

TEOREMAS INTEGRALES DEL ANÁLISIS VECTORIAL

TEOREMA DE GREEN

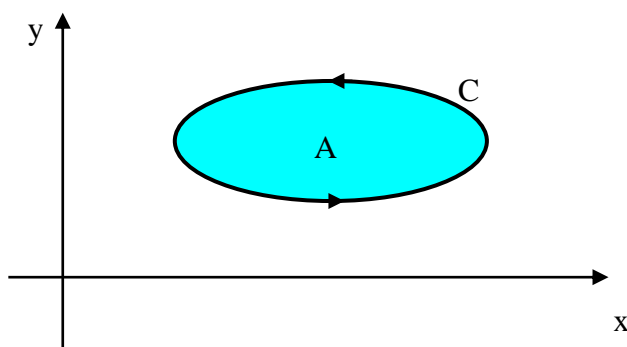
El teorema de Green relaciona una integral de línea a lo largo de una curva cerrada C en el plano R^2 , con una integral doble sobre la región encerrada por C . Este resultado se generaliza a curvas y superficies en R^3 .

El matemático inglés George Green (1793 – 1841) lo publicó en 1828, en su tratado sobre teoría matemática para la electricidad y magnetismo.

Enunciado del Teorema de Green

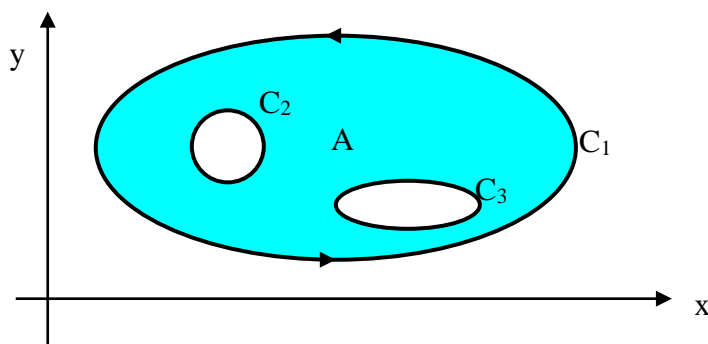
Sea el campo vectorial $\vec{f} : D \subset R^2 \rightarrow R^2 / \vec{f}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$, siendo $\vec{f} \in C^1$ en D . Sea A un recinto simplemente conexo en R^2 , limitado por la curva cerrada C , frontera de A , siendo C una curva suave y simple, orientada positivamente (en sentido antihorario). El recinto A y su curva frontera C están incluidos en el $\text{Dom } \vec{f} = D$. Entonces se cumple que:

$$\oint_{C^+} \vec{f} \, d\vec{s} = \oint_{C^+} (P, Q) \, d\vec{s} = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \, dy$$



El teorema de Green también puede aplicarse a regiones planas en R^2 que no son simplemente conexas (pero que pueden descomponerse en un número finito de recintos convexos) y a recintos múltiplemente conexos.

Por ejemplo, damos la expresión del teorema para el siguiente recinto que no es simplemente conexo (considerando que el campo \vec{f} , el recinto A y sus curvas frontera cumplen con todas las hipótesis del teorema de Green):



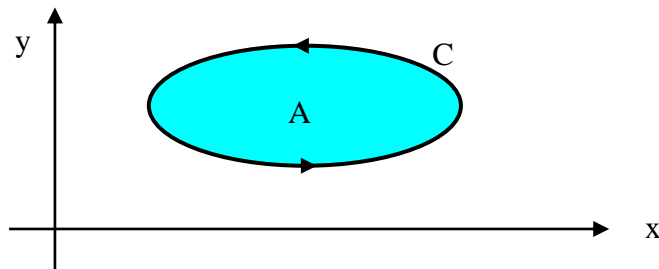
$$\iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{C_1^+} \bar{f} d\bar{s} - \oint_{C_2^+} \bar{f} d\bar{s} - \oint_{C_3^+} \bar{f} d\bar{s}$$

$$\iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_{C_1^+} \bar{f} d\bar{s} + \oint_{C_2^-} \bar{f} d\bar{s} + \oint_{C_3^-} \bar{f} d\bar{s}$$

Cálculo de áreas de recintos planos mediante integrales curvilíneas

El área de un recinto plano puede calcularse, según el teorema de Green, mediante una integral de línea. En efecto, por aplicación geométrica de las integrales dobles, sabemos que el área de un recinto simple A se obtiene con la fórmula:

$$\text{Área } A = \iint_A 1 dx dy$$



Si el campo \bar{f} , el recinto A y su curva frontera cumplen con las hipótesis del teorema de Green, podemos afirmar que:

$$\oint_{C^+} \bar{f} d\bar{s} = \oint_{C^+} (P, Q) d\bar{s} = \iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

Si queremos calcular el área de A , deberá ser: $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1$

Por lo tanto, podemos plantear algunas posibilidades para generar un campo vectorial $\bar{f} = (P, Q)$ que cumpla con lo pedido.

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 \longrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 1 \quad \wedge \quad \frac{\partial P}{\partial y} = 0$$

Podemos plantear entonces $Q(x, y) = x \quad \wedge \quad P(x, y) = 0$

En este caso resulta: $\text{Área } A = \iint_A 1 dx dy = \oint_{C^+} (0, x) d\bar{s}$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 1 \longrightarrow \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad \wedge \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -1$$

Podemos plantear entonces $Q(x, y) = 0 \quad \wedge \quad P(x, y) = -y$

En este caso resulta: $\text{Área } A = \iint_A 1 dx dy = \oint_{C^+} (-y, 0) d\bar{s}$

Continuando con un análisis similar, pueden determinarse otros campos vectoriales que permitan calcular el área del recinto A aplicando integrales de línea.

Caso particular: \bar{f} es un campo de gradientes

Analizamos el caso particular en el cual \bar{f} es un campo de gradientes, es decir que $\bar{f} = \nabla \phi$ con $\phi: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Suponemos que el campo \bar{f} , el recinto A y su curva frontera cumplen con las hipótesis del teorema de Green.

