Espacio Métrico

Espacio Vectorial Real n-dimensional

Definimos $R^n = \{ (x_1 , x_2 , ... , x_i , ... , x_n) / x_i \in R \text{ con } 1 \le i \le n \}$ siendo $n \in N$.
Para las eneúplas, podemos utilizar la siguiente notación:

$$\overline{X} = (x_1 , x_2 , ... , x_i , ... , x_n)$$

R^n cumple las condiciones necesarias para ser un espacio vectorial sobre R, por lo que decimos que $(R^n , R , + , \ . \ )$ es un espacio vectorial, considerando la operación "+" como la suma de vectores de R^n, y la operación " . " el producto de un vector por un escalar.
En relación a las operaciones mencionadas, definimos:
Sea $\overline{X} = (x_1 , x_2 , ... , x_i , ... , x_n) \in R^n$ y sea $\overline{Y} = (y_1 , y_2 , ... , y_i , ... , y_n) \in R^n$, entonces:

- $\overline{X} + \overline{Y} = (x_1 + y_1 , x_2 + y_2 , ... , x_i + y_i , ... , x_n + y_n)$
- Si $k \in R$, entonces $k \overline{X} = (k x_1 , k x_2 , ... , k x_i , ... , k x_n)$

A su vez, se definen otras operaciones para vectores de R^n:

♦ Producto interno o escalar: $\overline{X} \ . \ \overline{Y} = x_1 y_1 + x_2 y_2 + ... + x_i y_i + ... + x_n y_n = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

(el resultado de esta operación es un número real)

Norma de un vector de R^n

Se define la norma, longitud o módulo de un vector como:

$$\| \overline{X} \| = \sqrt{\overline{X} \ . \ \overline{X}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + ... + x_i^2 + ... + x_n^2}$$

La norma de un vector cumple con las siguientes propiedades (entre otras):

- $\| \overline{X} \| \ge 0$
- $\| \overline{X} \| = 0 \Leftrightarrow \overline{X} = \overline{0}$
- $\| \overline{X} + \overline{Y} \| \le \| \overline{X} \| + \| \overline{Y} \|$ desigualdad triangular
- $\| \overline{X} \ . \overline{Y} \| \le \| \overline{X} \| . \| \overline{Y} \|$ desigualdad de Cauchy-Schwarz

Distancia entre dos puntos de R^n

Es usual definir una distancia en cualquier espacio no vacío *A* como una función de *A*x*A* en el conjunto de los números reales, sujeta a determinadas exigencias o axiomas. Para que la función $d : A \times A \to R$ sea considerada una distancia, se deben cumplir los siguientes axiomas, siendo $X \in A , Y \in A , Z \in A$:

- $d(X , Y) \ge 0$
- $d(X , Y) = 0 \Leftrightarrow X = Y$
- $d(X , Y) = d(Y , X)$
- $d(X , Z) \le d(X , Y) + d(Y , Z)$

En R^n pueden definirse distintas funciones distancia que cumplan los axiomas pedidos, pero la que nos interesa es la llamada distancia euclídea:

$$d(\overline{X}\ ,\overline{Y})=\|\ \overline{X}-\overline{Y}\ \|=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)+.....+(x_i-y_i)^2+......(x_n-y_n)^2}=\left[\ \sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\ \right]^{1/2}$$

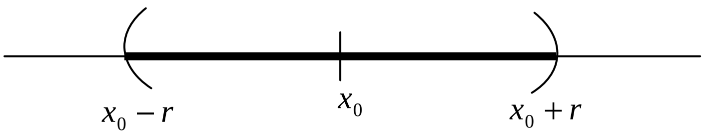
El espacio vectorial R^n en el cual se ha difinido la distancia euclídea, conforma lo que denominamos <u>espacio métrico euclídeo</u>. En dicho espacio métrico se ampliarán los conceptos topológicos estudiados en Análisis Matemático I.

