ECUACIONES DIFERENCIALES

Expresión diferencial: es aquella expresión matemática que contiene variables y sus derivadas o diferenciales. Por ejemplo

$$x^2 y' + x^3 y''$$

$$4uv\,du - 2u^2\,dv$$

Ecuación diferencial: es toda ecuación que contiene expresiones diferenciales. Por ejemplo

$$x^2 y' + x^3 y'' = 2x$$

$$4uv\,du - 2u^2\,dv = 0$$

Es decir, se trata de una ecuación en la que se relaciona una variable independiente (en general la *x*), con los valores de una función que depende de dicha variable (en general $y = f(x)$), y algunas de sus derivadas.

En el caso de la ecuación $4uv\,du - 2u^2\,dv = 0$, se lleva a la notación tradicional de las ecuaciones diferenciales dividiendo miembro a miembro por alguno de los diferenciales: $\dfrac{4uv\,du}{du} - \dfrac{2u^2\,dv}{du} = \dfrac{0}{du} \quad \Rightarrow \quad 4uv - 2u^2\,v' = 0$

Ecuación diferencial ordinaria: es toda aquella ecuación diferencial en la que solamente intervienen una función escalar y sus derivadas. Es decir que una ecuación diferencial ordinaria relaciona una variable escalar *x* con una función escalar *y* (la incógnita a resolver), y algunas de sus derivadas.
Aquellas ecuaciones diferenciales en las que aparecen funciones de varias variables y sus derivadas parciales, se denominan ecuaciones diferenciales en derivadas parciales. En este curso de Análisis Matemático II nos ocuparemos solamente de estudiar ciertos casos de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Clasificación de las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDO)

Orden: una EDO de orden "*n*" es toda ecuación en la que interviene una derivada de orden n y ninguna derivada de orden superior a *n*. Es decir que el orden de una EDO es el de la derivada de mayor orden que aparece en la ecuación.

Por ejemplo, la EDO $y''' \cos x + 2xy\, y' = 3y^2 x$ es una ecuación de tercer orden.

Grado: para poder evaluar el grado de una EDO, dicha ecuación deberá poder expresarse como un polinomio respecto de la variable y y sus derivadas. Es decir, la ecuación puede tomar la forma:

$$a_n\,(y^n)^{k_n} + a_{n-1}(y^{n-1})^{k_{n-1}} + \ldots\ldots + a_2\,(y'')^{k_2} + a_1\,(y')^{k_1} + a_0\,(y)^{k_0} = f(x) \qquad (1)$$

donde los coeficientes a_i pueden ser funciones de la variable *x*.

En este caso se denomina grado al exponente al cual está elevada la derivada de mayor orden, es decir la derivada que da el orden de la EDO. En la expresión (1), el grado de la EDO es k_n, siempre que $a_n \neq 0$.

Por ejemplo, la EDO $(y')^5 - 3x^2 (y'')^3 = y\cos x$ es de orden 2 y grado 3

$-3y' + 4^{y''} = 2x$ no tiene grado

EDO lineales: las EDO se denominan lineales cuando, pudiendo expresar la ecuación de forma polinómica, la variable dependiente y todas sus derivadas están elevadas a la 1.

En la expresión (1) la EDO será lineal si $k_i = 1 \quad \forall i$ con $0 \le i \le n$

Por ejemplo, la EDO $\quad 3y'' \ln x - 2y + x^2\ y' = 4 \quad$ es lineal y de orden 2

Solución de una ecuación diferencial

Se denomina solución de una ED a toda relación entre sus variables que satisface la ecuación diferencial. Por ejemplo, si tenemos la EDO $y' = 2$, la función $y_1 = 2x$ es solución de esa ecuación, ya que $y_1' = 2$ y se verifica la EDO planteada. No es esta función la única solución, ya que podríamos plantear otras soluciones que satisfacen la ecuación, por ejemplo $y_2 = 2x + 3$, $y_3 = 2x - 15$.

Tengamos en cuenta que la solución de una ecuación algebraica es un número, en tanto la solución de una ED será una función o relación entre las variables.

