ECUACIONES DIFERENCIALES – 2da. PARTE

ECUACIONES DIFERENCIALES HOMOGÉNEAS DE 1º ORDEN

Funciones homogéneas

Para definir las ecuaciones diferenciales homogéneas de 1er. orden, debemos comenzar por definir las ***funciones homogéneas***.

Decimos que una función $f(x,y)$ es homogénea de grado n si se cumple que:

$$\forall k \in R: \; f(k\,x\,,k\,y) = k^n f(x,y)$$

Por ejemplo, analizamos la función: $f(x,y) = x^4 + 2x^2y^2 + xy^3$

$$f(k\,x\,,k\,y) = k^4x^4 + 2k^2x^2k^2y^2 + k\,x\,k^3y^3 = k^4(x^4 + 2x^2y^2 + xy^3) = k^4 f(x,y)$$

En este caso, la función es homogénea de grado 4

Analizamos ahora la función: $f(x,y) = \dfrac{2y}{x} + \dfrac{x^2}{3y^2}$

$$f(k\,x\,,k\,y) = \frac{2ky}{kx} + \frac{k^2x^2}{3k^2y^2} = \frac{2y}{x} + \frac{x^2}{3y^2} = f(x,y) = k^0 f(x,y) \qquad \text{(siendo } k \neq 0\text{)}$$

En este caso, la función es homogénea de grado 0.

Para poder trabajar con las ecuaciones diferenciales, nos interesan las funciones homogéneas de grado 0.

Ecuación diferencial homogénea de 1er. orden

La ecuación diferencial ordinaria $y' = f(x,y)$ se denomina **homogénea de 1er. orden** si la función $f(x,y)$ es homogénea de grado 0.

Estas ecuaciones diferenciales se resuelven mediante la sustitución $z = \dfrac{y}{x}$, que la transforma en una ecuación diferencial de variables separables. El planteo es el siguiente:

$$y' = f(x,y) = 1\,.\,f(x,y) = k^0 f(x,y) = f(k\,x\,,k\,y)$$

Si consideramos el valor de $k = \dfrac{1}{x}$ la expresión resulta:

$$y' = f(k\,x\,,k\,y) = f(\frac{1}{x}x\,,\frac{1}{x}y) = f(1\,,\frac{y}{x}) \Rightarrow y' = f(1\,,\frac{y}{x}) \qquad (1)$$

En esta última ecuación realizamos la sustitución $z = \dfrac{y}{x} \Rightarrow y = z\,x \Rightarrow y' = z'x + z$. Por lo tanto, la expresión (1) resultará:

$$z'x + z = f(1\,,z)$$

$$z'x = f(1\,,z) - z$$

$$\frac{dz}{dx}x = f(1\,,z) - z$$

$$\frac{dz}{f(1\,,\,z)-z}=\frac{dx}{x}$$ integrando miembro a miembro se obtiene

$$\int\frac{dz}{f(1\,,\,z)-z}=\int\frac{dx}{x}\quad\Rightarrow\quad \ln|\,x\,|+\ln c=\int\frac{dz}{f(1\,,\,z)-z}\quad\Rightarrow\quad \ln(k\,x)=\int\frac{dz}{f(1\,,\,z)-z}$$

(siendo $k=\pm c$)

Por lo tanto resulta $kx=e^{\int\frac{dz}{f(1\,,\,z)-z}}$. En esta expresión deberá reemplazarse la variable z por $\dfrac{y}{x}$ para volver a las variables originales.