<u>Topología elemental</u>

Recordemos cómo se define un entorno de centro $x_0 \in R$ y radio $r\in R^+$:

$$E(x_0\ ,r)=\{\, x\in R\,/\,\left|\, x-x_0\right|<r\,\}$$

Sabemos que $\left|\ x-x_0\ \right|<r \;\Leftrightarrow\; -r<x-x_0<r \;\Leftrightarrow\; x_0-r<x<x_0+r$



<u>Esfera abierta en R^n</u>

Si generalizamos el concepto de entorno en *R*, podemos definir una esfera abierta con centro en $X_0 \in R^n$ y radio $r\in R^+$: en este caso, en lugar del módulo deberá aparecer la norma, ya que trabajamos con vectores en R^n. La definición será:

$$E(X_0\ ,r)=\{X\in R^n\,/\,\|\ X-X_0\|<r\ \}$$

Veamos cuáles son las interpretaciones geométricas para los distintos valores de *n*, que definirán la dimensión de los espacios vectoriales.

i) Para $n=1$ resulta $x_0\in R$, por lo tanto:

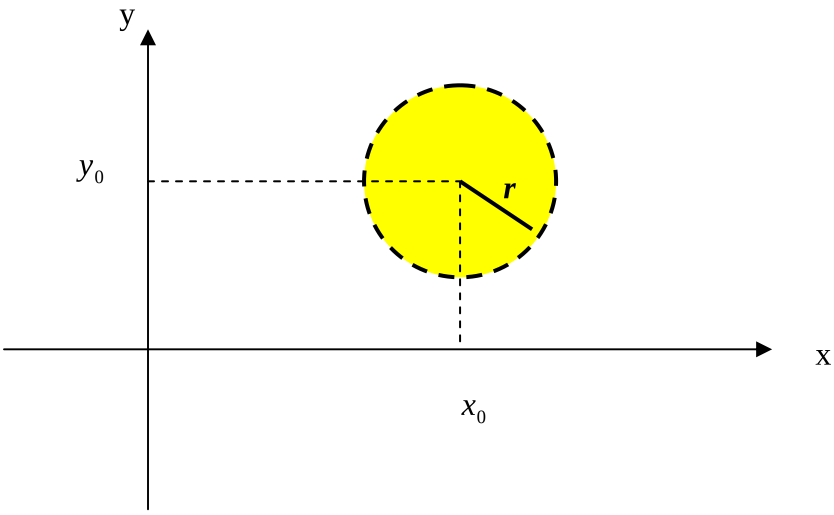
$$\|\ x-x_0\ \|<r\Leftrightarrow\sqrt{(x-x_0)^2}<r\Leftrightarrow\left|\ x-x_0\ \right|<r$$

Volvemos a la definición de entorno de x_0 en *R* como un caso particular.

ii) Para $n=2$ resulta $X_0=(x_0\ ,y_0)\in R^2$, por lo tanto:

$$\|\ X-X_0\ \|<r\Leftrightarrow\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<r\Leftrightarrow(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<r^2$$

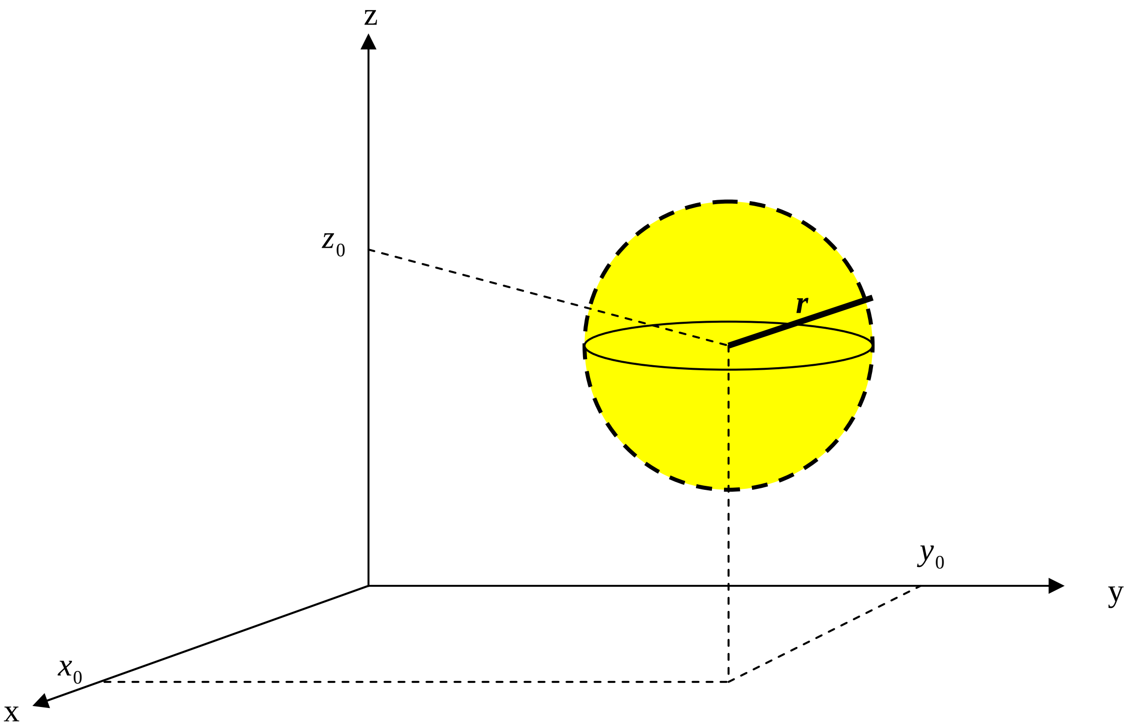
La inecuación $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<r^2$ representa geométricamente los puntos del plano correspondientes a un círculo con centro en $(x_0\ ,y_0)$ y radio r , sin la circunferencia frontera.