Solución General (SG) de una ecuación diferencial

Consideremos por ejemplo la ecuación diferencial $y' = 2x$. Para poder resolverla, en tanto aparece la derivada de una función, deberemos aplicar el cálculo integral. Resulta entonces:

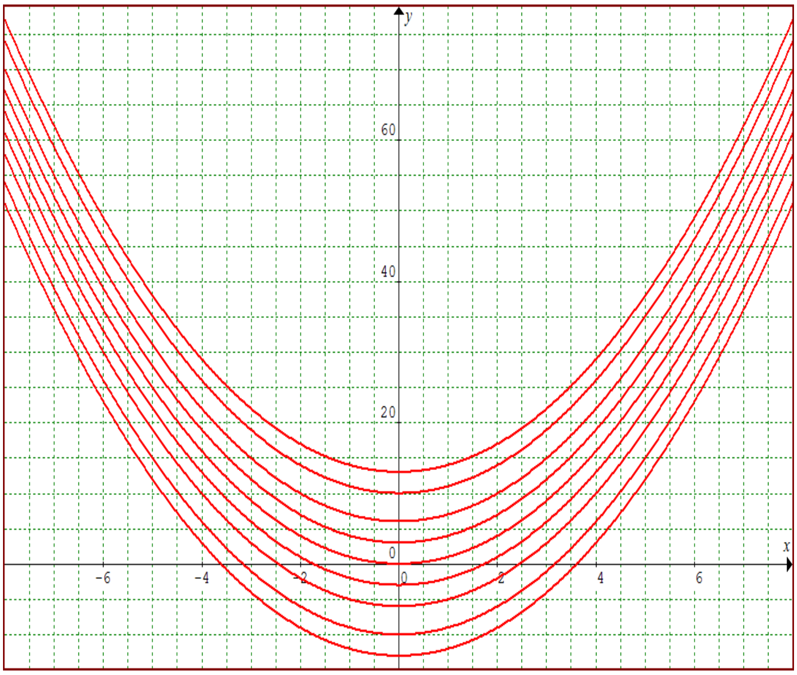
$$y' = 2x \quad \Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = 2x \quad \Rightarrow \quad dy = 2x\, dx$$

Integrando miembro a miembro: $\int dy = \int 2x\, dx \quad \Rightarrow \quad y + c_1 = x^2 + c_2$

Recordemos que como se trata de integrales indefinidas, en ambas integrales aparece la constante de integración. Sin embargo, mediante un cálculo algebraico sencillo, podemos unificar las constantes.

$$y + c_1 = x^2 + c_2 \quad \Rightarrow \quad y = x^2 + c_2 - c_1 \quad \Rightarrow \quad y = x^2 + k \quad (\text{haciendo } k = c_2 - c_1)$$

La solución hallada $y = x^2 + k$ no es en realidad una única función sino una familia de funciones (en este caso, una familia de parábolas de eje y), cuyos miembros surgen de darle distintos valores a la constante *k*. A este tipo de soluciones vamos a llamarlas solución general.



Definimos formalmente:
La **solución general de una ED** es una función o relación entre las variables que satisface la ecuación diferencial y contiene "*n*" constantes esenciales y arbitrarias. Denominamos constantes esenciales a aquellas que no pueden reagruparse mediante operaciones algebraicas para disminuir su número.
Notemos que en el ejemplo anterior, la solución general de una ecuación de orden 1 contine 1 constante esencial. Si la ecuación fuera de orden 2, en su SG aparecerían 2 constantes; si fuese de orden 3, 3 constantes y así sucesivamente.
En general, la SG de una ED tiene tantas constantes esenciales y arbitrarias como es el orden de dicha ED.

