarrow 5y = 3z \Rightarrow y = \frac{3}{5} z \end{cases}$$

genérico $(y, y, \frac{5}{3} y)$ $\quad \vec{v}_1 = (1, 1, \frac{5}{3})$

para $\lambda = 4$ se considera 1 sólo autovector

14) Sea $\mathbb{S}_1 = \text{gen}\{(1, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 2), (-1, 0, 1, 1)\}$

a) Defina, si es posible, una transformación lineal $T: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ que verifique simultáneamente:

$\mathbb{S}_1$ es autoespacio de T asociado al autovalor (-1) y $\dim(\text{Nu } T) = 2$

b)Indique si existe una base de $\mathbb{R}^4$ formada por autovectores de T. En caso afirmativo, obtenga la matriz asociada a T respecto de dicha base.

Buscamos la TL que satisfaga las condiciones planteadas (i)

$T(\ \ ,\ \ ,\ \ ,\ \ ) = (\ \ ,\ \ ,\ \ ,\ \ )$
$T(\ \ ,\ \ ,\ \ ,\ \ ) = (\ \ ,\ \ ,\ \ ,\ \ )$
$T(\ \ ,\ \ ,\ \ ,\ \ ) = (\ \ ,\ \ ,\ \ ,\ \ )$
$\underbrace{T(\ \ ,\ \ ,\ \ ,\ \ )}_{a} = \underbrace{(\ \ ,\ \ ,\ \ ,\ \ )}_{b}$

deben ser base

Recordemos para armar la T como $\mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, planteamos (i).
* (b) es la Imagen
* (a) conjunto de solución $Nu(T) \subset$ (a)
* como los T del Nu son el $\vec{0}_w \Rightarrow$ en la imagen $(0,0,0,0)$

Si S_1 es el autoespacio asociado al autovalor (-1) recordamos que $T(\vec{v}) = (-1)\,\vec{v}$.

Entonces $T(-1,-1,0,-1) = -1(-1,-1,0,-1) = (1,1,0,1)$
$T(0,-1,-1,-2) = -1(0,-1,-1,-2) = (0,1,1,2)$
$T(1,0,-1,-1) = -1(1,0,-1,-1) = (-1,0,1,1)$

Pero la $\dim(Nu\,T) = 2$ por lo tanto $\{(-1,-1,0,-1),(0,-1,-1,-2),(1,0,-1,-1)\}$ son LD y $\dim Im(T) = 2$

$\vec{v}_1 = (-1,-1,0,-1)$ $\vec{v}_2 = (0,-1,-1,-2)$ $\vec{v}_3 = (1,0,-1,-1)$

$\vec{v}_2 = \vec{v}_1 + \vec{v}_3$ son LD

Completamos

$T(-1,-1,0,-1) = (1,1,0,1)$
$T(0,-1,-1,-2) = (0,1,1,2)$
$T(0,0,1,1)^* = (0,0,0,0)$
$T(0,0,0,1)^* = (0,0,0,0)$

* $* \in Nu(T)$; $Nu(T)$ gen$\{(0,0,1,1),(0,0,0,1)\}$ Se completa con 2 vectores LI.

Para facilitar los cálculos como los vectores

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

deben ser LI entonces $|\ \ | \neq 0$ completamos de manera tal que determinen una matriz triangular. El $|\;|$ de una matriz triangular es el producto de los elementos de la diagonal principal. $(|\;|=1)$

Buscamos la expresión de la TL

$(x, y, z, w) = \alpha(-1,-1,0,1) + \beta(0,-1,-1,-2) + \delta(0,0,1,1) + \theta(0,0,0,1)$

$$\begin{cases} x = -\alpha & \longrightarrow \quad x = -\alpha \Rightarrow \alpha = -x \\ y = -\alpha - \beta & \longrightarrow \quad y + \alpha = -\beta \Rightarrow \beta = x - y \\ z = -\beta + \delta & \longrightarrow \quad z + \beta = \delta \Rightarrow \delta = z - y + x \\ w = -\alpha - 2\beta + \delta + \theta & \longrightarrow \quad w + \alpha + 2\beta - \delta = \theta \Rightarrow \theta = w - y - z \end{cases}$$

$T(x, y, z, w) = -x(1,1,0,1) + (x-y)(0,1,1,2) + (z-y+x)(0,0,0,0) +$
$(w-y-z)(0,0,0,0)$

$T(x, y, z, w) = (-x,\ -x+x-y,\ x-y,\ -x+2x-2y)$

$$\boxed{T(x, y, z, w) = (-x,\ -y,\ x-y,\ x-2y)}$$

la T obtenida no es única pues los vectores * y * podrían haber sido otros que formaran base con $(-1,-1,0,-1)$ y $(0,-1,-1,-2)$

b) Determinar los autovalores:

La matriz asociada respecto de las bases canónicas

$$M = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ecuación característica

$$\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0-\lambda & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante

$$(-1-\lambda)\begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 \\ -1 & 0-\lambda & 0 \\ -2 & 0 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(-1-\lambda)(-1-\lambda)\begin{vmatrix} 0-\lambda & 0 \\ 0 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$(-1-\lambda)(-1-\lambda)\cdot\lambda^2 = 0$

Autovalores $\{-1, -1, 0, 0\}$

Entonces la matriz diagonal

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Determinemos los autovectores asociados a los autovalores

* $\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} -1-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -\lambda & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x - y + z = 0 \quad \therefore \boxed{y = x + z} \\ x - 2y + w = 0 \quad \therefore w = 2y - x \\ \therefore \; w = 2(x+z) - x \\ \quad w = 2x + 2z - x \\ \quad \boxed{w = x + 2z} \end{array} \right.$$

genérico $(x, x+z, z, x+2z)$

$$\boxed{\vec{v}_1 = (1, 1, 0, 1) \qquad \vec{v}_2 = (0, 1, 1, 2)}$$

* $\lambda = 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x = 0 \\ y = 0 \\ x - y = 0 \\ x - 2y = 0 \end{array} \right.$$

genérico $(0, 0, z, w)$ $\boxed{\vec{v}_3 = (0, 0, 1, 0) \quad \vec{v}_4 = (0, 0, 0, 1)}$

autovectores $\{(1, 1, 0, 1), (0, 1, 1, 2), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)\}$

Ejercicios 5 - 6 - 7 - 8 - 11

Demostraciones

5) Demuestre las siguientes propiedades para $A \in \mathbb{R}^{nxn}$

a) $\lambda = 0$ es autovalor de $A \Leftrightarrow A$ no es inversible

b) Los autovalores de una matriz triangular son los elementos de la diagonal principal

c) A y A' tienen el mismo polinomio caracteristico(y por lo tanto, los mismos autovalores)

a) $\lambda = 0$ es autovalor de $A \Leftrightarrow A$ no es inversible

Si suponemos que A es diagonalizable, entonces existe una matriz D, formada por los autovalores de A.

Se cumple $D = P^{-1} A P$ siendo P la matriz de los autovectores asociados a los autovalores

aplicamos determinante

$$|D| = |P^{-1}||A||P| \quad \text{por prop. de los determinantes}$$

$$|D| = \frac{1}{\cancel{|P|}} |A| \cancel{|P|}$$

$|D| = |A|$ las matrices D y A tienen el mismo determinante

El determinante de D, es el producto de los escalares de la diagonal ppal $\Rightarrow |D| = 0$

El $|D| = 0 \Leftrightarrow (|A| = 0 \wedge \nexists A^{-1})$

Otra forma

Ecuación característica

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$|A - 0I| = 0 \quad \text{para } \lambda = 0 \text{ autovalor}$$

$$|A - N| = 0 \quad 0I = N \text{ matriz nula}$$

$$|A| = 0 \Rightarrow \nexists A^{-1}$$

b) Los autovalores de una matriz triangular son los elementos de la diagonal ppal.

A es una matriz triangular $\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \ddots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \ddots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

$A - \lambda I$ es matriz triangular

$|A - \lambda I|$ = resulta por propiedad de los determinantes en el producto de los elementos de la diagonal

Planteamos la ecuación característica y desarrollando el polinomio característico tenemos

$(a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\cdot(a_{33} - \lambda) \quad (a_{nn} - \lambda) = 0$

Las raíces del polinomio son los autovalores de $A \Rightarrow \lambda_1 = a_{11}$

$\lambda_2 = a_{22}$

$\dots$

$\lambda_n = a_{nn}$

c) A y A^t tienen el mismo polinomio característico (y por lo tanto, los mismos autovalores)

Debemos probar que

$$\boxed{|A - \lambda I| \overset{?}{=} |A^t - \lambda I|}$$

$|A - \lambda I| = |(A - \lambda I)^t| \rightarrow$ por propiedad de los determinantes $|A| = |A^t|$

$= |A^t - \lambda I^t| \rightarrow$ por propiedad de la traspuesta $(A + B)^t = A^t + B^t$

$= |A^t - \lambda I| \rightarrow$ pues $(\lambda I)^t = \lambda I$

6) Si A y P son matrices cuadradas, tal que P es no singular. Demuestre que las matrices A y B tienen el mismo polinomio característico siendo $B = P.A.P^{-1}$

debemos demostrar que A y B tienen el mismo polinomio característico

es decir $|A-\lambda I|$ debe ser igual a $|B-\lambda I|$

Partimos de

$$1)\ M = A - \lambda I$$

$$MP^{-1} = (A-\lambda I)P^{-1}$$ multiplicamos ambos miembros por P^{-1}

$$MP^{-1} = AP^{-1} - \lambda I P^{-1}$$ prop distributiva

$$PMP^{-1} = P(AP^{-1} - \lambda I P^{-1})$$ premultiplicamos ambos miembros

$$PMP^{-1} = PAP^{-1} - \underbrace{P\lambda I P^{-1}}_{\lambda I}$$ prop distributiva

$$PMP^{-1} = \underbrace{P.AP^{-1}}_{B} - \lambda I$$

$$P(A-\lambda I)P^{-1} = B - \lambda I \quad \text{por } 1$$

$$|P(A-\lambda I)P^{-1}| = |B-\lambda I|$$ aplico determinante

$$|P|\,|A-\lambda I|\,|P^{-1}| = |B-\lambda I|$$ el determinante del producto es igual al producto de los determinantes

$$|P|\,|A-\lambda I|\,\frac{1}{|P|} = |B-\lambda I|$$ por prop del determinante de una matriz y su inversa $|P| \neq 0$ pues $\exists P^{-1}$

$$|A-\lambda I| = |B-\lambda I|$$

A y B tienen el mismo polinomio característico

VERDADERO Y FALSO

7)Demuestre que si λ es un autovalor de una matriz idempotente entonces $\lambda=0$ o $\lambda=1$
(Nota Una matriz cuadrada A es idempotente si y sólo si es $A^2 = A$)

① $\boxed{A\vec{x} = \lambda\vec{x}}$ $\Rightarrow$ $\underset{\substack{\text{multiplicamos A} \\ \text{ambos miembros}}}{A^2\vec{x} = \lambda A\vec{x}}$ $\Leftrightarrow$ $\underset{\substack{A = A^2 \\ \text{por idempotencia}}}{A\vec{x}} = \lambda\underbrace{(\lambda\vec{x})}_{\substack{A\vec{x} \\ \text{por ①}}}$ $\Leftrightarrow$ $A\vec{x} = \lambda^2\vec{x}$

$A.A\vec{x} = A\lambda\vec{x}$

$\Leftrightarrow$ $\underset{\text{por ①}}{\lambda\vec{x}} = \lambda^2\vec{x}$ $\Leftrightarrow$ $\lambda\vec{x} - \lambda^2\vec{x} = \vec{0}$ $\Leftrightarrow$ $(\lambda - \lambda^2)\vec{x} = \vec{0}$

$\Rightarrow$ por ser $\vec{x}$ autovector es distinto $\vec{0}$ entonces

$(\lambda - \lambda^2) = 0 \Rightarrow \lambda(1-\lambda) = 0$ los autovalores de una matriz idempotente son 1 y -1

8) Si A y B son dos matrices cuadradas de orden n, tal que una por lo menos de ellas es no singular , pruebe que A.B y B.A tienen los mismos autovalores.

① $|AB - \lambda I| = 0 = P(\lambda)$ $\quad (A.B) - \lambda I = M \quad \Rightarrow |M| = 0 = p(\lambda)$

por Hip $\exists B^{-1} \Rightarrow |B| \neq 0$

$((A.B) - \lambda I)B^{-1} = MB^{-1}$

$(A.BB^{-1} - \lambda B^{-1}) = MB^{-1}$

$(A - \lambda B^{-1}) = MB^{-1}$

$B(A - \lambda B^{-1}) = BMB^{-1}$

$(BA - \lambda I) = BMB^{-1}$

Entonces

② $|(BA) - \lambda I| = |B|\,|M|\,|B^{-1}|$

$= k.0.\frac{1}{k} = 0$

Entonces ① = ②

A.B y B.A tienen los mismos autovalores

11) Analice la validez de las siguientes proposiciones para $A \in \mathbb{R}^{nxn}$

a) Si A tiene n autovalores distintos es diagonalizable

b) Si A es diagonalizable, entonces tiene n autovalores distintos

c) Los autovectores asociados a un mismo autovalor son siempre linealmente dependientes.

d) El número de autovalores distintos de una matriz es siempre menor o igual al grado del polinomio característico de dicha matriz

e) Si A es una matriz cuadrada y $\lambda = 3$ es uno de los autovalores , entonces el sistema de ecuaciones $(A-3I).\vec{x} = \vec{0}$ es compatible determinado

a) Verdadero, cada autovalor está asociado a un autovector. Los autovectores asociados a un autovalor distinto son l.i.

b) Si A es diagonalizable entonces tiene n autovalores distintos.

<u>Falso</u> A puede ser diagonalizable aún teniendo autovalores de multiplicidad distinta de 1. Si está garantizada la [illegible] multiplicidad geométrica igual a la multiplicidad, A será diagonalizable

c) Los autovectores asociados a un mismo autovalor son siempre linealmente dependientes.

<u>Falso</u> los autovectores asociados a un mismo autovalor son LI

d) El número de autovalores distintos de una matriz es siempre menor o igual al grado del polinomio característico de dicha matriz

<u>Verdadero</u> El número de autovalores será n, si son todos distintos coincidirá con el grado del polinomio, de lo contrario será menor

e) Si A es una matriz cuadrada y $\lambda = 3$ es uno de los autovalores, entonces el sistema de ecuaciones $(A - 3I)\vec{x} = \vec{0}$ es compatible determinado

<u>Falso</u>

Cónicas
Trabajo Práctico N° 7
Primera parte

Las cónicas responden a la ecuación general del tipo $F(x,y)=0$

$$\underbrace{Ax^2+Bxy+Cy^2}_{\text{términos cuadráticos}}\ \underbrace{+Dx+Ey}_{\text{términos lineales}}\ \underbrace{+\ F}_{\text{término independiente}} = 0 \quad (1)$$

Bxy término rectangular, su presencia indica que la cónica está rotada (por ahora $Bxy=0$)

1 1) **Circunferencia**

- **Definición**: Es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo llamado Centro. Equidistar significa igual distancia. Esa distancia es el radio
- **Ecuación canónica**:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

- **Centro**: (α,β)
- **Radio** $= r$
- En (1) = $B=0$ y $A=C$
- Si $A=C$ la cónica pertenece al género circunferencia. Pero no es necesariamente una circunferencia.

La ecuación de la circunferencia puede degenerar en:

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2$$

Si $r^2=0 \Rightarrow (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=0$

es un punto $C(\alpha,\beta)$

Si $r^2<0 \Rightarrow (x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=u<0$

no puede ser que la suma de dos números positivos sea un número negativo $\Rightarrow$ en ese caso $\nexists$ lugar geométrico
no existe

1)Determine cuáles de las siguientes ecuaciones representan circunferencias

a) $x^2+y^2-6x+2y+36=0$ b) $x^2+y^2+8x+15=0$

c) $x^2-y^2-4x-4y+8=0$

---

a) $x^2+y^2-6x+2y+36=0$

Para obtener la ecuación canónica, completamos cuadrados

Asociamos los términos en x y los términos en y

$$(x^2-6x+\underbrace{\ldots}_{1})+(y^2+2y+\underbrace{\ldots}_{2})=-36+\overbrace{\ldots}^{1}+\overbrace{\ldots}^{2}$$

Completamos primero 1

$$\underbrace{x^2}_{a^2}\underbrace{-6x}_{2ab}+\underbrace{\ldots\ldots}_{b^2}=a^2+2ab+b^2$$

:

$$x^2-6x+\ldots\ldots=x^2+2x.b+\ldots\ldots$$

Si $-6x=2xb$

$\boxed{-3=b}$

2

Comparando

x^2-6x+9 con la expresión x^2-6x

vemos que hemos <u>sumado 9</u>

Hacemos el ejercicio 1) y redondeamos la idea.
Agrupamos los términos en x y los términos en y

$$\left(x^2-6x+\underbrace{9}_{①}\right)+\left(y^2+2y+\underbrace{1}_{②}\right)=-36+\underbrace{9}_{①}+1$$

Hacemos lo mismo con

$$y^2+2y+\ldots = y^2+2yb+\ldots$$

$$2y=2yb$$
$$1=b \rightarrow ②$$

$$y^2+2y+1 \Rightarrow (y+1)^2$$

Cuando se suma en un miembro, también se suma en el otro para no modificar la ecuación

$$\underbrace{(x^2-6x+9)}+(y^2+2y+1)=-36+9+1$$
$$(x-3)^2+(y+1)^2=\underline{-26}$$
$$r^2<0$$

$\boxed{\text{no existe lugar geométrico}}$

---

b) $x^2+y^2+8x+15=0$ $\quad 8x=2xb$

$$\left(x^2+8x+\underbrace{\overset{b^2}{16}}_{①}\right)+y^2=-15+\underbrace{16}_{①} \qquad \underline{4=b}$$

$(x+4)^2+y^2=1$ $\qquad r^2>0 \Rightarrow$ Circunferencia de $r=1$ y $C(-4,0)$

c) $x^2+y^2-4x-4y+8=0$

$(x^2-4x+..4..)+(y^2-4y+..4..)=-8+..4..+..4..$

$(x-2)^2+(y-2)^2=\underline{0}$

$r^2=0$

$$\left\{\begin{array}{l} -4x = 2xb \\ -2 = b \\ 4 = b^2 \\ -4y = 2yb \\ -2 = b \\ 4 = b^2 \end{array}\right.$$

Es una circunferencia que ha degenerado en un punto el centro $\boxed{C(2,2)}$

2) Encuentre la ecuación de una circunferencia

a) si los extremos de uno de sus diámetros son (4,-3) y (-2,7)

b) con centro en el punto (0,-1) y un extremo de un diámetro en (2,4).

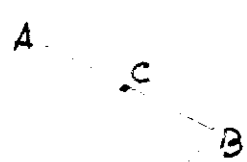
c) con centro en el eje de abscisas y pasa por los puntos (2,3) y (6,-1).

d) que es tangente al eje de abscisas en el punto (2,0) y pasa por el punto (-1,3).

a) si los extremos de uno de sus diámetros son $(4,-3)$ y $(-2,7)$

$A(4,-3)$

$B(-2,7)$



→ figura de análisis

Reemplazamos cada punto en la ecuación

$A \in C \Rightarrow (4-\alpha)^2+(-3-\beta)^2=r^2 \quad (1)$

$B \in C \Rightarrow (-2-\alpha)^2+(7-\beta)^2=r^2 \quad (2)$

El centro es el punto medio del segmento que determinan los puntos A y B

Recordamos coordenadas punto medio

Dados los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$

$$P_m = \left(\frac{x_1 + x_2}{2} \, , \, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

$$P_m = \left(\frac{4-2}{2} \, , \, -\frac{3+7}{2} \right)$$

$$P_m = (1, 2) \Rightarrow C(-1, 2)$$

Reemplazando en ①

$$(4-1)^2 + (-3-2)^2 = r^2$$

$$9 + 25 = r^2$$

$$\Rightarrow r^2 = 36$$

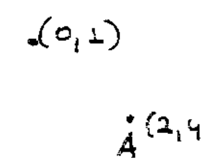
Ecuación

$$\boxed{(x-2)^2 + (y-2)^2 = 36}$$

---

b) Con centro en $(0,-1)$ y un extremo del diámetro en $(2,4)$

figura de análisis



$$A \in C \Rightarrow (2-\alpha)^2 + (4-\beta)^2 = r^2$$

$$\text{Centro} \in C \Rightarrow (2-0)^2 + (4+1)^2 = r^2$$

$$4 + 25 = r^2$$

$$r^2 = 29$$

$$\boxed{x^2 + (y+1)^2 = 29}$$

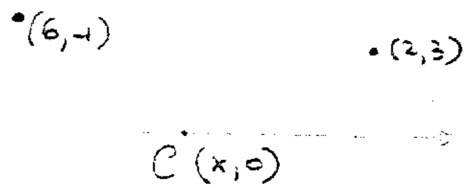
---

c) Centro en el eje de abscisas (eje x) pasa por los puntos $(2,3)$ y $(6,-1)$

$(2,3) \in$ a la Circunferencia

$$(2-\alpha)^2+(3-\beta)^2=r^2 \quad (1)$$

$(6,-1) \in$ a la Circunferencia



$$(6-\alpha)^2+(-1-\beta)^2=r^2 \quad (2)$$

El eje de abscisas, no el origen

Igualando (1) y (2)

figura de análisis

$$(2-\alpha)^2+(3-\beta)^2 = (6-\alpha)^2+(-1-\beta)^2 \quad (3)$$

El centro por pertenecer al eje x será de la forma $(x,0) \Rightarrow \beta=0$

Desarrollando (3) y $\beta=0$

$$4+4\alpha+\alpha^2+9 = 36-12\alpha+\alpha^2+1$$

$$4+9-36-1 = -8\alpha$$

$$-24 = -8\alpha$$

$$\alpha = 3 \Longrightarrow C\,(3,0)$$

Ecuación

$$(x-3)^2+y^2=r^2$$

$$(2-3)^2+3^2=r^2$$

$$1+9=r^2 \Rightarrow r^2=10$$

$$\boxed{(x-3)^2+y^2=10}$$

d) Es tangente en el eje de abscisas en el punto $(2,0)$ y pasa por $(-1,3)$

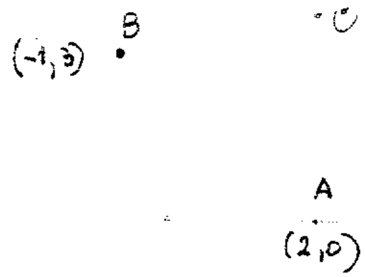


figure de análisis

$\{ \in$ pertenece

$(-1,3) \in$ Circunferencia

$$(-1-\alpha)^2 + (3-\beta)^2 = r^2 \quad ①$$

$(2,0) \in$ Circunferencia

$$(2-\alpha)^2 + (0-\beta)^2 = r^2 \quad ②$$

Si observamos la figura de análisis el centro está en $C(2,\beta)$

Remplazamos $\alpha = 2$ en ① y ②

$$(-1-2)^2 + (3-\beta)^2 = (2-2)^2 + (-\beta)^2$$

$$9 + (3-\beta)^2 = 0 + \beta^2$$

$$9 + 9 - 6\beta + \cancel{\beta^2} = \cancel{\beta^2}$$

$$18 = 6\beta \Rightarrow \beta = 3 \quad \text{El centro } (2,3)$$

Ecuación

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = r^2$$

Reemplazando en ① por el Centro

$$(2-2)^2 + (-3)^2 = r^2 \Rightarrow r^2 = 9$$

La ecuación es entonces

$$\boxed{(x-2)^2+(y-3)^2=9}$$

Parábola

- Definición: Es el lugar geométrico de los puntos $P(x,y)$ que equidistan de una recta fija llamada directriz y un punto fijo llamado foco.
- Vértice (α,β)
- En la ecuación general de las cónicas
$Ax^2+Cy^2+Dx+Ey+F=0$
Para que la ecuación represente al género "parábola" A ó C deben ser $=0$

- Una parábola puede degenerar en una recta, un par de rectas paralelas o bien no existir el lugar geométrico

Ejemplo

$(y-\beta)^2=2p$ si $2p=0$ 1 recta
$2p>0$ 2 rectas //
$2p<0$ $\nexists$ lugar geométrico

Recordar para resolver ejercicio 12

Eje focal paralelo eje x	Eje focal paralelo eje y
• Vértice (α, β)	• Vértice (α, β)
• foco $\left(\frac{p}{2}+\alpha, \beta\right)$	• foco $\left(\alpha, \frac{p}{2}+\beta\right)$
• directriz $x = \alpha - \frac{p}{2}$	• directriz $y = \beta - \frac{p}{2}$
• lado recto $= 2\lvert p \rvert$	• lado recto $2\lvert p \rvert$
• eje focal $y = \beta$	• eje focal $x = \alpha$
• Ecuación $(y-\beta)^2 = 2p(x-\alpha)$	Ecuación $(x-\alpha)^2 = 2p(y-\beta)$

4) Encuentre la ecuación de la parábola:

a) directriz la recta $x=-\frac{1}{2}$ y vértice (0,0).