iii) Para $n = 3$ resulta $X_0 = (x_0 \,,\, y_0 \,,\, z_0) \in R^3$, por lo tanto:

$$\| X - X_0 \| < r \Leftrightarrow \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2} < r \Leftrightarrow (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 < r^2$$

La inecuación $(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 < r^2$ representa geométricamente los puntos del espacio correspondientes a una esfera con centro en $(x_0 \,,\, y_0 \,,\, z_0)$ y radio r, sin el casquete esférico frontera.



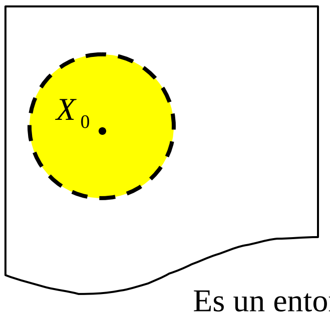
iv) Para $n \geq 4$ no hay interpretación geométrica.

Entorno de centro $X_0 \in R^n$

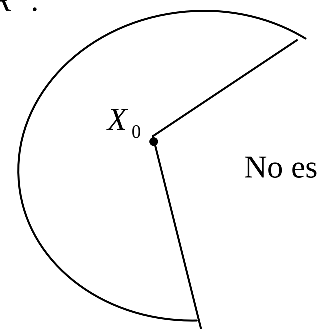
Un entorno de $X_0 \in R^n$ es un conjunto de puntos de R^n que incluye una esfera abierta con centro en X_0

$$U(X_0) \text{ es un entorno de } X_0 \Leftrightarrow \exists\, E(X_0, r) \,/\, E(X_0, r) \subset U(X_0)$$

Por ejemplo si consideramos un punto del plano $X_0 \in R^2$:



Es un entorno de X_0



No es un entorno de X_0

En general se asimila el entorno con la esfera abierta contenida en él.

Entorno reducido de centro $X_0 \in R^n$

Recordemos que en Análisis Matemático I llamamos entorno reducido de $x_0 \in R$ al conjunto de puntos del entorno de x_0 excluido el centro, es decir, excluyendo el punto x_0. Generalizando esta definición tenemos que:

$$U^*(X_0) = U(X_0) - \{ X_0 \}$$

Generalizaremos ahora una serie de definiciones topológicas que ya fueron estudiadas en Análisis Matemático I para conjuntos de números reales.

Punto interior

Sea $A \subset R^n$ y sea $X_0 \in A$. Se dice que X_0 es punto interior de *A* si se cumple que:

$$\exists\, U(X_0) \,/\, U(X_0) \subset A$$

Como mencionamos anteriormente, en general se asimila el entorno de un punto con la esfera abierta con centro en dicho punto que debe estar incluida en el entorno. Por lo tanto, la definición de punto interior puede escribirse como:

$$\exists\, E(X_0, r) \ (\text{con } r > 0) \,/\, E(X_0, r) \subset A$$

Punto exterior

Sea $A \subset R^n$ y sea $X_0 \in R^n$. Se dice que X_0 es punto exterior de *A* si se cumple que:

$$\exists\, U(X_0) \,/\, U(X_0) \cap A = \phi$$

Utilizando el concepto de esfera abierta:

$$\exists\, E(X_0\,, r)\ \text{(con } r>0\text{)}\ /\ E(X_0\,, r)\cap A=\phi$$

<u>Punto frontera</u>

Sea $A\subset R^n$ y sea $X_0\in R^n$. Se dice que X_0 es punto frontera de A si:

$$\forall\, U(X_0)\ \text{se cumple que}\ \begin{cases} U(X_0)\cap A\neq\phi \\ U(X_0)\cap(R^n-A)\neq\phi \end{cases}$$

Utilizando el concepto de esfera abierta:

$$\forall\, r\in R^+\ \text{se cumple que}\ \begin{cases} E(X_0\,, r)\cap A\neq\phi \\ E(X_0\,, r)\cap(R^n-A)\neq\phi \end{cases}$$

Tengamos en cuenta que el punto frontera puede o no pertenecer al conjunto en cuestión.

