UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

FACULTAD REGIONAL BUENOS AIRES

DEPARTAMENTO MATERIAS BÁSICAS

U.D.B. MATEMÁTICA

ANÁLISIS MATEMÁTICO II

Código 95-0703

TEMAS DE FINAL DE 2008 A 2010

Marzo de 2011

Temas de Final de Análisis Matemático II (95-0703)

Condición mínima para aprobar: **3 (tres) ítems bien**, **dos** de "1a), 1b), 2a) o 2b)" y **uno** de "3) o 4)".

La numeración de los temas de final comenzó el 05/12/95, primera fecha en que se tomó final con nomenclatura correspondiente al enfoque vectorial de la asignatura. En esta recopilación se incluyen los temas correspondientes a los finales de los ciclos lectivos 2008, 2009 y 2010; esto abarca 31 (treinta y una) fechas de examen, desde el 28/05/08 hasta el 10/03/2011.
En el encabezado de cada página figura la condición mínima para aprobar, válida para todas las fechas de examen.

TEMA 127 – 28/05/08

1) a) **Enuncie** el teorema de la divergencia. **Calcule** el flujo de $\bar{f}(x,y,z) = (y\,g(z-x), 3y + z\,g(z-x), y\,g(z-x))$ a través de la frontera del cuerpo definido por $x^2 + y^2 \le z \le 9$; suponga g' continua.

b) **Halle** $\varphi(x)$ para que resulte nulo el flujo de $\bar{f}(x,y,z) = (x\,\varphi(x), 1-4y, (1-2z)\,\varphi(x))$ a través de toda superficie cerrada que cumpla las condiciones del teorema de la divergencia; suponga $\bar{f}(1,0,0) = (3,1,3)$.

2) a) Condición necesaria para que un campo $\bar{f}$ admita función potencial: **enunciado y demostración**.

b) Aplicando el teor. del rotor, **calcule** la circulación de $\bar{f}(x,y,z) = (x^2, x\,y, x\,z)$ a lo largo de la curva cerrada intersección de las superficies: $x^2 + y^2 = 4y$, $x^2 + y^2 = 2yz$. **Indique** gráficamente el sentido de circulación que ha elegido.

3) Calcule el volumen del cuerpo cuyos puntos son el dominio natural de $\bar{f}(x,y,z) = (\ln(4 - x^2 - z^2), \sqrt{y - x^2}, \sqrt{4-y})$.

4) Sea π_0 el plano normal en $\bar{A} = (0,0,2)$ a la curva C de ecuación $\bar{X} = (u^2 - 1, u^2 + u, 2 + u\,\mathrm{sen}(u+1))$ con $u \in \mathbb{R}$. **Calcule** el área de la región de dicho plano incluida en el 1° octante.

TEMA 128 – 22/07/08

1) a) **Demuestre** que si el campo f es diferenciable en $\bar{A}$, es derivable en toda dirección en $\bar{A}$.

b) Dado $f(x,y) = a^2\,x\,y^2 - x^2 y - 3a\,y$, **halle** *a* para que $f'((1,1),\breve{r})$ sea máxima si $\breve{r} = \bar{r}/\|\bar{r}\|$ con $\bar{r} = (2,1)$.

2) a) **Enuncie** el teorema del rotor. **Aplíquelo** para calcular $\oint_C \bar{f} \cdot d\bar{s}$ sabiendo que $rot\,\bar{f}(x,y,z) = (-3x, 2y, z)$ y la curva C tiene ecuación $\bar{X} = (4\,\mathrm{sen}(t), 3, 4\cos(t))$ con $0 \le t \le 2\pi$ (recuerde que la parametrización orienta a C).

b) Sea $\bar{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \,/\, \bar{f}(x,y,z) = (x\,y, y^2, z^2)$, <u>**verifique que**</u>: 1°) $\bar{f}$ no tiene función potencial, 2°) $\oint_C \bar{f} \cdot d\bar{s} = 0$ para toda curva C definida por la intersección de $x^2 + y^2 = r^2$ con $z = k$, $k, r \in \mathbb{R}$, $r > 0$.

3) Siendo $h(x,y,z) = x^3 - 2yz$, **calcule** el flujo de ∇h a través de la superficie frontera del cuerpo definido por $2x + y \le 4$, $x + z \le 2$, 1° octante. **Indique** gráficamente cómo ha orientado a la superficie.

4) **Calcule** el área de la región plana definida por $g(x) \le y \le 5$, cuando $y = g(x)$ es la solución particular de la ecuación diferencial $y'' + y' = 2x$ que en $(0, y_0)$ tiene recta tangente de ecuación $y + 2x = 2$.

Temas de Final de Análisis Matemático II (95-0703)

Condición mínima para aprobar: **3 (tres) ítems bien**, **dos** de "1a), 1b), 2a) o 2b)" y **uno** de "3) o 4)".

TEMA 129 – 29/07/08

1) a) Defina solución general (SG) y solución particular (SP) de una ecuación diferencial ordinaria de orden n. Dado el campo $\bar{f}(x,y) = (y/x\ ,\ \cos(x))$, **halle** la ecuación de la línea de campo que pasa por $(2\pi, 2)$.

b) Sea $\bar{f} = \nabla\phi\ /\ \bar{f}(x,y) = (y\,g(x) - x\,y\ ,\ y + g(x))$ con $\bar{f}(0,1) = (1,2)$, **calcule** $\int_{\overline{AB}} \bar{f} \cdot d\bar{s}$ si $\overline{A} = (0,0)$ y $\overline{B} = (2,2)$.

2) a) Enuncie el teorema de existencia y unicidad de la función definida implícitamente por una ecuación. **Calcule** aproximadamente $f(1.02, 1.98)$ cuando $z = f(x,y)$ queda definida implícitamente por $z\,x + \ln(z + y + x) + y^2 - 2 = 0$.

b) $\overline{X} = (x\ ,\ x^2\ ,\ z(x))$ con $x \in E(2)$ es la ecuación de una curva C incluida en la superficie de ec. $F(x,y,z) = 0$. **Analice** si la recta tangente a C en $\overline{A}$ interseca al eje z, sabiendo que $\overline{A} = (2,4,3) \in C$ y que $\nabla F(\overline{A}) = (2,1,5)$.

3) Calcule el flujo de $\bar{f}(x,y,z) = (2\,x\,z\ ,\ x\ ,\ y^2)$ a través de la superficie frontera del cuerpo limitado por: $x = 0$, $y = 0$, $y = 6$, $z = 16$, $z = x^4$, en el 1° octante; **indique** gráficamente cómo ha orientado a la superficie.

4) Dada la curva C como intersección de las superficies $\Sigma_1: x + y + z = 5$ y $\Sigma_2: x^2 + y^2 = 2\,y$, **calcule** la circulación de $\bar{f}$ a lo largo de C sabiendo que $rot\,\bar{f}(x,y,z) = (z^2\ ,\ z + 2\,x - 5\ ,\ y - z^2)$. **Indique** gráficamente cómo orientó la curva.

TEMA 130 – 25/09/08

1) a) Defina diferenciabilidad de una función en un punto. Sabiendo que $f'(\overline{A},(u,v)) = u^2 - v$, **analice** si f es diferenciable en $\overline{A}$.

b) Dada $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $f(x,y,z) = 3x^2 - 5\,y + 2\,z$, **calcule** la derivada direccional $f'(\overline{A},\breve{n})$ cuando $\breve{n}$ está orientado hacia el origen de coordenadas y es normal a la superficie de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 6$ en $\overline{A} = (2,1,1)$.