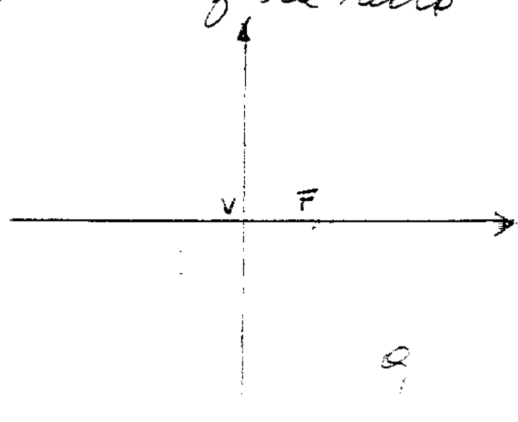
b) vértice en (2,-3) y foco (2,-5).

c) foco en (-3,-2) y directriz la recta x=1.

d) como directriz la recta y = 4 y como foco el punto (2,-1).

a) directriz la recta $x = -\frac{1}{2}$ y $V(0,0)$

figura de análisis



Observando la figura de análisis la ecuación es.

$$(y-\beta)^2 = 2p(x-\alpha)$$

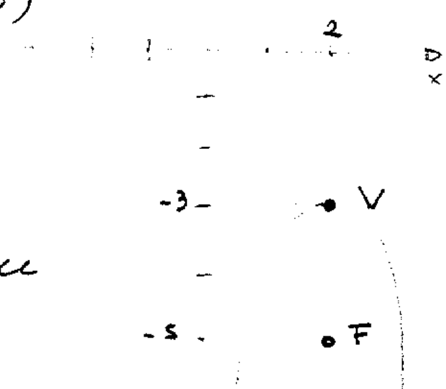
$$V(0,0) \Rightarrow y^2 = 2px$$

directriz $x = -\frac{p}{2} \Rightarrow -\frac{p}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow p = 1$

$$\boxed{\text{Ecuación } y^2 = 2x}$$

b) $V(2,-3)$ $F(2,-5)$

Conclusiones a partir del gráfico: figura de análisis



- Ecuación $(x-\alpha)^2 = 2p(y-\beta)$ pues eje focal // eje y
- $p<0$

Reemplazamos el V en la ecuación

$$(x-2)^2 = 2p(y+3)$$

Recordamos

$$F\left(\alpha, \frac{p}{2}+\beta\right)$$

$$(2,-5) = \left(\alpha, \frac{p}{2}+\beta\right) \Rightarrow \alpha = 2 \;\Big|\; y \;\Big|\; -5 = \left(\frac{p}{2}+\beta\right)$$

$$-5 = \frac{p}{2} + (-3)$$

$$p = -4$$

Ecuación

$$\boxed{(x-2)^2 = -8(y+3)}$$

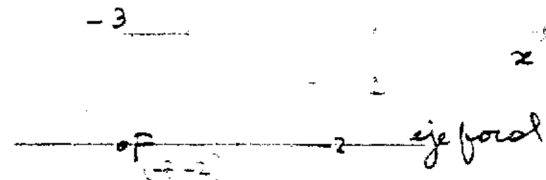
e) foco $(-3,-2)$ directriz $x=1$

la directriz $x=1$ entonces el eje focal // al eje x

figura de análisis

Ecuación

$(y-\beta)^2 = 2p(x-\alpha)$



directriz $x = \alpha - \frac{p}{2}$

① $1 = \alpha - \frac{p}{2}$

foco:

$\left(\frac{p}{2}+\alpha, \beta\right) = (-3,-2)$

② $\frac{p}{2}+\alpha = -3$

Con ① y ② formamos un sistema de ecuaciones con dos incógnitas

$$\begin{cases} \alpha - \frac{p}{2} = 1 \Rightarrow \alpha = 1 + \frac{p}{2} \ * \\ \alpha + \frac{p}{2} = -3 \Rightarrow \alpha = -3 - \frac{p}{2} \ * \end{cases}$$

Igualando *

$1 + \frac{p}{2} = -3 - \frac{p}{2}$

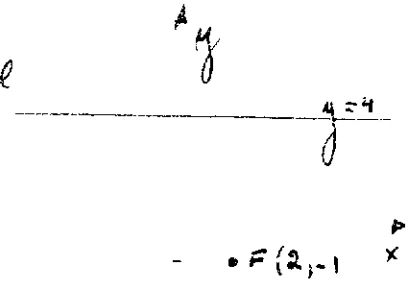
$p = -4$ y $\alpha = -1$

Ecuación

$$\boxed{(y+2)^2 = -8(x+1)}$$

d) directriz $y = 4$ foco $(2,-1)$

Conclusiones a partir del gráfico de análisis



- eje focal // al eje y

Ecuación

$$(x-\alpha)^2 = 2p\,(y-\beta)$$

- $p < 0$

Entonces si $y = 4 \Rightarrow \beta - \frac{p}{2} = 4$ ①

si foco $(2,-1) \Rightarrow (2,-1) = \left(\alpha, \frac{p}{2} + \beta\right)$

$$\begin{cases} \alpha = 2 \\ -1 = \frac{p}{2} + \beta \end{cases} \quad ②$$

con ① y ② armamos sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} \beta - \frac{p}{2} = 4 \Rightarrow \beta = 4 + \frac{p}{2} \\ \frac{p}{2} + \beta = -1 \Rightarrow \beta = -1 - \frac{p}{2} \end{cases}$$

$$4 + \frac{p}{2} = -1 - \frac{p}{2}$$

$$\frac{p}{2} + \frac{p}{2} = -5$$

$$p = -5 \Rightarrow \beta = 4 - \frac{5}{2}$$

$$\beta = \frac{3}{2}$$

Ecuación

$$\boxed{(x-2)^2 = -10\left(y - \frac{3}{2}\right)}$$

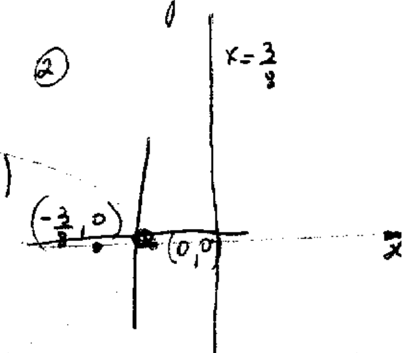
3) Encuentre el foco y la directriz de la parábola de ecuación y grafique la curva:

a) $6x=-4y^2$ b) $x^2-8y=0$

a) $6x-4y^2$

Ecuación será $y^2 = \underbrace{2p}\,x$ ① → La general

$y^2 = \underbrace{-\frac{3}{2}}\,x$ ②



• Observamos $V(0,0)$ (pues α, β no están)

• eje focal: eje x (pues y^2)

• $p<0$ (coef. negativo)

• foco $\left(\frac{p}{2}, 0\right)$ pues se encuentra sobre el eje x.

de ① y ② $2p = -\frac{3}{2} \Rightarrow p = -\frac{3}{4} \Rightarrow f\left(-\frac{3}{8}, 0\right)$ → Foco

• directriz $x = -\frac{p}{2} \Rightarrow x = +\frac{3}{8}$

b) $x^2 - 8y = 0$ $x^2 = 2py$

$x^2 = 8y$

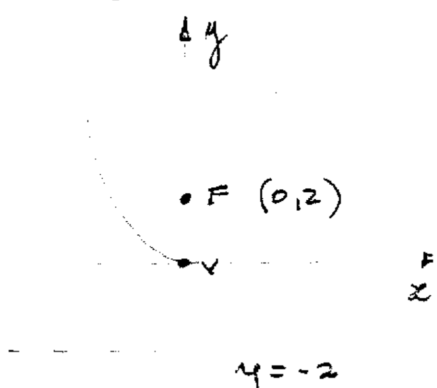


figura de análisis

Observamos:

• $V(0,0)$

• eje focal: eje y

• $p>0$

• foco $\left(0, \frac{p}{2}\right)$ pues se encuentra sobre el eje y $2p = 8 \Rightarrow p = 4$

$\frac{p}{2} = 2$

directriz $= -\frac{p}{2}$

$y = -\frac{p}{2} \Rightarrow$ foco $\left(0, \frac{p}{2}\right) = (0, 2)$

directriz $y = -\frac{p}{2} = -2$

Elipse

Definición:

Es el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ tales que la suma de distancias a dos puntos fijos llamados focos es constante e igual a $2a$

- Semieje mayor a, eje mayor $2a$
- Semieje menor b, eje menor $2b$
- Distancia focal $2c$
- Relación pitagórica $a^2 = b^2 + c^2$
- Lado recto $= \frac{2b^2}{a}$
- Excentricidad $= \frac{c}{a}$ y $e < 1$
- Siempre $a > b$
- $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$
  (el signo de A debe ser igual al signo de C)

Ejemplo $+3x^2 + 5y^2 - 2x + 5y - 3 = 0$

$-5x^2 - 7y^2 + 4x - 5y + 8 = 0$

Elipses $C(0,0)$

Eje focal x

- $V(\pm a, 0)$
- Focos $(\pm c, 0)$
- Ec. eje focal $y=0$
- Directrices $x = \pm \frac{a}{e}$

Ecuación

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Eje focal y

- $V(0, \pm a)$
- $F(0, \pm c)$
- Eje focal $x=0$
- Directrices $y = \pm \frac{a}{e}$

Ecuación

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Centro (α, β)

Eje focal // eje x

- $V: (\alpha \pm a, \beta)$
- $F \; (\alpha \pm c, \beta)$
- Ec. eje focal $y = \beta$
- Directrices
  $x - \alpha = \pm \frac{a}{e}$

Ecuación canónica

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

Eje focal // eje y

- $V(\alpha, \beta \pm a)$
- $F(\alpha, \beta \pm c)$
- Ec. eje focal $x = \alpha$
- Directrices
  $y - \beta = \pm \frac{a}{e}$

Ecuación canónica

$$\frac{(x-\alpha)^2}{b^2} + \frac{(y-\beta)^2}{a^2} = 1$$

5) En cada una de las siguientes elipses encuentre las coordenadas de los focos , vértices y grafique la curva:

a) $2x^2 + 3y^2 = 12$

$2 \neq 3$
Distintos coeficientes en x^2, y^2
$\Rightarrow$ Elipse

b) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{25} = 1$

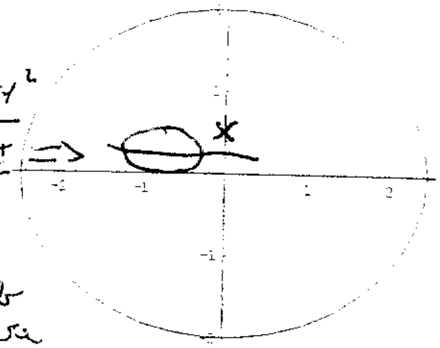
a) $2x^2 + 3y^2 = 12$ $\qquad \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ó

$\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$

$\dfrac{2}{12}x^2 + \dfrac{3}{12}y^2 = \dfrac{12}{12}$

$\dfrac{\overset{(x+0)^2}{x^2}}{6} + \dfrac{\overset{(y+0)^2}{y^2}}{4} = 1 \quad \dfrac{x^2}{6} \; \dfrac{y^2}{4}$ $\Rightarrow$

$\quad > \; <$



Datos: Pues

$C(0,0)$ $\qquad a^2 = 6 \quad a > b$

$\qquad b^2 = 4$ mayor

- focos $(\pm c, 0)$
- Vértices $(\pm a, 0)$

Relación Pitagórica

$a^2 = b^2 + c^2$

$a^2 - b^2 = c^2$

$\sqrt{a^2 - b^2} = c \Rightarrow c = \sqrt{2}$

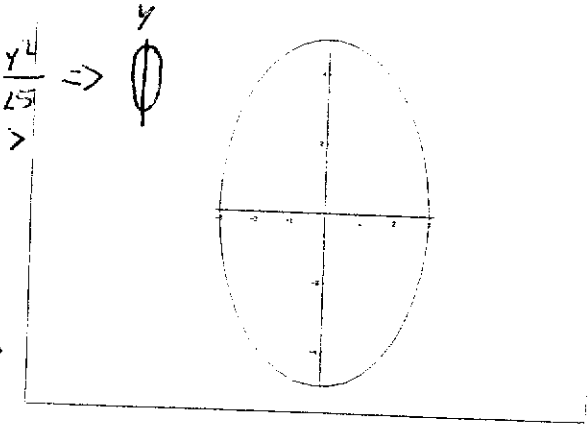
focos $(\pm\sqrt{2}, 0)$

Vértices $(\pm\sqrt{6}, 0)$

---

b) $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{25} = 1 \quad \dfrac{x^2}{9} \; \dfrac{y^2}{25} \Rightarrow$ y $\emptyset$

$\quad < \; >$



$a > b$ rigla

$a^2 = 25 \Rightarrow a = 5$

$b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$

Relación pitagórica

$c = \sqrt{a^2 - b^2}$

$c = \sqrt{25 - 9}$

$c = 4 \quad \Rightarrow \quad$ focos $(0, \pm c) = (0, \pm 4)$

Vértices $(0, \pm a) = (0, \pm 5)$

Eje focal eje y, $C(0,0)$

6) Encuentre la ecuación de la elipse :

a) si sus focos son $(0, \pm 2)$ y la longitud del eje mayor es 6.

b) si el semieje menor es 4 , la distancia entre los focos es 15, el centro es $(0,0)$ y los focos están sobre el eje de ordenadas.

a) Si sus focos son $(0, \pm 2)$ y la longitud del eje mayor es 6

- Si los focos son $(0, \pm 2) = (0, \pm a)$ la longitud del eje mayor es $= 2a \Rightarrow 6$

Entonces $2a = 6 \Rightarrow a = 3 \Rightarrow a^2 = 9$

- La ecuación es

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 \Rightarrow \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{9} = 1$$

- Con la relación pitagórica determinamos b

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \Rightarrow 9 - 4 = b^2 \Rightarrow b^2 = 5$$

$$\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{9} = 1$$

b) Si el semieje mayor es 4, la distancia entre los focos es 15, el $C(0,0)$ y los focos están sobre el eje de ordenadas.

- Si los focos están sobre el eje de ordenadas:

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

- distancia focal $= 2c \Rightarrow c = \frac{15}{2}$

- Semieje menor $= b \Rightarrow b = 4$

Reemplazando

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Buscamos a^2 con relación pitagórica

$$a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 = 16 + \left(\frac{15}{2}\right)^2$$
$$= 16 + \frac{225}{4}$$
$$= \frac{289}{4}$$

Ecuación

$$\boxed{\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{\frac{289}{4}} = 1}$$

c) excentricidad $e = 0{,}28$ y foco $(\pm 7, 0)$
$C(0,0)$. Analizando que los focos están en el eje de abscisas la ecuación es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- $e = \frac{c}{a} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{28}{100} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{7}{25}$

- Si $c = 7$ (coordenadas del foco)

$$e = \frac{7 \rightarrow c}{25 \rightarrow a} \Rightarrow a = 25$$

- Buscamos b^2 con relación pitagórica

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$25^2 = b^2 + 49$$
$$625 - 49 = b^2$$
$$576 = b^2$$

Ecuación

$$\boxed{\frac{x^2}{625} + \frac{y^2}{576} \quad 1}$$

d) focos $(\pm 2, 0)$ $\quad P(2,-3) \in$ a la elipse

• Teniendo en cuenta que los focos se encuentran sobre el eje de abscisas la ecuación será

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

• Solo tenemos $c = 2$, igual aplicamos la relación pitagórica.

$$c^2 = a^2 - b^2 \Rightarrow a^2 = 4 + b^2$$

Reemplazamos en (1)

$$\frac{x^2}{4+b^2} + \frac{y^2}{4+b^2} = 1 \quad (2)$$

• Si $P(2,-3) \in$ a la elipse, satisface la ecuación, Reemplazamos $(2,-3)$ en (2)

$$\frac{4}{4+b^2} + \frac{9}{b^2} = 1$$

$$\frac{4b^2 + 9(4+b^2)}{(4+b^2)\,b^2} = 1$$

$$4b^2 + 9(4+b^2) = (4+b^2)\,b^2$$

$$\cancel{4b^2} + 36 + 9b^2 = \cancel{4b^2} + b^4$$

$$0 = b^4 - 9b^2 - 36$$

Ecuación bicuadrada, hacemos cambio de variables $\quad b^2 = u$

$$0 = u^2 - 9u - 36$$

$$u_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{9 \pm \sqrt{81 - 4(-36)}}{2}$$

$$\frac{9 \pm \sqrt{81 + 144}}{2}$$

$$\frac{9 \pm \sqrt{225}}{2} = \frac{9 \pm 15}{2} \begin{cases} \nearrow 12 \\ \searrow -3 \end{cases}$$

Recordemos que $u = b^2$

$u = 12 \quad \vee \quad \cancel{u = -3}$

Ecuación

$\cancel{b^2 = -3}$
no puede ser negativo

$$\frac{x^2}{4+12} + \frac{y^2}{12} = 1$$

$$\boxed{\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1}$$

La hipérbola

- Definición: Es el lugar geométrico de los puntos $P(x, y)$ tales que la diferencia, en módulo a dos puntos fijos llamados focos es constante e igual a $2a$
- Semi eje transverso a, eje transverso $2a$
- Semieje conjugado o (imaginario) b
  eje conjugado $2b$
- Distancia focal: $2c$
- Relación pitagórica $c^2 = a^2 + b^2$
- lado recto $= \frac{2b^2}{a}$
- Excentricidad $= \frac{c}{a} \quad e > 1$
- En la hipérbola no siempre $a > b$
- $Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ (los signos de A debe ser distinto al signo de C)

- La hipérbole puede degenerar en dos rectas concurrentes (asíntotas)

Centro en el origen (0,0)

Eje focal x

- Vértices $(\pm a, 0)$
- Focos $(\pm c, 0)$
- Vértices secundarios $(0, \pm b)$
- Ec. eje focal $y=0$
- directrices $x = \pm \frac{a}{e}$
- Asíntotas $y = \pm \frac{b}{a} x$

Ecuación canónica

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Eje focal y

- Vértices $(0, \pm a)$
- Focos $(0, \pm c)$
- Vértices secundarios $(\pm b, 0)$
- Ec eje focal $x=0$
- directrices $y = \pm \frac{a}{e}$
- asíntotas $y = \pm \frac{a}{b} x$

Ecuación canónica

$$-\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

Centro (α, β)

eje // al eje X

- Vértices $(\alpha \pm a, \beta)$
- Focos $(\alpha \pm c, \beta)$
- Vértices secundarios $(\alpha, \beta \pm b)$
- Ec eje focal $y = \beta$
- Directrices $x - \alpha = \pm \frac{a}{e}$
- Asíntotas $y - \beta = \pm \frac{b}{a}(x - \alpha)$

eje // al eje y

- Vértices $(\alpha, \beta \pm a)$
- Focos $(\alpha, \beta \pm c)$
- Vértices secundarios $(\alpha \pm b, \beta)$
- Ec eje focal $x = \alpha$
- Directrices $y - \beta = \pm \frac{a}{e}$
- Asíntotas $y - \beta = \pm \frac{a}{b}(x - \alpha)$

Ecuación canónica

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} - \frac{(y-\beta)^2}{b^2} = 1$$

Ecuación canónica

$$\frac{(y-\beta)^2}{b^2} - \frac{(x-\alpha)^2}{a^2} = 1$$

7) En cada una de las siguientes hipérbolas encuentre las coordenadas de los focos, los vértices y las ecuaciones de las asíntotas .Grafique la curva:

a) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$ b) $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1$

mayor, eje focal X

a) $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{9} = 1$ Abajo de X

Datos que aporta la ecuación

$C(0,0)$ $a^2 = 25$ $b^2 = 9$

$a = 5$ $b = 3$

no me ni resta ~ x, y

$F\ (\pm c, 0)$

$V\ (\pm a, 0)$

$V_{sec}\ (0, \pm b)$

Relación pitagórica

$c^2 = a^2 + b^2$

$c^2 = 25 + 9$

$c = \sqrt{34}$

$\Rightarrow F\ (\pm\sqrt{34}, 0)$

$V\ (\pm 5, 0)$

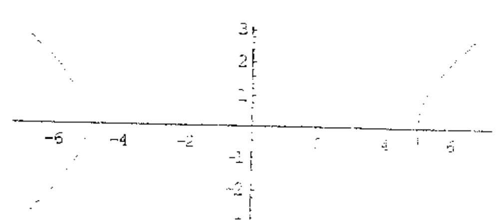
$V_{sec}\ (0, \pm 3)$

Ecuación asíntotas

$y = \pm \frac{b}{a} x$

$y = \pm \frac{3}{5} x$

a)Vértices $(\pm 5,0)$; asíntotas $y=\pm\frac{3}{5}x$; focos $F(\pm\sqrt{34},0)$



b) $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1$

$16 \rightarrow$ mayor: eje focal y

Datos que aporta la ecuacion

• $C(0,0)$ $\cancel{a}^2 = 4 \Rightarrow \cancel{a} = 2 = b$ ¿OK?

$\cancel{b}^2 = 16 \Rightarrow \cancel{b} = 4 = a$

Recordamos

$F(0,\pm c)$ $V(0,\pm a)$ $V_{sec}(0,\pm b)$

Relación pitagórica

$$c^2 = a^2 + b^2$$
$$c^2 = 4 + 16$$
$$c = \sqrt{20}$$
$$c = 2\sqrt{5}$$

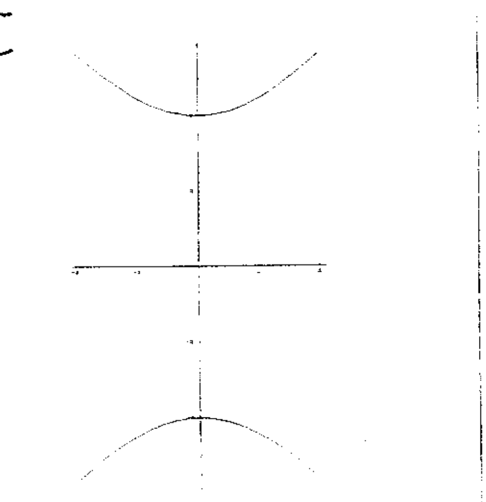
$\left\{ \sqrt{20} = \sqrt{5 \cdot 4} = \sqrt{5 \cdot 2^2} = 2\sqrt{5} \right.$

Entonces

• $F(0 \pm 2\sqrt{5})$ • $V(0, \pm \overset{4}{\cancel{2}})$ • $V_{sec}(0, \pm \overset{2}{\cancel{4}})$

Ecuaciones asintotas $2x$ $1/2x$?

$y = \pm \cancel{\frac{b}{a}}\, \frac{a}{b}\, x \Rightarrow y = \pm \; x$



8) Encuentre la ecuación de la hipérbola :

a) si las coordenadas de los vertices son $(0, \pm 2)$ y las coordenadas de los focos $(0, \pm 3)$.

b) las asintotas son $y = \pm \frac{1}{2}x$ y los focos tienen coordenadas $(\pm\sqrt{10}, 0)$.

c) el semieje real es igual a 6 y la excentricidad e =1,5 ; el centro es (0,0) y los focos están sobre el eje de ordenadas.

d) las coordenadas de los focos son ($\pm$ 15,0) y pasa por el punto (-20,12).

a) Si las coordenadas de los vértices son $(0, \pm 2)$ y las coordenadas de los focos $(0, \pm 3)$

De acuerdo a los datos deducimos que: se trata de una hipérbola con eje focal y

$C(0,0)$ $a = 2$ y $c = 3$

• La ecuación será del tipo

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad (1)$$

• Hallamos b con la relación pitagórica

$$b^2 = c^2 - a^2 \Rightarrow b^2 = 9 - 4$$

$$b^2 = 5$$

• Reemplazando en (1)

$$\boxed{\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1}$$

b) Las asíntotas son $y = \pm \frac{1}{2} x$, los focos tienen coordenadas $(\pm\sqrt{10}, 0)$

De acuerdo a los datos de los focos, se trata de una hipérbola de eje focal x

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Recordamos $F(\pm c, 0)$ asíntotas $y = \pm \frac{b}{a} x$

Entonces $c = \sqrt{10}$ y $\frac{b}{a} = \frac{1}{2} \Rightarrow 2b = a$

Nota: no se puede decir que $b = 1$ y $a = 2$ pues puede surgir esa relación de una simplificación ejemplo $\frac{4}{8} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Buscamos relación pitagórica

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$b^2 = 10 - 4b^2$$

$$5b^2 = 10$$

$$b^2 = 2 \Rightarrow \text{si } b = \frac{a}{2}$$

$$b^2 = \frac{a^2}{4} \Rightarrow a^2 = 8$$

Ecuación

$$\boxed{\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{2} = 1}$$

---

c) El semieje real es igual a 6 y la excentricidad $e = 1{,}5$ el $C(0,0)$ y los focos están sobre el eje de ordenadas.