Resolvemos ejercicios del TP 12

1)b) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas de 1er. orden

$$(x^2+y^2)dx-2xy\,dy=0$$

b) $(x^2+y^2)\,dx-2xy\,dy=0 \Rightarrow (x^2+y^2)\,dx=2xy\,dy \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^2+y^2}{2xy}=\dfrac{1}{2}\left[\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right]=\dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{y}{x}\right)^{-1}+\dfrac{y}{x}\right]$

$f(tx,ty)=\dfrac{t^2x^2+t^2y^2}{2tx\,ty}=\dfrac{\cancel{t^2}}{\cancel{t^2}}\,\dfrac{x^2+y^2}{2xy}=f(xy)$

$z=\dfrac{y}{x}\Rightarrow zx=y\Rightarrow y'=z'x+z$

$z'x+z=\dfrac{\cancel{x^2}+z^2\cancel{x^2}}{2\cancel{x}\,z\cancel{x}}=\dfrac{1+z^2}{2z}\Rightarrow z'x=\dfrac{1+z^2}{2z}-z\Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{dz}{dx}\,x=\dfrac{1+z^2-2z^2}{2z}\Rightarrow \int dz\,\dfrac{2z}{1-z^2}=\int\dfrac{dx}{x}\Rightarrow$

$\Rightarrow \ln x+\ln k=\cancel{2}\left[-\dfrac{1}{\cancel{2}}\ln(1-z^2)\right]\Rightarrow \ln(kx)=\ln(1-z^2)^{-1}\Rightarrow$

$\Rightarrow kx=\dfrac{1}{1-z^2}\Rightarrow kx=\dfrac{1}{1-\left(\frac{y}{x}\right)^2}\Rightarrow k\cancel{x}=\dfrac{x^{\cancel{2}}}{x^2-y^2}\Rightarrow$

$\Rightarrow k(x^2-y^2)=x$

1)c) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales homogéneas de 1er. orden

$$y' = \frac{y}{x-y}$$

d) $y' = \dfrac{y}{x-y} = \dfrac{\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}} =$

$f(tx,ty) = \dfrac{ty}{tx - ty} = \dfrac{\cancel{t}\,y}{\cancel{t}(x-y)} = \dfrac{y}{x-y}$

$\Rightarrow f(tx,ty) = \dfrac{y}{x-y} = f(x,y)$

$z = \dfrac{y}{x} \Rightarrow zx = y \Rightarrow y' = z'x + z$

$z'x + z = \dfrac{zx}{x - zx}$

$z'x + z = \dfrac{z\cancel{x}}{\cancel{x}(1-z)} \Rightarrow \dfrac{dz}{dx}x = \dfrac{z}{1-z} - z \Rightarrow$

$\Rightarrow dz \dfrac{1-z}{z - z(1-z)} = \dfrac{dx}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow \displaystyle\int dz \frac{1-z}{\cancel{z}-\cancel{z}+z^2} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \int \frac{1}{z^2}\,dz - \int \frac{1}{z} = \ln x +$

$+ \ln c \Rightarrow -z^{-1} - \ln z = \ln cx \Rightarrow$

$\Rightarrow -\dfrac{1}{z} = \ln cx + \ln z \Rightarrow -\dfrac{1}{\frac{y}{x}} = \ln cxz \Rightarrow$

$\Rightarrow -\dfrac{x}{y} = \ln\left(cx\dfrac{y}{\cancel{x}}\right) \Rightarrow -\dfrac{x}{y} = \ln cy \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{-x/y} = cy$

ECUACIONES DIFERENCIALES TOTALES EXACTAS.

Definición EDTE

Son ecuaciones diferenciales del tipo $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$, donde el primer miembro de la ecuación es expresión de la diferencial total de un campo escalar, es decir que existe una función potencial $\phi(x,y)$ de modo que $\phi'_x = P(x,y) \wedge \phi'_y = Q(x,y)$.

Recordemos que la condición necesaria y suficiente para que exista la función potencial ϕ es que $P(x,y) \wedge Q(x,y)$ sean de clase C^1 en un conjunto $D \subset R^2$ (con D abierto y simplemente conexo), y que además resulte $P'_y = Q'_x \;\; \forall (x,y) \in D$.