Siendo $\bar{f} = \nabla \phi = (\phi'_x, \phi'_y)$, aplicamos el teorema de Green para este campo vectorial en un recinto plano A de \mathbb{R}^2 , limitado por una curva cerrada C .

$$\oint_{C^+} \bar{f} \, d\bar{s} = \oint_{C^+} \nabla \phi \, d\bar{s} = \oint_{C^+} (\phi'_x, \phi'_y) \, d\bar{s} = \iint_A \left(\frac{\partial}{\partial x}(\phi'_y) - \frac{\partial}{\partial y}(\phi'_x) \right) dx \, dy = \iint_A (\phi''_{yx} - \phi''_{xy}) \, dx \, dy$$

Como el campo \bar{f} cumple con las condiciones de hipótesis del teorema de Green, resulta $\bar{f} \in C^1 \Rightarrow \phi \in C^2$.

Como $\phi \in C^2$ cumple con las hipótesis del Teorema de Schwarz, y por lo tanto $\phi''_{xy} = \phi''_{yx} \Rightarrow \phi''_{yx} - \phi''_{xy} = 0$.

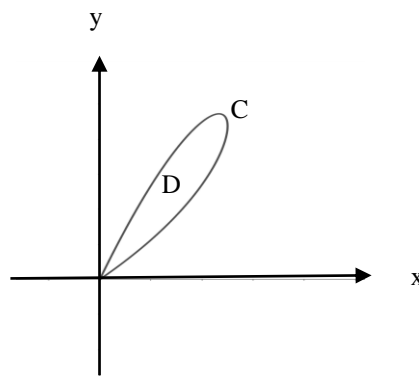
En este caso, resulta entonces:

$$\oint_{C^+} \bar{f} \, d\bar{s} = \iint_A (\phi''_{yx} - \phi''_{xy}) \, dx \, dy = \iint_A 0 \, dx \, dy = 0$$

La integral de línea del campo de gradientes a lo largo de una curva cerrada es nula. Este resultado reafirma lo visto anteriormente: un campo de gradientes es un campo conservativo, y por lo tanto la integral de línea de dicho campo a lo largo de una curva cerrada vale 0.

Resolvemos ejercicios del TP11

2) Calcular el área de la región plana D de la figura, sabiendo que su curva frontera C admite ecuación vectorial $\bar{X} = (u - u^2, u - u^4)$ con $0 \leq u \leq 1$.



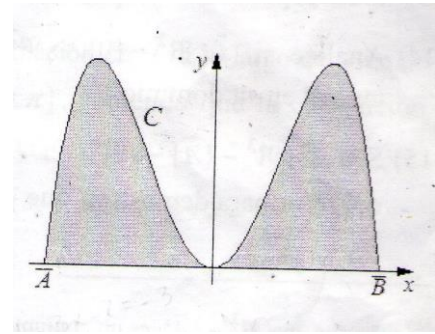
2) Área $D = \oint_D (Q'_x - P'_y) \, dx \, dy$ $Q'_x = 1 \Rightarrow Q = x$
 $P'_y = 0 \Rightarrow P = 0$

Área $D = \oint_{C^+} (0, x) \, d\bar{s} = \int_0^1 (0, u - u^2) (1 - 2u, 1 - 4u^3) \, du =$
 $= \int_0^1 (u - u^2)(1 - 4u^3) \, du = \int_0^1 (u - u^2 - 4u^4 + 4u^5) \, du =$
 $= \left[\frac{u^2}{2} - \frac{u^3}{3} - \frac{4u^5}{5} + \frac{4u^6}{6} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{4}{5} + \frac{4}{6} = \frac{1}{30}$

5) La región plana D sombreada en la figura tiene como frontera el segmento \overline{AB} y el arco de curva C de ecuación $y = x^2 - x^4$. Dado $\vec{f} = (P, Q) \in C^1$ con matriz jacobiana

$$D\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} P'_x(x, y) & 3x-1 \\ 3x+2 & Q'_y(x, y) \end{pmatrix}, \text{ calcular la circulación de}$$

\vec{f} desde A hasta B a lo largo de C, sabiendo que a lo largo del segmento resulta $\int_{\overline{AB}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 17$



$$5) \int_{C_{BA}} \vec{f} \cdot d\vec{s} + \int_{\overline{AB}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \oint_{C \cup \overline{AB}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_D (Q'_x - P'_y) \, dx \, dy = 0$$

$$\Rightarrow \int_{C_{BA}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_D (3x+2 - 3x-1) \, dx \, dy - 17 = -3 \iint_D dx \, dy -$$

$$-17 = 3 \int_a^b dx \int_0^{x^2-x^4} dy - 17 =$$

$$A \text{ y } B \rightarrow x^2 - x^4 = 0 \Rightarrow x^2(1-x^2) = 0 \Rightarrow x^2(1-x)(1+x) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x=0 \vee x=1 \vee x=-1 \Rightarrow A = (-1, 0)$$

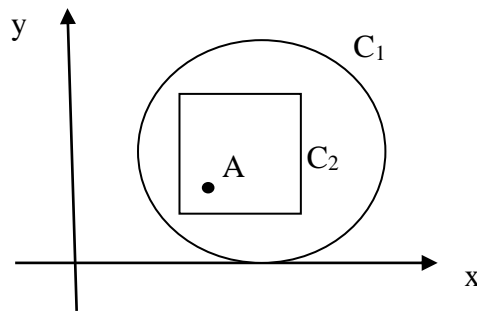
$$B = (1, 0)$$

$$= -3 \int_{-1}^1 (x^2 - x^4) \, dx - 17 = -3 \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_{-1}^1 - 17 =$$

$$= -3 \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} \right] - 17 = -3 \cdot \frac{4}{5} - 17 = -\frac{81}{5}$$

$$\int_{C_{BA}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = -\frac{81}{5} \Rightarrow \int_{C_{AB}} \vec{f} \cdot d\vec{s} = \frac{81}{5}$$

9) Dado $\vec{f}: \mathbb{R}^2 - \{A\} \rightarrow \mathbb{R}^2 / \vec{f} = (P, Q)$, suponga matriz jacobiana continua con $Q'_x - P'_y \equiv 6$. Calcular $\oint_{C_1^+} \vec{f} \cdot d\vec{s}$ sabiendo que $\oint_{C_2^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 12$, C_1 es una circunferencia de radio 8, C_2 es un cuadrado de lado 5.