De acuerdo a los datos si los foco están sobre el eje y la ecuación

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Recordamos

. eje real $2a$

$a = 6$

. excentricidad

$$e = \frac{c}{a}$$

$$e = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{3}{2}$$

$$2c = 3a$$

$$\boxed{c = \frac{3}{2}a}$$

Buscamos b con la relación

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$b^2 = \left(\frac{3}{2}a\right)^2 - a^2$$

$$b^2 = \frac{9}{4}a^2 - a^2$$

$$b^2 = \frac{5}{4}a^2 \quad \text{como } a = 6$$

$$b^2 = \frac{5}{4} \cdot 36 \Rightarrow b^2 = 45$$

$$\boxed{\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{45} = 1}$$

---

d) las coordenadas de los focos son $(\pm 15, 0)$ y pasa por el punto $(-20, 12)$

Si los focos están en $(\pm 15, 0)$, entonces el eje focal es el eje x.

- La ecuación será del tipo

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (1)$$

- Si el foco está en $(+15, 0) \Rightarrow c = 15$
- Recordando $c^2 - b^2 = a^2$

$$225 - b^2 = a^2$$

Reemplazando en (1)

$$\frac{x^2}{225-b^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

- $(-20, 12) \in$ a la hip entonces satisface la ecuación, reemplazando

$$\frac{(-20)^2}{225-b^2} - \frac{12^2}{b^2} = 1$$

$$\frac{400 \cdot b^2 - 144(225-b^2)}{(225-b^2)b^2} = 1$$

$$400b^2 - 32400 + 144b^2 = 225b^2 - b^4$$

$$b^4 + 319b^2 - 32400 = 0$$

Resolviendo, haciendo cambio de variables $b^4 = u^2$

$$u_{1,2} = \frac{-319 \pm \sqrt{319^2 - 4\cdot(-32400)}}{2}$$

$$= \frac{-319 \pm \sqrt{101761 + 129600}}{2}$$

$$= \frac{-319 \pm 481}{2}$$

81

-400

pero $u = b^2$ descartamos -400

$\Rightarrow b^2 = 81$ como $a^2 = 225 - b^2$

$= 225 - 81$

$= 144$

Ecuación resultante

$$\boxed{\frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{81} = 1}$$

---

9) Indique, si existe ,el nombre de la cónica, el centro o vértice de la misma y la ecuación de la traslación efectuada

a) $9x^2 + 16y^2 + 54x - 32y - 47 = 0$

b) $x^2 - 6x + 4y - 11 = 0$

c) $4x^2 - 16x - 9y^2 + 18y + 7 = 0$

d) $4y^2 - x^2 + 40y - 4x + 60 = 0$

e) $x^2 + y^2 + 6y + 17 = 0$

f) $y^2 - 10x - 2y + 21 = 0$

a) $9x^2 + 16y^2 + 54x - 32y - 47 = 0$

Para determinar de que cónica se trata si existe debemos obtener la ecuación canónica. Observando los signos de x^2 y y^2 (ambos positivos) y coeficientes distintos $9 \neq 16$. Si la ecuación representa a una cónica es una elipse

Completando cuadrados

$$(9x^2+54x+\dots)+(\underset{②}{16y^2}-32y+\dots)=47+\dots+\dots$$

$$9(\underbrace{x^2+6x+\dots}_{①})+16(\overbrace{y^2-2y+\dots}^{})=47+\dots+\dots$$

Completamos

$$9(x^2+6x+9)+16(y^2-2y+1)=47+81+16$$

$$9(x+3)^2+16(y-1)^2=144$$

Recordamos

① $6x=2xb$
$3=b \Rightarrow b^2=9$
$(x+3)^2$

② $-2y=2yb$
$-1=b \Rightarrow b^2=1$
$(x-1)^2$

$$\frac{(x+3)^2}{\frac{144}{9}}+\frac{(y-1)^2}{\frac{144}{16}}=1$$

$$\boxed{\frac{(x+3)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{9}=1}$$

Elipse de Centro $(-3,1)$

Traslación $\begin{cases} x'=x+3 \\ y'=y-1 \end{cases}$

9-b $\quad x^2-6x+4y-11=0$

Observando la ecuación, si representa una cónica esta será una parábola pues y^2 no está presente.

Completando cuadrados

$$x^2-6x=-4y+11$$

$$x^2-6x+\dots=-4y+11+\dots$$

$$x^2-6x+9=-4y+11+9$$

$$(x-3)^2=-4y+20$$

$-6x=2xb$
$-3=b$
$(x-3)^2 \quad b^2=9$

$$\boxed{(x-3)^2 = -4(y-5)}$$

Parábola con vértice en $(3,5)$

traslación $\begin{cases} x' = x-3 \\ y' = y-5 \end{cases}$

9e) $4x^2 - 16x - 9y^2 + 18y + 7 = 0$

Observando la ecuación si representa una cónica esta será una hipérbola pues los signos de los coeficientes cuadráticos son $\neq$

$(4x^2 - 16x + \dots) + (-9y^2 + 18y + \dots) = -7 + \dots + \dots$

$4(x^2 - 4x + 4) - 9(y^2 - 2y + 1) = -7 + 16 + (-9)$

$\begin{cases} -4x = 2xb \\ -2 = b \\ 4 = b^2 \\ \hline -2y = 2yb \\ -1 = b \\ 1 = b^2 \end{cases}$

$4(x-2)^2 - 9(y-1)^2 = 0$

$4(x-2)^2 = 9(y-1)^2$

$\sqrt{4(x-2)^2} = \sqrt{9(y-1)^2}$

$2|x-2| = 3|y-1|$

$2(x-2) = 3(y-1) \quad \vee \quad 2(-x+2) = 3(y-1)$

$2x - 4 = 3y - 3 \quad \vee \quad -2x + 4 = 3y - 3$

$2x - 3y = 1 \quad \vee \quad -2x - 3y = -7$

$\boxed{\text{ecuaciones de 2 rectas secantes}}$

9d)

FIN TAPE 2

$$4y^2 - x^2 + 40y - 4x + 60 = 0$$

Si representa una cónica debe ser una hipérbola coeficientes cuadráticos distinto signo

$$(4y^2 + 40y + \dots) + (-x^2 - 4x + \dots) = -60 + \dots + \dots$$

$$4(y^2 + 10y + 25) - (x^2 + 4x + 4) = -60 + 100 + (-4)$$

$$4(y+5)^2 - (x+2)^2 = 36$$

$$\left\{\begin{array}{l} 10y = 2yb \\ 5 = b \\ 25 = b^2 \\ 4x = 2xb \\ 2 = b \\ 4 = b^2 \end{array}\right.$$

$$\frac{(y+5)^2}{\frac{36}{4}} - \frac{(x+2)^2}{36} = 1$$

$$\boxed{\frac{(y+5)^2}{9} - \frac{(x+2)^2}{36} = 1}$$

Hipérbola de centro $(-2,-5)$

traslación $\left\{\begin{array}{l} y' = y+5 \\ x' = x+2 \end{array}\right.$

---

9 e) $x^2 + y^2 + 6x + 17 = 0$

Si representa una cónica es una circunferencia coeficientes cuadráticos igual signo igual valor absoluto.

$$x^2 + 6x + y^2 = -17$$

$$(x^2 + 6x + 9\dots) + y^2 = -17 + 9\dots$$

$$(x+3)^2 + y^2 = -8$$

$$\begin{array}{l} 6x = 2xb \\ 3 = b \\ 9 = b^2 \end{array}$$

$\boxed{\nexists \text{ lugar geométrico}}$

9f) $y^2-10x-2y+21=0$

Si representa una cónica es una parábola (un solo término cuadrático)

$(y^2-2y+\ldots 1\ldots) = 10x-21+\ldots 1\ldots$ $\left\{ \begin{array}{l} -2y=2yb \\ -1=b \\ 1=b^2 \end{array} \right.$

$(y-1)^2 = 10x-20$

$(y-1)^2 = 10(x-2)$ Parábola con vértice $(2,1)$

Traslación $\left\{ \begin{array}{l} x'=x-2 \\ y'=y-1 \end{array} \right.$

---

10) Demuestre que una ecuación de la forma $ax^2+by=0$, con a y b números reales no nulos es la ecuación de una parábola con vértice en (0,0) y eje de simetría en el eje y.

$ax^2+by=0$

$ax^2=-by$

$x^2=-\frac{b}{a}y$

Parábola con vértice (0,0) eje de simetría eje y

---

11) Encuentre las condiciones para que una ecuación de la forma $ax^2+bx+cy+d=0, a\neq 0$, represente:

a) una parábola.

b) dos rectas verticales.

c) una recta vertical.

d) no tenga representación gráfica.

Dada la ecuación general obtenemos la ecuación cartesiana para estudiar las condiciones

$$ax^2+bx+cy+d=0$$

$a \neq 0$
doble producto

$$\left(ax^2+bx+\dots\right)=-cy-d+\dots$$

$$a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{b^2}{4a^2}\right)=-cy-d+\frac{b^2}{4a}$$

$$\frac{b}{a}x = 2x\,\square$$

$$\frac{b}{2a}=\square$$

$$\frac{b^2}{4a^2}=\square^2$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}y-\frac{d}{a}+\frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}y+\frac{b^2}{4a^2}-\frac{d}{a}$$

$$\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2=-\frac{c}{a}y+\frac{b^2-4ad}{4a^2}$$

1) parabola $c \neq 0$

2) 2 rectas paralelas $c=0$ y $b^2-4ad>0$
pues si $b^2-4ad<0$ el resultado de un número al cuadrado no puede ser negativo

3) una recta vertical $c=0$ y $b^2-4ad=0$

4) no tiene representación gráfica
$c=0$ y $b^2-4ad<0$

---

12) Dada la ecuación $y^2+ax^2=x$
Identifique para que valores de **a** queda determinada una elipse o una hipérbola.

$$y^2+ax^2=x$$

es el doble producto

$$y^2+ax^2-x=0$$

$$-\frac{x}{a}=2x\,\square$$

$$y^2+a\left(x^2-\frac{x}{a}+\frac{1}{4a^2}\right)=\frac{1}{4a}$$

$$-\frac{1}{2a}=\square$$

$$\frac{1}{4a^2}=\square^2$$

$$y^2+a\left(x-\frac{1}{2a}\right)^2=\frac{1}{4a}$$

- Elipse $a>0$ para que tenga el mismo signo del coeficiente de y^2 y $a \neq 1$ pues sino representaría una circunferencia
- Hipérbola $a<0$ para que los coeficientes cuadráticos tengan distinto signo

Trabajo Práctico N° 7
Segunda parte:
Parametrización

Se denomina ecuaciones paramétricas de una curva a dos ecuaciones que dan los valores de las coordenadas de un punto $P(x, y)$ de la curva en función de un único parámetro $t \in \mathbb{R}$

Si recordamos por ejemplo:
Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta L_1 definida $L_1 \begin{cases} 2x - y = 2 \\ y - z = -1 \end{cases}$

L_1 está definida como intersección de planos

$$\vec{d}_{L_1} = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (1, 2, 2)$$

Buscamos $P_1 \in L_1 \,/\, P_1 \in \pi_1$ y $P_1 \in \pi_2$

$P_1 \in L_1$ $(1, 0, 1)$ $P_2 \left(\frac{1}{2}, -1, 0\right)$ $P_2 \in L_1$

ecuaciones paramétricas

$$L_1 \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 0 + 2\lambda \\ z = 1 + 2\lambda \end{cases} \qquad L_1 \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} t \\ y = -1 + t \\ z = 0 + t \end{cases}$$

Ambas ecuaciones representan a la misma recta, por lo tanto deducimos que las ecuaciones paramétricas de una curva no son únicas para la misma curva pueden elegirse distintos parámetros.

Forma paramétrica de la circunferencia

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2$$

$$① \begin{cases} x = \alpha + r\cos\theta \\ y = \beta + r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases} \quad ② \begin{cases} x = \alpha + r\,\mathrm{sen}\,\theta \\ y = \beta + r\cos\theta \end{cases} \quad ③ \begin{cases} x = \alpha - r\cos\theta \\ y = \beta + r\,\mathrm{sen}\,\theta \end{cases}$$

$$0 \leq \theta \leq 2\pi$$

Forma paramétrica de la elipse

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1 \qquad \begin{cases} x=\alpha+a\cos t \\ y=\beta+b\,\text{sen}\,t \end{cases} \quad 0\le t\le 2\pi$$

$$\frac{(x-\alpha)^2}{b^2}+\frac{(y-\beta)^2}{a^2}=1 \qquad \begin{cases} x=\alpha+b\cos t \\ y=\beta+a\,\text{sen}\,t \end{cases}$$

Forma paramétrica de la hipérbola

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}-\frac{(y-\beta)^2}{b^2}=1 \qquad \begin{cases} x=\alpha+a\sec t \\ y=\beta+b\,\text{tg}\,t \end{cases} \quad t\in\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{3}{2}\pi\right)$$

$$\frac{(y-\beta)^2}{b^2}-\frac{(x-\alpha)^2}{a^2}=1 \qquad c(t):\begin{cases} x=\alpha+a\,\text{tg}\,t \\ y=\beta+b\sec t \end{cases}$$

Forma paramétrica de la parábola

$$(y-\beta)^2=2p(x-\alpha) \quad ① \begin{cases} x=\alpha+\frac{p}{2}\cot g^2 t \\ y=\beta+p\cot g\, t \end{cases}$$

$$② \begin{cases} y=t+\beta \\ x=\frac{t^2}{2p}+\alpha \end{cases}$$

$$③ \begin{cases} x=\frac{2p}{\text{tg}^2 t}+\alpha \\ y=\frac{2p}{\text{tg}\, t}+\beta \end{cases}$$

$$(x-\alpha)^2=2p(y-\beta)$$

$$③ \begin{cases} x=\frac{2p}{\text{tg}\, t}+\alpha \\ y=\frac{2p}{\text{tg}^2 t}+\beta \end{cases} \qquad ① \begin{cases} x=\alpha+p\cot g\, t \\ y=\beta+\frac{p}{2}\cot g^2 t \end{cases} \qquad ② \begin{cases} y=\frac{t^2}{2p}+\beta \\ x=t+\alpha \end{cases}$$

1)Halle las ecuaciones paramétricas de las siguientes curvas de $\mathbb{R}^2$, indique el rango del parámetro

a) $x^2+y^2=9,\ x\geq 0$

b) $25y^2-9x^2=1$

c) $x^2+y^2=x\ ,\ y\geq 0$

d) $x^2+2x+4y^2-8y=0$

e) $4x^2-16x-y^2-8y=2$

f) $4y^2=-x\ ,\ y\geq 0$

g) $\dfrac{x^2}{7}+\dfrac{y^2}{4}=1$,primer cuadrante

h) $y+1=x^2-5x$

a) $x^2+y^2=9$ $\quad x\geq 0$

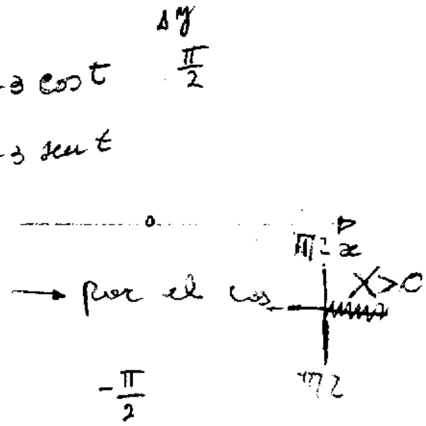
La ecuación representa una circunferencia de $C(0,0)$ y $r=3$ $\Rightarrow \alpha=0$ y $\beta=0$

$$\begin{cases} x=\alpha+r\cos t \\ y=\beta+r\,\text{sen}\,t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0+3\cos t \\ y=0+3\,\text{sen}\,t \end{cases}$$

ec. param. de la circunferencia

pero como $x\geq 0 \Rightarrow -\frac{\pi}{2}\leq t\leq \frac{\pi}{2}$ → por el cos

es una semicircunferencia



b) $25y^2-9x^2=1$

$\dfrac{y^2}{\frac{1}{25}}-\dfrac{x^2}{\frac{1}{9}}=1$ la ecuación representa una hipérbola de eje focal y $C(0,0)$

$a=\frac{1}{5}\qquad b=\frac{1}{3}$

Ecuaciones paramétricas $\begin{cases} x=\alpha+a\,\text{tg}\,t \\ y=\beta+b\sec t \end{cases}$

ec. paramétricas de hipérbola eje y

$$c(\alpha): \begin{cases} x = 0 + \frac{1}{3} \operatorname{tg} \alpha \\ y = 0 + \frac{1}{5} \sec \alpha \end{cases}$$

Para el rango de α tendremos en cuenta

que ① $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\cos \alpha} \Rightarrow \cos \alpha \neq 0$

② $\sec \alpha = \frac{1}{\cos \alpha} \Rightarrow \cos \alpha \neq 0$

$\Rightarrow 0 \leq \alpha \leq 2\pi$

② y ① $\alpha \neq \frac{\pi}{2} \wedge \alpha \neq \frac{3}{2}\pi$

---

c) $x^2 + y^2 - x = 0 \qquad y \geq 0$

$x^2 + y^2 - x = 0$ completamos cuadrados $\qquad -x = 2xb$

$(x^2 - x + \frac{1}{4}) + y^2 = 0 + \frac{1}{4} \qquad -\frac{1}{2} = b$

$\frac{1}{4} = b^2$

$(x - \frac{1}{2})^2 + y^2 = \frac{1}{4}$

Circunferencia $C(\frac{1}{2}, 0)$
radio $1/2$

$$c(t): \begin{cases} x = \alpha + r \cos t \\ y = \beta + r \operatorname{sen} t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos t \\ y = 0 + \frac{1}{2} \operatorname{sen} t \end{cases}$$

y

x

Como $y \geq 0 \Rightarrow \quad 0 \leq t \leq \pi$
Semicircunferencia

---

d) $x^2 + 2x + 4y^2 - 8y = 0$ completando cuadrados

$(x^2 + 2x + \ldots) + (4y^2 - 8y + \ldots) = 0 + \ldots + \ldots$

$2x = 2xb \qquad +4(y^2 - 2y + \ldots)$

$1 = b \qquad -2y = 2yb$

$1 = b^2 \qquad -1 = b$

$1 = b^2$

$(x^2 + 2x + 1) + 4\underbrace{(y^2 - 2y + 1)}_{4} = 0 + 1 + 4$

$$\frac{(x+1)^2}{5} + \frac{(y-1)^2}{\frac{5}{4}} = 1$$

Elipse $C(-1,1)$ $\quad a^2 = 5 \Rightarrow a = \sqrt{5}$

$\quad b^2 = \frac{5}{4} \Rightarrow b = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$$\frac{(x-\alpha)^2}{a^2} + \frac{(y-\beta)^2}{b^2} \Rightarrow \begin{cases} x = \alpha + a\cos t \\ y = \beta + b \operatorname{sen} t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -1 + \sqrt{5}\cos t \\ y = 1 + \frac{\sqrt{5}}{2} \operatorname{sen} t \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi$$

---

e)

$$4x^2 - 16x - y^2 - 8y = 2$$

$$4(x^2 - 4x) - (y^2 + 8y) = 2$$

$$4(x^2 - 4x + \dots) - (y^2 + 8y + \dots) = 2 + \dots + \dots$$

$$4(x^2 - 4x + 4) - (y^2 + 8y + 16) = 2 + 16 - 16$$

$$4(x-2)^2 - (y+4)^2 = 2$$

$$\frac{(x-2)^2}{\frac{1}{2}} - \frac{(y+4)^2}{2} = 1$$

Hipérbola $(2,-4)$

$a^2 = \frac{1}{2} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{cases} x = 2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \sec t \\ y = -4 + \sqrt{2}\, \operatorname{tg} t \end{cases} \quad b^2 = 2 \Rightarrow b = \sqrt{2}$$

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\operatorname{sen} t}{\cos t}$ y $\sec t = \frac{1}{\cos t}$ por lo tanto $\cos t \neq 0$

$0 \le t \le 2\pi$ y $t \neq \frac{\pi}{2}$, $t \neq \frac{3}{2}\pi$

---

f)

$4y^2 = -x \quad y \geq 0$

$y^2 = -\frac{1}{4}x \qquad \alpha = 0 \quad \beta = 0$

$2p = -\frac{1}{4}$

ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = \frac{t^2}{2p} - \alpha \\ y = t + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{t^2}{-\frac{1}{4}} \\ y = t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -4t^2 \\ y = t \end{cases}$$

g) $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{4}=1$ elipse $C(0,0)$ $\Rightarrow$ primer cuadrante

$a^2=7 \Rightarrow a=\sqrt{7}$

$b^2=4 \Rightarrow b=2$

$$\begin{cases} x=\alpha+a\cos t \\ y=\beta+b\,\text{sen}\,t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0+\sqrt{7}\cos t \\ y=0+2\,\text{sen}\,t \end{cases}$$

por estar definido solo en el primer cuadrante $\Rightarrow 0\le t\le\frac{\pi}{2}$

h) $y+1=x^2-5x$

$x^2-5x+\dots=y+1+\dots$

$x^2-5x+\frac{25}{4}=y+1+\frac{25}{4}$

$\left(x-\frac{5}{2}\right)^2=\left(y+\frac{29}{4}\right)$

$$\begin{cases} x=t+\alpha \\ y=\frac{t^2}{2p}+\beta \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=t+\frac{5}{2} \\ y=-\frac{29}{4}+t^2 \end{cases} \forall x\in\mathbb{R}$$

NOTA Ejercicio N°2 pag 9

3)Dadas las siguientes curvas expresadas en forma paramétrica determine sus ecuaciones cartesianas. ($\overline{X}\in\mathbb{R}^2$)

a) $\overline{X}=(2+t, 1-4t^2), 0\le t\le 1$

b) $\overline{X}=(t^3, t), -4\le t\le 4$

c) $\overline{X}=(4\,\text{sen}2t, 4\cos 2t), 0\le t\le\frac{\pi}{4}$

d) $\overline{X}=(2-3t, 2t+1), -2\le t\le 2$

a) $\overline{X}=(2+t, 1-4t^2)$ $0\le t\le 1$

$$\begin{cases} x=2+t \\ y=1-4t^2 \end{cases} \begin{matrix} \Rightarrow x-2=t \\ \Rightarrow \frac{y-1}{-4}=t^2 \end{matrix} \Rightarrow (x-2)^2=\frac{y-1}{-4}$$

$(x-2)^2=-\frac{1}{4}(y-1)$

parábola $V(2,1)$

$2p=-\frac{1}{4}$

si $0\le t\le 1$ reemplazando en x

$2\le x\le 3$

b) $\bar{X} = (t^3, t) \quad -4 \le t \le 4$

$$\begin{cases} x = t^3 \\ y = t \end{cases} \Rightarrow x = y^3 \quad \Rightarrow -4 \le y \le 4$$

c) $\bar{X} = (4\,\text{sen}\,2t,\ 4\cos 2t) \quad 0 \le t \le \frac{\pi}{4}$

$$\begin{cases} x = 4\,\text{sen}(2t) \\ y = 4\cos(2t) \end{cases}$$

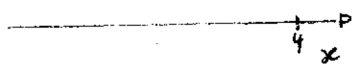
si t varía $[0, \frac{\pi}{4}]$

$2t \in [0, \frac{\pi}{2}]$

$[0, \frac{\pi}{2}]$ primer cuadrante

Circunferencia $C(0,0)$

radio $= 4$



$$\begin{cases} x^2 = 16\,\text{sen}^2(2t) \\ y^2 = 16\cos^2(2t) \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 16(\underbrace{\text{sen}^2 2t + \cos^2 2t})$$

cuarto de circunferencia

$0 \le x \le 2 \quad y \quad 0 \le y \le 2$

d) $\bar{X} = (2 - 3t,\ 2t + 1) \quad -2 \le t \le 2$

$$\begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 1 + 2t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x-2}{-3} = t \\ \frac{y-1}{2} = t \end{cases} \Rightarrow \frac{x-2}{-3} = \frac{y-1}{2} : L_1$$

ecuación simétrica de L_1 $\quad dir_{L_1} = (-3, 2) \quad P(2, 1)$

Reemplazando $t = 2$ en $x = 2 - 3.2$

$x = 2 - 6$

$x = -4$

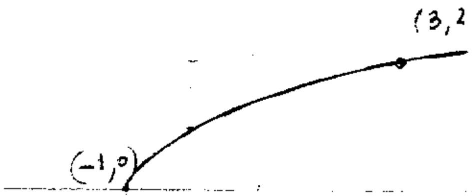
$t = -2$ en $x = 2 + 6$

$x = 8$

Entonces $-4 \le x \le 8$

4) Halle una parametrización adecuada de la trayectoria de un punto que se mueve sobre la parábola $y^2 = x + 1$, $x \ge -1$ comenzando por el punto $(-1,0)$ en $t = 0$ moviéndose hacia la derecha y llegando al punto $(3,2)$.