Veamos cómo podemos hallar la solución de la ecuación diferencial propuesta. Teniendo en cuenta que la expresión $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy$ es la diferencial total de la función ϕ, la ecuación puede escribirse como:

$$\phi'_x\,dx + \phi'_y\,dy = 0 \quad \Rightarrow \quad d\phi = 0$$

Si la diferencial total de ϕ es 0, dicho campo escalar resultará constante. Por lo tanto, la solución de la ecuación diferencial será: $\phi(x,y) = c$ (siendo c una constante real).

Ecuaciones diferenciales reducibles a totales exactas.

En las aplicaciones, no es frecuente que las ecuaciones diferenciales de primer orden sean exactas. Sin embargo, puede demostrarse que cualquier ecuación de primer orden puede transformarse en total exacta.

Por ejemplo, puede plantearse una ecuación del tipo $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$ en la cual $P'_y \neq Q'_x$. Se puede tratar de transformar la ecuación diferencial original en una ecuación diferencial total exacta. Para ello, multiplicamos miembro a miembro por un campo escalar $u(x,y)$. Por lo tanto:

$$P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0 \quad \Rightarrow \quad u(x,y)[P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy] = u(x,y) \,.\, 0$$

$$u(x,y)\,P(x,y)\,dx + u(x,y)\,Q(x,y)\,dy = 0$$

Para facilitar la notación, escribiremos: $u\,P\,dx + u\,Q\,dy = 0$ teniendo en cuenta que las funciones u, P, Q son campos escalares que dependen de las variables x e y.

En este caso, para que la ecuación diferencial $u\,P\,dx + u\,Q\,dy = 0$ resulte total exacta debe cumplirse que:

$$\frac{\partial\,(u\,P)}{\partial y} = \frac{\partial\,(u\,Q)}{\partial x} \qquad (1)$$

Si existe un campo escalar $u(x,y)$ de modo que multiplicando por él la ecuación diferencial original, ésta se transforma en diferencial total exacta, dicho campo escalar $u(x,y)$ **se denomina factor integrante**.

Para hallar un factor integrante que cumpla lo pedido, debe verificarse la igualdad (1).

$$\frac{\partial\,(u\,P)}{\partial y} = \frac{\partial\,(u\,Q)}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad u'_y\,P + u\,P'_y = u'_x\,Q + u\,Q'_x$$

En este caso, para hallar la función $u(x,y)$ hay que resolver una ecuación diferencial en derivadas parciales. Esta complejidad puede reducirse si se considera que la función u depende de una sola variable.

- **Supongamos que** $u = u(x)$

En este caso, la ecuación (1) se reduce a:

$$\frac{\partial\,(u\,P)}{\partial y} = \frac{\partial\,(u\,Q)}{\partial x} \quad\Rightarrow\quad u\,P'_y = u'\,Q + u\,Q'_x \quad\Rightarrow\quad u\,P'_y - u\,Q'_x = u'\,Q \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad u\,(P'_y - Q'_x) = u'\,Q \quad\Rightarrow\quad u\,\frac{(P'_y - Q'_x)}{Q} = u' \quad\Rightarrow\quad u\,\frac{(P'_y - Q'_x)}{Q} = \frac{du}{dx} \quad\Rightarrow\quad \frac{(P'_y - Q'_x)}{Q}\,dx = \frac{du}{u}$$

Integrando miembro a miembro la última igualdad, resulta:

$$\int \frac{P'_y - Q'_x}{Q}\,dx = \int \frac{du}{u} \quad\Rightarrow\quad \int \frac{P'_y - Q'_x}{Q}\,dx = \ln|u| + \ln c \quad\Rightarrow\quad \int \frac{P'_y - Q'_x}{Q}\,dx = \ln(k\,u)$$

(siendo $k = \pm c$)

Por lo tanto resulta: $\quad k\,u = e^{\int \frac{P'_y - Q'_x}{Q}dx} \quad\Rightarrow\quad u = a\,e^{\int \frac{P'_y - Q'_x}{Q}dx} \quad$ (con $a = \frac{1}{k}$)

De todas las curvas de la familia que resulta solución para $u(x)$, basta sólo una para utilizar como factor integrante y transformar la ecuación diferencial original en diferencial total exacta. Por lo tanto, elegimos la constante más sencilla $a = 1$. Resulta entonces el factor integrante buscado:

$$u = e^{\int \frac{P'_y - Q'_x}{Q}dx}$$

Para que esta expresión tenga sentido, debe poder resolverse la integral del exponente, y por lo tanto la expresión $\frac{P'_y - Q'_x}{Q}$ debe ser función exclusivamente de *x*.