2) a) Enuncie el teorema de Green. Siendo C de ecuación $x^2 + y^2 = r^2$ con $r > 0$, resulta $\oint_{C^+} \bar{f} \cdot d\bar{s} = \pi\,r^3$; **calcule** r sabiendo que $\bar{f}(x,y) = (4 - 2\,y\ ,\ y + 4\,x)$.

b) Sea $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f \in C^2$. **Calcule** aproximadamente $f(1.98, 2.01)$ con Taylor de 2° orden, sabiendo que $f(2,2) = 5$ es un extremo local y que la matriz jacobiana de ∇f en $(2,2)$ es $D\nabla f(2,2) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

3) Calcule el flujo de $\bar{f}(x,y,z) = (x\,z\ ,\ y\,z\ ,\ z^2)$ a través de $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ con normal orientada alejándose de $(0,0,0)$.

4) Calcule la masa del cuerpo definido por $x^2 + z^2 \le 4\ ,\ y \ge x^2\ ,\ y \le 2\,x\ ,\ z \ge 0$ si su densidad en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al plano xy.

UTN-FRBA-Dpto. Materias Básicas, UDB Matemática

Temas de Final de Análisis Matemático II (95-0703)

Condición mínima para aprobar: **3 (tres) ítems bien**, **dos** de "1a), 1b), 2a) o 2b)" y **uno** de "3) o 4)".

TEMA 131 – 04/12/08

1) a) Independencia del camino en integral de línea de campo vectorial: **enunciado** y **demostración**.

b) Sea $\bar{f} = \nabla\phi$ continuo en $\mathbb{R}^2$, **calcule** $\int_C \bar{f} \cdot d\bar{s}$ siendo $C : \bar{X} = (u-2\,,\, u^2 - 2u + 3)$ con $0 \le u \le 2$, sabiendo que su función potencial ϕ es tal que $\phi'_x = \phi$.

2) a) Cambio de variables en integrales dobles: **enunciado del teorema**. Siendo $I = \int_{-\pi/4}^{\pi/2} d\varphi \int_0^3 \rho^2 \cos(\varphi)\, d\rho$ el planteo de una integral doble en coordenadas polares, **indique** el planteo correspondiente en coordenadas cartesianas.

b) Sea π_0 el plano tangente a la superficie de ecuación $z = x\,y + \ln(x+y)$ en el punto $(1,0,0)$. **Calcule** el área de la porción de π_0 cuya proyección sobre el plano xz es $D = \{(x,z) \in \mathbb{R}^2 \;/\; |z - x| < 1 \;\wedge\; |x| \le 2\}$.

3) Calcule el volumen del cuerpo definido por: $25x \ge 3y^2$, $9y \ge 5x^2$, $x + 3 \le z \le x + 5$.

4) Dado $\bar{f}(x,y,z) = (x\,,\, y\,,\, z)/(x^2 + y^2)$, **calcule** el flujo de $\bar{f}$ a través de la superficie abierta Σ de ecuación $x^2 + y^2 = 4$ con $z \le 2x$ en el 1° octante. **Indique** gráficamente la orientación que ha elegido para Σ.

TEMA 132 – 11/12/08

1) a) Sea $\bar{f} = (f_1\,, \cdots,\, f_m)$ una función vectorial de una variable t : **demuestre** que $\bar{f}$ es derivable en t_0 si, y sólo si, sus componentes son derivables en t_0.

b) Dada la curva C de ecuación $\bar{X} = (\,t-1\,,\, t^2 + t\,,\, e^{2t-2}\,)$ con $t \in \mathbb{R}$, **calcule** <u>la longitud del segmento de recta tangente</u> a C en $(0,2,1)$ cuyos puntos están entre los planos de ecuaciones $y = 2$ e $y = 5$.

2) a) Trayectorias ortogonales: **definición**. Dada la familia de curvas planas de ecuación $y = C\,\mathrm{sen}(x)$, **halle** la ecuación de la curva de la familia ortogonal que pasa por el punto $(0,3)$.

b) Calcule el área de la región plana cuya frontera es la curva integral (sol. particular) de $y'\,y + 2x = 0$ que pasa por $(0,1)$.

3) Dado $\bar{f} \in C^1$ tal que $\bar{f}(x,y,z) = (yz\,,\, g(y)\,,\, xz)$, **calcule** la circulación de $\bar{f}$ a lo largo de la circunferencia de radio $r = 3$ con centro en $(0,0,5)$ en el plano $z = 5$. **Indique** gráficamente cómo ha decidido orientar la curva.

4) Calcule el flujo de $\bar{f}$ a través de la superficie abierta de ecuación $y = x^2 + 1$ con $x + z \le 2$ en el 1° octante, orientada con normal $\bar{n}$ que en cada punto tiene componente en x positiva; siendo $\bar{f}(x,y,z) = (x\,,\, 2y - z\,,\, y + z)$.

UTN-FRBA-Dpto. Materias Básicas, UDB Matemática

Temas de Final de Análisis Matemático II (95-0703)

Condición mínima para aprobar: **3 (tres) ítems bien**, **dos** de "1a), 1b), 2a) o 2b)" y **uno** de "3) o 4)".

TEMA 133 – 18/12/08

1) a) **Enuncie** el teorema de la divergencia. Sea $\bar{f} = rot(\bar{g}) + (x, 2y, z)$ con $\bar{g} = (P, Q, R) \in C^2$, **verifique** que el flujo de $\bar{f}$ a través de $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ es proporcional al volumen del cuerpo definido por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 36$.

b) Dado $\bar{f}(x,y,z) = (g(y,z),\ y + h(x,z), z^2)$ con $g, h \in C^1$, **calcule** el flujo de $\bar{f}$ a través de la superficie abierta Σ de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 29$ con $z \geq 2$. **Indique** gráficamente cómo ha decidido orientar a Σ.

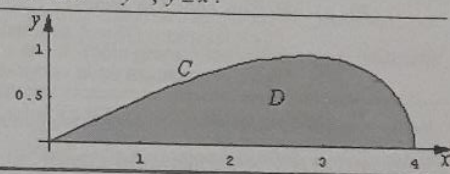
2) a) Dado el campo f diferenciable en $\bar{A} \in \mathbb{R}^n$, **demuestre** que queda definida $f'(\bar{A}, \bar{r})$ para todo $\bar{r} \in \mathbb{R}^n$.

b) **Calcule** aproximadamente $f(1.02\ , 1.99)$ sabiendo que $f'((1,2),(2,4)) = 14$ y que el plano tangente a la superficie de ecuación $z = f(x,y)$ en $(1,2,10)$ tiene ecuación $z = a + 3x + by$ con a, b constantes.

3) **Calcule** el volumen del cuerpo definido por: $z \geq x^2 + 2y^2$, $z \leq 48 - 2x^2 - y^2$, $y \geq x$.

4) **Calcule** el área de la región sombreada D de la figura, sabiendo que la ecuación de C es $\bar{X} = (4\,\text{sen}(u),\ \text{sen}(2u))$ con $0 \leq u \leq \pi/2$.

Sugerencia: utilice una conveniente integral de línea a lo largo de la frontera de D.



TEMA 134 – 19/02/09

1) a) **Defina** conjunto de nivel. **Halle** una ecuación cartesiana para el conjunto de nivel **3** de la función potencial ϕ del campo $\bar{f}(x,y) = (y + 2x, x)$, sabiendo que $\phi(1,1) = 4$.

b) **Calcule** el área de la región plana limitada por las líneas de nivel **1** del campo $f(x,y) = (y - x^2)(x - y^2) + 1$.

2) a) **Enuncie** el teorema de derivación de la composición de funciones en forma matricial. **Calcule** el valor de la máxima derivada direccional de $h = f \circ \bar{g}$ en $(1,2)$ sabiendo que: $Df(3,4) = (1\ 6)$, $D\bar{g}(1,2) = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$, $\bar{g}(1,2) = (3,4)$.

b) Sea $g(x,y) = xy + f(x^2 + y)$ con $f \in C^1$, **calcule** aproximadamente $g(1.02\ , 0.99)$ sabiendo que el plano tangente a la superficie de ecuación $z = f(x^2 + y)$ en el punto $(1, 1, z_0)$ de la misma tiene ecuación $z = 2x + y$.