Comenzamos por graficar la parábola $y^2 = x+1$



$x = y^2 - 1$

$(x+1) = y^2$

Si $y = t \Rightarrow x = t^2 - 1$

$$\begin{cases} x = t^2 - 1 \\ y = t \end{cases} \quad \text{con} \quad 0 \leq t \leq 2$$

las ecuaciones deter. verificar el punto inicial y el punto final

Verificamos:

Si $x = -1 \Rightarrow -1 = t^2 - 1 \Rightarrow t = 0$

S $x = 3 \Rightarrow 3 = t^2 - 1 \Rightarrow t^2 = 4 \quad |t| = 2$

5) Un punto se mueve sobre un arco de curva $\overline{X} \in \mathbb{R}^2$, $\overline{X} = (t, \sqrt{1-t^2})$, $|t| \leq 1$. Encuentre otra parametrización de dicho movimiento, tal que $t \geq 0$, comenzando por el punto (-1,0)

$$\begin{cases} x = t \\ y = \sqrt{1-t^2} \end{cases} \quad -1 \leq t \leq 1$$

Si $t = 1$
$\begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases}$ $P(1,0)$

Si $t = -1$
$\begin{cases} x = -1 \\ y = 0 \end{cases}$ $P(-1,0)$

$$\begin{cases} x^2 = t^2 \\ y^2 = 1 - t^2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

Otra parametrización

no verifica $\cancel{\begin{cases} x = \cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases}}$

Verificamos si cumple

si $t = 0 \Rightarrow x = \cos 0 = 1$
$y = \operatorname{sen} 0 = 0$ no verifica pués el movimiento comienza en (-1,0)

elegimos

$$\begin{cases} x = -\cos t \\ y = \operatorname{sen} t \end{cases} \qquad 0 \le t \le \pi$$

si $t = 0 \Rightarrow x = -\cos 0 \Rightarrow x = -1$

si $t = 0 \Rightarrow y = \operatorname{sen} 0 \Rightarrow y = 0$

significa que el color comienzo en $(-1,0)$

---

2)Halle la ecuación cartesiana que corresponde a la ecuación paramétrica y realice su gráfica

a) $\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\operatorname{sen}\alpha \end{cases}$ $,0 \le \alpha \le 2\pi$

b) $\begin{cases} x = 2\cos\alpha \\ y = 3\operatorname{sen}\alpha \end{cases}$ $,0 \le \alpha \le \pi$

c) $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = t^2 \end{cases}$ $,-1 \le t \le 1$

d) $\begin{cases} x = \sec\alpha \\ y = 5\operatorname{tg}\alpha \end{cases}$ $,0 \le \alpha \le 2\pi, \alpha \ne \frac{\pi}{2}, \alpha \ne \frac{3\pi}{2}$

a) $\begin{cases} x = r\cos\alpha \\ y = r\operatorname{sen}\alpha \end{cases} \quad 0 \le \alpha \le 2\pi$

$$\begin{cases} x^2 = r^2\cos^2\alpha \\ y^2 = r^2\operatorname{sen}^2\alpha \end{cases} \qquad \begin{aligned} x^2+y^2 &= r^2\cos^2\alpha + r^2\operatorname{sen}^2\alpha \\ x^2+y^2 &= r^2\underbrace{(\cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha)}_{1} \end{aligned}$$

---

b) $\begin{cases} x = 2\cos\alpha \\ y = 3\operatorname{sen}\alpha \end{cases} \qquad 0 \le \alpha \le \pi$

$$\begin{cases} x^2 = 4\cos^2\alpha \\ y^2 = 9\operatorname{sen}^2\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{4} = \cos^2\alpha \\ \frac{y^2}{9} = \operatorname{sen}^2\alpha \end{cases}$$

$\Rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ pero $y \geq 0$ para que cumpla con $0 \le \alpha \le \pi$

e) $\begin{cases} x = 1-t \\ y = t^2 \end{cases} \quad -1 \le t \le 1$ $\qquad \begin{cases} -x+1 = t \\ y = t^2 \quad \text{pero } -1 \le t \le 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad y = (-x+1)^2$$

$0 \le x \le 2$

determinamos el rango de las variables, a partir del rango del parámetro

si $t = 1 \Rightarrow -x+1 = 1$
$x = 0$

si $t = -1 \Rightarrow -x+1 = -1$
$x = 2$

---

d) $\begin{cases} x = \sec\alpha \\ y = 5\,tg\,\alpha \end{cases}$ con $0 \le \alpha \le 2\pi$, $\alpha \ne \frac{\pi}{2}$ y $\alpha \ne \frac{3}{2}\pi$

$\begin{cases} x^2 = \sec^2\alpha \\ y^2 = 25\,tg^2\alpha \end{cases} \Rightarrow \quad x^2 - \dfrac{y^2}{25} = \sec^2\alpha - tg^2\alpha$

$$x^2 - \frac{y^2}{25} = \frac{1}{\cos^2\alpha} - \frac{sen^2}{\cos^2\alpha}$$

$$x^2 - \frac{y^2}{25} = \frac{1 - sen^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$x^2 - \frac{y^2}{25} = \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$x^2 - \frac{y^2}{25} = 1$$

---

6) a) Determine los valores de t para los cuales la ecuación $\begin{cases} x = 2 - t \\ y = 1 + 2t \\ z = -3 + t \end{cases}$ parametriza

el segmento de recta que comienza en (3,-1;-4) y finalice en (0,5,-1)

b) Halle las ecuaciones paramétricas de $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ y + z = 2 \end{cases}$, indique el rango del parámetro

c) Halle las ecuaciones paramétricas de $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ y - z = 0 \end{cases}$ en el primer octante, indique el rango del parámetro

6a) determinar los valores de t para los cuales parametrice al segmento incluido en la recta $\overline{AB}$ tal que $A(3,-1,-4)$ y $B(0,5,-1)$, es encontrar los valores de t (el rango de t), tal que reemplazando t en las ecuaciones paramétricas de la recta se obtengan todos los punto que pertenezcan al segmento. Entonces reemplazando x, y, z por las coordenadas de A y B obtendremos el rang

$$\begin{cases} 3 = 2 - t \Rightarrow t = -1 \\ -1 = 1 + 2t \Rightarrow t = -1 \\ -4 = -3 + t \Rightarrow t = -1 \end{cases}$$

¿qué pasaría si los t obtenidos no fueran iguales? $A \notin$ a la recta

$$\begin{cases} 0 = 2 - t \Rightarrow t = 2 \\ 5 = 1 + 2t \Rightarrow t = 2 \\ -1 = -3 + t \Rightarrow t = 2 \end{cases}$$

rango de t
$-1 \leq t \leq 2$

b) $\begin{cases} x + y - z = 1 \ (\pi_1) \\ y + z = 2 \ (\pi_2) \end{cases}$ el sistema representa una recta definida como intersección de planos.

Recordamos que para obtener las ecuaciones paramétricas debemos obtener $\vec{d}_{L_1}$ (vector director) $P \in L_1$

$d\vec{L_1} = \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2}$

$\vec{n}_{\pi_1} = (1,1,-1)$
$\vec{n}_{\pi_2} = (0,1,1)$ $\Rightarrow$ $\vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} =$

$= (2,-1,1)$

Buscamos $P \in \pi_1$, $P \in \pi_2 \Rightarrow P \in L$

$\begin{cases} x+y-z=1 \quad (1) \\ y+z=2 \end{cases}$ 2 ecuaciones 3 incógnitas $\Rightarrow$ un grado de libertad

tomamos $y=0 \Rightarrow z=2$ en (1)

$x+0-2=1 \Rightarrow x=3$

$P(3,0,2)$

$L: \begin{cases} x=3+2t \\ y=0-t \\ z=2+t \end{cases}$ para obtener todos los puntos de la recta L $t \in \mathbb{R}$

---

c) $\begin{cases} x+y+z=1 \ (\pi_1) \\ y-z=0 \ (\pi_2) \end{cases}$ el sistema representa una recta definida como intersección de planos.

Debemos operar igual que en el ejercicio 6-b

$d\vec{L_1} = \vec{n}_{\pi_1} \times \vec{n}_{\pi_2} = \begin{vmatrix} \check{i} & \check{j} & \check{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (-2,1,1)$

$\begin{cases} x=1-2t \\ y=0+t \\ z=0+t \end{cases}$

Punto

Si $z=0 \Rightarrow y=0 \Rightarrow x=1$

si t debe describir los puntos del primer octante $\Rightarrow$ las coordenadas deben ser positivas $\longrightarrow$ entonces

$1-2t \geq 0 \Rightarrow 1 \geq 2t \Rightarrow \frac{1}{2} \geq t$

además $y=t$ y $z=t$ deben ser también positivas por lo que $t \geq 0$

Conclusión $0 \leq t \leq \frac{1}{2}$

Trabajo Práctico N° 7

Tercera parte

Superficies

Algo de teoría:

Se llaman cuádricas a los lugares geométricos de los puntos, cuyas coordenadas satisfacen a una ecuación de segundo grado con tres variables.

$$Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 = R \quad ①$$

Tienen un centro de simetría "El origen"

CUADRICAS CON CENTRO

$$Mx^2 + Ny^2 = Sz \quad ②$$

no tienen centro de simetría

CUADRICAS SIN CENTRO

Hacemos el análisis para ①

$$\boxed{\pm \frac{x^2}{\frac{R}{M}} \pm \frac{y^2}{\frac{R}{N}} \pm \frac{z^2}{\frac{R}{P}} = 1}$$

Si $\left|\frac{R}{M}\right| = a^2$

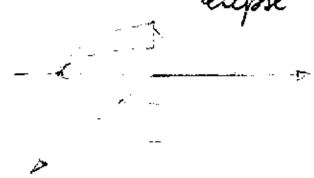
$\left|\frac{R}{N}\right| = b^2$

$\left|\frac{R}{P}\right| = c^2$

1° Caso todos los signos positivos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

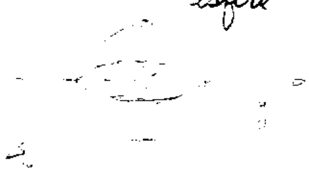
elipse



Si $a^2 = b^2 = c^2 \Rightarrow$ es una **esfera**

si alguno es distinto $a^2 \neq b^2$ o $a^2 \neq c^2$ representa una **elipse**

esfera



2° caso todos los signos negativos

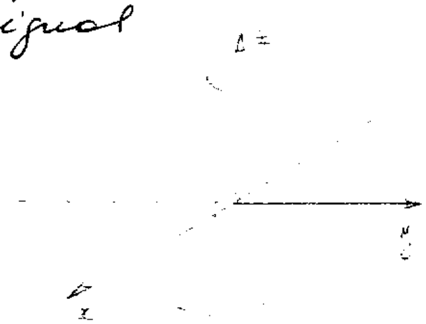
$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \quad \nexists \text{ lugar geométrico}$$

3° caso

Dos signos positivos y uno negativo

$$+\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

La ecuación corresponde a un hiperboloide de una hoja, con eje paralelo o coincidente al eje con signo desigual



4° caso

Dos signos negativos y uno positivo

$$- \quad - \quad +$$

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{a^2}=1$$

La ecuación corresponde a un hiperboloide de dos hojas, cuyo eje es paralelo o coincidente con el eje de distinto signo.

Hacemos el análisis para

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} \pm \frac{z^2}{c^2} = 0$$

1° caso todos los signos iguales.
(todos + o todos −)

El lugar geométrico es un punto.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0 \qquad -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

En este caso el punto $P(0,0,0)$ satisface la ecuación

2° caso 2 signos positivos y uno negativo
2 signos negativos y uno positivo

La ecuación representa una superficie cónica recta, que tiene como eje, aquel con el signo distinto

Hacemos el análisis para

$$\mp \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = 1$$ (falta un término cuadrático

La ecuación representa un cilindro elíptico o circular si $a^2 = b^2$. El eje es // o coincidente al eje faltante

2° caso los dos signos negativos

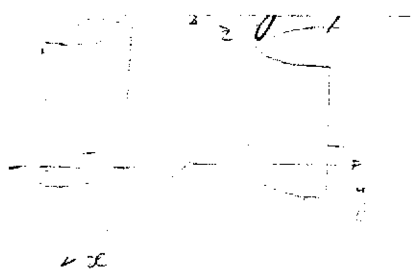
$$-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$$

∄ lugar geométrico

3° caso dos signos distintos

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$

La ecuación representa a un cilindro hiperbólico recto, en este caso tiene como eje, el eje z. Conclusión es // o coincidente con el eje de la variable faltante



Hacemos el análisis para

$$\pm\frac{x^2}{a^2}\pm\frac{y^2}{b^2}=0$$

falta un término cuadrático y está igualado a 0

1° caso los dos signos iguales

++ o --

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0 \quad \vee \quad -\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$$

Representa al eje z (el eje del término cuadrático faltante)

2° caso los dos signos distintos

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0 \Rightarrow \frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}$$

Representa dos planos secantes

Heacemos el análisis para:

$\pm \frac{x^2}{a^2} = 1$ faltan dos términos cuadráticos
ecuación igualada a 1

1º Caso $+ \frac{x^2}{a^2} = 1$

Representa dos planos paralelos

2º Caso $- \frac{x^2}{a^2} = 1$ $\nexists$ lugar geométrico

Hacemos el análisis para:

$\pm \frac{x^2}{a^2} = 0$ faltan dos términos cuadráticos
ecuación igualada a 0

Representa un plano coordenado (en este ejemplo pl yz)

Resumen

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ $\longrightarrow$ si $a=b=c$ esfera sino elipsoide

2) $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ $\longrightarrow$ $\nexists$ l. geométrico

3) $+\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ $\longrightarrow$ hiperboloide de una hoja

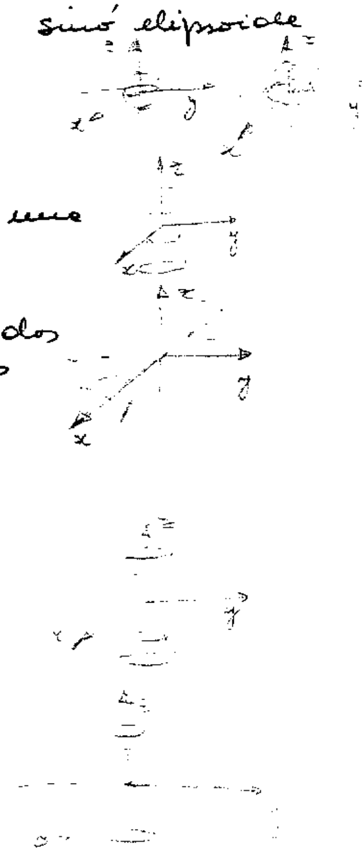
4) $+\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$ $\longrightarrow$ hiperboloide de dos hojas

5) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0$ $\longrightarrow$ $P(0,0,0)$

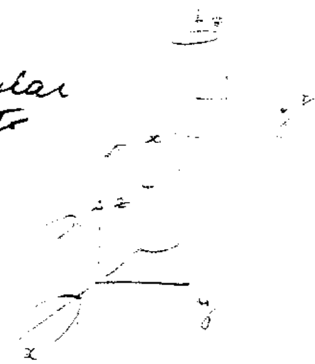
6) $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ $\longrightarrow$ $P(0,0,0)$

7) $+\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ $\longrightarrow$ Sup. cónica recta

8) $+\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$ $\longrightarrow$ Sup. cónica recta



9) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ cilindro elíptico o circular si $a^2=b^2$ recto



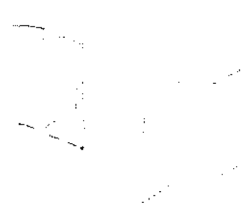
10) $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ $\nexists$ lugar geométrico

11) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ cilindro hiperbólico recto

12) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ eje z

13) $-\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ eje z

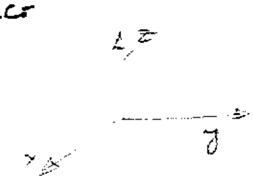
14) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ planos secantes



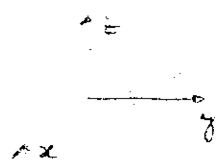
15) $\frac{x^2}{a^2} = 1$ planos paralelos

16) $-\frac{x^2}{a^2} = 1$ $\nexists$ lugar geométrico

17) $\frac{x^2}{a^2} = 0$ plano yz



18) $-\frac{x^2}{a^2} = 0$ plano yz



Analizamos las cuádricas sin centro

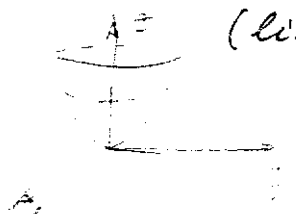
$$Mx^2 + Ny^2 = Sz$$

$$\pm \frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} = \pm z$$

1° Caso todos positivos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$$

representa un paraboloide elíptico, el eje z (lineal) es eje de simetría



2° caso

uno positivo y uno negativo

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$

Representa un paraboloide hiperbólico

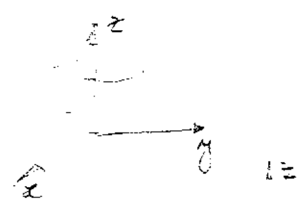
3° caso Analizamos con uno de los coeficientes nulos

$$\frac{y^2}{b^2} = z$$

Representa una superficie cilíndrica, parabólica recta

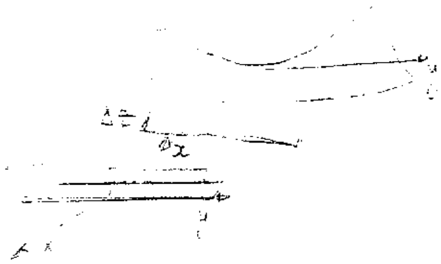
Resumen

1) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z \longrightarrow$ paraboloide elíptico



2) $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z \longrightarrow$ paraboloide hiperbólico

3) $\frac{y^2}{b^2} = z \longrightarrow$ cilindro parabólico recto



1) Analice si la ecuación dada corresponde a una superficie esférica, si lo es encuentre indique el centro y radio

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y + 6z + 20 = 0$

b) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 6x + 10y + 10 = 0$

c) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y + 2z + 6 = 0$

a) $x^2 + y^2 + z^2 - 4x + 4y + 6z + 20 = 0$
completamos cuadrados para obtener
$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 + (z-\delta)^2 = r^2$

1-a $(x^2-4x+\dots\dots) + (y^2+4y+\dots\dots) + (z^2+6z+\dots\dots) = -20+\dots+\dots+\dots$

$$\begin{array}{ccc} ①\ -4x = 2xb & ②\ 4y = 2yb & ③\ 6z = 2zb \\ -2 = b & 2 = b & 3 = b \\ 4 = b^2 & 4 = b^2 & 9 = b^2 \end{array}$$

$$(x^2-4x+4) + (y^2+4y+4) + (z^2+6z+9) = -20+4+4+9$$

$$(x-2)^2 + (y+2)^2 + (z+3)^2 = -3$$

no representa a una esfera $\nexists$ lugar geométrico

1b) $2x^2+2y^2+2z^2-6x+10y+10=0$

$$(2x^2-6x) + (2y^2+10y) + 2z^2 = -10$$

Para completar cuadrados el coeficiente de los términos cuadráticos debe ser 1, por eso se saca factor común

$$2(x^2-3x+\dots\dots) + 2(y^2+5y+\dots\dots) + 2z^2 = -10+\dots\dots+\dots\dots$$

$$\begin{array}{cc} ①\ -3x = 2xb & 5y = 2yb \\ -\frac{3}{2} = b & \frac{5}{2} = b \\ \frac{9}{4} = b^2 & \frac{25}{4} = b^2 \end{array}$$

$$2\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right) + 2\left(y^2+5y+\frac{25}{4}\right) + 2z^2 = -10+\frac{9}{2}+\frac{25}{2}$$

$$2\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + 2\left(y+\frac{5}{2}\right)^2 + 2z^2 = 7$$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{5}{2}\right)^2 + z^2 = \frac{7}{2}$$

Esfera $C\left(\frac{3}{2}, -\frac{5}{2}, 0\right)$ radio $\sqrt{\frac{7}{2}}$

1c) $x^2+y^2+z^2+2x-4y+2z+6=0$

$$(x^2+2x+\dots) + (y^2-4y+\dots\dots) + (z^2+2z+\dots) = -6+\dots+\dots+\dots\dots$$

$$(x^2+2x+1) + (y^2-4y+4) + (z^2+2z+1) = -6+1+4+1$$

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 0$$

No representa una esfera.
El lugar geométrico es un punto que satisface la ecuación $P(-1,2,-1)$

2) Indique las condiciones que deben verificar a, b ,c ,d $\in\mathbb{R}$ para que

$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ represente la ecuación de una superficie esférica.

$$x^2+y^2+z^2+ax+by+cz+d=0$$

Completamos cuadrados.

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2+(z-\delta)^2=r^2$$

Para que la ecuación represente una superficie esférica el número que represente al radio debe $\in \mathbb{R}^+$ pues si $\in \mathbb{R}^-$ $\nexists$ lugar geométrico y si es $=0$, representará a un punto / el centro de la esfera

$$(x^2+ax+\ldots^1)+(y^2+by+\ldots^2)+(z^2+cz+\ldots^3)=-d+\ldots^1+\ldots^2+\ldots^3$$

Recordemos:

$x^2+ax+b^2 = x^2+2xb+b^2$

$a = 2b$

$\frac{a}{2} = b \to \frac{a^2}{4} = b^2$

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

$$(x+\square)^2=x^2+2x\square+\square^2$$

①	②	③
$ax=2x\square$	$by=2y\square$	$cz=2z\square$
$\frac{a}{2}=\square$	$\frac{b}{2}=\square$	$\frac{c}{2}=\square$
$\frac{a^2}{4}=\square^2$	$\frac{b^2}{4}=\square^2$	$\frac{c^2}{4}=\square^2$

$$\left(x^2+ax+\frac{a^2}{4}\right)+\left(y^2+by+\frac{b^2}{4}\right)+\left(z^2+cz+\frac{c^2}{4}\right)=-d+\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}$$

$$\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(y+\frac{b}{2}\right)^2+\left(z+\frac{c}{2}\right)^2=\underbrace{-d+\frac{a^2+b^2+c^2}{4}}_{\text{mayor que } 0}$$

$$-d+\frac{a^2+b^2+c^2}{4}>0$$

$$-4d+a^2+b^2+c^2>0 \Rightarrow$$

$$a^2+b^2+c^2>4d$$

3) Sean $L_1: \begin{cases} 2x-y=2 \\ y-z=-1 \end{cases}$ y $L_2: (x,y,z)=t(1,2,3)+(1,0,0)$

Obtenga la ecuación de la superficie esférica con centro en $L_1 \cap L_2$ y que es tangente al plano $\alpha: 2x-z+3=0$

$$L_1: \begin{cases} 2x-y=2 \\ y-z=1 \end{cases} \qquad L_2: (x,y,z)=(1,0,0)+(1,2,3)t$$

L_1 está definida como intersección de planos

$\pi_1: 2x-y=2$ $\qquad\qquad$ $\pi_2: y-z=-1$

$\vec{n}_{\pi_1}=(2,-1,0)$ $\qquad\qquad$ $\vec{n}_{\pi_2}=(0,1,-1)$

Para obtener las ecuaciones paramétricas de L_1 debemos obtener $\vec{d}_{L_1}$ y $P\in L_1$

$$\vec{d}_{L_1}=\vec{n}_{\pi_1}\times\vec{n}_{\pi_2}$$

$$\vec{d}_{L_1}=\begin{vmatrix} \breve{i} & \breve{j} & \breve{k} \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=(1,2,2)$$

si $P\in L_1 \Rightarrow P\in\pi_1$ y $P\in\pi_2$ $\qquad * \begin{cases} 2x-y=2 \\ y-z=1 \end{cases}$

* damos un valor arbitrario a una de las variables, por ejemplo $y=0 \Rightarrow z=1$ y $x=1$

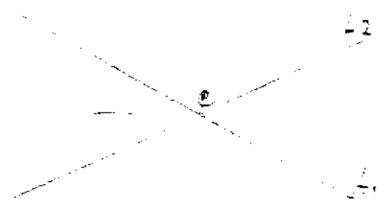
$P_1\in L_1 \quad (1,0,1)$

$$L_1: \begin{cases} x=1+\lambda \\ y=0+2\lambda \\ z=1+2\lambda \end{cases} \qquad L_2: \begin{cases} x=1+t \\ y=0+2t \\ z=0+3t \end{cases}$$

Recordar poner distinto parámetro en cada recta para L_1 λ y para L_2 t

$$L_1\cap L_2=\{C\}$$

$$\begin{cases} 1+\lambda=1+t \Rightarrow \lambda=t \\ 2\lambda=2t \Rightarrow \lambda=t \\ 1+2\lambda=3t \Rightarrow 1+2\lambda=3t \\ \qquad\qquad\qquad\quad \lambda=t \end{cases}$$



$\Rightarrow t=1$ y $\lambda=1$

Reemplazando en L_1 $\lambda=1$ (es igual si se reemplaza $t=1$ en L_2)

$x=2 \qquad y=2 \qquad z=3 \qquad C(2,2,3)$

Como la esfera es tangente en un punto al plano α, si lo determinamos, podremos calcular la longitud del radio.