Solución particular (SP) de una ecuación diferencial

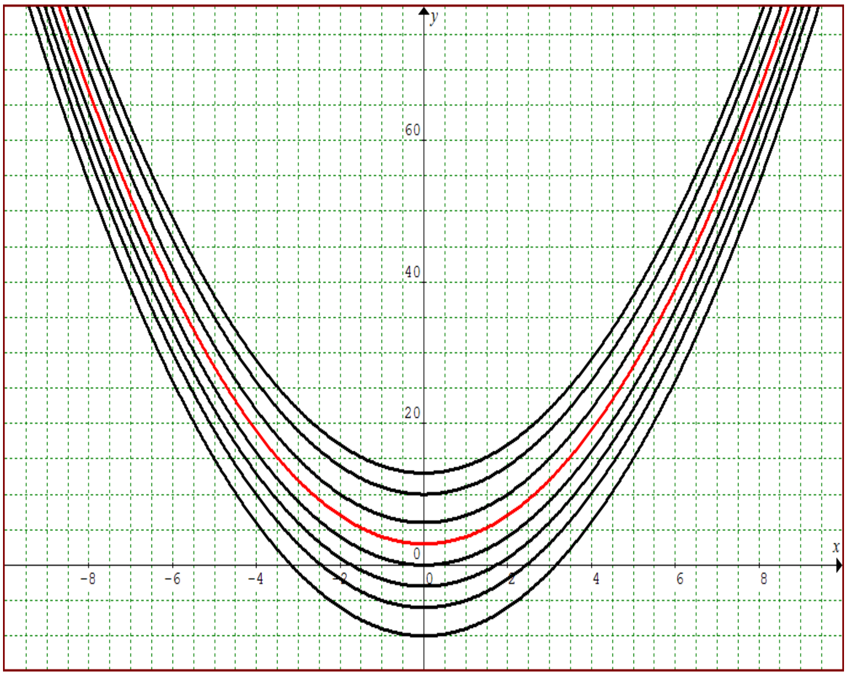
En muchos casos, particularmente en los problemas de aplicación, es necesario elegir una curva en particular de las que corresponde a la familia de la SG. Para ello se debe contar con cierta información adicional que permita identificar cuál de las curvas de la familia cumple los requisitos.

Esta información adicional se denomina **condiciones iniciales o condiciones de contorno**, y permiten hallar un valor específico para la constante, e identificar la curva del haz que resulta solución del problema.
Volviendo al ejemplo anterior: si para la ecuación diferencial $y' = 2x$ planteamos además la condición de que la curva solución pase por el punto $(1\,,\,4)$, de todo el haz de curvas de la SG debemos identificar cuál es la que cumple la condición pedida. Para ello trabajamos algebraicamente con la SG y la condición dada, para identificar cuál es el valor que toma la constante *k* en este caso particular, y por lo tando determinar cuál de todas las parábolas es la que resulta solución de este problema.
SG $\rightarrow \quad y = x^2 + k$
Condición de contorno $\rightarrow$ la curva pasa por (1 , 4)
Por lo tanto: $4 = 1^2 + k \quad \Rightarrow \quad k = 4 - 1 \quad \Rightarrow \quad k = 3$

La solución al problema planteado, considerando la condición de contorno establecida es $y = x^2 + 3$

A este tipo de soluciones, vamos a llamarlas soluciones particulares. Para el caso de que la SG posea más de una constante esencial, deberán darnos tantas condiciones como constantes tenga la SG a fin de obtener la solución particular pedida.

En el siguiente gráfico marcamos con rojo la solución particular que corresponde al problema planteado más arriba.



Definimos formalmente:
Se denomina **solución particular de una ED** a toda aquella función o relación entre variables que verifica la ED, y que se desprende de la SG, dándole a las constantes valores determinados.

Solución singular (SS) de una ecuación diferencial

Además de las SG y las SP, pueden aparecer otro tipo de soluciones para las ecuaciones diferenciales.

Se denomina **solución singular de una ED** a toda función o relación entre variables que verifica la ED, pero que no se desprende de la SG, es decir que no es una SP.
Pueden aparecer analizando la ED y el haz de curvas de soluciones, como envolvente de dicho haz de curvas, o como una una relación entre variables cuya forma algebraica resulta un absurdo en la resolución analítica.

Resolvemos algunos ejercicios del TP1

2)c) Verifique que: $y^2 = C_1\, x + C_2$ es SG de la ecuación diferencial $y\, y'^2 + y^2\, y'' = 0$. Halle la SP que en $(1\,,\,y_0)$ tiene recta tangente de ecuación $y = 2x - 1$

Derivamos para sustituir en la ED y verificar que se cumple la igualdad

$y^2 = c_1 x + c_2 \Rightarrow 2yy' = c_1 \Rightarrow y' = \frac{c_1}{2}\cdot\frac{1}{y}$

$y' = \frac{c_1}{2}\cdot\frac{1}{y} \Rightarrow y'' = \frac{c_1}{2}\left(-\frac{1}{y^2}\right)\cdot y' \Rightarrow y'' = -\frac{c_1\, y'}{2y^2} \Rightarrow$

$\Rightarrow y'' = \dfrac{c_1\left(-\frac{c_1}{2}\cdot\frac{1}{y}\right)}{2y^2} \Rightarrow y'' = -\frac{c_1^2}{4}\cdot\frac{1}{y^3}$

Remplazamos: $y\cdot\left(\frac{c_1}{2}\cdot\frac{1}{y}\right)^2 + \cancel{y^2}\left(-\frac{c_1^2}{4}\cdot\frac{1}{y^{\cancel{3}}}\right) =$

$= \cancel{y}\,\frac{c_1^2}{4}\cdot\frac{1}{y^{\cancel{2}}} - \frac{c_1^2}{4}\cdot\frac{1}{y} = 0$ verifica la igualdad

Demostramos que $y^2 = c_1 x + c_2$ es solución.