3) **Calcule** el flujo de $\bar{f}$ a través de la superficie frontera del cuerpo definido por $x^2 + y^2 + z^2 \leq 20$, $x^2 + z^2 \leq 4$ cuando $\bar{f}(x,y,z) = (x + y,\ y - x,\ x + z)$. **Indique** si el flujo resultante es entrante, saliente o nulo.

4) Dado $\bar{f}(x,y,z) = (e^x + y - z\ ,\ e^y + x - z\ ,\ e^z + y - x)$, **calcule** la circulación de $\bar{f}$ a lo largo de la curva intersección de la superficie de ecuación $z = 4 - x^2 - y^2$ con los planos coordenados en el 1° octante. **Indique** gráficamente con qué orientación ha decidido realizar la circulación pedida.

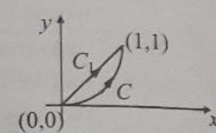
Temas de Final de Análisis Matemático II (95-0703)

Condición mínima para aprobar: **3 (tres) ítems bien**, **dos** de "1a), 1b), 2a) o 2b)" y **uno** de "3) o 4)".

TEMA 135 – 26/02/09

1) a) **Enuncie** el teorema de Green. Aplíquelo para calcular $\oint_{C^+} \bar{f} \cdot d\bar{s}$ siendo $C: x^2 - 2x + y^2 = 0$, $\bar{f}(x,y) = (x\,y, x^2)$.

b) Con orientaciones y puntos inicial y final según el gráfico, **calcule** $\int_C \bar{f} \cdot d\bar{s}$ sabiendo que $D\bar{f}(x,y) = \begin{pmatrix} g(x,y) & x \\ 2x & h(x,y) \end{pmatrix}$, $\int_{C_1} \bar{f} \cdot d\bar{s} = 5$, $C_1: y = x$, $C: y = x^2$, $g, h \in C^1$.



2) a) **Defina** solución general y solución particular de una ecuación diferencial ordinaria de orden n. **Halle** $f(x)$ tal que $f(1) = 2$ sabiendo que $y = x\,f(x)$ es solución de $x\,y' - y = 1$.

b) **Halle** la ecuación de la curva de la familia ortogonal a $y\,x^2 = C$ que pasa por el punto (2,2).

3) **Calcule** el flujo de $\bar{f}(x,y,z) = (x^2 + \varphi(y,z)\ ,\ 2\,x\,y + \varphi(x,z)\ ,\ x\,z\ )$ a través de la superficie frontera del cuerpo definido por: $z \geq x^2 + 2\,y^2$, $z \leq 8 - x^2$ en el 1° octante. Suponga: $\varphi \in C^1$, versor normal saliente del cuerpo.

4) **Calcule** el área de la superficie Σ de ecuación $z = x^3$ con $y \geq 0$, $y \leq x^3$, $z \leq 1$, $z \geq 0$.

TEMA 136 – 05/03/09

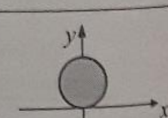
1) a) **Defina** extremos (máximo y mínimo) locales de un campo escalar. **Analice** y de existir clasifique, extremos locales de $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ / $f(x,y) = 5 + x^6 + y^4$.

b) Dada $f(x,y)$ definida implícitamente por $x + z\ln(y\,z - 5) + e^{x\,z} + x\,y - 1 = 0$, **calcule** aproximadamente $f(0.3\ ,\ 1.9)$.

2) a) **Defina** función potencial de un campo vectorial $\bar{f}$. Siendo $\phi(x,y) = 2\,x + y^2$ la función potencial de $\bar{f}$, **calcule** $\int_{\overline{AB}} \bar{f} \cdot d\bar{s}$ desde $\bar{A} = (2,0)$ hasta $\bar{B} = (3,2)$.

b) Dado $\bar{f}(x,y) = \left(\frac{-y}{(x-1)^2+y^2}\ ,\ \frac{x-1}{(x-1)^2+y^2}\right)$ con $D\bar{f}$ continua y simétrica en $D = \mathbb{R}^2 - \{(1,0)\}$, **analice** si $\bar{f}$ admite función potencial en D.

3) El círculo de la figura tiene centro en (0,2) y radio 2 ; calcule la circulación de $\bar{f}$ a lo largo de su frontera recorrida en sentido positivo, si $\bar{f}(x,y) = (\,y\,\varphi(x\,y) - x\,y\ ,\ \dot{x}\,\varphi(x\,y)\,)$. Suponga $\varphi \in C^1$.



4) **Calcule** el volumen del cuerpo definido por $z \leq 4 - \sqrt{x^2 + y^2}$, $2z \geq x^2 + y^2$, 1° octante.

Temas de Final de Análisis Matemático II (95-0703)

Condición mínima para aprobar: 3 (tres) ítems bien, dos de "1a), 1b), 2a) o 2b)" y uno de "3) o 4)".

TEMA N° 137 – 27/05/09

1) a) Enuncie el teorema de cambio de variables en integrales dobles. Siendo $\iint_{D_{xy}} x+y\ dxdy = 9$, ante un cambio de variables definido por $(x, y) = (u+v, v-u)$, ¿cuál será el valor de $\iint_{D_{uv}} 8v\ dudv$?.

b) Dado $\bar{f}(x,y) = (x^2\,y + g(x),\, x^3)$, **calcule** $\oint_{C^+} \bar{f} \cdot d\bar{s}$ cuando C es la curva frontera de la región plana D definida por $9x^2 + y^2 \leq 9$; suponga que $\bar{f}$ tiene derivadas parciales continuas.

2) a) Defina solución general y solución particular de una ecuación diferencial ordinaria de orden n. Siendo $y = y_{p1}(x)$ e $y = y_{p2}(x)$ dos soluciones particulares de $a\,y'' + b\,y' + c\,y = f(x)$, demuestre que $y = y_{p1}(x) - y_{p2}(x)$ es una solución de la correspondiente ecuación diferencial homogénea.

b) Dado $\bar{f}(x,y) = (x\,y,\, y-2)$, halle una ecuación cartesiana para la línea de campo de $\bar{f}$ que pasa por $\overline{A} = (1,3)$; **indique** gráficamente la orientación de dicha línea en $\overline{A}$ (sólo gráfico indicativo, no se pide que grafique la línea).

3) Sea r_0 la recta normal a la superficie de ecuación $z = x^2 + y^2$ en el punto $\overline{A} = (1,1,z_0)$, sea $\overline{B}$ el punto donde r_0 interseca al plano *xy*. Dado $\bar{f}(x,y,z) = (x+y,\, y+z,\, x+z)$, **calcule** la circulación de $\bar{f}$ a lo largo de r_0 desde $\overline{A}$ hasta $\overline{B}$.

4) Calcule el flujo de $\bar{f} = \bar{g} + \bar{h} \in C^1$ a través de la frontera Σ del cuerpo definido por $2 \leq z \leq 18 - x^2 - y^2$, suponiendo: $\bar{g}$ solenoidal y $\bar{h}(x,y,z) = (y-z,\, x-z,\, 2z-x)$. **Indique** gráficamente la orientación que adopta para Σ.

TEMA N° 138 – 18/08/09

1) a) Enuncie el teorema de la divergencia (Gauss). Sea $f \in C^2(\mathrm{IR}^3)$ un campo escalar tal que $f = g + h$ con h armónico y $g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$, **calcule** el flujo de ∇f a través de la frontera del cuerpo definido por: $x^2 + y^2 \leq 4$, $|z| \leq 3$.

b) Dado $\bar{f}(x,y,z) = (x + \mathrm{sen}(yz),\, \cos(xz) - y,\, z^3)$, **calcule** el flujo de $\bar{f}$ a través de la superficie S abierta de ecuación $z = x^2 + y^2$ con $z \leq 9$. **Indique** gráficamente cómo ha decidido orientar a S.

2) a) Sea $\bar{f} : \mathrm{IR}^2 \to \mathrm{IR}^2$ un campo que admite función potencial ϕ, **demuestre** que las líneas de campo de $\bar{f}$ son ortogonales a las líneas equipotenciales.

b) Halle $g(x)$ tal que $\bar{f}(x,y) = (x + y\,g(x),\, x^2 + 2\,g(x))$ admita función potencial; suponga $\bar{f}(0,1) = (3,6)$.