9)

$$\iint_D (Q'_x - P'_y) \, dx \, dy = \int_{C_1^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} - \int_{C_2^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \iint_D 6 \, dx \, dy = \int_{C_1^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} - 12 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 \iint_D 1 \, dx \, dy + 12 = \int_{C_1^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 \text{ área } D + 12 = \int_{C_1^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 6 [\pi \cdot 8^2 - 5^2] + 12 = \int_{C_1^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{C_1^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} = 384\pi - 150 + 12 = 384\pi - 138$$

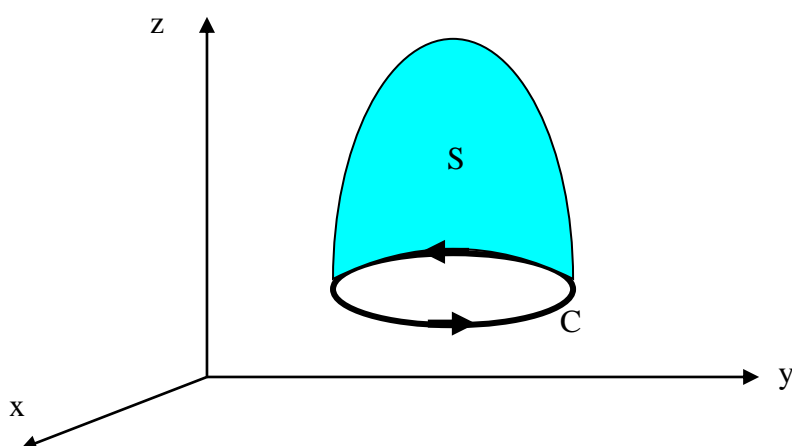
TEOREMA DEL ROTOR O TEOREMA DE STOKES

El teorema de Stokes relaciona la integral de línea de un campo vectorial alrededor de una curva cerrada C en R^3 , con la integral sobre una superficie S de la cual la curva C es la frontera. Este teorema es una generalización en R^3 del teorema de Green.

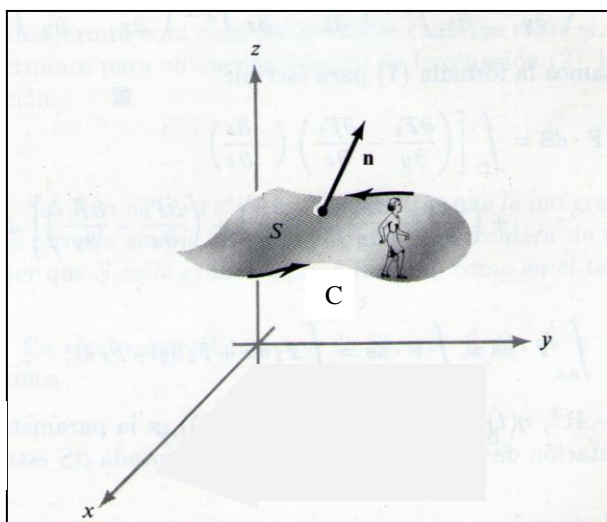
Enunciado del Teorema del Rotor (Stokes)

Sea el campo vectorial $\vec{f} : D \subset R^3 \rightarrow R^3$, siendo $\vec{f} \in C^1$ en D . Sea S una superficie abierta, simple, regular y orientable; y sea la curva C cerrada y suave que limita la superficie S . La superficie S y su curva frontera C están incluidos en el $\text{Dom } \vec{f} = D$. Entonces se cumple que:

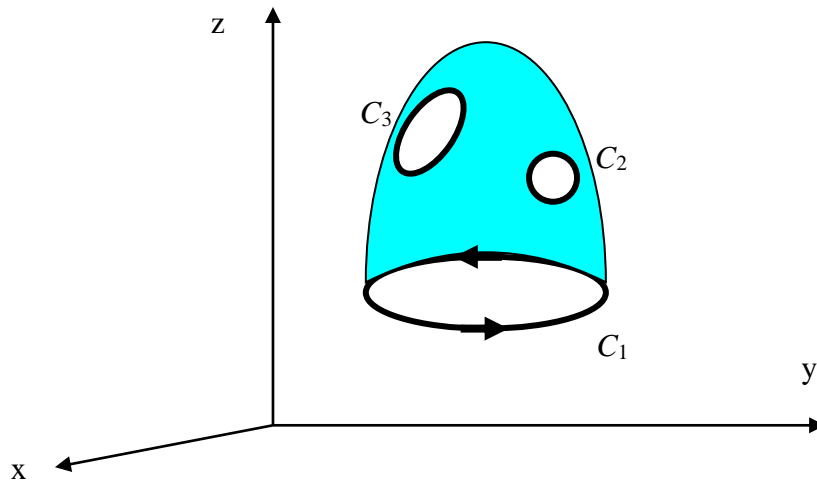
$$\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_S \text{rot } \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma$$



La orientación de la superficie está inducida por el sentido de circulación sobre la curva frontera y viceversa. Es decir, si elegimos una orientación para la superficie S queda determinado un sentido de circulación para la curva C , y a su vez, eligiendo un sentido de circulación para la curva frontera de la superficie, queda automáticamente determinada una orientación (el sentido del vector normal) para la superficie. Si imaginamos un “observador” caminando a lo largo de la frontera de la superficie S (es decir a lo largo de la curva C), donde la normal apunta para el mismo lado que su cabeza, se estará moviendo en la dirección positiva sobre la curva si la superficie está a su izquierda. Esta orientación de la curva C se denomina orientación inducida por una normal \vec{n} “hacia arriba”. Habitualmente se denomina esta vinculación “la regla de la mano derecha”.



El teorema de Stokes también puede aplicarse a superficies en R^3 seccionalmente simples. Por ejemplo, damos la expresión del teorema para la siguiente superficie considerando que el campo \vec{f} , la superficie S y sus curvas frontera cumplen con todas las hipótesis del teorema de Stokes:



$$\begin{aligned}\iint_S \text{rot} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma &= \oint_{C_1^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} - \oint_{C_2^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} - \oint_{C_3^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} \\ \iint_S \text{rot} \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma &= \oint_{C_1^+} \vec{f} \cdot d\vec{s} + \oint_{C_2^-} \vec{f} \cdot d\vec{s} + \oint_{C_3^-} \vec{f} \cdot d\vec{s}\end{aligned}$$

Caso particular: \vec{f} es un campo de gradientes

Analizamos el caso particular en el cual \vec{f} es un campo de gradientes, es decir que $\vec{f} = \nabla \phi$ con $\phi: D \subset R^3 \rightarrow R$. Suponemos que el campo \vec{f} , la superficie S y su curva frontera C cumplen con las hipótesis del teorema de Stokes.