Además es SG porque la expresión tiene 2 constantes esenciales y arbitrarias (c_1 y c_2), en concordancia con el orden de la ED (es una ED de 2° orden)

SG $\rightarrow y^2 = c_1 x + c_2$

Hallamos la SP que en $(1, y_0)$ tiene recta tangente $y = 2x - 1$

$y'(1) = 2$ (pendiente de la recta)

$y(1) = 2\cdot 1 - 1 = 1$ (la recta y la curva comparten el punto de tangencia)

$y(1) = 1 \rightarrow 1^2 = c_1\cdot 1 + c_2 \Rightarrow c_1 + c_2 = 1$

$y'(1) = 2 \rightarrow 2 = \frac{c_1}{2}\cdot\frac{1}{y} \Rightarrow 2 = \frac{c_1}{2}\cdot\frac{1}{1} \Rightarrow c_1 = 4$

$\left.\begin{array}{l} c_1 + c_2 = 1 \\ c_1 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow c_2 = -3$

SP pedida: $\boxed{y^2 = 4x - 3}$

2)e) Verifique que: $y = Cx + C^2$ es SG ; $y = -x^2/4$ es SS de la ED $y = x\,y' + (y')^2$. Halle las soluciones que pasan por (2 , -1)

• Verificamos que $y = cx + c^2$ es solución

$y' = c$ Reemplazamos en la ED:

$$\underbrace{cx + c^2}_{y} = x \cdot c + c^2$$ Verifica la igualdad

$y = cx + c^2$ es SG porque la expresión tiene una constante esencial y arbitraria, ya que la ED es de 1° orden

• Verificamos que $y = -\frac{x^2}{4}$ es solución

$y' = -\frac{2x}{4} = -\frac{x}{2}$ Reemplazamos en la ED:

$$\underbrace{-\frac{x^2}{4}}_{y} = x \cdot \underbrace{\left(-\frac{x}{2}\right)}_{y'} + \underbrace{\left(-\frac{x}{2}\right)^2}_{(y')^2}$$

$$-\frac{x^2}{4} = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^2}{4} \Rightarrow -\frac{x^2}{4} = -\frac{x^2}{4}$$ Verifica

$y = -\frac{x^3}{4}$ es SS porque no se desprende de la SG (la SG es un haz de rectas y la SS es una parábola)

• Hallemos las soluciones que pasan por (2, −1)

SG $\rightarrow$ $y = cx + c^2$ sabiendo que $y(2) = -1$

$-1 = 2 \cdot c + c^2 \Rightarrow c^2 + 2c + 1 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (c+1)^2 = 0 \Rightarrow c + 1 = 0 \Rightarrow c = -1$

La SP $y = -1 \cdot x + (-1)^2$

$\boxed{y = -x + 1 \quad \text{pasa por } (2,-1)}$

• Verificamos si la SS pasa por (2, −1)

SS: $y = -\frac{x^2}{4}$ ∴ $-1 = -\frac{2^2}{4}$ verifica

$\boxed{y = -\frac{x^2}{4} \quad \text{pasa por } (2,-1)}$

Teorema de existencia y unicidad de ecuaciones diferenciales

Se enunciará luego de haber trabajado con funciones de varias variables, y conceptos tales como funciones C^1.

ED de un haz de curvas

Hasta ahora estuvimos viendo las ecuaciones diferenciales, y tratando de hallar las soluciones de dichas ecuaciones. Vimos que la SG resulta ser una familia o haz de curvas que satisface la ED. Sin embargo, podríamos plantearnos el problema inverso: dado un determinado haz o familia de curvas, ¿existirá una ED de la cual dicho haz sea la SG?. En este caso, si nos dan la ecuación de un haz de curvas habrá que hallar la ED asociada de modo que dicho haz es la SG.