3) Calcule el área del trozo de superficie cilíndrica de ecuación $x^2 + z^2 = 5$ con $z \geq x^2$, $y \leq x$ en el 1° octante.

4) Siendo $z = f(x,y)$ definida implícitamente por $zx + yz^2 + \ln(z - 2y) - 15 = 0$, **calcule** aproximadamente $f(1.97,\, 1.09)$.

UTN-FRBA-Dpto. Materias Básicas, UDB Matemática

Temas de Final de Análisis Matemático II (95-0703)

Condición mínima para aprobar: **3 (tres) ítems bien**, **dos** de "1a), 1b), 2a) o 2b)" y **uno** de "3) o 4)".

TEMA Nº 139 – 07/10/09

1) a) **Defina** superficie y punto regular de una superficie. **Analice** si $\overline{A} = (2,1,1)$ es punto regular de la superficie de ecuación $\overline{X} = (u\,,\, u-v\,,\, v^2)$ con $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

b) Sea r_0 la recta normal en $\overline{A} = (1,2,3)$ a la superficie Σ de ecuación $z = y + x^2$ con $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, **calcule** la longitud del segmento $\overline{AB} \subset r_0$, siendo $\overline{B}$ el punto en el que r_0 interseca al plano xy.

2) a) **Defina** divergencia y rotor de un campo $\bar{f} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$. **Indique** hipótesis para que resulte $\oiint_\Sigma rot(\bar{f}) \cdot \check{n}\, d\sigma = 0$ para toda superficie cerrada Σ (que cumpla las condiciones del teor. de la divergencia); justifique lo que afirma.

b) **Calcule** la integral de línea de $\bar{f}$ a lo largo de la curva intersección de $z = \sqrt{4-x^2}$ con $x^2 + y^2 = 4$, sabiendo que $rot(\bar{f}(x,y,z)) = (x\,z\,,\, -3\,y\,z\,,\, x^2)$. Indique gráficamente la orientación que adoptó para la curva.

3) **Calcule** la masa del cuerpo H definido por $z \geq \sqrt{x^2 + 2\,y^2}$, $x^2 + z^2 \leq 32$ en el 1° octante, si su densidad en cada punto es $\delta(x,y,z) = k\,z$ con k constante.

4) Sea F la familia de curvas ortogonal a $y = C\,x^2$, **calcule** el área de la región plana limitada por la curva de F que pasa por el punto $(\sqrt{2}\,,1)$.

TEMA Nº 140 – 29/10/09

1) a) **Enuncie** el teorema de derivación para la composición de funciones (regla de la cadena). **Calcule** la máxima derivada direccional de $h = f \circ \overline{g}$ en $\overline{A} = (2,1)$, siendo $Df(u,v) = (2\,u\,v \quad u^2+1)$ y $\overline{g}(x,y) = (x+y\,,\, x-y)$.

b) Dada $w = f(u,v)$ con $(u,v) = (x^2\,y\,,\, x-y)$, resulta $w = h(x,y)$. **Calcule** aproximadamente $h(1.98\,,\,1.01)$ sabiendo que f queda definida en forma implícita por $\ln(w-u) + v + w - 6 = 0$.

2) a) **Defina** "punto simple" y "punto regular" de una curva. **Analice** si el punto $\overline{A} = (1,1)$ es punto simple y también si es punto regular de la curva de ecuación $\overline{X} = (\sqrt{2}\cos(t)\,,\, \sqrt{2}\,\mathrm{sen}(t))$ con $0 \leq t \leq 3\pi$.

b) Dada la curva C definida por la intersección de las superficies de ecuaciones: $z = y + x^2$ e $y = z - x$, **analice** si la recta tangente a C en $\overline{A} = (1,1,2)$ tiene algún punto en común con el eje z.

3) **Calcule** mediante una integral doble el área de la región plana definida por: $0 \leq y \leq f(x)$, $0 \leq x \leq 2\pi$, siendo $y = f(x)$ la solución particular de $y'' + y = 1$ que en el punto (0,2) tiene recta tangente de ecuación $y = 2$.

4) Dado $\bar{f}(x,y,z) = (1 - 2\,x\,y\,,\, y^2\,,\, 4\,z)$, **calcule** el flujo de $\bar{f}$ a través de la superficie frontera del cuerpo definido por $x^2 + y^2 \leq 4$, $x + z \leq 2$, 1° octante. **Indique** si, respecto del cuerpo, el flujo es entrante o saliente.

Condición mínima para aprobar: **3 (tres) ítems bien**, **dos** de "1a), 1b), 2a) o 2b)" y **uno** de "3) o 4)".

TEMA N° 141 – 14/12/09

1) a) **Defina** solución general (SG) y solución particular (SP) de una ecuación diferencial ordinaria de orden n. Sabiendo que $y = 2x$ es una SP de $y'' - y = f(x)$, **halle** la SP tal que $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$.

b) Dado $\bar{f}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $\bar{f}(x, y, z) = (1, h(x) + z - 2x, y)$ con $\bar{f}(1,1,1) = (1,2,1)$, **halle** $h(x)$ tal que la integral de línea de $\bar{f}$ a lo largo de una curva C desde $\overline{A}$ hasta $\overline{B}$ no dependa de la curva C que se utilice.

2) a) Sea el campo f diferenciable en el punto $\overline{A} \in \mathbb{R}^n$, **demuestre** que existe $f'(\overline{A}, \check{r})$ para todo $\check{r} \in \mathbb{R}^n$.

b) La superficie Σ tiene ecuación $z = h(x, y)$ donde $h(x, y) = f(xy, 2x^2)$ con $f \in C^1$, **halle** la ecuación del plano tangente a Σ en $(1, 1, z_0)$ sabiendo que $\nabla f(1,2) = (2,3)$ y que $f(1,2) = 4$.

3) Calcule el área del trozo de plano de ecuación $z = 1 + 2x$ con $2 + 2x - x^2 - y^2 \leq z \leq 5 + 2x - x^2 - y^2$.

4) Dado $\bar{f} \in C^1$ **calcule** el flujo de $\bar{f}$ a través de la superficie abierta Σ de ecuación $z = \sqrt{2 - x^2 - y^2}$ con $z \geq 1$, sabiendo que $div\,\bar{f}(x, y, z) = 3z$ y que $\bar{f}(x, y, 1) = (2x, 3 - y, 2)$. **Indique** gráficamente cómo ha decidido orientar a Σ.

TEMA N° 142 – 21/12/09

1) a) Enuncie el teorema del rotor (Stokes). **Aplíquelo** para demostrar que el flujo de $rot(\bar{f})$ a través de la superficie de ecuación $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$ con $z \geq 1$ es igual al flujo de $rot(\bar{f})$ a través del trozo de paraboloide de ecuación $z = x^2 + y^2 - 2$ con $z \leq 1$, si ambas superficies están orientadas hacia z^+.

b) Dado $\bar{f}(x, y, z) = (z - y, x - z, 1 - y)$, **calcule** la circulación de $\bar{f}$ a lo largo de la curva intersección de las superficies de ecuaciones $y = x^2 + z^2$ e $y = 12 - 2x^2 - 2z^2$. **Indique** gráficamente cómo ha orientado la curva.

2) a) Defina derivada direccional. Siendo $f(x, y) = \dfrac{x^2 y + y^2 sen(x)}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0,0)$, $f(x, y) = 0$ si $(x, y) = (0,0)$ **analice** si existe $f'((0,0), \check{r})$ para distintos $\check{r} \in \mathbb{R}^2$.

b) Siendo $x - y + z = 4$ la ecuación del plano tangente a la superficie de ecuación $z = f(x, y)$ en el punto $(2, 1, z_0)$, **halle** las direcciones de derivada direccional máxima, mínima y nula de f en $(2,1)$ indicando, para cada caso, cuál es el correspondiente valor de la derivada.