Para poder terminar la resolución de la ecuación diferencial, una vez hallado el factor integrante, se multiplica la ecuación diferencial original por dicho factor y se resuelve como diferencial total exacta.

- **Supongamos que** $u = u(y)$

En este caso, la ecuación (1) se reduce a:

$$\frac{\partial\,(u\,P)}{\partial y} = \frac{\partial\,(u\,Q)}{\partial x} \quad\Rightarrow\quad u'\,P + u\,P'_y = u\,Q'_x \quad\Rightarrow\quad u'\,P = u\,Q'_x - u\,P'_y \quad\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\quad u\,(Q'_x - P'_y) = u'\,P \quad\Rightarrow\quad u\,\frac{(Q'_x - P'_y)}{P} = u' \quad\Rightarrow\quad u\,\frac{(Q'_x - P'_y)}{P} = \frac{du}{dy} \quad\Rightarrow\quad \frac{(Q'_x - P'_y)}{P}\,dy = \frac{du}{u}$$

Integrando miembro a miembro la última igualdad, resulta:

$$\int \frac{Q'_x - P'_y}{P}\,dy = \int \frac{du}{u} \quad\Rightarrow\quad \int \frac{Q'_x - P'_y}{P}\,dy = \ln|u| + \ln c \quad\Rightarrow\quad \int \frac{Q'_x - P'_y}{P}\,dy = \ln(k\,u)$$

(siendo $k = \pm c$)

Por lo tanto resulta: $\quad k\,u = e^{\int \frac{Q'_x - P'_y}{P}dy} \quad\Rightarrow\quad u = a\,e^{\int \frac{Q'_x - P'_y}{P}dy} \quad$ (con $a = \frac{1}{k}$)

De todas las curvas de la familia que resulta solución para $u(y)$, basta sólo una para utilizar como factor integrante y transformar la ecuación diferencial original en diferencial total exacta. Por lo tanto, elegimos la constante más sencilla $a=1$. Resulta entonces el factor integrante buscado:

$$u = e^{\int \frac{Q'_x - P'_y}{P} dy}$$

Para que esta expresión tenga sentido, debe poder resolverse la integral del exponente, y por lo tanto la expresión $\dfrac{Q'_x - P'_y}{P}$ debe ser función exclusivamente de *y*.

Para poder terminar la resolución de la ecuación diferencial, una vez hallado el factor integrante, se multiplica la ecuación diferencial original por dicho factor y se resuelve como diferencial total exacta.

Lo más conveniente para aplicar este método, es evaluar la diferencia entre Q'_x y P'_y (en cualquier orden), y dividir esta diferencia por *P* ó *Q*. Si esta expresión depende de una sola variable (puede ser *x* ó *y*), dicha variable será la que corresponda al factor integrante. Es decir, si $\dfrac{Q'_x - P'_y}{P}$ ó $\dfrac{Q'_x - P'_y}{Q}$ dependen exclusivamente de *x*, habrá un factor integrante $u = u(x)$. Análogamente, si alguna de las expresiones anteriores depende exclusivamente de *y*, habrá un factor integrante $u = u(y)$.