Por ejemplo, dado el haz de curvas $x^2 + y^2 = c$ (circunferencias concéntricas con centro en el origen y radio $\sqrt{c}$), podríamos tratar de hallar la EDO asociada. En este caso, para obtener una ED tenemos que derivar, ya que la característica de estas ecuaciones es que deben aparecer las derivadas de la varible dependiente.
Si derivamos miembro a miembro resulta: $2x + 2y\, y' = 0$

Trabajando algebraicamente obtenemos: $y' = -\frac{x}{y}$. Esta ecuación diferencial es la ED del haz de curvas correspondientes a las circunferencias concéntricas con centro en el origen y radio variable.

Para tener en cuenta:

- Si el haz de curvas (que resulta ser la SG de una ED) tiene una sola constante, significa que la ED asociada es de 1º orden, y habrá que derivar una sola vez para que aparezca solamente la derivada primera. Si el haz de curvas tiene dos constantes esenciales, significa que la ED asociada es de 2º orden, y habrá que derivar dos veces para que aparezca la derivada segunda. En general, si el haz de curvas tiene "*n*" constantes esenciales, habrá que derivar "*n*" veces para obtener una ED de orden *n*.
- En la resolución algebraica para la obtención de la ED asociada a un haz de curvas hay que **eliminar las constantes esenciales** (mediante procedimientos algebraicos de sustitución), si no se eliminan naturalmente en el proceso de derivación. Tengamos en cuenta que las ED no tienen constantes esenciales sino constantes específicas que se asocian a los procedimientos algebraicos que les dan origen.

Resolvemos algunos ejercicios del TP1

3)a) Halle la ED correspondiente a la siguiente familia de curvas: $y^2 = 4\,a\,x$

$y^2 = 4ax$ (1 cte esencial $\rightarrow$ 1° orden)

Derivamos MAM: $2y\,y' = 4a \Rightarrow y\,y' = 2a$

Para eliminar las constante a, despejamos de la ecuación de la familia de curvas y sustituimos en la ED

$$\left.\begin{array}{l} y^2 = 4ax \Rightarrow a = \dfrac{y^2}{4x} \\ y\,y' = 2a \end{array}\right] \Rightarrow \cancel{y}\,y' = \frac{\cancel{2}\,y^{\cancel{2}}}{\underset{2}{\cancel{4}}\,x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{y' = \frac{y}{2x}}$$

3)c) Halle la ED correspondiente a la siguiente familia de curvas: $y = \text{sen}(a\,x + b)$

3) c) $y = \text{sen}(ax+b)$ 2 ctes esenciales $\downarrow$ 2° orden

$y = \text{sen}(ax+b)$ (1)

$y' = a\cos(ax+b)$ (2)

$y'' = -a^2\,\text{sen}(ax+b)$ (3)

De (1) y (3) $\rightarrow$ $y'' = -a^2\,y$ (4)

De (2) $a = \dfrac{y'}{\cos(ax+b)} \Rightarrow -a^2 = -\dfrac{(y')^2}{\cos^2(ax+b)}$ (5)

Siendo $\cos^2\alpha = 1 - \text{sen}^2\alpha$, y utilizando la ecuación (1) resulta:

$$\cos^2(ax+b) = 1 - \underbrace{\text{sen}^2(ax+b)}_{y^2} = 1 - y^2$$

Reemplazando la expresión obtenida en (5):

$$-a^2 = -\frac{(y')^2}{1-y^2} \qquad (6)$$

De (4) y (6): $y'' = -\dfrac{(y')^2}{1-y^2}\cdot y$

ED del haz de curvas $\boxed{y'' = \dfrac{(y')^2}{y^2-1}\cdot y}$

MÉTODOS ANALÍTICOS DE RESOLUCIÓN

Varibles separables

Las ecuaciones diferenciales de variables separables son de la forma

$$y' = H(x)\,G(y)$$

donde las funciones H y G son continuas en un determinado intervalo abierto, subconjunto de R.
Para la resolución analítica se procede separando las variables para poder integrar:

$$y' = H(x)\,G(y) \;\Rightarrow\; \frac{dy}{dx} = H(x)\,G(y) \;\Rightarrow\; \frac{dy}{G(y)} = H(x)\,dx \;\Rightarrow\; \int \frac{dy}{G(y)} = \int H(x)\,dx$$