Para ello determinamos

L_3 (recta que pasa por los puntos H y C). figura de análisis

Una vez obtenido L_3 se busca $L_3 \cap \alpha = \{H\}$

Para obtener L_3 se necesita $\vec{dr}_{L_3}$ y $P_3 \in L_3$

$\vec{dr}_{L_3} = \vec{n}_\alpha$ y $P_3 = C(2,2,3)$ $\quad \alpha: 2x - z + 3 = 0$

$$L_3: \begin{cases} x = 2 + 2\lambda \\ y = 2 \\ z = 3 - \lambda \end{cases} \Rightarrow L_3 \cap \alpha = 2(2+2\lambda) - (3-\lambda) + 3 = 0$$

$$= 4 + 4\lambda - 3 + \lambda + 3 = 0$$

$$\lambda = -4$$

$$\lambda = -\frac{4}{5}$$

Para obtener M reemplazamos $\lambda = -\frac{4}{7}$ en L_3

$x = 2 + 2 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) \qquad y = 2 \qquad z = 3 - \left(-\frac{4}{5}\right)$

$x = 2 - \frac{8}{5} \qquad y = 2 \qquad z = 3 + \frac{4}{5}$

$x = +\frac{2}{5} \qquad y = 2 \qquad z = \frac{19}{5}$

$M\left(\frac{2}{5}, 2, \frac{19}{5}\right)$ Buscamos $\overline{MC}$

$$\overline{MC} = \left(2 - \frac{2}{5}, 2 - 2, 3 - \frac{19}{5}\right)$$

$$= \left(\frac{8}{5}, 0, -\frac{4}{5}\right)$$

$|\overline{MC}| = r \Rightarrow |\overline{MC}| = \sqrt{\frac{64}{25} + \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{80}{25}} = \frac{\sqrt{80}}{5} = \frac{4\sqrt{5}}{5}$

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \left(\frac{4}{5}\sqrt{5}\right)^2$$

$$\boxed{(x-2)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = \frac{16}{5}}$$

4) Indique, cuando sea posible, que representan las siguientes ecuaciones en $\mathbb{R}^2$ y $\mathbb{R}^3$.

a) $x^2 - y^2 = z$

b) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$

c) $2x - y + z = 3$

d) $x^2 - 2y + 2x + 1 = 0$

e) $x^2 + y^2 + 6x - 2y = 0$

f) $x^2 - 2y^2 + z^2 = 4$

g) $2x^2 + 2y^2 + 4x - 6y - z = 0$

h) $-4x^2 - y^2 + 2z^2 - 8 = 0$

i) $x = 3$

j) $3x^2 + y^2 + z^2 = 9$

	$\mathbb{R}^2$	$\mathbb{R}^3$
a) $x^2 - y^2 = z$	....	paraboloide elíptico punto 1. Resumen pag 7
b) $x^2 + y^2 + z^2 = 9$	....	esfera $C(0,0,0)$ $r=3$ punto 1 Resumen pag 5
c) $2x - y + z = 3$	----	plano $\vec{n}_\pi = (2,-1,1)$

d) $x^2 - 2y + 2x + 1 = 0$

$(x^2 + 2x + \dots) - 2y = -1 + \dots$

$(x^2 + 2x + 1) - 2y = -1 + 1$

$(x+1)^2 - 2y = 0$

$(x+1)^2 = 2y$

en $\mathbb{R}^2$
parábola $V(-1,0)$
$p = 1$
eje focal paralelo eje y

en $\mathbb{R}^3$
cilindro parabólico recto
punto 3 Resumen pag 7

e) $x^2 + y^2 + 6x - 2y = 0$

$x^2 + 6x + y^2 - 2y = 0$

$(x^2 + 6x + \dots) + (y^2 - 2y + \dots) = 0 + \dots + \dots$

$(x^2 + 6x + 9) + (y^2 - 2y + 1) = 0 + 9 + 1$

$(x+3)^2 + (y+1)^2 = 10$

$\dfrac{(x+3)^2}{10} + \dfrac{(y+1)^2}{10} = 1$

en $\mathbb{R}^2$
Circunferencia $C(-3,-1)$ $r = \sqrt{10}$
en $\mathbb{R}^3$ cilindro circular recto punto 9 Resumen pag 6

f) $x^2-2y^2+z^2=4$ en $\mathbb{R}^2$ —

$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{2}+\frac{z^2}{4}=1$ en $\mathbb{R}^3$, hiperboloide de una hoja - Punto 3 Resumen hoja 5

---

g) $2x^2+2y^2+4x-6y-z=0$

$(2x^2+4x)+(2y^2-6y)=z$

$2(x^2+2x+\ldots)+2(y^2-3y+\ldots)=z+\ldots+\ldots$

$2(x^2+2x+1)+2(y^2-3y+\frac{9}{4})=z+2+\frac{9}{2}$

$2(x+1)^2+2(y-\frac{3}{2})^2=z+\frac{13}{2}$

en $\mathbb{R}^2$ ----

en $\mathbb{R}^3$ paraboloide circular

Punto 1 Resumen pag 7

---

h) $-4x^2-y^2+2z^2-8=0$

$-4x^2-y^2+2z^2=8$ en $\mathbb{R}^2$ —

$-\frac{4x^2}{8}-\frac{y^2}{8}+\frac{2z^2}{8}=1$ en $\mathbb{R}^3$

$-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{8}+\frac{z^2}{4}=1$ hiperboloide de dos hojas punto 4 Resumen pag 5

---

i) $x=3$ en $\mathbb{R}^2$ una recta

en $\mathbb{R}^3$ el plano $x-3=0$

$\vec{n}_\pi=(1,0,0)$

j) $3x^2+y^2+z^2=9$ en $\mathbb{R}^2$ —

$\frac{x^2}{3}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{9}=1$ en $\mathbb{R}^3$ Elipsoide Punto 1 Resumen pag 5

---

5) Dadas las siguientes superficies :

a) $y=x^2$.

b) $z=3+x^2+y^2$.

c) $x^2+y^2+z^2=4$

d) $36x^2 - y^2 + 9z^2 = 144$.

e) $y^2 = 4x^2 + z^2$.

f) $x^2 - y^2 - z^2 = 4$.

g) $y^2 + z^2 = 9$

h) $z = x^2 - 3y^2$

i) Identifique y grafique cada una de ellas.

ii) Analice para qué valores de la constante $k / k \in \mathbb{R}$, existe intersección con planos $x = k$, $y = k$, $z = k$. Cuando exista, encuentre e identifique la ecuación de la curva intersección.

a) $y = x^2$ 1) cilindro parabólico recto. Punto 3 Resumen pág 5

2) Se trata de secciones con planos // a los planos coordenados

a) $\cap$ plano // $xz \Rightarrow y = k \Rightarrow x^2 = k$

si $k > 0$ par de rectas paralelas al eje z

si $k = 0$ es el eje z

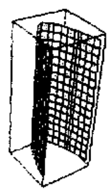
si $k < 0$ $\nexists$ lugar geométrico

b) $\cap$ plano // $xy \Rightarrow z = k \Rightarrow y = x^2$ parábola de eje y

c) $\cap$ plano // $yz \Rightarrow x = k \Rightarrow y = k^2$

si $k = 0$ es el eje $z \Rightarrow y = 0$

si $k \neq 0$ recta // al eje z



b) $z = 3 + x^2 + y^2$

$x^2 + y^2 = z - 3$ Paraboloide circular
Punto 1 - Resumen pag 7

a) Secciones con planos // a los planos coordenados

a) $\cap$ planos // $xy \Rightarrow z = k$

$x^2 + y^2 = k - 3$

- si $k - 3 = 0$ punto $(0,0,3)$
- si k $k - 3 < 0 \Rightarrow k < 3$ $\nexists$ lugar geométrico
- si $k - 3 > 0 \Rightarrow k > 3 \Rightarrow$ circunferencias

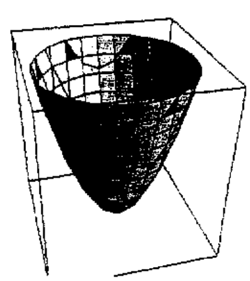
b) $\cap$ planos // $yz \Rightarrow x = k$

$y^2 - z = -3 - k$

$y^2 = z - 3 - k$ parábolas de eje focal z

c) $\cap$ planos // $xz \Rightarrow y = k$

$x^2 = z - 3 - k$ parábolas eje focal z



---

c) $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

esfera $C(0,0,0)$ radio 2

2) Secciones con planos // a los planos coordenados

a) $\cap$ planos // $xy \Rightarrow z = k$

$x^2 + y^2 = 4 - k^2$

- si $4 - k^2 = 0 \Rightarrow 4 = k^2 \Rightarrow |k| = 2$

  son dos puntos $P_1(0,0,2)$ y $P_2(0,0,-2)$

- si $4 - k^2 > 0 \Rightarrow 4 > k^2 \Rightarrow |k| < 2$

  $-2 < k < 2$

  circunferencias

- si $4 - k^2 < 0 \Rightarrow |k| > 2$

  $k \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

  $\nexists$ lugar geométrico

b) $\cap$ planos // $yz \Rightarrow x = k$

$y^2 + z^2 = 4 - k^2$

- si $4 - k^2 = 0 \Rightarrow |k| = 2$

  Son dos puntos $Q_1(2,0,0)$ y $Q_2(-2,0,0)$

- si $4 - k^2 > 0 \Rightarrow |k| < 2 \Rightarrow -2 < k < 2$

  circunferencias

- si $4 - k^2 < 0 \Rightarrow |k| > 2$

  si $k \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

  $\nexists$ lugar geométrico

c) $\cap$ planos // $xz \Rightarrow y = k$

$x^2 + z^2 = 4 - k^2$

- si $4 - k^2 = 0 \Rightarrow 4 = k^2 \Rightarrow |k| = 2$

  Son dos puntos $T_1(0,2,0)$ $T_2(0,-2,0)$

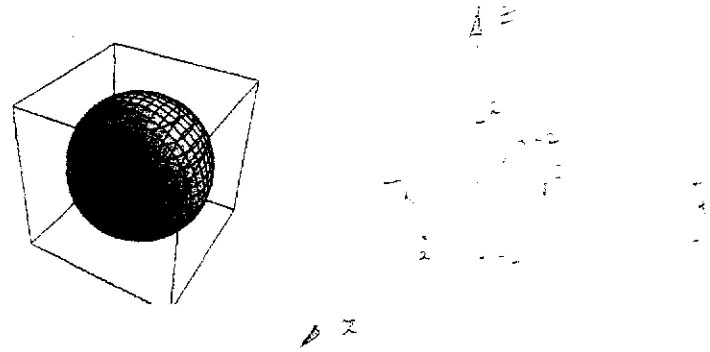
- si $4 - k^2 > 0$ $|k| < 2 \Rightarrow -2 < k < 2$

  circunferencia

- si $4 - k^2 < 0 \Rightarrow |k| > 2$

  si $k \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$

  $\nexists$ lugar geométrico



d) $36x^2 - y^2 + 9z^2 = 144$

$$\frac{x^2}{\frac{144}{36}} - \frac{y^2}{144} + \frac{z^2}{\frac{144}{9}} = 1$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{144} + \frac{z^2}{16} = 1$$

1) Hiperboloide de una hoja
Punto 3 Resumen hoja 5

2) Secciones con planos // a los planos coordenados

a) $\cap$ planos // $xz \Rightarrow y = k$

$$\frac{x^2}{\frac{144}{36}} + \frac{z^2}{\frac{144}{9}} = 1 + \frac{k^2}{144}$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{z^2}{16} = \frac{144+k^2}{144}$$

$\frac{144+k^2}{144} > 0 \ \forall k \in \mathbb{R}$ entonces representarán elipses, a medida que $|k|$ aumenta aumentan los semiejes de las elipses

b) $\cap$ planos // $xy \Rightarrow z = k$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{144} = 1 - \frac{k^2}{16}$$

$$\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{144} = \frac{16-k^2}{16}$$

• Si $16-k^2>0 \Rightarrow -4<k<4$

hipérbola de eje focal x

• Si $16-k^2=0 \Rightarrow k=4 \vee k=-4$

$$\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{12}\right)\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{12}\right)=0$$

son dos rectas asíntotas $\begin{cases} \frac{x}{2}-\frac{y}{12}=0 \\ \vee \\ \frac{x}{2}+\frac{y}{12}=0 \end{cases}$

• Si $16-k^2<0$ hipérbola de eje focal y

$k\in(-\infty,-4)\cup(4,+\infty)$

c) $\cap$ planos $yz \Rightarrow x=k$

$$\frac{z^2}{16}-\frac{y^2}{144}=1-\frac{k^2}{4}$$

$$\frac{z^2}{16}-\frac{y^2}{144}=\frac{4-k^2}{4}$$

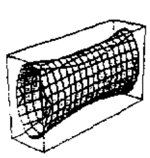
• Si $4-k^2>0 \Rightarrow -2<k<2$
hipérbola, eje focal eje z

• Si $4-k^2=0$ $\quad \frac{z^2}{16}-\frac{y^2}{144}=0$

$$\left(\frac{z}{4}-\frac{y}{12}\right)\cdot\left(\frac{z}{4}+\frac{y}{12}\right)=0$$

son dos rectas asíntotas $\begin{cases} \frac{z}{4}-\frac{y}{12}=0 \\ \vee \\ \frac{z}{4}+\frac{y}{12}=0 \end{cases}$

• Si $4-k^2<0$
$\Rightarrow k\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$
hipérbolas eje focal y



e) $y^2 = 4x^2 + z^2$

$4x^2 + z^2 - y^2 = 0$ Superficie cónica

a) Sección con planos // a los planos coordenados

$\cap$ plano $xy \Rightarrow z = k$

$y^2 - 4x^2 = k^2 \quad k \in \mathbb{R}$

- si $k \neq 0$

$y^2 = 4x^2$ par de rectas

$(y-2x)(y+2x) = 0$

$y - 2x = 0 \lor y + 2x = 0$

- si $k \neq 0$ k^2 siempre positivo

$y^2 - 4x^2 = k^2$ hipérbolas de eje y

$\cap$ plano $yz \Rightarrow x = k$

$z^2 - y^2 = -4k^2$

$y^2 - z^2 = 4k^2$ hipérbolas de eje y

k^2 siempre positivo

- si $k = 0$

$y^2 - z^2 = 0$ par de rectas

$(y-z)(y+z) = 0$

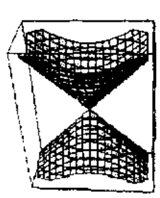
$\cap$ plano $xz \Rightarrow y = k$

$4x^2 + z^2 = k^2$ k^2 siempre positivo

si $k \neq 0$ elipse

si $k = 0$ $4x^2 + z^2 = 0$

Punto $(0,0,0)$



f) $x^2-y^2-z^2=4$ dos negativos y un positivo

$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{4}=1$ hiperboloide de dos hojas

caso 4 Resumen pag 5

2) Sección con planos // a los planos coordenados

a) $\cap$ plano $xy \Rightarrow k=z$

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=1+\frac{k^2}{4}$$

$$\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{4}=\frac{4+k^2}{4}\Big\}\text{ es siempre positivo}$$

hipérbola equilátera eje focal x

b) $\cap$ plano $yz \Rightarrow k=x$

$$-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{4}=1-\frac{k^2}{4}$$

$$-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{4}=\frac{4-k^2}{4}$$

- Si $4-k^2>0 \Rightarrow 4>k^2 \Rightarrow |k|<2$

  $-2<k<2$

  $\nexists$ l. geométrico

- Si $4-k^2=0 \Rightarrow k=2 \vee k=-2$

  $-\frac{y^2}{4}-\frac{z^2}{4}=0$ dos puntos $P_1(2,0,0)$ $P_2(-2,0,0)$

- Si $4-k^2<0$

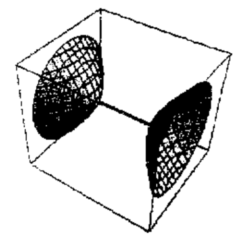
  $\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{4}=$ positivo circunferencias

  $k\in(-\infty,-2)\cup(2,+\infty)$

c) $\cap$ plano $zx \Rightarrow y=k$

$$\frac{x^2}{4}-\frac{z^2}{4}=\frac{4+k^2}{4}\Big\}\text{ siempre positivo } y\neq 0$$

hipérbolas equiláteras eje focal x



g) $y^2+z^2=9$ cilindro circular recto

Caso 9 Resumen pag 6

$$\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{9}=1$$

1) Sección con planos // a los planos coordenados

a) $\cap$ planos // al plano $xy \Rightarrow k=z$

$y^2=9-k^2$

- Si $9-k^2>0 \Rightarrow 9>k^2 \Rightarrow |k|<3$

$-3<k<3$

son dos rectas //

- Si $9-k^2=0$ $k=3 \vee k=-3$

es una recta

- si $9-k^2<0 \Rightarrow k\in(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$

$\nexists$ l geométrico

b) $\cap$ plano // al plano $yz \Rightarrow x=k$

$\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{9}=1$ circunferencias de radio 3 $\forall k\in\mathbb{R}$

c) $\cap$ plano // al plano $xz \Rightarrow y=k$

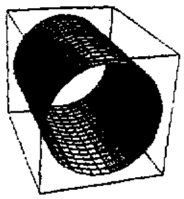
$\frac{z^2}{9}=\frac{9-k^2}{9}$ si

- $9-k^2>0 \Rightarrow$ $-3<k<3$ rectas //
- $9-k^2=0$ $k=3 \vee k=-3$

una recta

- $9-k^2<0 \Rightarrow k\in(-\infty,-3)\cup(3,+\infty)$

$\nexists$ l geométrico



h)

$z = x^2 - 3y^2$ paraboloide hiperbólico
caso 2 Resumen pag 7

$x^2 - 3y^2 = z$

2) Sección con planos // a los planos coordenados

a) $\cap$ planos // al plano $xy \Rightarrow k = z$

$x^2 - 3y^2 = k$

si $k = 0 \Rightarrow \quad x^2 = 3y^2$

$|x| = \sqrt{3}\,|y|$

$x = \sqrt{3}\,y \quad \vee \quad x = -\sqrt{3}\,y$

2 rectas

si $k > 0 \Rightarrow \quad x^2 - 3y^2 = |k|$

hipérbolas de eje x

si $k < 0 \Rightarrow \quad x^2 - 3y^2 = -k$

$3y^2 - x^2 = k$

hipérbolas eje y

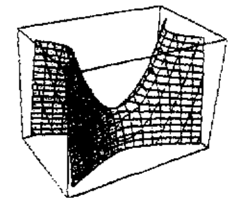
b) $\cap$ planos // al plano $yz \Rightarrow x = k$

$-3y^2 = z - k^2$

parábolas de eje // al eje z

c) $\cap$ planos // al plano $zx \Rightarrow y = k$

$x^2 = z - 3k^2$ parábolas de eje // al eje z



6) Las superficies dadas se cortan según una curva ***C.*** Grafique las superficies y encuentre las ecuaciones cartesianas y paramétricas de la proyección de ***C*** sobre los planos que se indican .

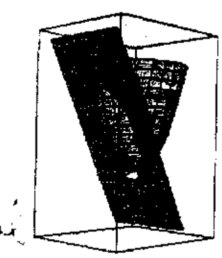
a) $S_1 : z = x^2 + y^2$; $S_2 : z = 2x$ plano xy

b) $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 4$; $S_2 : x^2 + y^2 = 2y$ plano yz

c) $S_1 : x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$; $S_2 : x^2 + y^2 = z^2$ plano xy

a) $S_1 : z = x^2 + y^2$; $S_2 : z = 2x$ plano xy

Buscamos $S_1 \cap S_2 =$



$$\begin{cases} z = x^2 + y^2 \\ z = 2x \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 2x$$

$x^2 + y^2 - 2x = 0$

$(x^2 - 2x + 1) + y^2 = 1$

$$C \begin{cases} (x-1)^2 + y^2 = 1 \\ z = 2x \end{cases}$$

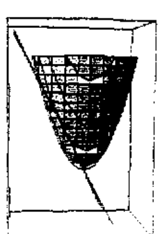
proyección plano xy : $(x-1)^2 + y^2 = 1$

$\Rightarrow z = 0$ Circunferencia $C(1,0)$ radio 1

Ecuaciones paramétricas

Recordamos

$$\begin{cases} x = \alpha + r\cos t \\ y = \beta + r \operatorname{sen} t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 + \cos t \\ y = 0 + \operatorname{sen} t \quad 0 \le t \le 2\pi \\ z = 0 \end{cases}$$



b)

$S_1: x^2+y^2+z^2=4$

- esfera centrada en el origen, radio 2

$S_2: x^2+y^2=2y$

$\boxed{\text{plano } yz \Rightarrow x=0}$

$x^2+y^2-2y=0$

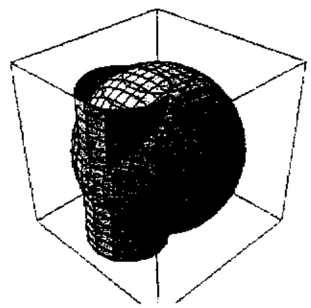
$x^2+(y^2-2y+\dots)=\dots$

$x^2+(y^2-2y+1)=1$

$x^2+(y-1)^2=1$

- cilindro circular recto

$$C^* = S_1 \cap S_2: \begin{cases} x^2 = 4-y^2-z^2 \\ x^2 = 1-(y-1)^2 \end{cases}$$



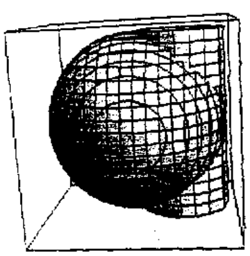
Igualando..

$4-y^2-z^2 = 1-(y^2-2y+1)$

$4-y^2-z^2 = 1-y^2+2y+1$

$-2y+4 = z^2$

$-2(y-2) = z^2$



$$C: \begin{cases} -2(y-2) = z^2 \\ x^2+y^2 = 2y \end{cases}$$ sobre $yz \Rightarrow x=0$

<u>ecuaciones paramétricas</u>
$$\begin{cases} y = 2-\dfrac{t^2}{2} \\ z = t \\ x = 0 \end{cases}$$

---

c) $S_1: x^2+y^2+(z-2)^2=4$

esfera $C(0,0,2)$ radio 2

$S_2: x^2+y^2=z^2$ plano xy

$x^2+y^2-z^2=0$

Superficie cónica

$S_1 \cap S_2 = C^*$

$$\begin{cases} x^2+y^2+(z-2)^2=4 \\ x^2+y^2=z^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z^2+(z-2)^2=4 \\ x^2+y^2=z^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z^2+z^2-4z+4=4 \\ x^2+y^2=z^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2z^2-4z=2z(z-2)=0 & \textcircled{1} \\ x^2+y^2=z^2 \end{cases}$$

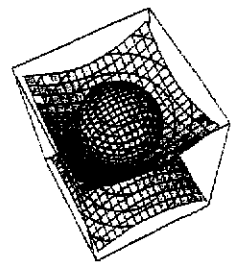
$2z(z-2)=0$
$2z=0 \lor z-2=0$

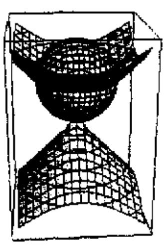
① $\begin{cases} z=0 \\ x^2+y^2=0 \end{cases}$ Punto $(0,0,0)$

② $\begin{cases} z=2 \\ x^2+y^2=4 \end{cases} : \mathcal{C}$

Proyección sobre plano $xy \Rightarrow z=0$

ecuaciones paramétricas: $\begin{cases} x=2\cos\theta \\ y=2\,\mathrm{sen}\,\theta \\ z=0 \end{cases}$





Recordamos

6 a)
la proyección de C sobre el plano xy es una circunferencia $C(1,0)$ radio 1

ec. paramétricas: $\begin{cases} x=\alpha+r\cos t \\ y=\beta+r\,\mathrm{sen}\,t \end{cases}$

6 b) la proyección de $\mathcal{C}$ sobre el plano $yz \Rightarrow x=0$
es una parábola eje focal // eje y

ec paramétricas: $\begin{cases} x=t+\alpha \\ y=\dfrac{t^2}{2p}-\beta \end{cases}$

Algo más de teoría

Superficie de revolución: Es la superficie generada por una curva plana llamada generatriz en torno a una recta llamada eje que pertenece al plano de la curva. Al seccionar la con planos perpendiculares al eje de revolución se obtienen circunferencias.