Siendo $\vec{f} = \nabla \phi$, aplicamos el teorema de Stokes para este campo vectorial en una superficie S de R^3 , limitada por una curva cerrada C .

$$\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \oint_C \nabla \phi \cdot d\vec{s} = \iint_S \text{rot}(\nabla \phi) \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iint_S \vec{0} \cdot \vec{n} \, d\sigma = 0$$

Como el campo \vec{f} cumple con las condiciones de hipótesis del teorema de Stokes, resulta $\vec{f} \in C^1 \Rightarrow \phi \in C^2$. Por lo tanto, $\text{rot}(\nabla \phi) = \vec{0}$

La integral de línea del campo de gradientes a lo largo de una curva cerrada es nula. Este resultado reafirma lo visto anteriormente: un campo de gradientes es un campo conservativo, y por lo tanto la integral de línea de dicho campo a lo largo de una curva cerrada vale 0.

Resolvemos ejercicios del TP11

20) Calcular la circulación de $\vec{f}(x, y, z) = (x - y, x + y, z - x - y)$ a lo largo de la curva intersección del plano $x + 2y + 3z = 6$ con los planos coordenados aplicando el teorema del rotor. Indique gráficamente la orientación que ha elegido para recorrer la curva.

20)

$x + 2y + 3z = 6 \Rightarrow \frac{x}{6} + \frac{y}{3} + \frac{z}{2} = 1$

$\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_{\Sigma} \text{rot } \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \textcircled{A}$

$\text{rot } \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x-y & x+y & z-x-y \end{vmatrix} = \vec{i}(-1) - \vec{j}(-1) + \vec{k}(1+1) = (-1, 1, 2)$

$G(x, y, z) = x + 2y + 3z - 6 = 0$

$\vec{n} = \frac{\nabla G}{\|\nabla G\|} = \frac{(1, 2, 3)}{\sqrt{1+4+9}} = \frac{(1, 2, 3)}{\sqrt{14}} \quad (\text{exterior})$

$\textcircled{A} = \iint_{\Sigma} (-1, 1, 2) \cdot \frac{(1, 2, 3)}{\sqrt{14}} \, d\sigma = \iint_{\Sigma} \frac{-1+2+6}{\sqrt{14}} \, d\sigma =$

$= \frac{7}{\sqrt{14}} \iint_{\Sigma} d\sigma = \frac{7}{\sqrt{14}} \iint_R \frac{\sqrt{1+4+9}}{131} \, dx \, dy = \frac{7}{\sqrt{14}} \iint_R \frac{\sqrt{14}}{3} \, dx \, dy =$

$= \frac{7}{3} \int_0^6 dx \int_0^{3-\frac{x}{2}} dy = \frac{7}{3} \int_0^6 \left(3 - \frac{x}{2}\right) dx =$

$= \frac{7}{3} \left[3x - \frac{x^2}{4} \right]_0^6 = \frac{7}{3} \left[18 - \frac{36}{4} \right] = \frac{7}{3} \left[18 - 9 \right] = \frac{7}{3} \cdot 9 = 21$

21) Calcular la circulación de $\vec{f}(x,y,z) = (xy, y-x, yz^2)$ a lo largo de la curva intersección de $x^2 + y^2 + z^2 = 8$ con $x = \sqrt{y^2 + z^2}$ aplicando el teorema del rotor. Indique gráficamente la orientación que ha elegido para recorrer la curva.

21)

$x^2 + y^2 + z^2 = 8$
 $x = \sqrt{y^2 + z^2}$

$y^2 + z^2 + y^2 + z^2 = 8 \Rightarrow z^2 + y^2 = 4$

$\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_S \text{rot } \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iint_S (z^2, 0, -1-x) \cdot (4, 0, 0) \, d\sigma =$

$\text{rot } \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & y-x & yz^2 \end{vmatrix} = \vec{i}(z^2) - \vec{j}(0) + \vec{k}(-1-x) =$

$= (z^2, 0, -1-x)$

\rightarrow la sup no se deforma en la proyección

$= \iint_S z^2 \, d\sigma = \iint_R z^2 \cdot 1 \cdot dy \, dz = \iint_R z^2 \, dz \, dy =$

$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 dp (p^2 \sin^2 \theta) p = \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \, d\theta \left[\frac{p^4}{4} \right]_0^2 =$

$= \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cdot 4 \, d\theta = 4 \left[\frac{1}{2} \theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{2\pi} =$

$= 4 \left[\frac{1}{2} \cdot 2\pi - 0 - 0 + 0 \right] = 4\pi$

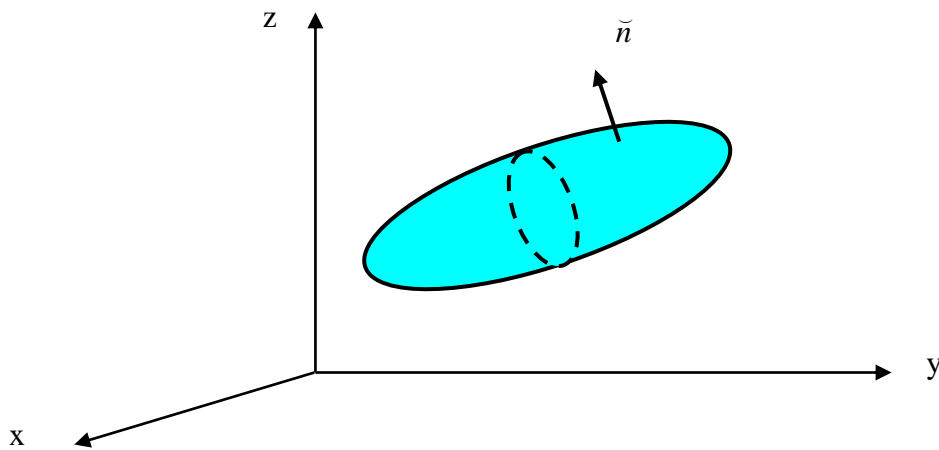
TEOREMA DE GAUSS O DE LA DIVERGENCIA

El teorema de la divergencia relaciona integrales de superficie (flujo) con integrales triples. Este teorema asegura que el flujo de un campo vectorial hacia afuera de una superficie cerrada es igual a la integral de la divergencia de ese campo vectorial sobre el volumen encerrado por dicha superficie.