Resolvemos algunos ejercicios del TP1
7)b) Halle, según corresponda, la SG o la SP de la siguiente ecuación diferencial:

$$x\frac{dy}{dx} - y = 2x^2 y$$

$$x\,\frac{dy}{dx} - y = 2x^2 y$$

$$x\,\frac{dy}{dx} = 2x^2 y + y = y(2x^2+1)$$

$$x\,dy = y(2x^2+1)\,dx$$

$$\frac{dy}{y} = \frac{2x^2+1}{x}\,dx \Rightarrow \frac{dy}{y} = \left(2x + \frac{1}{x}\right)dx$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \left(2x + \frac{1}{x}\right)dx$$

$$\ln|y| + c = x^2 + \ln|x| \qquad \text{con } c = \ln k:$$

$$\ln|y| + \ln k = x^2 + \ln|x|$$

$$\ln(k|y|) = x^2 + \ln|x| \qquad \text{con } q = \pm k$$

$$\ln(qy) = x^2 + \ln|x| \Rightarrow \ln(qy) - \ln|x| = x^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\left(\frac{qy}{|x|}\right) = x^2 \qquad \text{con } a = \pm q$$

$$\ln\left(a\,\frac{y}{x}\right) = x^2 \Rightarrow e^{x^2} = \frac{a\,y}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a}\,x\,e^{x^2} = y \Rightarrow \boxed{y = b\,x\,e^{x^2}}$$

7) f) Halle, según corresponda, la SG o la SP de la siguiente ecuación diferencial:

$$y' = xy + x - 2y - 2 \text{ con } y(0) = 2$$

Primero hallamos la SG

$$y' = x(y+1) - 2(y+1) = (x-2)(y+1)$$

$$\frac{dy}{dx} = (x-2)(y+1) \Rightarrow \frac{1}{y+1}\,dy = (x-2)\,dx$$

$$\int \frac{1}{y+1}\,dy = \int (x-2)\,dx \Rightarrow \ln[k(y+1)] = \frac{x^2}{2} - 2x$$

$$\Rightarrow e^{x^2/2 - 2x} = k(y+1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c\,e^{x^2/2 - 2x} = y+1 \Rightarrow y = c\,e^{x^2/2 - 2x} - 1$$

Reemplazamos para hallar la SP

$$y(0) = 2 \Rightarrow 2 = c\,e^{0-0} - 1 \Rightarrow 2 = c - 1 \Rightarrow c = 3$$

La SP pedida es $y = 3\,e^{x^2/2 - 2x} - 1$

EDO lineal de primer orden

Llamamos ecuaciones diferenciales lineales de primer orden a la EDO del tipo:

$$y' + p(x)\,y = q(x) \qquad (1)$$

siendo $p(x)$ y $q(x)$ funciones escalares conocidas, continuas en un cierto intervalo abierto. Para analizar la ecuación diferencial, planteamos dos situaciones:

- $q(x) = 0$ denominada **incompleta**

En este caso, la ecuación diferencial resulta $y' + p(x)\,y = 0$ y puede resolverse mediante el método de variables separables, como se muestra a continuación.

$$y' + p(x)\,y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -y\;p(x) \Rightarrow \frac{dy}{y} = -p(x)\,dx \Rightarrow \ln|y| + \ln k = \int -p(x)\,dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k\,|y| = e^{-\int p(x)\,dx} \Rightarrow c\;y = e^{-\int p(x)\,dx} \Rightarrow y = b\;e^{-\int p(x)\,dx}$$

- $q(x) \neq 0$ denominada **completa**

En este caso, la ecuación se resuelve mediante la sustitución $y = u(x)\,v(x)$

Siendo $y = u\,v \Rightarrow y' = u'\,v + u\,v'$. Reemplazamos en la ecuación (1):

$$u'\,v + u\,v' + u\,v\;p(x) = q(x)$$

Sacamos factor común v entre el 1º y 3º término

Sacamos factor común u entre el 2º y 3º término

Para continuar la resolución debemos sacar factor común entre dos de los términos, según se expresa más arriba.
Resolvemos el caso en el cual sacamos factor común *u* entre el 2º y 3º término, ya que la solución sacando factor común *v* entre el 1º y 3º término es similar.

$$u' \, v + u \, (v' + v \; p(x)) = q(x) \qquad (2)$$

En la expresión (2), igualamos a 0 el paréntesis del primer miembro, a fin de facilitar los cálculos. Resulta:

$v' + v \; p(x) = 0$ Esta ecuación diferencial de variable *v* resulta ser un caso analizado anteriormente, correspondiente a las ecuaciones incompletas. Por lo tanto, la solución general será $v = b \, e^{-\int p(x)\,dx}$. Para anular la expresión alcanza con tomar una solución particular, por lo cual elegimos aquella en la cual la constante *b* toma el valor más sencillo.

$$v = e^{-\int p(x)\,dx} \qquad (3)$$

Reemplazando la solución propuesta en (2), resulta:

$$u' \, e^{-\int p(x)\,dx} = q(x) \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = q(x) \, e^{\int p(x)\,dx} \quad \Rightarrow \quad du = q(x) \, e^{\int p(x)\,dx} \, dx \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \int du = \int q(x) \, e^{\int p(x)\,dx} \, dx$$

Integrando resulta $\quad u = \int q(x) \, e^{\int p(x)\,dx} \, dx + c \qquad (4)$

Para hallar entonces la solución general de la ecuación diferencial (1), reemplazamos las funciones obtenidas u y v en la sustitución planteada, según (3) y (4).

$$y = u \, v = \left[\int q(x) \, e^{\int p(x)\,dx} + c \right] e^{-\int p(x)\,dx}$$

Resolvemos algunos ejercicios del TP1

13)a) Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de 1er. orden:

$$x\,y' - y - x^3 = 0$$

Verificamos que sea una ED lineal de 1er. orden

$x\,y' - y = x^3 \Rightarrow y' - \frac{1}{x}\,y = x^2$

Sustitución: $y = u \cdot v$ $\quad y' = u'v + uv'$

Reemplazamos: $\underbrace{u'v + uv'}_{y'} - \frac{1}{x}\underbrace{uv}_{y} = x^2$

$\underbrace{u'v + uv' - \frac{1}{x}\,uv}_{\text{Sacamos factor común}} = x^2$

$u'v + u\underbrace{\left(v' - \frac{1}{x}v\right)}_{=0} = x^2$ $\quad (*)$

$v' - \frac{1}{x}v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{v}{x} \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{dx}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \int \frac{dv}{v} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln v = \ln x \Rightarrow v = x$

Reemplazamos $v = x$ en $(*)$

$u'x = x^2 \Rightarrow \frac{du}{dx} = x \Rightarrow du = x\,dx \Rightarrow$

$\Rightarrow \int du = \int x\,dx \Rightarrow u = \frac{x^2}{2} + C$

Como la función $y = u \cdot v$, resulta

$y = \left(\frac{x^2}{2} + C\right)x \Rightarrow \boxed{y = \frac{x^3}{2} + Cx}$ SG

13)d) Resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales lineales de 1er. orden:

$$\frac{dy}{dx} - 2\frac{y}{x} = x^2 \operatorname{sen}(3x)$$

$y' - \frac{2}{x} y = x^2 \operatorname{sen}(3x)$ Sustitución $y = u v$

$y' = u'v + uv'$

$\overbrace{u'v + uv'}^{y'} - \frac{2}{x} \overbrace{uv}^{y} = x^2 \operatorname{sen}(3x)$

factor común

$u'v + u\underbrace{\left(v' - \frac{2}{x} v\right)}_{=0} = x^2 \operatorname{sen}(3x)$ (*)

$v' - \frac{2}{x} v = 0 \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{2}{x} v \Rightarrow \frac{dv}{v} = \frac{2}{x} dx$

$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{2}{x} dx \Rightarrow \ln v = 2 \ln x \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln v = \ln x^2 \Rightarrow v = x^2$ Remplazamos en (*)

$u' \cancel{x^2} = \cancel{x^2} \operatorname{sen}(3x) \Rightarrow \frac{du}{dx} = \operatorname{sen}(3x) \Rightarrow$

$\Rightarrow du = \operatorname{sen}(3x)\, dx \Rightarrow \int du = \int \operatorname{sen}(3x)\, dx \Rightarrow$

$\Rightarrow u = -\frac{\cos(3x)}{3} + c$

Como $y = u.v$ resulta:

$y = \left(-\frac{\cos(3x)}{3} + c\right) . x^2$

$\boxed{y = \frac{-x^2 \cos(3x)}{3} + c x^2}$ S.G.