3) Siendo $\bar{f}(x, y, z) = (x - y, \text{sen}(xz), z^2 - z)$, **calcule** el flujo de $\bar{f}$ a través de la superficie Σ frontera del cuerpo D definido por $x^2 + z^2 \leq 4$, $x \leq y \leq x + 2$. **Indique** si considera a Σ orientada en forma entrante o saliente de D.

4) Calcule mediante una integral doble el área de la región plana limitada por $y = -2x^2$ y la curva solución de $y' + y = x$ que pasa por $(1,0)$.

UTN-FRBA-Dpto. Materias Básicas, UDB Matemática

Temas de Final de Análisis Matemático II (95-0703)

Condición mínima para aprobar: **3 (tres) ítems bien**, **dos** de "1a), 1b), 2a) o 2b)" y **uno** de "3) o 4)".

TEMA N° 143 – 10/02/10

1) a) **Enuncie** el teorema de Green. Dado $\bar{f}$ con matriz jacobiana $D\bar{f}$ según se indica, **calcule** $\oint_{C^+} \bar{f} \cdot d\bar{s}$ cuando C es la frontera de la región definida por: $x^2 + y^2 \leq 4$, $x + y \geq 2$.

$$D\bar{f}(x,y) = \begin{pmatrix} y & x \\ x+y & x \end{pmatrix}$$

b) Sea $\bar{f}(x,y) = (y\,\varphi(x\,y+2),\, 2x + x\,\varphi(x\,y+2))$ con φ' continua, **calcule** la circulación de $\bar{f}$ a lo largo de la curva de ecuación $\bar{X} = (3\,\mathrm{sen}(u),\, 3\cos(u))$ con $u \in [0, 2\pi]$ respetando la orientación impuesta por la parametrización.

2) a) **Defina** extremos (máximo y mínimo) locales. Dado $f(x,y) = x^3 + y^3 + 3x^2 + 3y^2$, **analice** qué tipo de extremos locales tiene, cuál es el valor de dichos extremos y en qué puntos se producen.

b) Sea Σ la superficie de ecuación $z = x^2 y + y^2 - 2xy - 3y$, **calcule** el perímetro del triángulo en cuyos vértices $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ la superficie tiene plano tangente paralelo al plano *xy*.

3) Siendo $\bar{f}(x,y,z) = (x+3,\, 2x+y,\, 2z)$, **calcule** el flujo de $\bar{f}$ a través de la superficie Σ de ecuación $z = x^2$ con $x^2 + y^2 \leq 2x$, con Σ orientada hacia z^+.

4) **Calcule** la masa del cuerpo definido por : $x^2 + 5y^2 + z^2 \leq 20$, $z \geq 2x$, $y \leq x$ en el 1° octante, si su densidad en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al plano xy.

TEMA N° 144 – 15/02/10

1) a) Defina continuidad de una función f en un punto $\bar{A} \in \mathbb{R}^n$. Dada la función f que se indica a la derecha, **analice** la continuidad y la existencia de derivadas parciales de f en (0,0).

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x(x+y)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

b) Si $\nabla f(x,y) = (g(x)\,\mathrm{sen}(y),\, g(x)\cos(y))$ con g' continua, **halle** la expresión de $f(x,y)$ sabiendo que (0,0) pertenece al conjunto de nivel 2 de la función y que $\nabla f(0,0) = (0,3)$.

2) a) **Defina** solución general (SG), solución particular (SP) y solución singular (SS) de una ecuación diferencial ordinaria de orden n. **Analice** si $y = 2x$ es una SP de $x\,y' + y = 4x$.

b) Siendo $\bar{f}(x,y) = (y, -4x)$, **calcule** el área de la región plana limitada por la línea de campo que pasa por (0,1).

3) Dado $\bar{f}$ / $\bar{f}(x,y,z) = (g(x)+z,\, g(y)+xz,\, g(z)+y)$ con g' continua, **calcule** la circulación de $\bar{f}$ a lo largo de la curva intersección de $z = \sqrt{x^2+y^2}$ con $x^2 + y^2 + z^2 = 50$. **Indique** gráficamente con qué orientación decidió circular.

4) **Calcule** el volumen del cuerpo definido por $y^2 + z^2 \leq 9$, $z \geq |x|$.

Condición mínima para aprobar: **3 (tres) ítems bien**, **dos** de "1a), 1b), 2a) o 2b)" y **uno** de "3) o 4)".

TEMA Nº 145 – 22/02/10

1) a) **Enunciar** el teorema de derivación de la composición de funciones (regla de la cadena). **Calcule** la derivada direccional $h'((1,2),(0.6,0.8))$ sabiendo que $h(x,y)=f(\bar{g}(x,y))$ con $\nabla f(u,v)=(u-v,v-u)$, $\bar{g}(x,y)=(x^2y,\ y+x)$.

b) Dado $\bar{f}(x,y,z)=(x+\varphi(2x-y)\ ,\ y+2\varphi(2x-y)\ ,\ 3z+\varphi(x+2y))$, **calcule** el flujo de $\bar{f}$ a través de la superficie frontera del cuerpo definido por $2+x^2+y^2\le z\le 3$. **Indique** si dicho flujo es entrante o saliente.

2) a) Independencia del camino en una integral de línea de campo vectorial: **enunciado y demostración**.

b) Sea F la familia de curvas tales que en cada punto la pendiente es igual al cociente de la ordenada sobre la abscisa del punto. **Calcule** mediante una integral la longitud de la curva que pertenece a la familia ortogonal a F y pasa por (0,3).

3) Sea $\bar{f}=\bar{g}+\bar{h}$ con $\bar{g},\bar{h}\in C^1$, sabiendo que $\bar{g}$ es un campo de gradientes y que $\bar{h}(x,y)=(x-y\ ,\ x)$, **calcule** $\oint_{C^+}\bar{f}\cdot d\bar{s}$ si la ecuación de C es $\bar{X}=(2\cos(t),3\,\text{sen}(t))$ con $0\le t\le 2\pi$.

4) Sea Σ el plano tangente a la superficie de ecuación $z=3-x^2-2y$ en el punto $(1,2,z_0)$, **calcule** el área de la sección de Σ interior al cuerpo cuyos puntos $(x,y,z)\in[0,2]\times[0,2]\times[0,4]$.

TEMA Nº 146 – 01/03/10

1) a) **Enuncie** el teorema de cambio de variables para integrales dobles. Dada $\int_{-\pi/2}^{\pi/4}d\varphi\int_0^2\rho^2\,d\rho$ planteada en coordenadas polares, **dibuje** la región de integración y **plantee** la integral en coordenadas cartesianas.

b) **Calcule** el área del trozo de superficie esférica de ecuación $x^2+y^2+z^2=25$ con $z\le 3$ en el 1° octante.

2) a) Sea f diferenciable en $\bar{A}\in\mathbb{R}^n$, **demuestre** que f es derivable en $\bar{A}$ en toda dirección dada por $\bar{r}\in\mathbb{R}^n$.

b) Siendo $z=f(x,y)$ definida por $xz+\text{sen}(z+y)-2=0$, **calcule** aproximadamente $f(1.99,-0.96)$.

3) Dado $\bar{f}(x,y)=(y,2x)$, **calcule** $\int_C\bar{f}\cdot d\bar{s}$ con C: curva integral de $y''+y'=4$ recorrida desde (0,2) hasta (1,6).

4) El campo $\bar{f}\in C^1$ es tal que $div\,\bar{f}(x,y,z)=6$, **calcule** el flujo de $\bar{f}$ a través de la superficie de ecuación $z=2$ con $x^2+y^2\le 4^2$ orientada hacia z^+; siendo, con igual orientación, $\iint_\Sigma\bar{f}\cdot\bar{n}\,d\sigma=8\pi$ para $\Sigma: z=18-x^2-y^2\ ,\ z\ge 2$.