Enunciado del Teorema de Gauss o de la divergencia

Sea el campo vectorial $\vec{f} : D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, siendo $\vec{f} \in C^1$ en D . Sea V un sólido simple incluido en \mathbb{R}^3 , proyectable sobre los tres planos coordenados, cuya superficie frontera es la superficie S , cerrada, regular, simple y orientable. La superficie S está orientada exteriormente, y tanto el sólido V como su superficie frontera S están incluidos en el $\text{Dom } \vec{f} = D$. Entonces se cumple que:

$$\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iiint_V \text{div} \vec{f} \, dx \, dy \, dz$$



Resolvemos ejercicios del TP11

25) Calcular el flujo de $\vec{f}(x, y, z) = (x^2 z^2, 1 + xyz^2, 1 - xz^3)$ a través del trozo S de paraboloide de ecuación $y = x^2 + z^2$ con $y < 4$, aplicando convenientemente el teorema de la divergencia. Indicar gráficamente la orientación elegida para el vector normal a S.

25) $\begin{cases} y = x^2 + z^2 \\ y = 4 \end{cases} \Rightarrow x^2 + z^2 = 4$

$S_2 = S \cup S_1$ $S_2 \rightarrow \text{sup. cerrado}$

$$\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n}_2 d\vec{s} + \iint_{S_1} \vec{f} \cdot \vec{n}_1 d\vec{s}_1 = \iint_{S_2} \vec{f} \cdot \vec{n}_2 d\vec{s}_2$$

$$\iint_{S_2} \vec{f} \cdot \vec{n}_2 d\vec{s}_2 = \iiint_V \text{div} \vec{f} dx dy dz =$$

$$= \iiint_V (2xz^2 + xz^2 - 3xz^3) dx dy dz = \iiint_V 0 dx dy dz = 0$$

luego: $\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n} d\vec{s} = - \iint_{S_1} \vec{f} \cdot \vec{n}_1 d\vec{s}_1 = - \iint_R (x^2 z^2, 1 + xyz^2, 1 - xz^3) \cdot (0, 1, 0) dx dz =$

$\bullet (0, 1, 0) \cdot \underbrace{dx dz}_{\substack{\text{la proyección no se} \\ \text{deforma}}} = - \iint_R (1 + xyz^2) dx dz =$

$$= - \iint_R (1 + 4xz^2) dx dz = - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 \int_0^2 p p (1 + 4p \sin \theta p^2 \cos^2 \theta) dp =$$

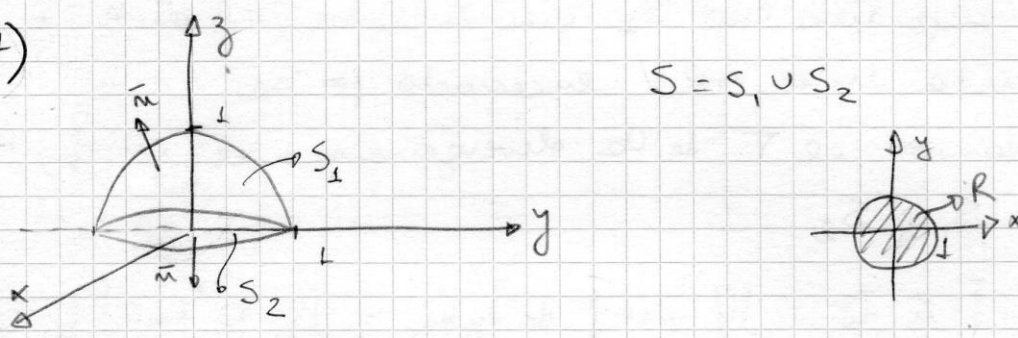
$$= - \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 (p + 4p^4 \sin \theta \cos^2 \theta) dp = - \int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{p^2}{2} + \frac{4p^5}{5} \sin \theta \cos^2 \theta \right]_0^2 =$$

$$= - \left[2\theta - \frac{128}{5} \frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^{2\pi} = - \left[2 \cdot 2\pi - \frac{128}{5} \frac{1}{3} - 0 + \frac{128}{5} \cdot \frac{1}{3} \right] =$$

$$= -4\pi$$

27) Calcular el flujo de $\vec{f} \in C^1$ a través de la superficie de ecuación $z = \sqrt{1-x^2-y^2}$ sabiendo que $\vec{f}(x, y, 0) = (x, y, x^2)$, siendo $\text{div} \vec{f}(x, y, z) = 2(1+z)$.

27)



$S = S_1 \cup S_2$

en la proyección
el recinto
no se deforma

$$\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iint_{S_1} \vec{f} \cdot \vec{n}_1 \, d\sigma_1 + \iint_{S_2} \vec{f} \cdot \vec{n}_2 \, d\sigma_2$$

$$\Downarrow$$

$$\iiint_V \text{div} \vec{f} \, dx \, dy \, dz = \iint_{S_1} \vec{f} \cdot \vec{n}_1 \, d\sigma_1 + \iint_R (x, y, x^2) \cdot (0, 0, -1) \, dx \, dy$$

$$\Rightarrow \iint_{S_1} \vec{f} \cdot \vec{n}_1 \, d\sigma_1 = \iiint_V 2(1+z) \, dx \, dy \, dz - \iint_R -x^2 \, dx \, dy =$$

$$= 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} d\lambda \int_0^1 dp \, p^2 \sec \lambda (1 + p \cos \lambda) +$$

$$+ \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 dp \, p \, p^2 \cos^2 \theta =$$

$$= 2 \cdot 2\pi \int_0^{\pi/2} d\lambda \sec \lambda \left[\frac{p^3}{3} + \frac{p^4}{4} \cos \lambda \right]_0^1 +$$

$$+ \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta \left[\frac{p^4}{4} \right]_0^1 =$$

$$= 4\pi \int_0^{\pi/2} d\lambda \sec \lambda \left[\frac{1}{3} + \frac{\cos \lambda}{4} \right] + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} \theta + \frac{1}{4} \sin 2\theta \right]_0^{2\pi}$$