Ejemplo: Hallar la ecuación de la sup generada por el giro de la parábola $z^2=2y$ en el plano $x=0$ en torno al eje y.

Mecánicamente se reemplaza z por $\sqrt{x^2+z^2}$

$$\Rightarrow \left(\sqrt{x^2+z^2}\right)^2 = 2y \Rightarrow x^2+z^2=2y$$

generalizando: Si la curva gira en torno:

a) al eje x, reemplazar y o z en la ecuación de la curva por $\sqrt{y^2+z^2}$

b) al eje y reemplazar x o z en la ecuación de la curva por $\sqrt{x^2+z^2}$

c) al eje z, reemplazar x o y en la ecuación por $\sqrt{x^2+y^2}$

Ejemplo: Obtener la superficie de revolución generada por rotación de la recta $2x+3y=6$

gira alrededor de y $\Rightarrow$ x sustituyo por $\sqrt{x^2+z^2}$

luego $2\sqrt{x^2+z^2}+3y=6$

$$2\sqrt{x^2+z^2} = 6-3y$$

$$\left(2\sqrt{x^2+z^2}\right)^2 = (6-3y)^2$$

$$4x^2-9y^2+4z^2 = 36-36y+9y^2$$

$$4x^2-9(y^2-4y+4)+4z^2 = -36+36 \quad \text{completando cuadrados}$$

$$4x^2-9(y-2)^2+4z^2=0$$

o bien

$$\boxed{4x^2+4z^2=9(y-2)^2}$$

7) Las superficies dadas se cortan según una curva $\boldsymbol{C}$. Grafique las superficies y encuentre las ecuaciones cartesianas y paramétricas de dicha curva

a) $S_1 : z = x + y$; $S_2 : z = 6$

b) $S_1 : z = x^2 - y^2$; $S_2 : x^2 + y^2 + z^2 = 6$

c) $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$; $S_2 : x = \sqrt{y^2 + z^2}$

d) $S_1 : 9x^2 + (y + 2)^2 - z^2 = 0$; $S_2 : z = 3$

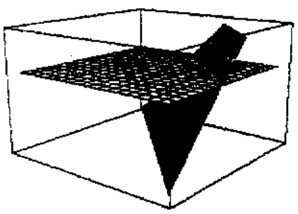
e) $S_1 : -2x^2 + (y - 1)^2 - z^2 = 1$; $S_2 : y=4$

a) $S_1 : z = x + y$ $\qquad S_2 : z = 6$

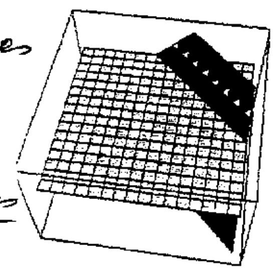
S_1 : plano α: $z - x - y = 0$ $\qquad S_2$ plano β: $z - 6 = 0$

$S_1 \cap S_2 : L_1$ punto $\in L_1$ si $z = 6$ $x = 0 \Rightarrow y = 6$

$P_1(0,6,6)$ $\quad d_{L_1} = \vec{n}_\alpha \times \vec{n}_\beta = \begin{vmatrix} i & j & k \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (-1, 1, 0)$



$L_1 \begin{cases} x = 0 - \lambda \\ y = 6 + \lambda \\ z = 6 \end{cases}$ ecuaciones paramétricas



$\begin{cases} x + y = 6 \\ z = 6 \end{cases}$ ecuaciones cartesianas

b) $S_1 : z = x^2 + y^2$ $\qquad S_2 : x^2 + y^2 + z^2 = 6$

paraboloide circular $\qquad$ esfera $C(0,0,0)$ $r = \sqrt{6}$

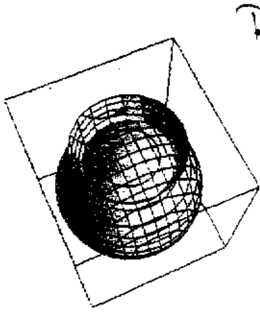
$S_1 \cap S_2 \qquad z + z^2 = 6$

$z^2 + z - 6 = 0$ $\quad z_1 = 2$, $z_2 = -3$

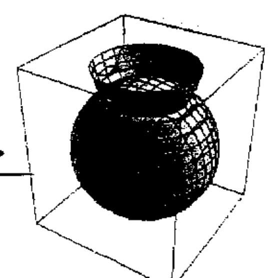
Reemplazamos en S_2

$x^2 + y^2 + 4 = 6 \Rightarrow x^2 + y^2 = 2$

$x^2 + y^2 + 9 = 6 \Rightarrow \cancel{x^2 + y^2 = -3}$

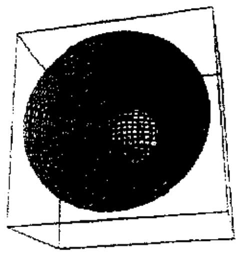


$\begin{cases} x^2 + y^2 = 2 \\ z = 2 \end{cases}$ ecuaciones cartesianas



$\begin{cases} x = \sqrt{2} \cos\alpha \\ y = \sqrt{2} \operatorname{sen}\alpha \\ z = 2 \end{cases}$ ecuaciones paramétricas c)

$S_1: x^2+y^2+z^2=1$
esfera radio 1
$C(0,0,0)$



$S_2: x=\sqrt{y^2+z^2}$

$x^2=y^2+z^2$

$0=y^2+z^2-x^2$

superficie cónica

$S_1 \cap S_2$ $\quad x^2+\underbrace{x^2}_{y^2+z^2}=1$

$x^2=\frac{1}{2}$ reemplazamos en S_2

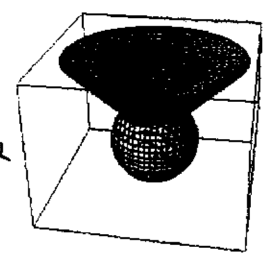
$|x|=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad \frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{y^2+z^2} \quad \vee \quad -\frac{1}{\sqrt{2}}\cancel{=}\sqrt{y^2+z^2}$

no puede ser

Reemplazamos $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ en S_1

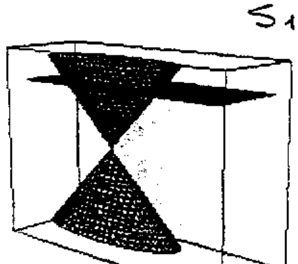
$\frac{1}{2}+y^2+z^2=1 \Rightarrow \begin{cases} y^2+z^2=\frac{1}{2} & \text{(circunferencia)} \\ x=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ <u>ecuaciones cartesianas</u>

<u>ecuaciones paramétricas</u> $\begin{cases} y=\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\alpha \\ z=\frac{1}{\sqrt{2}}\operatorname{sen}\alpha \\ x=\frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$



---

d) $S_1: 9x^2+(y+2)^2-z^2=0$ $\qquad S_2: z=3$

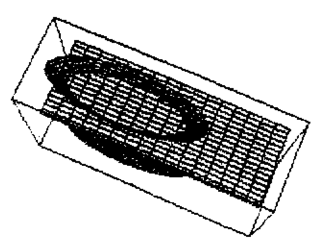


$S_1 \cap S_2$

$9x^2+(y+2)^2-9=0$

$9x^2+(y+2)^2=9$

$\frac{x^2}{1}+\frac{(y+2)^2}{9}=1$ elipse



<u>ecuaciones cartesianas</u> $\begin{cases} 9x^2+(y+2)^2=9 \\ z=3 \end{cases}$ $\quad$ <u>ecuac. paramet.</u> $\begin{cases} x=\cos\alpha \\ y=-2+3\operatorname{sen}\alpha \\ z=3 \end{cases}$

8) Obtenga el hiperboloide de una hoja que cumple con las siguientes condiciones:

a) su traza con el plano ~~xz~~ es una hipérbola equilátera centrada en el origen tal que uno de sus vértices es el punto (1, 0, 0)

b) su traza con el plano xy es la circunferencia con centro en el origen y radio 1.

Debe cumplir las dos condiciones

Hiperboloide de una hoja ++ −

$$① \; \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

$$② \; +\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

$$③ \; -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

son las tres posibles situaciones

Condiciones ⓐ

• Su traza con el plano $xz \Rightarrow y=0$ es una hipérbola $\Rightarrow$ descartamos ②

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \vee \qquad -\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

• Si uno de sus vértices es $(1,0,0)$ el eje focal es el eje x por lo tanto

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$$

• Si es una hipérbola equilátera $\Rightarrow a^2=c^2$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{a^2}-\frac{z^2}{a^2}=1$$

Condiciones ⓑ

traza $xy \Rightarrow z=0$ circunferencia con centro en el origen y radio 1

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}=1 \qquad \Rightarrow a^2=1$$

Finalmente

$$\boxed{x^2+y^2-z^2=1}$$

9)Sea la superficie S de ecuación : $-x^2 + y^2 - Az = B$.
Determine los valores de A y B en cada uno de los siguientes casos:

a) S representa una superficie cilíndrica cuya traza con el plano xy es una hipérbola de distancia focal $3\sqrt{2}$ y eje focal "x".

Obtenga las trazas y grafique la superficie para los valores hallados.

b) S corresponde a un paraboloide hiperbólico que contiene al origen y cuya intersección con el plano x = 1 es una parábola de vértice V = (1; 0; 2).

a) $-x^2+y^2-Az=B$

$$-\frac{x^2}{B}+\frac{y^2}{B}-\frac{Az}{B}=1$$

si la traza con el plano xy es una hipérbola z=0 (se trata de un cilindro hiperbólico) entonces

$$-\frac{x^2}{B}+\frac{y^2}{B}=1 \Rightarrow A=0$$

si la distancia focal = $3\sqrt{2} \Rightarrow c=\frac{3}{2}\sqrt{2}$

Recordando la relación Pitagórica

$c^2=a^2+b^2 \qquad c^2=\frac{9}{2}$

$\frac{9}{2}=B+B$

$\frac{9}{2}=2B \Rightarrow B=\frac{9}{4}$

$A=0$ y $B=\frac{9}{4}$

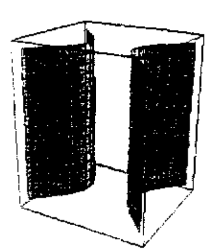
pero como eje focal x $\Rightarrow B<0$
$\Rightarrow B=-\frac{9}{4}$

$$\frac{x^2}{\frac{9}{4}}-\frac{y^2}{\frac{9}{4}}=1$$

Para obtener las trazas se interseca con los planos coordenados

• ∩ plano xy ⇒ z=0

$$\frac{x^2}{\frac{9}{4}}-\frac{y^2}{\frac{9}{4}}=1$$



• $\cap$ plano $xz \Rightarrow y=0$

$$\frac{x^2}{\frac{9}{4}} = 1 \Rightarrow x^2 = \frac{9}{4}$$

$$|x| = \frac{3}{2}$$

dos rectas

$x = \frac{3}{2}$ y $x = -\frac{3}{2}$

• $\cap$ plano $zy \Rightarrow x = 0$

$$-\frac{y^2}{\frac{9}{4}} = 1 \Rightarrow -y^2 = \frac{9}{4}$$

$\nexists$ lugar geométrico

b) <u>Paraboloide hiperbólico</u>

• Si es un paraboloide hiperbolico

$$-x^2 + y^2 = Az + B$$

• Si contiene al origen $B = 0$

• $\cap$ plano $x = 1$

$$-1 + y^2 = Az$$

Parábola

$$y^2 = Az + 1$$

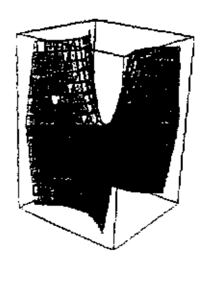
$$y^2 = A\left(z + \frac{1}{A}\right)$$

Si el V $(1,0,2)$

entonces $\frac{1}{A} = 2$

$$A = \frac{1}{2}$$

$$\boxed{B = 0 \quad A = \frac{1}{2}}$$



10) Sea la superficie $\sigma: A(x-1)^2 + B(y-1)^2 + Cz^2 = 1$.

a) Halle todos los $A, B, C \in \mathbb{R}$, tales que la superficie sea:

i) Cilindro circular recto de eje paralelo al eje x

ii) Hiperboloide de una hoja de eje paralelo al eje z tal que su traza con el plano $z = 0$ sea una elipse de eje focal paralelo al eje x, cuyos semiejes tengan longitudes 3 y 4.

b) Para $A = 1, B = C = -1$, identifique y grafique la superficie

a) Cilindro circular recto eje // x

Si el eje es // a x el término en x no debe estar presente, pues si no se encuentra significa que tome todos los valores

$\Rightarrow \quad A=0$

$$\frac{(y-1)^2}{\frac{1}{B}} + \frac{z^2}{\frac{1}{C}} = 1$$

Si es circular $\Rightarrow \frac{1}{B} = \frac{1}{C}$ $\quad B=C$ y $B>0$, $C>0$

$$A=0 \wedge B=C>0$$

b) Hiperboloide de una hoja // al eje z

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

Si $z=0$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$ eje focal // al eje x

$$\frac{(x-1)^2}{\frac{1}{A}} + \frac{(y-1)^2}{\frac{1}{B}} = 1$$ $\quad a=4 \Rightarrow a^2=16$, $b=3 \Rightarrow b^2=9$

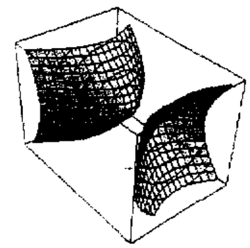
$$\frac{1}{A} = 16 \wedge \frac{1}{B} = 9$$

$$\Rightarrow A = \frac{1}{16} \wedge B = \frac{1}{9}$$ y $C<0$ para que z^2 sea negativo

b) para $A=1 \quad B=C=-1$ identifique

$$\boxed{(x-1)^2-(y-1)^2-z^2=1}$$

Hiperboloide de 2 hojas



11) Sea la superficie S : $A\,x^2 + y^2 = k\,z$.

a) Halle los valores de A , $k \in \mathbb{R}$ para los cuales la intersección de la superficie con el plano $z = 4$ es una hipérbola equilátera de eje focal paralelo al eje "y" , tal que la distancia entre sus focos vale $4\sqrt{2}$

b) Para $A = -1$ y $k = 3$, halle los puntos de intersección de S con la recta de ecuación $(x;y;z)=(2;0;0) + t(0;1;1)$, $t \in \mathbb{R}$.

Identifique la superficie

$$A x^2 + y^2 = kz$$

a) • $\cap \quad z=4$

$$A x^2 + y^2 = k4$$

$$\frac{x^2}{\frac{4k}{A}} + \frac{y^2}{4k} = 1 \qquad A<0$$

$$-\frac{x^2}{\frac{4k}{|A|}} + \frac{y^2}{4k} = 1$$ • hipérbola equilátera

$$|A| = 1 \Rightarrow A = -1$$

• distancia entre focos $= 2c = 4\sqrt{2}$

$$c = 2\sqrt{2}$$

Relación Pitagórica

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$4 \cdot 2 = 4k + 4k$$
$$8 = 8k$$
$$k = 1$$

Entonces $A = -1$ y $k = 1$

b) Si $A = -1$ y $k = 3$

$$S: -x^2 + y^2 = 3z$$

la recta L_1: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 + t \\ z = 0 + t \end{cases}$ $\quad S \cap L_1 = \{P_1\}$

$$-(2)^2 + t^2 = 3t$$

$$\Rightarrow t^2 - 3t - 4 = 0$$
$$(x-4)(x+1) = 0$$

Reemplazando en L_1:
$t = 4$ y $t = -1$ obtenemos $P_1(2,4,4)$ $P_2(2,-1,-1)$

$S = -x^2 + y^2 = 3z$ Paraboloide hiperbólico

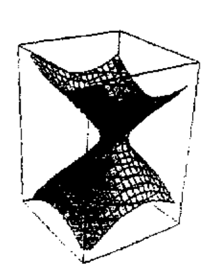
12) a) Escriba la ecuación de una superficie cuádrica cuyo eje es la recta $r: (x,y,z) = (0,1,0) + \lambda(0,0,1)$ con $\lambda \in \mathbb{R}$ y las intersecciones de la superficie con los planos $z = k$; $k \in \mathbb{R}$ son las circunferencias de radio $R = \sqrt{1+k^2}$

b) Grafique la superficie y obtenga sus trazas

a) $r: (x,y,z) = (0,1,0) + \lambda(0,0,1)$

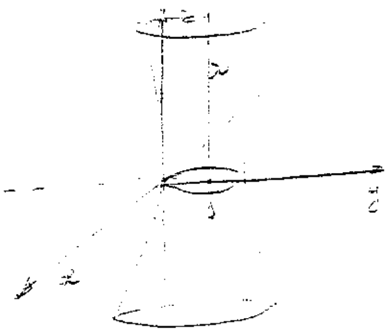
Si las intersecciones son circunferencias podemos inferir que puede tratarse de:

1) cilindro circular recto
2) hiperboloide de una hoja



• Si las circunferencias tienen por radio $R=\sqrt{1+k^2}$ con $k\in\mathbb{R}$, entonces el radio es variable, aumenta a medida que $|k|$ aumenta, por lo tanto la superficie correspon- de a un hiperboloide de una hoja

si el eje es r : $\begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ z=0+\lambda \end{cases}$



$$Ax^2+B(y-1)^2-Cz^2=1$$

el eje es $//$ a z *

pues el punto $(0,1,0)\in$ al eje

• Si $z=k$

$$Ax^2+B(y-1)^2=1+Ck^2$$

si $k=0$ plano xy

$$Ax^2+B(y-1)^2=1 \to \text{radio } 1$$

$$\Rightarrow A=B=1$$

$$x^2+(y-1)^2-Cz^2=1$$

$$x^2+(y-1)^2=1+Cz^2$$

si $z=2 \Rightarrow R=\sqrt{1+4}=\sqrt{5}$

$$\Rightarrow 1+Cz^2=\sqrt{5}$$

$$1+C.4=\sqrt{5} \Rightarrow |c|=1$$

recordar *

$$\boxed{\text{Entonces } A=1 \quad B=1 \quad C=-1}$$

Trabajo Práctico N° 8
Aplicaciones de autovalores y autovectores

Un poco de teoría

Sabemos que podemos representar cualquier vector mediante n-uplas (pares ordenados, ternas ordenadas, etc) (2, 3) o (2; 4; 3; 5) y las transformaciones lineales (TL) endomórficas (son endomórficas cuando el espacio de salida coincide con el espacio de llegada, ej: T: R^3 en R^3 ; T: R^2 en R^2) mediante matrices que son las llamadas "matrices asociadas" a la TL, referidas a la base que hemos elegido.

Nos preguntamos ¿cambia la representación del vector si elegimos otra base? Debe quedar claro que "no cambia el vector" que estamos representando, cuando cambiamos la base (dado que deberíamos pensarlo como clavado en el plano), lo que hallamos son las coordenadas en la nueva base.

Entonces la "matriz asociada" a la TL es la que describe una rotación, una reflexión una proyección del vector en cuestión y la matriz "cambio de base" es la que permite escribirlo en otra base (como escribirlo de otra forma pero sin efectuar ninguna modificación.

Solo hablamos de matriz "cambio de base" en transformaciones endomórficas de V en V (de $R^2 \to R^2$; de R^4 en R^4)

Sea $V_1 = \{e_1, e_2 \dots e_n\}$ una base de V y $\{f_1, f_2 \dots f_n\} = V_2$

otra base de V entonces

$$f_1 = a_{11} e_1 + a_{12} e_2 \dots + a_{1n} e_n$$

$$f_2 = a_{21} e_1 + a_{22} e_2 \dots + a_{2n} e_n$$

$$\vdots$$

Si P es la matriz de los coeficientes que resultan de escribir a los vectores de la V_1 como CL de los vectores de la otra base, llamamos matriz de pasaje o matriz cambio de base a P^t

Damos algunos ejemplos antes de resolver la práctica

Ej N°1 Dadas

Dadas las bases de R^2

$$B = \{(1,0);(0,1)\} \quad y \quad B'' = \{(1,1),(-1,0)\}$$

Determinar P la matriz de pasaje de la base B a la base B''. Por pertenecer al mismo espacio y por ser bases, los vectores de B'' pueden escribirse como CL de B

① $(1,1) = \alpha (1,0) + \beta (0,1)$

② $(-1,0) = \alpha_1 (1,0) + \beta_1 (0,1)$

la matriz P de cambio de base será

$$P = \begin{pmatrix} \alpha & \alpha_1 \\ \beta & \beta_1 \end{pmatrix}$$

(la traspuesta de los coeficientes)

De ① $\alpha = 1$ y $\beta = 1$

De ② $\alpha_1 = -1$ y $\beta_1 = 0$

entonces $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

Como ejemplo: Halla la matriz de pasaje de B'' a B escribimos los vectores de B como CL de B''

<u>Conclusión</u> para determinar la matriz de $P_{B \to B''}$ escribimos los vectores de como CL de los de B''

Si queremos determinar $P_{B'' \to B}$ escribimos los vectores de B'' como CL de B

$$\left.\begin{array}{l}(1,0) = \alpha\,(1,1) + \beta(-1,0) \quad (1)\\ (0,1) = \alpha_1 (1,1) + \beta_1(-1,0) \quad (2)\end{array}\right.\Rightarrow$$

(1) $\begin{array}{l} 1 = \alpha - \beta \\ 0 = \alpha \end{array} \Rightarrow \beta = -1$

(2) $\begin{array}{l} 0 = \alpha_1 - \beta_1 \Rightarrow \alpha_1 = \beta_1 \\ 1 = \alpha_1 \Rightarrow \beta_1 = 1 \end{array}$

matriz de pasaje

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Observación</u> $B = \{(1,0),(0,1)\}$ es la base canónica por lo tanto, cuando se trate de las bases canónicas se notarán con la letra E

- Para tener en cuenta P y Q son inversas por lo que se cumplirá siempre que

$$P \cdot Q = I \to \text{identidad}$$

Para determinar las coordenadas x con el cambio de base (x'' son las coordenadas de x referido a la nueva base a la que lo hemos cambiado)

$$\boxed{x'' = P\,x \qquad y \qquad x = Q\,x''}$$

<u>Ejemplo 2</u>

$B = \{(1,0,1),(0,1,0),(1,1,0)\}$ $B'' = \{(2,0,0),(1,1,0),(0,0,1)\}$

1) Hallar la matriz de pasaje de B a B'' (P)
2) Hallar la matriz de pasaje de B'' a B (Q)
3) Verificar que $P.Q = I$
4) Hallar las coordenadas del vector $x = (1,0,2)$ referidas a la base B''