UTN-FRBA-Dpto. Materias Básicas, UDB Matemática

Temas de Final de Análisis Matemático II (95-0703)

Condición mínima para aprobar: **3 (tres) ítems bien**, **dos** de "1a), 1b), 2a) o 2b)" y **uno** de "3) o 4)".

TEMA N° 147 – 27/05/10

1) a) **Enuncie** el teorema de la divergencia (Gauss). **Calcule** el flujo de ∇f a través de la superficie frontera de $x^2+4y^2+z^2 \leq 4$ sabiendo que $f \in C^2$ es armónico (justifique lo que afirma).

b) Sea $\bar{f} \in C^1$ tal que $\bar{f}(x,y,z)=(2x,1,z)+\bar{g}(x,y,z)$ con $\bar{g}$ solenoidal. **Calcule** el flujo de $\bar{f}$ a través de la superficie abierta Σ de ecuación $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ sabiendo que $\bar{g}(x,y,0)=(x-y,y-x,x^2)$; **indique** gráficamente cómo ha decidido orientar a Σ.

2) a) **Defina** extremos locales o relativos (máximo y mínimo). Dada $f(x,y)=(x-1)^4+(y-2)^2+4$ **verifique** que f produce un extremo local y clasifíquelo.

b) Dada $f(x,y)=6x^2+12xy+4y^3+3$, **analice** y clasifique extremos locales de los valores de f. Para cada $f(x_0,y_0)$ que resulte extremo, **determine** el punto de intersección del plano tangente en $(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ a la superficie de ecuación $z=f(x,y)$ con la curva de ecuación $\bar{X}=(u,\cos(u-2),u-1)$ con $u \in \mathbb{R}$

3) Sea C la curva dada por la intersección de $z=x+2y$ con $y^2+z=8$ en el 1° octante, **calcule** la circulación de $\bar{f}(x,y,z)=(2,y,3z)$ desde $(x_0,2,z_0)$ hasta $(x_1,0,z_1)$.

4) Dado el campo de gradientes $\bar{f}(x,y)=(2x,2y)$ con función potencial ϕ tal que $\phi(0,0)=4$, **calcule** mediante una integral doble el área de la región plana limitada por las curvas equipotenciales de potencial 5 y de potencial 8.

TEMA N° 148 – 20/07/10

1) a) **Enuncie** el teorema del rotor (Stokes). **Aplíquelo** para calcular la $\oint_{C^+} \bar{f}\cdot d\bar{s}$ siendo C una circunferencia en el plano $z=5$ con centro en $(0, 0, 5)$ y radio 2, cuando $\bar{f}(x,y,z)=(\varphi(y)\,,\,x\varphi'(y)+xz\,,\,xy)$ con φ'' continua; **indique** gráficamente cuál es el sentido de circulación que considera.

b) **Calcule** la circulación de $\bar{f}$ a lo largo de la curva intersección de $z=x^2+y^2$ con $z=18-x^2-y^2$, sabiendo que $D\bar{f}$ es la matriz jacobiana del campo. **Indique** gráficamente cómo ha orientado la circulación.

$$D\bar{f}(x,y,z)=\begin{pmatrix} 1 & z & y \\ y & x & 1 \\ z & 1 & x \end{pmatrix}$$

2) a) **Demuestre** que si $\bar{f}$ admite función potencial en $\mathbb{R}^2$, las líneas de campo y las líneas equipotenciales son familias de curvas ortogonales; **indique** cuáles son las hipótesis que considera.

b) Dado $\bar{f}(x,y)=(2xy\,,\,x)$, **calcule** la circulación de $\bar{f}$ desde $(1,1)$ hasta $(4,2)$, a lo largo la línea de campo de $\bar{f}$ que pasa por dichos puntos.

3) **Calcule** el volumen del cuerpo definido por: $x^2+z^2 \leq 9\,,\; y \geq x\,,\; y \leq 14-x^2-z^2$.

4) **Calcule** mediante una integral doble el área de la región plana limitada por $x+y=2\,,\,x=4,\,y=f(x)$, siendo esta última la solución particular de $y''+y'-6y=0$ que en $(0,y_0)$ tiene recta tangente de ecuación $y=4x+2$.

Temas de Final de Análisis Matemático II (95-0703)

Condición mínima para aprobar: **3 (tres) ítems bien**, **dos** de "1a), 1b), 2a) o 2b)" y **uno** de "3) o 4)".

TEMA Nº 149 – 03/08/10

1) a) Defina solución general (SG) y solución particular (SP) de una ecuación diferencial ordinaria de orden n. Siendo $y = x^2$ una SP de $y'' + b\,y' = 2x + a$, **halle** la SP que en el punto (0,1) tiene pendiente $y'(0) = 2$.

b) Sea C la curva de ecuación $\overline{X} = (x, f(x), 2-x)$ con $0.5 \le x \le 2$, donde $y = f(x)$ es la solución de $x\,y' = 2$ que pasa por (1,0). **Analice** si la recta tangente a C en $(1, 0, z_0)$ interseca al plano de ecuación $z = y$.

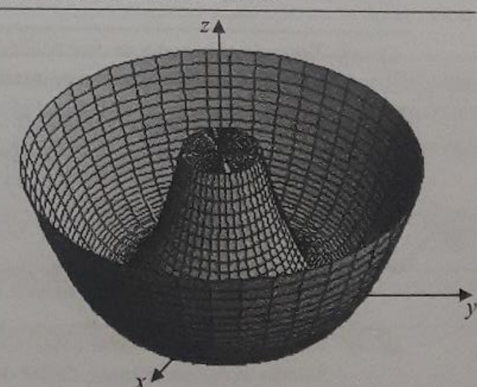
2) a) Enuncie el teorema de cambio de variables para integrales dobles. Mediante el cambio de variables definido por $(x, y) = (v-u, v+u)$, D_{xy} se transforma en D_{uv}. Sabiendo que $\iint_{D_{xy}} y - x\; dxdy = 12$, **calcule** $\iint_{D_{uv}} u\; dudv$.

b) Calcule la masa de la chapa plana D definida por: $x^2 + y^2 \le 2x$, $y \ge x$, si su densidad en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al eje x.

3) Siendo $\bar{f}(x, y, z) = (y, -x, z-4y)$, **calcule** el flujo de $\bar{f}$ a través de la superficie Σ de ecuación $z = (x-2)^2 + y^2$ con $z + 4x \le 8$. **Indique** gráficamente cómo ha decidido orientar a Σ.

4) El recipiente de la figura está apoyado en el plano xy, siendo $z = (\rho - 3)^2$ con $z \le 4$ la ecuación de la superficie en coordenadas cilíndricas.

Calcule el máximo volumen de líquido que puede contener (cuando se lo llena hasta el borde superior).



UTN-FRBA-Dpto. Materias Básicas, UDB Matemática

Temas de Final de Análisis Matemático II (95-0703)

Condición mínima para aprobar: **3 (tres) ítems bien**, **dos** de "1a), 1b), 2a) o 2b)" y **uno** de "3) o 4)".

TEMA Nº 150 – 24/09/10

1) a) **Defina** derivada direccional e **indique** su fórmula de cálculo para campo escalar diferenciable. Dado f diferenciable con $f(1,3)=5$ y derivada $f'(\overline{A},(u,v))=3u+2v$, **calcule** aproximadamente $f(1.02\,,\,2.99)$.

b) Siendo $f(x,y)=x^2+2y^2$, **calcule** el área de la región plana limitada por la curva que une los puntos en los que la máxima derivada direccional de f resulta igual a 2.

2) a) **Enuncie** el teorema de Green. Dado $\bar{f}(x,y)=(2xy\,,\,x^2-3x)$, **calcule** la circulación en sentido positivo de $\bar{f}$ a lo largo de la frontera de una región simple D, sabiendo que $\acute{a}rea(D)=6$.

b) **Enuncie** hipótesis para asegurar la independencia del camino de una integral de línea de campo vectorial. Suponiendo que dichas hipótesis se cumplen, **calcule** $\int_{\overline{BC}}\bar{f}\cdot d\bar{s}$ sabiendo que $\int_{\overline{BA}}\bar{f}\cdot d\bar{s}=-2$ y $\int_{\overline{AC}}\bar{f}\cdot d\bar{s}=7$.