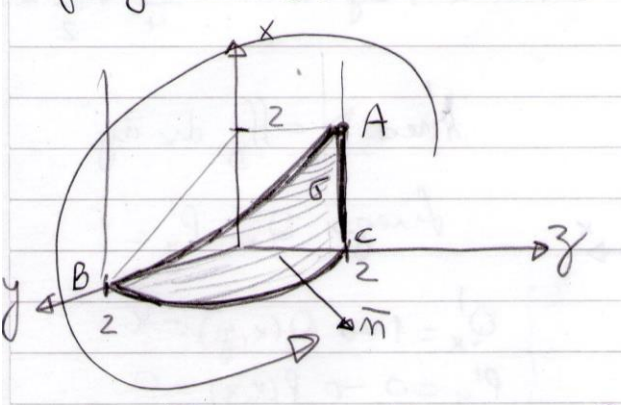
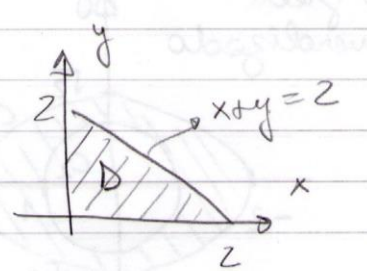
$$= 4\pi \left[-\frac{\cos \lambda}{3} + \frac{\sec^2 \lambda}{2 \cdot 4} \right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{4} \left[\frac{1}{2} \cdot 2\pi + 0 - 0 \right] =$$

$$= 4\pi \left[0 + \frac{1}{8} + \frac{1}{3} - 0 \right] + \frac{\pi}{4} = 4 \cdot \frac{11\pi}{24} + \frac{\pi}{4} = \frac{25}{12} \pi$$

Resolvemos ejercicios de final

Sea σ la superficie de ecuación $y^2 + z^2 = 4$ en el primer octante, con $x + y \leq 2$. Calcular la circulación de $\vec{f}(x, y, z) = (xy, y, z)$ a lo largo de la curva frontera de σ , aplicando el teorema del rotor. Nota: la circulación deseada es con la orientación ABCA, siendo $A=(2,0,2)$, $B=(0,2,0)$, $C=(0,0,2)$

$y^2 + z^2 = 4$ en el 1º octante, con $x + y \leq 2$

$\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_{\sigma} \text{rot } \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \textcircled{1}$

$G(x, y, z) = y^2 + z^2 - 4 = 0$
 $\vec{n} = \frac{(0, 2y, 2z)}{\sqrt{4y^2 + 4z^2}}$

$$\text{rot } \vec{f} = \nabla \times \vec{f} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & y & z \end{vmatrix} = \vec{i}(0-0) - \vec{j}(0-0) + \vec{k}(0-x) = (0, 0, -x)$$

$$\textcircled{1} \iint_{\sigma} \text{rot } \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iint_{\sigma} (0, 0, -x) \cdot \frac{(0, 2y, 2z)}{\sqrt{4y^2 + 4z^2}} \, d\sigma =$$

$$= \iint_{\sigma} \frac{-2xz}{\sqrt{4y^2 + 4z^2}} \, d\sigma = \iint_D \frac{-2xz}{\sqrt{4y^2 + 4z^2}} \cdot \frac{\sqrt{4y^2 + 4z^2}}{|2z|} \, dx \, dy =$$

$$= \iint_D \frac{-2xz}{2z} \, dx \, dy = - \iint_D x \, dx \, dy =$$

$$= - \int_0^2 dy \int_0^{2-y} x \, dx = - \int_0^2 \frac{x(2-x)}{2} \, dy =$$

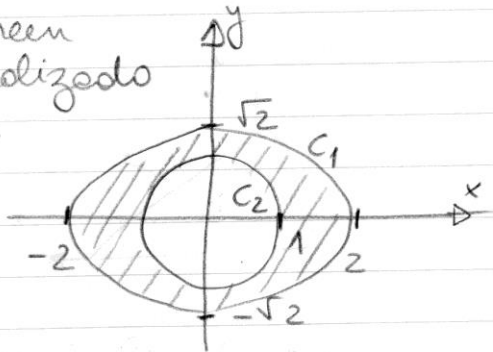
$$= - \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^{2-y} = - \left(4 - \frac{8}{3} \right) = \textcircled{-\frac{4}{3}}$$

Sea D la región del plano para la cual queda definida $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} \sqrt{4 - x^2 - 2y^2}$ como campo escalar real. Calcule el área de D aplicando integrales de línea.

Dom f : $x^2 + y^2 - 1 \geq 0 \wedge 4 - x^2 - 2y^2 \geq 0$

$$x^2 + y^2 \geq 1 \wedge x^2 + 2y^2 \leq 4 \rightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} \leq 1$$

T. Green generalizado



$$x^2 + y^2 = 1 \rightarrow \vec{g}(t) = (\cos t, \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1 \rightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \cos t \\ \frac{y}{\sqrt{2}} = \sin t \end{cases}$$

$$\vec{f}(t) = (2 \cos t, \sqrt{2} \sin t) \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\text{Área } D = \iint_D dx dy$$

$$\text{Luego } Q'_x - P'_y = 1$$

$$Q'_x = 1 \rightarrow Q(x, y) = x$$

$$P'_y = 0 \rightarrow P(x, y) = 0$$

$$\text{Área } D = \oint_{C_1^+} (0, x) d\vec{s} -$$

$$- \oint_{C_2^+} (0, x) d\vec{s} =$$

$$= \int_0^{2\pi} (0, 2 \cos t) \cdot (-2 \sin t, \sqrt{2} \cos t) dt - \int_0^{2\pi} (0, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-2 \sin t, \cos t) \cdot (-2 \sin t, \sqrt{2} \cos t) dt = \int_0^{2\pi} 2\sqrt{2} \cos^2 t dt - \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt$$

$$= (2\sqrt{2} - 1) \int_0^{2\pi} \cos^2 t dt = (2\sqrt{2} - 1) \cdot \left[\frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sin(2t) \right]_0^{2\pi} =$$

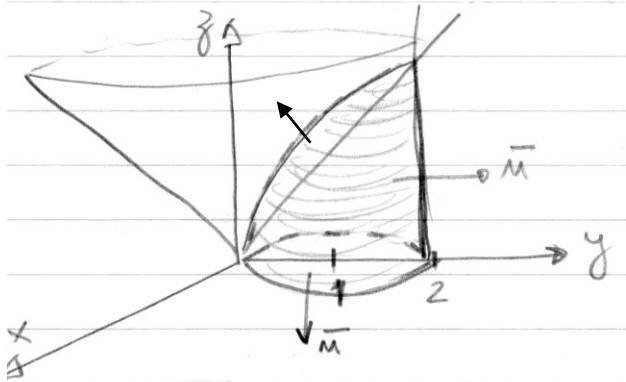
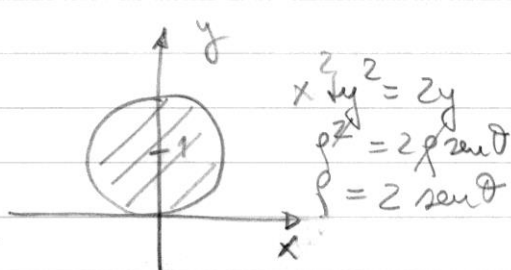
$$= (2\sqrt{2} - 1) [\pi] = (2\sqrt{2} - 1) \pi$$