1)
$$\begin{cases} (1,0,1) = \alpha(2,0,0) + \beta(1,1,0) + \delta(0,0,1) & ① \\ (0,1,0) = \alpha_1(2,0,0) + \beta_1(1,1,0) + \delta_1(0,0,1) & ② \\ (1,1,0) = \alpha_2(2,0,0) + \beta_2(1,1,0) + \delta_2(0,0,1) & ③ \end{cases}$$

$$① \begin{cases} 1 = 2\alpha + \beta \\ 0 = \beta \\ 1 = \delta \end{cases} \qquad ② \begin{cases} 0 = 2\alpha_1 + \beta_1 \\ 1 = \beta_1 \\ 0 = \delta_1 \end{cases} \qquad ③ \begin{cases} 1 = 2\alpha_2 + \beta_2 \\ 1 = \beta_2 \\ 0 = \delta_2 \end{cases}$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2)
$$\begin{cases} (2,0,0) = \alpha(1,0,1) + \beta(0,1,0) + \delta(1,1,0) & ① \\ (1,1,0) = \alpha_1(1,0,1) + \beta_1(0,1,0) + \delta_1(1,1,0) & ② \\ (0,0,1) = \alpha_2(1,0,1) + \beta_2(0,1,0) + \delta_2(1,1,0) & ③ \end{cases}$$

$$① \begin{cases} 2 = \alpha + \delta \\ 0 = \beta + \delta \\ 0 = \alpha \end{cases} \qquad ② \begin{cases} 1 = \alpha_1 + \delta_1 \\ 1 = \beta_1 + \delta_1 \\ 0 = \alpha_1 \end{cases} \qquad ③ \begin{cases} 0 = \alpha_2 + \delta_2 \\ 0 = \beta_2 + \delta_2 \\ 1 = \alpha_2 \end{cases}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

3)
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4)
$$(1,0,2) = \alpha(1,0,1) + \beta(0,1,0) + \delta(1,1,0)$$

$\begin{cases} 1 = \alpha + \delta \\ 0 = \beta + \delta \\ 2 = \alpha \end{cases}$ resolviendo el sistema

$\alpha = 2$, $\beta = 1$ y $\delta = -1$

$$X'' = P\,X$$

$$X'' = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Ejemplo N°3

Proponemos este ejemplo para comprender el concepto de matrices semejantes

Sea $T(x,y) = (4x-2y\ ,2x+y)$ la base $B = \{(1,1),(-1,0)\}$

1) Hallar la matriz de la transformación asociada a la base B

$$T(1,1) = (2,3) = \alpha(1,1) + \beta(-1,0) \quad ①$$
$$T(-1,0) = (-4,-2) = \alpha_1(1,1) + \beta_1(-1,0) \quad ②$$

$$① = \begin{cases} 2 = \alpha - \beta \\ 3 = \alpha \end{cases} \qquad ② \begin{cases} -4 = \alpha_1 - \beta_1 \\ -2 = \alpha_1 \end{cases}$$

Resolvemos ① $\alpha = 3$ y $\beta = 1$
② $\alpha_1 = -2$ y $\beta_1 = 2$

$$M_{(T)B} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2) Hallar la matriz de la transformación asociada a E (base canónica)

$$T(1,0) = (4,2) = \alpha(1,0) + \beta(0,1) \quad ①$$
$$T(0,1) = (-2,1) = \alpha_1(1,0) + \beta_1(0,1) \quad ②$$

Resolvemos ① $4 = \alpha$ y $2 = \beta$
② $-2 = \alpha_1$ y $1 = \beta_1$

$$M_{(T)E} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

3) Demostrar que

(a) $P \cdot M_{(+)B} \cdot Q = M_{(+)E}$

y

(b) $Q \cdot M_{(+)E} \cdot P = M_{(+)B}$

Nota
P y Q las hallamos en el Ejemplo 1

(a) $$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) $$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Recordemos • P es la matriz cambio de base de E a B
• Q es la matriz cambio de base de B a E

Las matrices $M_{(+)E}$ y $M_{(+)B}$ representan la misma TL (materializan el mismo endomorfismo) por lo cual decimos que son <u>matrices</u> <u>semejantes</u>

<u>Las matrices semejantes</u>

- tienen el mismo determinante
- tienen la misma traza
- tienen el mismo rango
- tienen el mismo polinomio característico
- tienen los mismos autovalores
- tienen la misma nulidad (nulidad = núcleo)

Diagonalización de matrices: autovalores y autovectores

La simplicidad de los cálculos cuando se trabaja con matrices diagonales determina que nos planteamos el interrogante ¿dada una TL caracterizada por una matriz A, será posible encontrar otra matriz semejante a A en otra base que caracterice la misma TL y que sea diagonal?

Si esto sucede, habrá que encontrar los escalares que serán los elementos de la diagonal de la matriz semejante a la matriz A que representa la transformación en la base B. El homólogo de cada vector de la base B será el mismo vector multiplicado por un escalar

Definición:

El escalar $\lambda \in \mathbb{R}$, es un valor propio, angiovalor o "autovalor" si exista un vector distinto del nulo tal que si $x \in a V$ $T(x) = \lambda x$

"Todo vector distinto del nulo que satisfaga $T(x) = \lambda x$ se llama vector propio, angiovector o autovector de la transformación asociado al valor propio λ".

Otra definición: "un vector propio, autovector o angiovector es un vector distinto del nulo cuya imagen es un múltiplo escalar del mismo"

Propiedades:

- Cada vector propio está asociado a "un único autovalor", la recíproca no es verdadera.
- A cada autovalor se le asocian infinitos autovectores.
- Los autovectores asociados a autovalores

distintos son linealmente independientes

Autovalores y autovectores asociados a una matriz $A^{2\times 2}$

Dada $A^{n\times n}$ y un vector distinto del nulo, se denomina autovalor de A al escalar λ si se verifica que:

$$Ax = \lambda x$$

Para determinar los autovalores

$$Ax = \lambda I x \qquad I \text{ identidad}$$

$$(Ax - \lambda I x) = \vec{0} \Rightarrow (A - \lambda I)x = \vec{0}$$

para que λ sea autovalor debe existir una solución diferente de la nula o trivial entonces el determinante $|(A - \lambda I)| = 0$, expresión que se denomina <u>expresión característica</u> y al desarrollarla se obtiene el <u>polinomio característico</u>

<u>Ejemplo</u>

Dado A, obtener los autovalores, y los autovectores asociados a los primeros.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$ planteamos el polinomio característico:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 0 & -2 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 1 & 0 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4 = 0$$

$$(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_{2,3} = 2$$

• Determinamos el subespacio generado por los mismos al que llamaremos "subespacio asociado al autovalor determinado"

Recordamos

$$(A-\lambda I)x=\vec{0}$$

• Para $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ Observamos que la primera fila y la tercera son proporcionales

Entonces

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{1}$$ El número de variables libres es 1, se saca como conclusión

que: número de variables libres = n - rango de la matriz.

Importante: el número de variables determina la dimensión del subespacio asociado. "n" es el orden de la matriz, el rango coincide con el número de vectores linealmente independientes que tenga la matriz.

Volvemos a 1 $\begin{cases} -1x-2z=0 \Rightarrow x=-2k \\ x+y+z=0 \Rightarrow y=k \end{cases}$

$z=k$

Vector genérico $(-2k, k, k)$

Base del subespacio asociado a $\lambda = 1$ $\{(-2,1,1)\}$

dimensión $\lambda = 2$

• Para $\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\vec{0}$$ Observamos que las tres filas son proporcionales

Entonces

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{2}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\vec{0}$$ el número de variables libres es 2. Por lo tanto la dimensión del subespacio asociado será 2, el rango de la matriz es uno

Volvemos a 2 $z=k$ e $y=t$

$-2x-2z=0$ Buscamos un vector genérico $(-z,t,z)$

base asociado al subespacio $\{(-1,0,1),(0,1,0)\}$

Si retomamos el concepto de diagonalización obtenidos los autovalores y los autovectores. Decimos que la matriz cuadrada A es diagonalizable si existe una matriz P (inversible) tal que $P^{-1}.A.P=D$

No toda matriz es diagonalizable, existen condiciones que deben cumplirse para poder encontrar una matriz diagonal semejante a otra dada:

"La condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada sea diagonalizable es que la dimensión del subespacio propio asociado a cada autovalor sea igual a la multiplicidad del mismo"

En el ejemplo anterior $\lambda_1=1$ $\lambda_{2,3}=2$ 2 es un valor de multiplicidad dos, pues $\lambda_2=2$ y $\lambda_3=2$ la dimensión del subespacio asociado es 2, es decir tiene dos vectores li, con lo cual decimos entonces que el subespacio propio asociado al autovalor es igual a la multiplicidad del mismo.

Si los autovalores son distintos la matriz cuadrada es diagonalizable.

Si esto sucede y la matriz resulta diagonalizable se podrá plantear el cambio de base (a la base de las direcciones propias) y trabajar con la matriz semejante que será la matriz diagonal (los elementos de la diagonal serán los valores propios de A.

1) Si A=$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ es una matriz cuadrada y $p(\lambda)$ es su polinomio característico verifique que :entonces $p(A)=N$

• Buscamos $p(\lambda)$

$p(\lambda) = |A - \lambda I|$ I matriz identidad

• Debemos probar que $p(A) = N$ → matriz nula

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p(\lambda) = (1-\lambda)^2$$
$$= \lambda^2 - 2\lambda + 1$$

$$p(A) = A^2 - 2A + I$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \boxed{\text{Se verifica}}$$

---

2) Si $A=\begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $P=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$

a) encuentre P^{-1}

b) Si A y B son matrices semejantes , encuentre B^8

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

• Determinamos P^{-1}

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/6 \\ \hline 1 & 0 & 1 & -1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 1/6 \end{array}\right)$$

$$\Rightarrow P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$

b) Si A y B son matrices semejantes, encuentra B^8.

Debemos encontrar la matriz B semejante a A si no se indica como, podemos hacerlo de las siguientes formas

$B = PAP^{-1}$ o bien $B = P^{-1}AP$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/6 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1.(-4) & 1.1+1.2 \\ 0 & 6.2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/6 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -4 & 3 \\ 0 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/6 \\ 0 & 1/6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4 & 7/6 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$B^8 = P\, D^8\, P^{-1}$

• Buscamos la D

$$\begin{vmatrix} -4-\lambda & 7/6 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-4-\lambda)(2-\lambda) = 0$$

$\lambda = -4 \quad \vee \quad \lambda = 2$

• Buscamos P

$\lambda = -4$

$$\begin{pmatrix} 0 & 7/6 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow y = 0 \Rightarrow x = x$$

$\vec{V_1} = (1, 0)$

$\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} -6 & 7/6 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$\Rightarrow 6x = \frac{7}{6} y$

$36x = 7y$

$\vec{V_2} = (7, 36)$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{6} \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1.(-4 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -4 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -4 & -4.1 + \frac{2}{3}.6 \\ 0 & \frac{6}{3} \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

• $B^8 = P^{-1} D^8 . P$

como B es diagonal para hallar B^8 es suficiente con encontrar B^8

$$\boxed{B^8 = \begin{pmatrix} 65536 & 0 \\ 0 & 256 \end{pmatrix}}$$

En realidad de esta forma al resultar B diagonal se simplifica la resolución, porque bastará con elevar los coeficientes de la diagonal a la 8ava

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 36 \end{pmatrix}$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -7/36 \\ 0 & 1/36 \end{pmatrix}$$

$$B^8 = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^8 \begin{pmatrix} 1 & -\frac{7}{36} \\ 0 & \frac{1}{36} \end{pmatrix}$$

$$B^8 = \begin{pmatrix} 1 & 7 \\ 0 & 36 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 65536 & 0 \\ 0 & 256 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -7/36 \\ 0 & 1/36 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{B^8 = \begin{pmatrix} 65536 & -\frac{38080}{3} \\ 0 & 256 \end{pmatrix}}$$

---

3) Si $D=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ y $P=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

a) encuentre P^{-1}

b) si se ~~verifica~~ que $B=P^{-1}.D.P$ calcule B^5

En este ejercicio indican de que forma calcular B^5 será $B^5 = P^{-1}.D^5.P$

Hallamos P^{-1}

$$\left(\begin{array}{cc|cc} -1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 \\ \hline 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \\ \hline 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/5 & 1/5 \\ \hline 1 & 0 & -3/5 & 2/5 \\ 0 & 1 & 1/5 & 1/5 \end{array}\right)$$

Entonces

$$B^5 = \begin{pmatrix} -3/5 & \frac{2}{5} \\ 1/5 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}^5 \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} & 2/5 \\ 1/5 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1024 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3/5 & \frac{2}{5} \cdot 1024 \\ -1/5 & 1/5 \cdot 1024 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= \boxed{\begin{pmatrix} 409 & 1230 \\ 205 & 614 \end{pmatrix}}$$

4) Indique , en cada uno de los casos , si para calcular A^3 se debe realizar el producto de matrices o se puede usar alguna propiedad. Justifique su respuesta.

a) $A=\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

Autovalores {-2,1,4}

b) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$

Autovalores {1,1,1}

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

En realidad dice Indique y solo con saber que $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_2$

autovalores $\{-2, 1, 4\}$ concluimos que es diagonalizable

A es diagonalizable

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$

$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Por ser diagonalizable se cumple

$A = P^{-1} D P$ ① se puede usar la propiedad lo resolvemos

Si los autovalores son

$\lambda_1 = -2 \qquad \lambda_2 = 1 \qquad \lambda_3 = 4$

Entonces

$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Para aplicar ① debemos obtener P y P^{-1}, P es la matriz cuyas columnas están formadas por los vectores (autovectores) asociados a los autovalores $-2, 1, 4$.

• $\vec{v}_1$ para $\lambda = -2$

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & 0-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & -2 \\ 0 & -2 & +2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \begin{cases} 4x - 2z = 0 & (1) \\ -2x + 3y - 2z = 0 & (2) \\ -2y + 2z = 0 & (3) \end{cases}$$

de (1) $\quad 4x = 2z \Rightarrow 2x = z$

de (3) $\quad 2y = 2z \Rightarrow y = z \Rightarrow 2x = y = z$

$$\underset{\text{genérico}}{\vec{V}} = (x, 2x, 2x) \Rightarrow \boxed{\vec{V}_1 = (1, 2, 2)}$$

- $\vec{V}_2$ asociado a $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} 2-1 & -2 & 0 \\ -2 & 1-1 & -2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \begin{cases} x - 2y = 0 & (1) \\ -2x - 2z = 0 & (2) \\ -2y - z = 0 & (3) \end{cases}$$

de (1) $\quad x = 2y$

de (2) $\quad x = -z \Rightarrow x = 2y = -z$

$$\underset{\text{genérico}}{\vec{V}} = (2y, y, -2y) \Rightarrow \boxed{\vec{V}_2 = (2, 1, -2)}$$

- $\vec{V}_3$ asociado a $\lambda = 4$

$$\begin{pmatrix} 2-4 & -2 & 0 \\ -2 & 1-4 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & -3 & -2 \\ 0 & -2 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} -2x - 2y = 0 & (1) \\ -2x - 3y - 2z = 0 & (2) \\ -2y - 4z = 0 & (3) \end{cases}$$

De (1) $\quad -2x = 2y \Rightarrow x = -y$

De (3) $\quad -2y = +4z \Rightarrow -y = 2z \Rightarrow -y = x = 2z$

$$\underset{\text{genérico}}{\vec{V}} = (2z, -2z, z) \Rightarrow \boxed{\vec{V}_3 = (2, -2, 1)}$$

sabiendo que $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ determinamos P^{-1}

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

Para determinar A^3

$$A^3 = P^{-1} D^3 P$$

$$A^3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{9} & \frac{2}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} \\ \frac{2}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 64 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A^3 = \begin{pmatrix} 28 & -30 & 12 \\ -30 & 25 & -18 \\ 12 & -18 & 4 \end{pmatrix}}$$

b) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}$ autovalores $\{1, 1, 1\}$

Para aplicar la propiedad $A^3 = D^{-1} D^3 P$ debemos establecer si A es diagonalizable por tener sus autovalores coincidentes, debemos establecer el subespacio generado por $\lambda = 1$

Recordamos "La condición necesaria y suficiente para que una matriz cuadrada sea diagonaliza_ble es que la dimensión del subespacio propio asociado a cada autovalor sea igual a la multi_plicidad del mismo".

Se podría obtener P, pero también se puede tener en cuenta Definición pág 9 (IMPORTANTE)

n° de variables libres = n - rango de la matriz
El n° de variables libres determina la dimensión del subespacio asociado

para $\lambda = 1$

$$A = \begin{pmatrix} 0-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0-\lambda & 1 \\ 1 & -3 & 3-\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

Buscamos el rango

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

1 variable libre $\Rightarrow$ el subespacio asociado a $\lambda = 1$ será de dimensión 1 $\Rightarrow$ no es diagonalizable
para hallar A^3 se deberá realizar el producto de matrices.

---

5) Dadas las siguientes ecuaciones, exprese en forma canónica, identifique y grafique.

a) $x^2 + 4xy + y^2 - 3 = 0$

b) $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0$

c) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 25 = 0$

d) $9x^2 - 24xy + 16y^2 + y = 1$

Veremos la teoría aplicada directamente a los ejercicios

a) $\underbrace{x^2 + 4xy + y^2}_{1} \underbrace{-3}_{2} = 0$

① índice rotación (forma cuadrática con término rectangular

② término independiente
no está trasladada pues no tiene términos lineales

Para efectuar una rototraslación se parte de la siguiente ecuación

$$(x' \ y') \, D \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + B \, P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + Ti$$

¿Cómo obtenemos A? : $\begin{pmatrix} \text{coeficiente de } x^2 & \text{coeficiente } \frac{xy}{2} \\ \text{coeficiente de } \frac{xy}{2} & \text{coeficiente } y^2 \end{pmatrix}$

$\underline{\underline{D}}$ es la matriz diagonal semejante a A

$\underline{\underline{P}}$ es la matriz cuyas columnas se forman con los autovectores asociados a los autovalores $\begin{pmatrix} \ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \ \end{pmatrix}$

B es la matriz formada con los coeficientes de los términos lineales

<u>Para tener en cuenta</u>

De acuerdo a los signos de los autovalores obtenidos podemos asociar a la cónica correspondiente

- <u>Género elipse</u> (recordar que puede degenerar en un punto (el centro) o en la no existencia de lugar geométrico : LOS AUTOVALORES TIENEN IGUAL SIGNO
- <u>Género hipérbola</u> (degenera en sus asíntotas) LOS AUTOVALORES TIENEN DISTINTO SIGNO
- <u>Género parábola</u> (degeneró, en 2 rectas paralelas distintas, dos rectas paralelas coincidentes o bien en la no existencia de lugar geométrico, uno de los autovalores es 0

Entonces

$$(x\ \ y)\ A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + ti = 0$$

$$(x'\ y')\ D \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + B \cdot P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + ti = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad B\ (0\ \ 0)$$ no está trasladado

no tiene términos lineales

por lo tanto

$B\ P \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ no es necesario analizarlo

Tampoco es necesario obtener P.

Para poder escribir y resolver

① $(x'\ y')\ D \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + ti = 0$ debemos hallar D

$$|A - \lambda I| = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)(1-\lambda) - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 - 4 = 0$$

$$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0$$

buscamos las raíces

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm 4}{2} \to \lambda_1 = 3, \quad \lambda_2 = -1$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Nota $sg\lambda_1 \neq sg\lambda_2$

género hipérbola

Completamos ①

$$(x'\ y') \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + ti = 0$$

$$(3x'\ \ -y') \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (-3) = 0$$

$$3x'^2 - y'^2 = 3$$

$$\boxed{x'^2 - \frac{y'^2}{3} = 1}$$

a)

A= $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

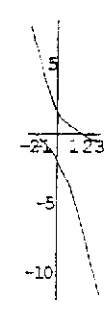
{{1, 2}, {2, 1}}

Eigenvalues[A]

{-1, 3}

Eigenvectors[A]

{{-1, 1}, {1, 1}}



Buscamos el ángulo de rotación

Para determinar el ángulo de rotación (es decir el ángulo que ha rotado los nuevos ejes de coordenadas x' e y', determinamos los verso-res $\breve{i}'$ y $\breve{j}'$

$\vec{v}_1$ asociado a $\lambda = 3$

$$\begin{pmatrix} 1-3 & 2 \\ 2 & 1-3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow -2x+2y=0$$
$$\Rightarrow x = y$$

$\vec{v}_1$ genérico (x, x) $\vec{v}_1 = (1, 1)$ $\therefore \breve{v}_1 = \left(\sqrt{2}/2 \;\; \sqrt{2}/2\right)$

$\vec{v}_2$ asociado a $\lambda = -1$

$$\begin{pmatrix} 1+1 & 2 \\ 2 & 1+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow 2x'+2y'=0$$
$$\Rightarrow x' = -y'$$

$\vec{v}_2$ genérico $(-y, y)$ $\vec{V}_2 = (-1, 1)$ $\therefore \breve{v}_2 = \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ verificamos que $|P| = 1$, con lo cual aseguramos que se efectúe una sola rotación (que x' e y' roten juntos) para determinar si la rotación se efectuó en sentido horario o antihorario debemos verificarlo con los versores $\breve{i}'$ o $\breve{j}'$, lo vemos directamente en el ejercicio.

$$\begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$ entonces aseguramos que

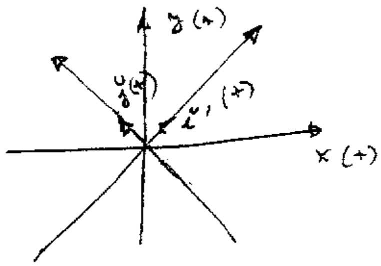
$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$
$$\quad\quad\;\; \breve{i}' \quad\;\; \breve{j}'$$

Para calcular el ángulo recordamos

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| . |\vec{b}| \cos\theta$

$\breve{i}' \cdot \breve{i} = |\breve{i}'| |\breve{i}| \cos\theta$

$$\frac{(\sqrt{2}/2\,,\ \sqrt{2}/2)(1,0)}{1\cdot 1} = \cos\theta \Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\theta \Rightarrow \theta = 45°$$



i' Tiene la componente en x ⊕
" " " " y ⊕
j' " " " " x ⊖
" " " " y ⊕

b) $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0$

Respecto de los ejes x e y la cónica no se encuentra trasladada, solo rotada

Recordamos

$$(x\ \ y)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + B \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + ti = 0$$

$$(x'\, y')\, D \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + B\,P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + ti = 0$$

• Buscamos D

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & 3 \\ 3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (5-\lambda)(5-\lambda) - 9 = 0$$

desarrollando

$$25 - 10\lambda + \lambda^2 - 9 = 0$$

$$\lambda^2 - 10\lambda + 16 = 0$$

Buscamos las raíces

$$\lambda_{1,2} = \frac{10 \pm \sqrt{100-64}}{2}$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{10 \pm 6}{2} \begin{cases} 8 \\ 2 \end{cases}$$

Nota: signo de λ_1 = signo λ_2
género elipse

$$D = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$(x'\ y') \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 8$$

$$8x'^2 + 2y'^2 = 8$$

$$x'^2 + \frac{y'^2}{4} = 1$$

Buscamos P para determinar el ángulo de rotación

para $\lambda = 8$

$$\begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow -3x + 3y = 0 \quad \therefore \; x = y$$

vector genérico (x, x)

$\vec{V_1} = (1, 1)$

$$\breve{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \text{ asociado a } \vec{v}_1$$

para $\lambda = 2$

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow 3x + 3y = 0 \quad \therefore \; x = -y$$

vector genérico $(-y, y)$

$\vec{v}_2 = (-1, 1)$

$$\breve{v}_2 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \text{ asociado a } \vec{v}_2$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \qquad P = \begin{vmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{vmatrix} = 1$$

b)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

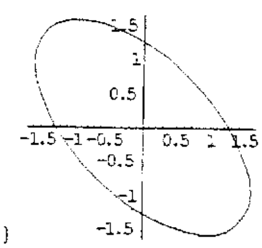
{{5, 3}, {3, 5}}

Eigenvalues[A]

{2, 8}

Eigenvectors[A]

{{-1, 1}, {1, 1}}



Aseguramos

$$P = \begin{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \end{pmatrix}$$

$\quad\; \breve{i}' \qquad \breve{j}'$

si el $|\;| = -1$ cambiamos el orden de los vectores

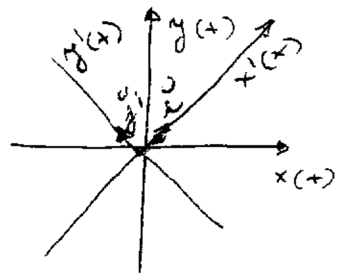
$P = \begin{pmatrix} (\;) & (\;) \end{pmatrix}$ y en la D los λ $\begin{pmatrix} \circ & \\ & \circ \end{pmatrix}$

o bien multiplicar $\breve{i}'$ por (-1) cambiándole los signos y sigues operando igual.