Resolvemos ejercicios del TP 12

4)b) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales totales exactas o convertibles a este tipo

$$y' = \frac{xy^2 - 1}{1 - x^2 y} \text{ con } y(-1) = 1$$

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{xy^2-1}{1-x^2y} \Rightarrow dy\,(1-x^2y) = dx\,(xy^2-1) \Rightarrow$

$\Rightarrow dx\,(xy^2-1) - dy\,(1-x^2y) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow dx\,(xy^2-1) + dy\,(x^2y-1) = 0$

$\left.\begin{array}{ll} P = xy^2-1 & P'_y = 2xy \\ Q = x^2y-1 & Q'_x = 2xy \end{array}\right\}$ DTE

$\varphi = \int (xy^2-1)\,dx = \frac{x^2y^2}{2} - x + g(y)$

$\left.\begin{array}{l} \varphi'_y = x^2y + g'(y) \\ \varphi'_y = x^2y - 1 \end{array}\right\} \Rightarrow g'(y) = -1 \Rightarrow \int dg = \int -dy \Rightarrow$

$\Rightarrow g = -y + c$

$\varphi = \frac{x^2y^2}{2} - x - y + c = c_1 \Rightarrow k = x + y - \frac{x^2y^2}{2}$

$y(-1) = 1 \Rightarrow k = -1 + 1 - \frac{1}{2} \Rightarrow k = -\frac{1}{2}$

$x + y - \frac{x^2y^2}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow x + y - \frac{x^2y^2}{2} + \frac{1}{2} = 0$

4)d) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales totales exactas o convertibles a este tipo

$$(y^2 - y)dx + x\,dy = 0$$

d) $(y^2-y)\,dx + x\,dy = 0$

$M = y^2 - y \qquad M'_y = 2y-1$

$N = x \qquad N'_x = 1$ $\Big\}$ no es DTE

$$\frac{M'_y - N'_x}{M} = f(y)$$

$g(y)\,(y^2-y)\,dx + g(y)\,x\,dy = 0$

$P = g\,(y^2-y) \qquad P'_y = g'\,(y^2-y) + (2y-1)\,g$

$Q = g\,x \qquad Q'_x = g$ $\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow g'\,(y^2-y) + (2y-1)\,g = g \Rightarrow g'\,(y^2-y) = g\,(1-2y+1) \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{dg}{dy} = \dfrac{2-2y}{y^2-y}\,g \Rightarrow \displaystyle\int \frac{dg}{g} = \int dy\,\frac{2-2y}{y^2-y} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln g = 2\displaystyle\int \frac{dy}{y^2-y} - 2\int \frac{dy\,\cancel{y}}{\cancel{y}(-1+y)} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln g = 2\left[\dfrac{1}{1}\ln\dfrac{2y-1-1}{2y-1+1}\right] - 2\ln(y-1) \Rightarrow$

auxiliares $\quad a=1 \quad b=-1 \quad c=0 \qquad \Delta = 4ac - b^2 = -1$

$\Rightarrow \ln g = 2\ln\dfrac{\cancel{2}y-\cancel{2}}{\cancel{2}y} + \ln(y-1)^{-2} \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln g = \ln\dfrac{(y-1)^2}{y^2} + \ln(y-1)^{-2} \Rightarrow$

$$\Rightarrow \ln g = \ln \frac{(y-1)^2}{y^2} \cdot (y-1)^{-2} \Rightarrow g = \frac{1}{y^2}$$

$$P = \frac{1}{y^2}(y^2 - y) = 1 - \frac{1}{y} \qquad P'_y = \frac{1}{y^2}$$

$$Q = \frac{1}{y^2} \cdot x = \frac{x}{y^2} \qquad Q'_x = \frac{1}{y^2}$$

$$\left.\begin{array}{l} P'_y = \frac{1}{y^2} \\ Q'_x = \frac{1}{y^2} \end{array}\right\} \therefore DTE$$

$$\phi = \int Q \, dy \Rightarrow \phi = \int \frac{x}{y^2} dy \Rightarrow \phi = x\left(-y^{-1}\right) + h(x) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \phi = -\frac{x}{y} + h(x)$$

$$\phi'_x = -\frac{1}{y} + h'(x) = 1 - \frac{1}{y} \Rightarrow h'(x) = 1 \Rightarrow h = \int dx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow h = x + k$$

$$\phi = -\frac{x}{y} + x + k$$

$$\phi = C \Rightarrow -\frac{x}{y} + x + k = c \Rightarrow -\frac{x}{y} + x = C_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -C_1 + x = \frac{x}{y} \Rightarrow y = \frac{x}{x - C_1} \Rightarrow y = \frac{x}{x + C_2}$$