Calcular el flujo de $\vec{f}(x, y, z) = (2x - y, 2y + z, y - z)$ a través de la superficie S frontera del cuerpo definido por $x^2 + y^2 \leq 2y$ con $0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$. Indicar gráficamente la orientación elegida para cada parte de S.

$$x^2 + y^2 \leq 2y \quad \text{con} \quad 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$x^2 + y^2 = 2y \Rightarrow x^2 + y^2 - 2y + 1 = 1 \Rightarrow x^2 + (y - 1)^2 = 1$$

$$x^2 + (y - 1)^2 \leq 1$$

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} \Rightarrow z = \sqrt{\rho^2} = \rho$$

$$\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iiint_V \text{div} \vec{f} \, dx \, dy \, dz = \iiint_V (2 + 2 - 1) \, dx \, dy \, dz =$$

$$3 \int_0^\pi d\sigma \int_0^{2 \sin \theta} \rho \, d\rho \int_0^\rho dz =$$

$$= 3 \int_0^\pi d\sigma \int_0^{2 \sin \theta} \rho^2 \, d\rho = 3 \int_0^\pi d\sigma \left[\frac{\rho^3}{3} \Big|_0^{2 \sin \theta} \right] =$$

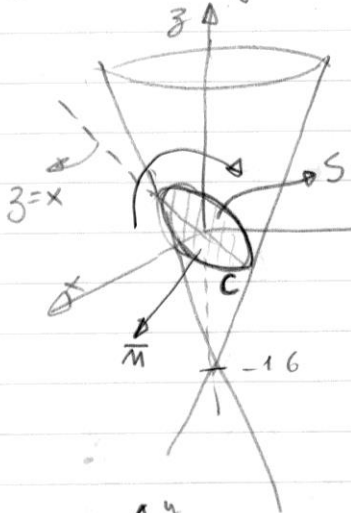
$$= \frac{3}{3} \int_0^\pi 8 \sin^3 \theta \, d\sigma = 8 \left[-\cos \theta + \frac{\cos^3 \theta}{3} \Big|_0^\pi \right] =$$

$$= 8 \left[-(-1) + \frac{(-1)}{3} + 1 - \frac{1}{3} \right] = 8 \left(2 - \frac{2}{3} \right) = \frac{32}{3}$$

Calcular la circulación de $\vec{f}(x, y, z) = (xz - y, x, yz)$ a lo largo de la curva C, intersección de la superficie de ecuación $z^2 = 5x^2 + 4y^2 - 16$ con el plano de ecuación $z = x$, aplicando el teorema del rotor. Indicar gráficamente la orientación que ha elegido para circular C.

$$z^2 = 5x^2 + 4y^2 - 16$$

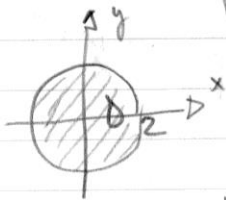
como elíptico desplazado



Proycc $\rho(x, y)$

$$\begin{cases} z^2 = 5x^2 + 4y^2 - 16 \\ z = x \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow x^2 &= 5x^2 + 4y^2 - 16 \Rightarrow \\ \Rightarrow 16 &= 4x^2 + 4y^2 \Rightarrow x^2 + y^2 = 4 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \text{rot } \vec{f} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xz - y & x & yz \end{vmatrix} = \\ &= (z - 0, +x, 1 + 1) = (z, x, 2) \end{aligned}$$

$$\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_S \text{rot } \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma =$$

$$= \iint_S (z, x, 2) \cdot \frac{(1, 0, -1)}{\sqrt{2}} \, d\sigma =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_S (z - 2) \, d\sigma =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_D (z - 2) \frac{\sqrt{2}}{1 - 1} \, dx \, dy =$$