TRAYECTORIAS ORTOGONALES

En muchas aplicaciones geométricas y físicas se presenta el problema de hallar un haz de curvas que resulte ortogonal a otro haz de curvas dado. Por ejemplo, en el campo electrostático las líneas de fuerza y las equipotenciales son trayectorias ortogonales. Lo mismo sucede en teoría del calor con las líneas isotermas y las de flujo calórico.

El problema de encontrar trayectorias ortogonales a una familia de curvas se resuelve como aplicación directa de ecuaciones diferenciales de primer orden.

Comenzamos definiendo formalmente los conceptos involucrados:

- Dos curvas son ortogonales en un punto que pertenece a ambas si y sólo si las tangentes a cada una de las curvas en el punto son perpendiculares.
- Si una curva es ortogonal a cada una de las curvas de una familia, se dice que es una trayectoria ortognal de la familia.
- Finalmente, si dos familias de curvas de un mismo plano son tales que cada una de ellas es ortogonal a la otra familia, los dos haces son trayactorias mutuamente ortogonales.

Para resolver problemas de trayectorias ortogonales apoyándonos en las EDO, procedemos de la siguiente manera:

- Dado un haz de curvas planas, hallamos su ecuación diferencial asociada.
- Como buscamos trayectorias ortogonales, utilizamos la propiedad de rectas perpendiculares de pendientes no nulas que establece que sus respectivas pendientes son números de valores absolutos recíprocos y de signos opuestos. Tengamos en cuenta que la pendiente de la recta tangente a una curva en un punto está asociada a la derivada de la función que describe la curva en dicho punto.

Por lo tanto, en la ecuación diferencial asociada al haz de curvas original, la derivada y' se sustituye por $-\frac{1}{y'}$ (debido a la relación entre las pendientes de las rectas perpendiculares enunciada más arriba). Esta nueva ecuación diferencial se resuelve para obtener la solución general, que será el haz de trayectorias ortogonales buscado.

Resolvemos algunos ejercicios del TP1

20) d) Halle la familia de curvas ortogonal a la dada: $y = \ln(x + C)$

20) d) $y = \ln(x+c)$ ①

1°) hallamos la ED del haz original

$$\left.\begin{array}{l} y' = \dfrac{1}{x+c} \\ \text{De ①: } x+c = e^{y} \end{array}\right\} \Rightarrow y' = \frac{1}{e^{y}} \Rightarrow y' = e^{-y}$$

2°) sustituimos y' por $-\frac{1}{y'}$ en la ED hallada para obtener la ED del haz ortogonal

$$-\frac{1}{y'} = e^{-y}$$

3°) Resolvemos la nueva ED

$$-\frac{dx}{dy} = e^{-y} \Rightarrow -dx = e^{-y}\,dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int -dx = \int e^{-y}\,dy \Rightarrow -x+c = \frac{e^{-y}}{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow e^{-y} = x-c = x+k$$

$$\Rightarrow -y = \ln(x+k) \Rightarrow \boxed{y = -\ln(x+k)}$$

La SG obtenida es la ecuación de haz de curvas ortogonal al dado

20) e) Halle la familia de curvas ortogonal a la dada: $y = C\,\mathrm{sen}(2x)$

20) e) $y = C\,\mathrm{sen}(2x)$ ①

1°) Hallamos la ED asociada al haz de curvas original

$$y' = 2C\cos(2x)$$

De ①: $C = \dfrac{y}{\mathrm{sen}(2x)}$ $\Rightarrow y' = 2\dfrac{y}{\mathrm{sen}(2x)}\cos(2x)$

$\Rightarrow y' = \dfrac{2y}{\mathrm{tg}(2x)}$ ED asociada al haz original

2°) En la ED anterior reemplazamos y' por $-\dfrac{1}{y'}$ para obtener la ED del haz ortogonal: $-\dfrac{1}{y'} = \dfrac{2y}{\mathrm{tg}(2x)}$

3°) Resolvemos la nueva ED

$$-\frac{1}{y'} = \frac{2y}{\mathrm{tg}(2x)} \Rightarrow -\frac{1}{\frac{dy}{dx}} = \frac{2y}{\mathrm{tg}(2x)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{dx}{dy} = \frac{2y}{\mathrm{tg}(2x)} \Rightarrow -\mathrm{tg}(2x)\,dx = 2y\,dy$$

$$\int -\mathrm{tg}(2x)\,dx = \int 2y\,dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{1}{2}\ln|\cos(2x)| = y^2 + C}$$

La SG hallada es el haz de curvas ortogonal que se busca