3) **Calcule** el área del trozo de superficie cónica de ecuación $z^2=x^2+y^2$ cuyos puntos cumplen con $x^2+y^2+z^2\le 18$.

4) Dado $\bar{f}(x,y,z)=(2x+y\,\varphi(z)\,,\,3y-x\varphi(z)\,,\,z+\varphi(x+y))$ con φ' continua, **calcule** el flujo de $\bar{f}$ a través de la superficie frontera del cuerpo cuyos puntos cumplen con $x+z\le 2$, $y+z\le 2$, 1º octante.

TEMA Nº 151 – 06/12/10

1) a) **Enuncie** el teorema de derivación de la composición de funciones (regla de la cadena). Suponiendo que se cumplen las hipótesis el teorema, **analice** si la recta normal a la superficie de ecuación $z=f(\overline{g}(x,y))$ en el punto $\overline{A}=(1,2,1)$ interseca al plano xz, sabiendo que: $f(u,v)=uv+v^2$, $\overline{g}$ es diferenciable, $\overline{g}(1,2)=(0,1)$ y la matriz jacobiana $D\overline{g}(1,2)=\begin{pmatrix}2&3\\1&5\end{pmatrix}$.

b) Siendo $\bar{f}(x,y,z)=(x\,y\,g(x-y)\,,\,x\,y\,g(x-y)\,,\,z^2-(x+y)z\,g(x-y))$, **calcule** el flujo de $\bar{f}$ a través de la superficie ∂H frontera de H definido por: $\sqrt{x^2+y^2}\le z\le 6-x^2-y^2$; con ∂H orientada en sentido saliente de H.

2) a) **Defina** solución general (SG) y solución particular (SP) de una ecuación diferencial ordinaria de orden n. Siendo a,b,c constantes, dadas dos SP: y_1 e y_2 de $a\,y''+b\,y'+c\,y=f(x)$, **verifique** que $y=y_1+y_2$ es una SP de la ecuación diferencial $a\,y''+b\,y'+c\,y=2f(x)$.

b) Sea $\bar{f}:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ un campo de fuerzas conservativo, si $x\,y=C\,x+1$ es la ecuación cartesiana de su familia de líneas equipotenciales, **halle** una ecuación cartesiana para la línea de campo que pasa por el punto $(1,2)$.

3) **Calcule** la circulación de $\bar{f}$ a lo largo de la curva C desde $(-2,2,z_0)$ hasta $(0,1,z_1)$, cuando C es la intersección de las superficies de ecuaciones: $z+x=y$, $z-x=2y^2-y$; siendo $\bar{f}(x,y,z)=(y,\,2x,\,z)$.

4) **Calcule** el volumen del cuerpo definido por: $y\le x^2$, $x^2+z^2\le 16$, 1º octante.

Temas de Final de Análisis Matemático II (95-0703)

Condición mínima para aprobar: **3 (tres) ítems bien**, **dos** de "1a), 1b), 2a) o 2b)" y **uno** de "3) o 4)".

TEMA N° 152 – del 13/12/10 diferido al 27/12/10

1) a) **Enuncie** el teorema de la divergencia (Gauss). Suponiendo que la superficie Σ cumple con las hipótesis del teorema y que $\bar{f} \in C^2$ es del tipo $\bar{f} = (P, Q, R)$, **calcule** $\oiint_{\Sigma} rot(\bar{f}) \cdot \bar{n}\, d\sigma$ **justificando** los pasos que realiza.

b) Dado $\bar{f}(x,y,z) = (g(x),\ y\,g(x),\ z\,g(x))$ con $g \in C^1$, **halle** $g(x)$ de manera que el flujo de $\bar{f}$ a través de la superficie frontera de un cuerpo resulte numéricamente igual al doble del volumen del cuerpo. Suponga $\bar{f}(\bar{0}) = (2,0,0)$.

2) a) **Defina** coordenadas cilíndricas. Siendo $\int_0^{\pi} d\varphi \int_0^1 d\rho \int_{\rho}^{2-\rho^2} \rho^2\, dz$ el planteo de una integral triple en cilíndricas, **indique** cuál es el correspondiente planteo en coordenadas cartesianas y **grafique** la región de integración.

b) **Calcule** la masa del cuerpo definido por $z \le \sqrt{x^2+y^2}$ con $1 \le x^2+y^2 \le 4$ en el 1° octante, si su densidad en cada punto es proporcional a la distancia desde el punto al eje z.

3) Sea $\bar{f}$ un campo de fuerzas conservativo tal que $\bar{f}(x,y) = (y+y^2,\ x+2xy+1)$, **calcule** la circulación de $\bar{f}$ a lo largo de una curva C desde $\overline{A} = (1,1)$ hasta $\overline{B} = (3,2)$ usando función potencial.

4) Dada la superficie Σ de ecuación $z = x^2 + xy^2 + 2y^2$, **calcule** el área del triángulo cuyos vértices son los puntos donde Σ tiene plano tangente horizontal (paralelo al plano xy).

TEMA N° 153 – 20/12/10

1) a) **Defina** derivada direccional de un campo escalar f en un punto $\overline{A}$ e **indique** con qué expresión y bajo qué hipótesis puede calcularse usando ∇f. Sabiendo que la superficie de ecuación $z = f(x,y)$ tiene plano tangente de ecuación $x + 2y - 3z = 1$ en el punto $(2,2,z_0)$, **calcule** $f'((2,2),\bar{r})$ cuando $\bar{r}$ está orientado desde $(2,2)$ a $(3,5)$.

b) Dada $z = f(x,y)$ definida implícitamente por la ecuación $xz + z^3y + \ln(z+x-2) - 2 = 0$, **calcule** en forma aproximada $f(0.98,\ 0.03)$.

2) a) **Enuncie** el teorema de cambio de variables en integrales dobles. **Calcule** área(D_{xy}) sabiendo que a través del cambio de variables definido por $(x,y) = (u+2v,\ 3u+v)$, la región D_{xy} se transforma en D_{uv} con área$(D_{uv}) = 4$.

b) **Calcule** el trabajo del campo de fuerzas $\bar{f}$ a lo largo del segmento $\overline{AB}$, desde $\overline{A} = (1,3,2)$ hasta $\overline{B} = (2,3,0)$, sabiendo que $\bar{f} = rot(\bar{g})$ con $\bar{g}(x,y,z) = (x - yz - h(x-y)\ ,\ y + h(x-y)\ ,\ y^2)$; suponga $\bar{g} \in C^1$.

3) **Calcule** el flujo de $\bar{f}(x,y,z) = (x,\ y,\ z)$ a través del trozo de superficie abierta Σ de ecuación $z = 1 + x^2 + 2y^2$ con $z \le 2$. **Indique** gráficamente cómo ha decidido orientar a Σ.

4) Dado $\bar{f}(x,y) = (x\ ,\ xy)$ **calcule** $\oint_{C^+} \bar{f} \cdot d\bar{s}$, siendo C la frontera de la región plana acotada que está limitada por el conjunto de nivel 5 de $h(x,y) = 5 + (y - x^2)(y - 2x^2 + 4)$.

Temas de Final de Análisis Matemático II (95-0703)

Condición mínima para aprobar: **3 (tres) ítems bien**, **dos** de "1a), 1b), 2a) o 2b)" y **uno** de "3) o 4)".

TEMA Nº 154 – 14/02/11

1) a) Independencia del camino en una integral de línea de campo vectorial: **enunciado y demostración**.

b) El campo $\bar{f}$ tiene función potencial $\phi(x,y)=x\,y^2$ en $\mathbb{R}^2$, **halle** una ecuación cartesiana para la línea de campo que pasa por el punto $(1,2)$.