$$G(x, y, z) = x - z = 0$$

$$\vec{n} = \frac{\nabla G}{\|\nabla G\|} = \frac{(-1, 0, -1)}{\sqrt{2}}$$

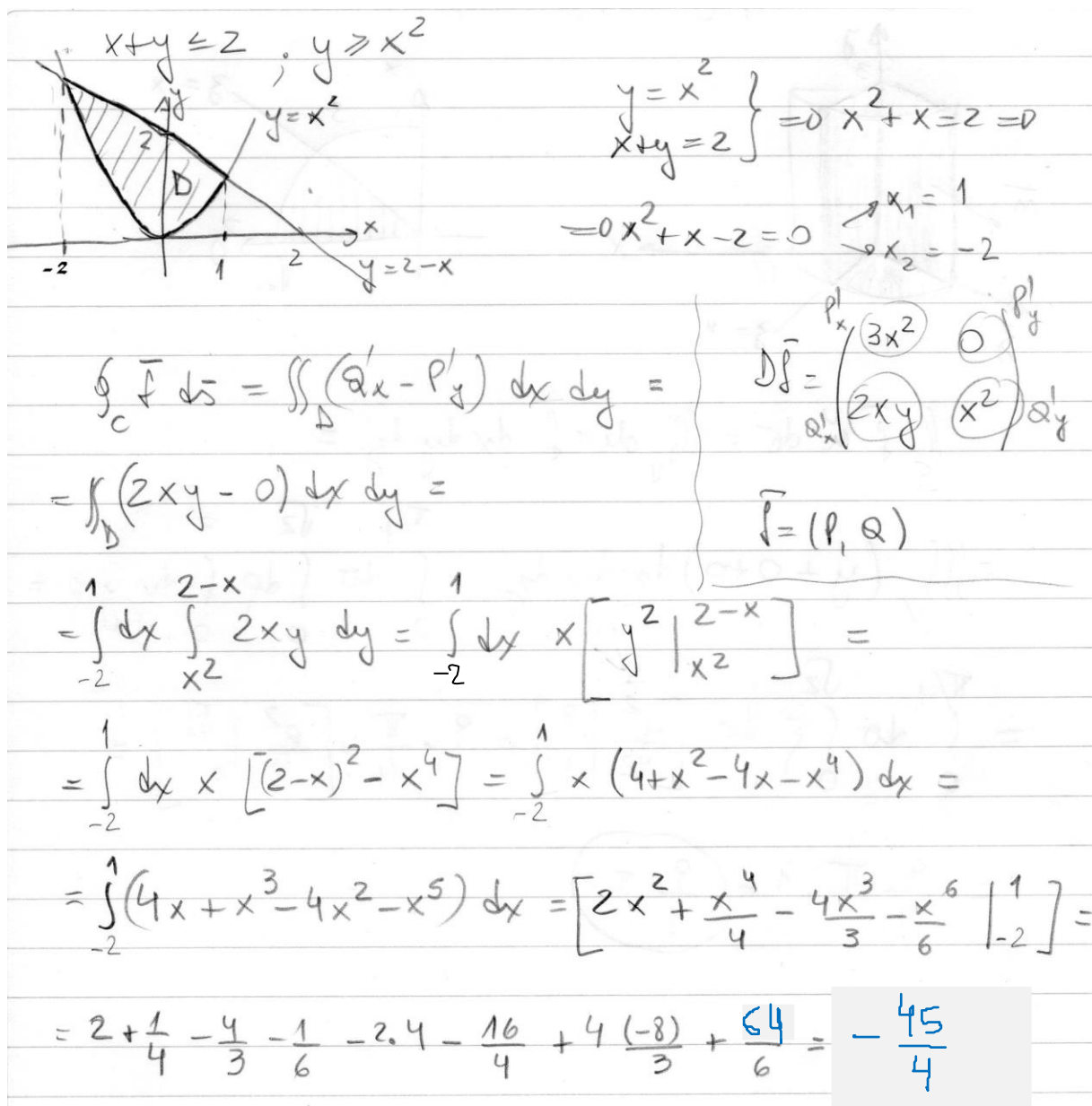
$$= \iint_D (z - 2) \, dx \, dy = \iint_D (x - 2) \, dx \, dy$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^2 dp \, p (p \cos \theta - 2) =$$

$$= \int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{p^3}{3} \cos \theta - p^2 \right]_0^2 = \int_0^{2\pi} d\theta \left[\frac{8}{3} \cos \theta - 4 \right] =$$

$$= \left[\frac{8}{3} \sin \theta - 4\theta \right]_0^{2\pi} = 0 - 4 \cdot 2\pi = \boxed{-8\pi}$$

Si la matriz jacobiana del campo vectorial \vec{f} es $D\vec{f}(x,y) = \begin{pmatrix} 3x^2 & 0 \\ 2xy & x^2 \end{pmatrix}$, calcular la circulación de \vec{f} a lo largo de la frontera de D en sentido positivo, siendo D el conjunto del plano de puntos (x,y) tales que $x+y \leq 2 \wedge y \geq x^2$



$x+y \leq 2, y \geq x^2$
 $y = x^2$
 $y = 2-x$
 $x+y=2 \Rightarrow x^2+x-2=0 \Rightarrow x_1=1, x_2=-2$

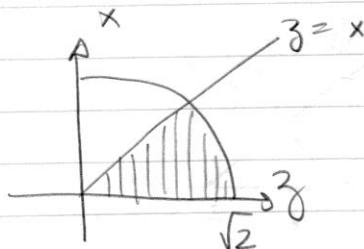
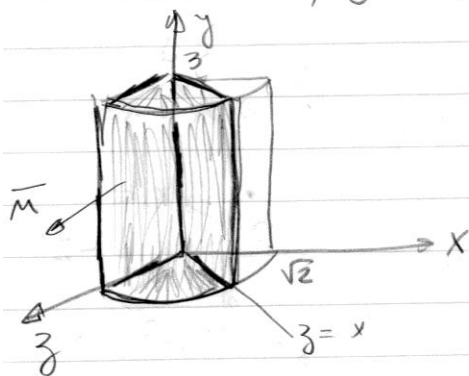
$D\vec{f} = \begin{pmatrix} p'_x & p'_y \\ q'_x & q'_y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x^2 & 0 \\ 2xy & x^2 \end{pmatrix}$
 $\vec{f} = (p, q)$

$\oint_C \vec{f} \cdot d\vec{s} = \iint_D (q'_x - p'_y) dx dy = \iint_D (2xy - 0) dx dy =$
 $= \int_{-2}^1 dx \int_{x^2}^{2-x} 2xy dy = \int_{-2}^1 dx \cdot x \left[y^2 \Big|_{x^2}^{2-x} \right] =$
 $= \int_{-2}^1 dx \cdot x [(2-x)^2 - x^4] = \int_{-2}^1 x (4+x^2-4x-x^4) dx =$
 $= \int_{-2}^1 (4x+x^3-4x^2-x^5) dx = \left[2x^2 + \frac{x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} - \frac{x^6}{6} \right]_{-2}^1 =$
 $= 2 + \frac{1}{4} - \frac{4}{3} - \frac{1}{6} - 2 \cdot 4 - \frac{16}{4} + 4 \cdot \frac{(-8)}{3} + \frac{64}{6} = -\frac{45}{4}$

Calcular el flujo de $\vec{f}(x, y, z) = (xy, x^2z^3, y \sin x)$ a través de la superficie frontera del cuerpo definido por $x^2 + z^2 \leq 2$, $z \geq x$, $y \leq 3$, en el 1er. octante.

T.17 eg 4

$$x^2 + z^2 \leq 2, z \geq x, y \leq 3, 1^\circ \text{ oct}$$



$$\iint_S \vec{f} \cdot \vec{n} \, d\sigma = \iiint_V \operatorname{div} \vec{f} \, dx \, dy \, dz =$$

$$= \iiint_V (y + 0 + 0) \, dx \, dy \, dz = \int_0^{\pi/4} d\sigma \int_0^{\sqrt{2}} \rho \, d\rho \int_0^3 dy \, y \, \rho =$$

$$= \int_0^{\pi/4} d\sigma \int_0^{\sqrt{2}} \rho \, d\rho \left[\frac{y^2}{2} \right]_0^3 = \frac{9}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{9}{2} \cdot \frac{\pi}{4} \cdot 1 = \frac{9}{8} \pi$$