Resolución ejercicio 4)d) mediante el método de variables separables

$$(y^2 - y)\,dx + x\,dy = 0 \Rightarrow (y^2 - y)\,dx = -x\,dy \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{dx}{x} = -\int \frac{dy}{y^2 - y} \Rightarrow \ln x + \ln C = -\frac{1}{\sqrt{1}} \ln \frac{2y-1-1}{2y-1+1} \Rightarrow$$

$a = 1$
$b = -1$ $\qquad \Delta = 4ac - b^2 = 0 - 1 = -1$
$c = 0$

$$\Rightarrow \ln Cx = -\ln \frac{\cancel{2}y - \cancel{2}}{\cancel{2}y} \Rightarrow Cx = \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Cx = \frac{y}{y-1} \Rightarrow Cx(y-1) = y \Rightarrow Cxy - Cx = y \Rightarrow Cxy - y = Cx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y(Cx - 1) = Cx \Rightarrow y = \frac{Cx}{Cx-1} \Rightarrow y = \frac{x}{x - \frac{1}{C}} \Rightarrow y = \frac{x}{x+k} \quad \left(\text{con } k = -\frac{1}{C}\right)$$

4)e) Resolver las siguientes ecuaciones diferenciales totales exactas o convertibles a este tipo

$$(x+y^2)dx - 2yx\,dy = 0$$

e) $(x+y^2)\,dx - 2yx\,dy = 0$

$M = x+y^2 \qquad M'_y = 2y$

$N = -2yx \qquad N'_x = -2y$

$\Big\}$ no es DTE

$$\frac{M'_y - N'_x}{N} = \frac{2y+2y}{-2yx} = \frac{4}{-2x} = f(x)$$

$g(x)\,(x+y^2)\,dx - 2yx\,g(x)\,dy = 0$

$P = g\,(x+y^2) \qquad P'_y = g\,2y$

$Q = -2yx\,g \qquad Q'_x = -2yg + g'(-2yx)$

$\Big\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cancel{2}gy = -\cancel{2}\cancel{y}(g+g'x) \Rightarrow g = -g - \frac{dg}{dx}x \Rightarrow$

$\Rightarrow 2g = -\frac{dg}{dx}x \Rightarrow \int \frac{2}{x}\,dx = \int -\frac{dg}{g} \Rightarrow 2\ln x = -\ln g \Rightarrow$

$\Rightarrow \ln x^2 = \ln\frac{1}{g} \Rightarrow x^2 = \frac{1}{g} \Rightarrow g = \frac{1}{x^2}$

$P = \frac{1}{x^2}(x+y^2) = \frac{x+y^2}{x^2} \Rightarrow P'_y = \frac{2y}{x^2}$

$Q = \frac{1}{x^2}(-2y\cancel{x}) = \frac{-2y}{x} \Rightarrow Q'_x = -2y\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{2y}{x^2}$

$\Big\}$ es DTE

$$\frac{x+y^2}{x^2}\,dx - \frac{2y}{x}\,dy = 0$$

$\varphi = \int -\frac{2y}{x}\,dy = -\frac{y^2}{x} + h(x)$

$\varphi'_x = -y^2\left(-\frac{1}{x^2}\right) + h'(x) = \frac{y^2}{x^2} + h'(x)$

$\varphi'_x = \frac{x}{x^2} + \frac{y^2}{x^2}$

$\Big\} \Rightarrow h'(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow$

$\Rightarrow h = \int \frac{1}{x}\,dx \Rightarrow h = \ln x + c$

$\varphi = -\frac{y^2}{x} + \ln x + c = C_1 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{\ln x - \frac{y^2}{x} + k = 0} \Rightarrow \ln x = \frac{y^2}{x} + C_2$