2) a) Defina extremos (máximo y mínimo) locales de un campo escalar. **Analice** si $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}\ /\ f(x,y)=\sqrt{x^2+y^4}$ produce algún extremo local y de qué tipo de extremo se trata.

b) Sea $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ con polinomio de Taylor $p(x,y)=12x^2+12xy+y^3$ en un entorno de $\bar{A}=(-1,2)$. **Analice** si $f(\bar{A})$ es extremo local, en caso afirmativo **clasifíquelo** y **calcule** su valor.

3) Calcule el volumen del cuerpo definido por $x^2+2z^2\le y\le 4-x^2$ en el 1º octante.

4) Dado $\bar{f}(x,y,z)=(x\,y,\,3yx^2,\,xz)$, **calcule** el flujo de $\bar{f}$ a través de la superficie abierta Σ de ecuación $y=x^2$ con $0\le z\le 4-y$. **Indique** gráficamente la orientación que adoptó para Σ.

TEMA Nº 155 – 21/02/11

1) a) Definiciones de superficie y de punto regular de una superficie. **Halle** una <u>ecuación cartesiana</u> para el plano tangente a la superficie de ecuación $\bar{X}=(u-v^2,\,u+v\,,\,u\,v)$ con $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ en el punto $(1,3,2)$ de la misma.

b) Sea C una curva incluida en la superficie de ecuación $\bar{X}=(u\cos(v)\,,\,u\,,\,u\,\mathrm{sen}(v))$ con $(u,v)\in[0,5]\times[0,2\pi]$; sabiendo que la proyección de C sobre el plano xz es parte de la parábola de ecuación $x=4-z^2$ con $y=0$. **Analice** si la recta tangente a C en $(0,2,2)$ interseca al plano de ecuación $y=x-z$.

2) a) Enuncie el teorema del rotor (Stokes). Siendo k constante positiva y $rot\,\bar{f}(x,y,z)=(2x,3y,5z^{-1})$, dada la curva C intersección de $z=x^2+y^2$ con $z=2k^2-x^2-y^2$, **verifique** que la circulación de $\bar{f}$ a lo largo de C no depende del valor de k; **indique** gráficamente la orientación que adoptó para realizar la circulación. <u>Nota</u>: suponga que se puede aplicar el teorema.

b) Sean $\bar{f}(x,y,z)=(z\,\varphi(x)\,,\,x\,y\,,\,y\,\varphi(x))$ y la curva C de ecuación $\bar{X}=(R\,\mathrm{sen}(t)\,,\,1\,,\,R\cos(t))$ con $0\le t\le 2\pi$, $R>0$; suponiendo φ' continua y $\bar{f}(0,1,1)=(2,0,2)$, **halle** una expresión para $\varphi(x)$ tal que $\oint_C \bar{f}\cdot d\bar{s}=0$.

3) Calcule el área del trozo de superficie cilíndrica de ecuación $z=x^2+1$ con $y\ge x$, $y\le 2x$, $x\le 3$.

4) Calcule mediante una integral doble el área de la región plana limitada por $y-x+2=0$ y la curva integral de $x\,y''-y'=0$ que en el punto $(1,y_0)$ tiene recta tangente de ecuación $y=5-2x$. <u>Sugerencia</u>: aplicar método de reducción de orden.

UTN-FRBA-Dpto. Materias Básicas, UDB Matemática

Temas de Final de Análisis Matemático II (95-0703) Hoja: 16/16.-

Condición mínima para aprobar: **3 (tres) ítems bien**, **dos** de "1a), 1b), 2a) o 2b)" y **uno** de "3) o 4)".

TEMA N° 156 – 28/02/11

1) a) **Enuncie** hipótesis que permitan calcular la derivada $f'(\overline{A},\overline{r})$ de un campo escalar f mediante su gradiente. En estas condiciones, **calcule** $f'((3,2,2),(1,2,5))$ cuando $f(x,y,z)=g(2x-y)+z^2$.

b) Dada $z=f(u,v)$ definida implícitamente por $u\,v\,z+\ln(z+v-3)-4=0$ con $(u,v)=(x\,y^3\,,\ y+x^2)$, resulta $z=h(x,y)$; **calcule** aproximadamente $h(1.03,\,0.97)$.

2) a) **Enuncie** el teorema de la divergencia (Gauss). Considerando que puede aplicarlo, dado $f(x,y,z)=g(x)+x\,y+z^2$, determine $g(x)$ tal que $\oiint_{\Sigma}\nabla f\cdot\bar{n}\,d\sigma=0\ \forall\Sigma$; suponga $f(0,0,0)=2$ y $f'_x(0,0,0)=0$.

b) Siendo Σ la <u>superficie abierta</u> de ecuación $z=4-x^2-4y^2$ con $z\ge 0$, orientada con $\bar{n}$ tal que $\bar{n}\cdot(0,0,1)\ge 0$, **calcule** el flujo del campo $\bar{f}$ a través de Σ sabiendo que $\bar{f}(x,y,z)=(x\,z\,e^y\,,\,3\,y-z\,e^y\,,\,x^2-3\,z)$.

3) Sea π_0 el plano tangente en $\overline{A}=(1,2,z_0)$ a la superficie definida implícitamente por $x^2y+z+\ln(z-2x)-5=0$. **Calcule** el área del trozo de π_0 cuyos puntos cumplen con $y\ge x$ en el 1° octante.

4) **Calcule** la circulación del campo $\bar{f}\ /\ \bar{f}(x,y,z)=(x^2+z^2,\,x^2,\,3\,y\,z)$ a lo largo de la curva C definida por la intersección de $x^2+y^2=9$ con $x+z=3$. **Indique** gráficamente con qué orientación ha decidido circular a lo largo de C.

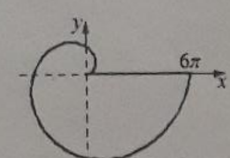
TEMA N° 157 – 10/03/11

1) a) **Enuncie** el teorema de derivación de la composición de funciones en forma matricial. Dada la superficie Σ de ecuación $z=f(\overline{g}(x,y))$ con $f(u,v)=k^2u+v$, $\overline{g}(x,y)=(x^2-y\,,\,2\,y-x\,y)$, k constante, <u>utilizando el teorema</u> **determine** el valor de $k>0$ para el cual la recta normal a Σ en $(1,2,z_0)$ resulta paralela al eje z.

b) Siendo $\bar{f}(x,y)=(\ g(x-y)\ ,\ x\,y-g(x-y)\ )$ con $g\in C^1$, **calcule** la circulación en sentido positivo de $\bar{f}$ a lo largo de la curva plana de ecuación $x^2+y^2=2\,y$.

2) a) **Defina** coordenadas polares. **Aplíquelas** para calcular la integral doble de $f(x,y)=x^2/(x^2+y^2)$ en la región plana definida por $-x\le y\le x\,,\ x\le 1$.

b) **Calcule** el área de la región del plano *xy* que se muestra en la figura, limitada por el arco de curva de ecuación $\overline{X}=(3\varphi\cos(\varphi),\,3\varphi\,\mathrm{sen}(\varphi))$ con $0\le\varphi\le 2\pi$ y el segmento de puntos extremos $(0,0)$ y $(6\pi,0)$.



3) Siendo $\bar{f}(x,y,z)=(x\,z\,,\,y\,z\,,\,z^2)$, **calcule** el flujo de $\bar{f}$ a través de la superficie abierta de ecuación $x^2+y^2+z^2=5$ con $z\ge 1+x^2+y^2$, **indicando** gráficamente la orientación que ha elegido para la superficie.

4) Dado $\bar{f}(x,y,z)=(x,2y,3z)$, **calcule** la circulación de $\bar{f}$ desde $\overline{A}=(1,2,z_0)$ hasta $\overline{B}=(5,y_1,z_1)$ a lo largo de la recta normal en el punto $\overline{A}$ a la superficie Σ definida implícitamente por $x\,z+\mathrm{Exp}(z-x)+x\,y-4=0$.