Calculamos el ángulo de rotación de los ejes

$\check{i}' \cdot \check{i} = |\check{i}'||\check{i}| \cdot \cos\theta$

$\cos\theta = \dfrac{(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)(1,0)}{1 \cdot 1} \Rightarrow \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \cos\theta \therefore \theta = 45°$



versor $\check{i}'$ tiene las 2 componentes $\oplus$

versor $\check{j}'$ tiene $x \ominus$ e $y \oplus$

rotó en el sentido antihorario

e) $9x^2 - 24xy + 16y^2 - 25 = 0$

$(x'\ y')\ D \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + B\ P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + ti = 0$

$A = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{pmatrix}$ Buscamos D

$\begin{vmatrix} 9-\lambda & -12 \\ -12 & 16-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (9-\lambda)(16-\lambda) = -144$

$\Rightarrow \lambda^2 - 25\lambda = 0$

$\Rightarrow \lambda(\lambda - 25) = 0$ $\quad \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 25$

Nota $\lambda_1 = 0 \Rightarrow$ género parábola

$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$ Recordamos

$(x'\ y') \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 25 = 0$

$25y'^2 = 25$

$y'^2 = 1 \Rightarrow |y'| = 1$

$y' = 1 \quad \vee \quad y' = -1$

Buscamos P para obtener $\vec{i}'$ y $\vec{j}'$

$\vec{V}_1$ asociado a $\lambda_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \quad 9x - 12y = 0$$

$$x = \frac{12}{9} y \Rightarrow \quad x = \frac{4}{3} y$$

genérico $\left(\frac{4}{3} y , y\right)$ $\vec{v}_1$ asociado a $\lambda_1 = 0$

$$\vec{v}_1 = (4,3) \Rightarrow \breve{v}_1 = \left(\frac{4}{5} , \frac{3}{5}\right)$$

$\vec{v}_2$ asociado a $\lambda_2 = 25$

$$\begin{pmatrix} 9-25 & -12 \\ -12 & 16-25 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} -16 & -12 \\ -12 & -9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow -16x - 12y = 0$$

$$-x = \frac{3}{4} y$$

genérico $\left(-\frac{3}{4} y , y\right)$ $\quad \vec{v}_2 = (-3,4) \quad \breve{v}_2 = \left(-\frac{3}{5} , \frac{4}{5}\right)$

$$P = \begin{pmatrix} 4/5 & -\frac{3}{5} \\ 3/5 & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \quad \text{verificamos} \quad \begin{vmatrix} \frac{4}{5} & -\frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{vmatrix} = 1$$

entonces $\breve{i}' = \left(4/5 , \frac{3}{5}\right)$

Buscamos el ángulo de rotación

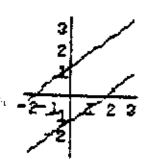
$$\breve{i}' . \breve{i} = |\breve{i}'| |\breve{i}| . \cos\theta$$

$$\frac{\left(4/5 , \frac{3}{5}\right)(1,0)}{|\breve{i}'| |\breve{i}|} = \cos\theta \Rightarrow \cos\theta = \frac{4}{5} \Rightarrow$$

$$\theta \cong 36^{\circ} 52' 11''$$

$$A = \begin{pmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{pmatrix}$$

F.genvalues[A]
25,0}



igenvectors[A]
{-3,4},{4,3}}

d) $9x^2-24xy+16y^2+y=1$

Este ejercicio es idéntico al (e) por lo que tendremos en cuenta los datos obtenidos

$$(x'y')\,D\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+B\,P\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+t_i=0$$

$$(x'y')\begin{pmatrix}0&0\\0&25\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+(1\quad 0)\begin{pmatrix}\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}\\\frac{3}{5}&\frac{4}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}-1=0$$

$$25y'^2+\begin{pmatrix}\frac{4}{5}&-\frac{3}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}-1=0$$

$$25y'^2+\frac{4}{5}x'-\frac{3}{5}y'-1=0$$

$$\underbrace{25y'^2-\frac{3}{5}y'}_{\text{completar cuadrado}}+\frac{4}{5}x'-1=0$$

$$25y'^2-\frac{3}{5}y'=25\left(y'^2-\frac{3}{125}y'\right)$$

$$-\frac{3}{125}y'=2y'b\Rightarrow b=-\frac{3}{250}$$

$$\Rightarrow 25\left(y'-\frac{3}{250}\right)^2=$$

$$=25\left(y'^2-\frac{6}{250}y'+\frac{9}{62500}\right)=$$

$$(1)=25y'^2-\frac{3}{5}y'+\frac{9}{2500}=$$

De (1)

$$25\left(y'-\frac{3}{250}\right)^2+\frac{4}{5}x'-1=\frac{9}{2500}$$

$$25\left(y'-\frac{3}{250}\right)^2=-\frac{4}{5}x'+1+\frac{9}{2500}$$

$$25\left(y'-\frac{3}{250}\right)^2=-\frac{4}{5}x'+\frac{2509}{2500}$$

$$25\left(y'-\frac{3}{250}\right)^2=-\frac{4}{5}\left(x'-\frac{2509}{500.4}\right)$$

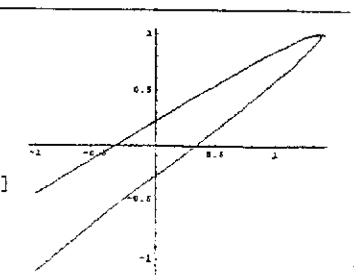
$$25\left(y'-\frac{3}{250}\right)^2=-\frac{4}{5}\left(x'-\frac{2509}{2000}\right)$$

$$\left(y'-\frac{3}{250}\right)^2=-\frac{4}{5.25}\left(x'-\frac{2509}{2000}\right)$$

$A=\begin{pmatrix}9&-12\\-12&16\end{pmatrix}$

Eigenvalues[A]
{25,0}

Eigenvectors[A]
{{-3,4},{4,3}}



Proponemos otros ejemplos

1) $x^2+2xy+y^2-8x+8y=0$ $\qquad A=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$

$$(x'\ y')\,D\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+B\,P\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=0$$

• Buscamos los autovalores

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ 1 & 1-\lambda\end{vmatrix}=0 \Rightarrow (1-\lambda)(1-\lambda)-1=0$$

desarrollando y resolviendo

$\lambda=0 \ \vee\ \lambda=2$

pues queda $(1-\lambda)^2-1=0$

$(1-\lambda)^2=1$

$|1-\lambda|=1$

$1-\lambda=1 \ \vee\ 1-\lambda=-1$

$\lambda=0 \ \vee\ \lambda=2$

$$D=\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}$$

• Buscamos los autovectores asociados a los autovalores

$\lambda_1=0$

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\vec{0}\Rightarrow\begin{cases}x+y=0\\x+y=0\end{cases}$$

genérico $(x,-x)$ $\quad \vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ $\quad \breve{v}_1=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$

$\lambda_2=2$

$$\begin{pmatrix}-1&1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\vec{0}\Rightarrow\begin{cases}-x+y=0\\x-y=0\end{cases}$$

genérico (x,x) $\quad \vec{v}_2=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ $\quad \breve{v}_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$

$$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}$$

Completamos la ecuación

$$(x'\ y')\begin{pmatrix}0&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+(-8\quad 8)\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\\-\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}=0$$

$$2y'^2 + \left(-\frac{8}{\sqrt{2}} - \frac{8}{\sqrt{2}} \quad -\frac{8}{\sqrt{2}} + \frac{8}{\sqrt{2}}\right)\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = 0$$

$$2y'^2 + \left(-\frac{16}{\sqrt{2}} x' + 0y'\right) = 0$$

$$2y'^2 - \frac{16}{\sqrt{2}} x' = 0$$

$$y'^2 = \frac{8}{\sqrt{2}} x' \Rightarrow y'^2 = 4\sqrt{2}\, x'$$

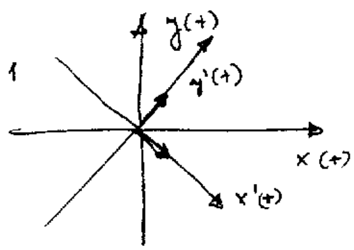
Buscamos el ángulo de rotación

$$\vec{i}' \cdot \vec{i} = |\vec{i}'| \cdot |\vec{i}| \cdot \cos\theta$$

$$\cos\theta = \frac{(1, 0)\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{1 \cdot 1} \Rightarrow \cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\theta = 45°$$

$|P| = 1$



2) $5x^2 + 4xy + 8y^2 + 8x + 14y + 5 = 0$

$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$ Buscamos D $\qquad D = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$

- $\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 8-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (5-\lambda)(8-\lambda) - 4 = 0$

  $\lambda = 9 \quad \vee \quad \lambda = 4$

  igual signo "género elipse"

- Buscamos los autovectores asociados

  $\vec{v}_1$ asociado $\lambda = 9$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow \begin{cases} -4x + 2y = 0 \\ 2x - y = 0 \end{cases} \Rightarrow 2x = y$$

genérico $(x, 2x)$ $\vec{v}_1 = (1, 2)$ $\check{v}_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

$\vec{v}_2$ asociado a $\lambda = 4$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0} \quad \begin{cases} x + 2y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = -2y$$

genérico $(-2y, y)$ $\vec{v}_2 = (-2, 1)$ $\check{v}_2 = \left(\frac{-2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow \begin{array}{cc} \check{i}' & \check{j}' \\ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \end{array}$$

$$(x' \ y') \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (8 \quad 14)\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 5 = 0$$

$$9x'^2 + 4y'^2 + \left(\frac{8}{\sqrt{5}} + \frac{28}{\sqrt{5}} \quad -\frac{16}{\sqrt{5}} + \frac{14}{\sqrt{5}}\right)\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 5 = 0$$

$$9x'^2 + 4y'^2 + \left(\frac{36}{\sqrt{5}} \quad -\frac{2}{\sqrt{5}}\right)\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 5 = 0$$

$$9x'^2 + 4y'^2 + \frac{36}{\sqrt{5}}x' - \frac{2}{\sqrt{5}}y' + 5 = 0$$

Completamos cuadrados

$$9\underbrace{\left(x'^2 + \frac{4}{\sqrt{5}}x'\right)}_{①} + 4\underbrace{\left(y'^2 - \frac{1}{2\sqrt{5}}y'\right)}_{②} + 5 = 0$$

① $\frac{4}{\sqrt{5}}x' = 2x'b$ $\;\Rightarrow\;$ $\frac{2}{\sqrt{5}} = b$

② $-\frac{1}{2\sqrt{5}}y' = 2y'b$ $\;\Rightarrow\;$ $-\frac{1}{4\sqrt{5}} = b$

---

① $\left(x' + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = \left(x'^2 + 2 \cdot x'\frac{2}{\sqrt{5}} + \frac{4}{5}\right) \Rightarrow 9\left(x'^2 + \frac{4}{\sqrt{5}}x' + \frac{4}{5}\right) =$

$$= \boxed{9x'^2 + \frac{36}{\sqrt{5}}x' + \frac{36}{5}}$$

② $\left(y' - \frac{1}{4\sqrt{5}}\right)^2 = \left(y'^2 - \frac{2}{4\sqrt{5}}y + \frac{1}{80}\right) \Rightarrow 4\left(y'^2 - \frac{1}{2\sqrt{5}}y' + \frac{1}{80}\right)$

$$= \boxed{\left(4y'^2 - \frac{2}{\sqrt{5}}y' + \frac{1}{20}\right)}$$

$$9\left(x'+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+4\left(y'-\frac{1}{4\sqrt{5}}\right)^2=-5+\frac{36}{5}+\frac{1}{20}$$

$$9\left(x'+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2+4\left(y'-\frac{1}{4\sqrt{5}}\right)^2=\frac{9}{4}$$

$$\frac{\left(x'+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}{\frac{1}{9}}+\frac{\left(y'-\frac{1}{4\sqrt{5}}\right)^2}{\frac{1}{4}}=\frac{9}{4}$$

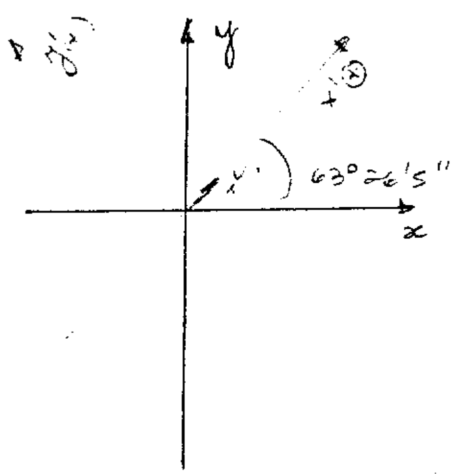
$$\frac{\left(x'+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}{\frac{1}{4}}+\frac{\left(y'-\frac{1}{4\sqrt{5}}\right)^2}{\frac{9}{16}}=1$$

Buscamos el ángulo de rotación de los ejes

$$\breve{i}\cdot\breve{i}'=|\breve{i}|\,|\breve{i}'|\cdot\cos\theta$$

$$\frac{(1/\sqrt{5},\ 2/\sqrt{5})\,(1,0)}{1\cdot 1}=\cos\theta \Rightarrow \cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\theta \cong 63^\circ\ 26'\ 5''$$



$\breve{i}'$ tiene las dos coordenadas positivas entonces se encuentra en el primer cuadrante, giró en el sentido contrario a las agujas del reloj

6) Sea $2x^2+2kxy+y^2=1$.
Halle todos los valores de $k\in\mathbb{R}$ tales que sea un par de rectas.

$$2x^2+2kxy+y^2=1$$

Hallar k para que degenere en 2 rectas

• Tenemos en cuenta que las cónicas que pueden degenerar en 2 rectas

pueden ser: $<$ género hipérbola / género parábola

Antes de hacer el análisis correspondiente, verificamos si $|k|=1$ cumple con lo pedido. $|k|=1$ es el resultado de la guía

entonces

$$2x^2+2xy+y^2=1 \quad \vee \quad 2x^2-2xy+y^2=1$$

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Para hallar D

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Para hallar D

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0 \qquad \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0$$

$$(2-\lambda)(1-\lambda)-1=0 \quad (1) \qquad (2-\lambda)(1-\lambda)-1=0$$

Desarrollamos solo (1)

$$2-2\lambda-\lambda+\lambda^2-1=0$$

$$\lambda^2-3\lambda+1=0$$

Buscamos los autovalores

$$\lambda_{1,2}=\frac{3\pm\sqrt{9-4}}{2}$$

¡Nota tiene 2 autovalores de = signo

$$\lambda=\frac{3+\sqrt{5}}{2} \quad \vee \quad \lambda=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$D=\begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}$$

$$(x' \;\; y')\begin{pmatrix} \frac{3+\sqrt{5}}{2} & 0 \\ 0 & \frac{3-\sqrt{5}}{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=1$$

$\frac{3+\sqrt{5}}{2}x'^2+\frac{3-\sqrt{5}}{2}y'^2=1$ concluimos que $|k|=1$ no representan dos rectas sino una elipse

Hacemos ahora el análisis correspondiente si se trata de obtener dos rectas

Si queremos obtener un par de rectas debemos considerar

1) un par de rectas secantes
2) un par de rectas paralelas distintas
3) un par de rectas paralelas coincidentes

Recordemos que para obtener ① partimos de una hipérbola degenerada. Degenera en sus asíntotas y se obtienen dos rectas secantes . Los autovalores tienen distinto signo es decir el $Sg(\lambda_1) \neq Sg(\lambda_2)$ y la ecuación debe estar igualada a 0. Cosa que es imposible en la ecuación planteada pues tiene término independiente $= 1$. Descartamos esa posibilidad

Para analizar ② y ③ partimos de una parábola degenerada. La parábola degenera en 2 rectas // distintas o en 2 rectas // coincidentes. Para ello sólo tendrá término al cuadrado de una de las variables y no tendrá el término lineal de la otra variable. Si el ti (término independiente es 0) entonces degenerará en 2 rectas // coincidentes si el ti $\neq 0$ en 2 rectas // distintas.
Uno de los autovalores debe ser 0.
Buscamos los autovalores teniendo en cuenta que uno de ellos sea 0

$$2x^2 + 2kxy + y^2 = 1$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & k \\ k & 1 \end{pmatrix} \underset{\text{para encontrar } D}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 2-\lambda & k \\ k & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & k \\ k & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda)-k^2=0$$

Desarrollando

$$2-\lambda-2\lambda+\lambda^2-k^2=0$$
$$\lambda^2-3\lambda+2-k^2=0$$

Buscamos los autovalores

$$\lambda_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{9-4(2-k^2)}}{2}$$

Si queremos que un autovalor sea $=0$

$$\Rightarrow \cancel{9}-4(2-k^2)=\cancel{9}$$
$$4(2-k^2)=0$$
$$2-k^2=0$$
$$k^2=2$$
$$|k|=\sqrt{2}$$
$$k=\sqrt{2} \quad \vee \quad k=-\sqrt{2}$$

Verificamos el resultado obtenido para $k=\sqrt{2}$

$$2x^2+2\sqrt{2}\,xy+y^2=1$$

$A=\begin{pmatrix} 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$ para determinar los autovalores

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1-\lambda \end{vmatrix}=0 \Rightarrow (2-\lambda)(1-\lambda)-2=0$$

el mismo se obtiene si $k=-\sqrt{2}$

Desarrollando $2-2\lambda-\lambda+\lambda^2-2=0$

$$\lambda^2-3\lambda=0 \Rightarrow \lambda(\lambda-3)=0$$
$$\lambda=0 \quad \vee \quad \lambda=3$$

$$D=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$(x' \; y')\, D \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} - 1 = 0$$

$$(x'\ y')\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=1$$

$$3y'^2=1$$

$$y'^2=\frac{1}{3}\Rightarrow |y'|=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$y'=\frac{\sqrt{3}}{3} \vee y'=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

son dos rectas // distintas

Damos 3 ejemplos

Obtenga la ecuación canónica e identifique el lugar geométrico correspondiente de acuerdo con los valores de k

1) $9x^2+8xy+3y^2+\sqrt{5}(3x+5y)+k=0$

$$A=\begin{pmatrix}9 & 4\\ 4 & 3\end{pmatrix}$$ para determinar D

$$\begin{vmatrix}9-\lambda & 4\\ 4 & 3-\lambda\end{vmatrix}=0 \quad (9-\lambda)(3-\lambda)-16=0$$

Desarrollando

$$\lambda^2-12\lambda+11=0$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{12\pm\sqrt{144-44}}{2}$$

$$=\frac{12\pm 10}{2}\begin{cases}=11\\ =1\end{cases}$$

$$D=\begin{pmatrix}11 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Buscamos los autovectores asociados a los autovalores

$\lambda=11$

$$\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 4 & -8\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\vec{0} \qquad \begin{aligned}-2x+4y&=0\\ 2x&=4y\\ x&=2y\end{aligned}$$

$$\vec{v}_1=(2,1) \qquad \check{v}_1=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

$\lambda = 1$ $\begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \vec{0}$ $\quad 8x+4y= \quad 2x=-y$

$\vec{v}_2 = (x, -2x) \quad \vec{v}_2 = (1, -2)$

$\overset{\circ}{v}_2 = \left(\frac{1}{\sqrt5}, -\frac{2}{\sqrt5}\right)$

$D = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5} \\ \frac{1}{\sqrt5} & \frac{-2}{\sqrt5} \end{pmatrix}$ como $|P| = -1$, cambiamos el signo del versor $\vec{j}'$ (ahora) $|P| = 1$

$P = \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt5} & -\frac{1}{\sqrt5} \\ \frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} \end{pmatrix}$

Armamos la ecuación

$$(x' \; y')\, D \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + B\, P \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + ti = 0$$

$$(x' \; y') \begin{pmatrix} 11 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + (3\sqrt5 \quad 5\sqrt5) \begin{pmatrix} \frac{2}{\sqrt5} & -\frac{1}{\sqrt5} \\ \frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + k = 0$$

$$11x'^2 + y'^2 + 11x' + 7y' + k = 0$$

$$11x'^2 + 11x' + y'^2 + 7y' + k = 0$$

$$11(x'^2 + x') + y'^2 + 7y' = -k$$

Completamos cuadrados

$$11\left(x'^2 + x' + \frac14\right) - \frac{11}{4} + \left(y' + \frac72\right)^2 - \frac{49}{4} = -k$$

$$11\left(x' + \frac12\right)^2 - \frac{11}{4} + \left(y' + \frac72\right)^2 - \frac{49}{4} = -k$$

$$\frac{\left(x' + \frac12\right)^2}{\frac{1}{11}} + \frac{\left(y' + \frac72\right)^2}{1} = -k + \frac{49}{4} + \frac{11}{4}$$

$=0 \Rightarrow$ Punto

$>0 \Rightarrow$ elipse

$<0 \Rightarrow \nexists$ lg

- si $-k + \frac{60}{4} = 0 \Rightarrow k = 15$ degenera en un punto $C\left(-\frac12, -\frac72\right)$
- $-k + \frac{60}{4} < 0 \Rightarrow k > 15$ $\nexists$ lugar geométrico
- $-k + \frac{60}{4} > 0 \Rightarrow$ elipse $k < 15$ $\quad \frac{60}{4} = 15$

2) $4xy-2x+2y+k=0$

$(x'\ y')\,D\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+B\,P\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+k=0$

$A=\begin{pmatrix}0&2\\2&0\end{pmatrix}$

para determinar los autovalores

$\begin{vmatrix}0-\lambda&2\\2&0-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow(-\lambda)\cdot(-\lambda)-4=0$

$\Rightarrow\lambda^2-4=0$

$(\lambda-2)(\lambda+2)=0$

$\lambda=2\vee\lambda=-2$

$D=\begin{pmatrix}2&0\\0&-2\end{pmatrix}$

Hallamos los vectores asociados a cada autovalor

$\underset{\sim\sim}{\lambda_1=2}$

$\begin{pmatrix}-2&2\\2&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\vec{0}\Rightarrow -2x+2y=0$

$y=x$

$\vec{v}_1=(1,1)\qquad \breve{v}_1=\left(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2}\right)$

$\underset{\sim\sim}{\lambda_2=-2}$

$\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\vec{0}\Rightarrow 2x+2y=0$

$x=-y$

$\vec{v}_2=(1,-1)\qquad \breve{v}_2=\left(\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2}\right)$

$P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\quad;\quad |P|=1$

Entonces

$(x'y')\begin{pmatrix}2&0\\0&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+(-2\quad 2)\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt2}&-\frac{1}{\sqrt2}\\\frac{1}{\sqrt2}&\frac{1}{\sqrt2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}+k=0$

$2x'^2-2y'^2+2\sqrt2\,y'+k=0$

$2x'^2-2\left(y'^2-\sqrt2\,y'\right)+k=0$ completamos cuadrados

$2x'^2-2\left(y'-\frac{\sqrt2}{2}\right)^2+1+k=0$

$\frac{x'^2}{\frac12}-\frac{\left(y'-\frac{\sqrt2}{2}\right)^2}{\frac12}=-k-1\rightarrow$ analizamos

Si

$-k-1=0 \Rightarrow k=-1$ degenera en 2 rectas secantes (las asíntotas)

$-k-1>0 \Rightarrow k<-1$ hipérbola   hip $\uparrow$ hip

$-k-1<0 \Rightarrow k>-1$ hipérbola -1

7) Sea la elipse $x'^2+11y'^2=11$ referida al sistema de coordenadas cuyos ejes son generados por los vectores $\breve{u}=\left(\frac{3}{\sqrt{10}},\frac{-1}{\sqrt{10}}\right)$, $\breve{v}=\left(\frac{1}{\sqrt{10}},\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$. Obtenga la ecuación referida a la base canónica de $\mathbb{R}^2$.

$$a\,x^2+b\,x\,y+c\,y^2=11$$

Para determinar los coeficientes a, b y c debemos determinar la matriz A

$$A=\begin{pmatrix} a & \frac{b}{2} \\ \frac{b}{2} & c \end{pmatrix} \quad \text{sabemos que } D=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 11 \end{pmatrix}$$

Conocemos la matriz P $\quad P=\begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{-1}{\sqrt{10}} & \frac{3}{\sqrt{10}} \end{pmatrix}$

entonces $\quad P\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=P^{-1}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$P^{-1}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}} \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{10}}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{10}}(3x-y) \\ \frac{1}{\sqrt{10}}(x+3y) \end{pmatrix} \quad (1)$$

Buscamos x' e y' para reemplazarlo en

$x'^2+11y'^2=11 \qquad$ por (1) $\quad x'=\frac{1}{\sqrt{10}}(3x-y)$

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad y'=\frac{1}{\sqrt{10}}(x+3y)$

$$\Rightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{10}}(3x-y)\right)^2+\left(\frac{1}{\sqrt{10}}(x+3y)\right)^2\cdot 11=11$$

$$\frac{1}{10}\left(9x^2-6xy+y^2\right)+\frac{11}{10}\left(x^2+6xy+9y^2\right)=11$$

$$20x^2+60yx+100y^2=110$$

$$2x^2+6yx+10y^2=11$$