<u>Punto aislado</u>

Sea $A\subset R^n$ y sea $X_0\in A$. Se dice que X_0 es punto aislado de A si se cumple que:

$$\exists\, U^*(X_0)\ /\ U^*(X_0)\cap A=\phi$$

Utilizando el concepto de esfera abierta:

$$\exists\, E^*(X_0\,, r)\ \text{(con } r>0\text{)}\ /\ E^*(X_0\,, r)\cap A=\phi$$

Los puntos aislados de un conjunto son puntos frontera de dicho conjunto ya que cumplen con la definición.

<u>Punto de acumulación</u>

Sea $A\subset R^n$ y sea $X_0\in R^n$. Se dice que X_0 es punto de acumulación de A si:

$$\forall\, U^*(X_0)\ \text{se cumple que}\ U^*(X_0)\cap A\neq\phi$$

Utilizando el concepto de esfera abierta:

$$\forall\, r\in R^+\ \text{se cumple que}\ E^*(X_0\,, r)\cap A\neq\phi$$

El punto de acumulación puede o no pertenecer al conjunto en cuestión.

<u>Conjunto derivado</u>

Sea $A\subset R^n$, el conjunto derivado de A es el conjunto de todos sus puntos de acumulación.

$$A'=\{X\in R^n\ /\ X\ \text{es punto de acumulación de}\ A\ \}$$

<u>Conjunto abierto</u>

Sea $A\subset R^n$, se dice que A es abierto si todos sus puntos son interiores.

<u>Conjunto cerrado</u>

Sea $A\subset R^n$, se dice que A es cerrado si le pertenecen todos sus puntos de acumulación, es decir que $A'\subset A$.

<u>Conjunto acotado</u>

Para un conjunto $A\subset R$ se dice que está acotado si $\forall x\in A$ se cumple que $m<x<M$ (siendo $m\in R$ y $M\in R$). Al número m se lo denomina cota inferior y a M cota superior.

Esta definición puede generalizarse diciendo que $A \subset R$ está acotado si $\forall x \in A$ se cumple que $|x| < k$, siendo $k \in R^+$

Esta definición es la que queremos generalizar para conjuntos n-dimensionales. Veamos:

$|x| < k \Leftrightarrow |x - 0| < k$. Esta última desigualdad corresponde a la inecuación que define un entorno con centro en 0 y radio k. Por lo tanto, el conjunto *A* estará acotado si existe un entorno con centro en el origen que contenga al conjunto *A*. Simbólicamente:

A está acotado si $\exists\, E(0\,,k)$ (siendo $k > 0$) tal que $A \subset E(0\,,k)$

Generalizamos esta definición:

Sea $A \subset R^n$, se dice que *A* es acotado si $\exists\, E(\bar{0}\,,k)$ (siendo $k > 0$) tal que

$$A \subset E(\bar{0}\,,k)$$

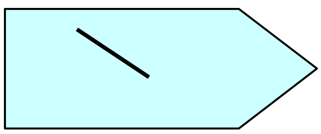
Por lo tanto el conjunto A estará acotado si existe una bola abierta con centro en el origen que lo contenga.

<u>Conjunto compacto</u>

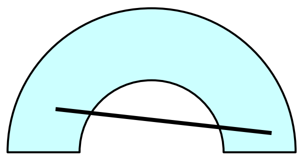
Sea $A \subset R^n$, se dice que *A* es compacto si es cerrado y acotado.

<u>Conjunto convexo</u>

Sea $A \subset R^n$, se dice que *A* es convexo si para todo par de puntos pertenecientes al conjunto, el segmento determinado por dichos puntos está totalmente contenido en el conjunto.



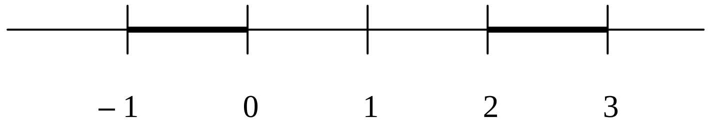
Convexo



No convexo

<u>Conjunto conexo</u>

De manera intuitiva, podemos decir que la propiedad de conexidad de un conjunto nos dice si el conjunto está constituido por una o varias piezas. Por ejemplo en *R*, el conjunto A = [1 , 2] es conexo, en tanto el conjunto B = [-1,0] $\cup$ [2 , 3] no es conexo.

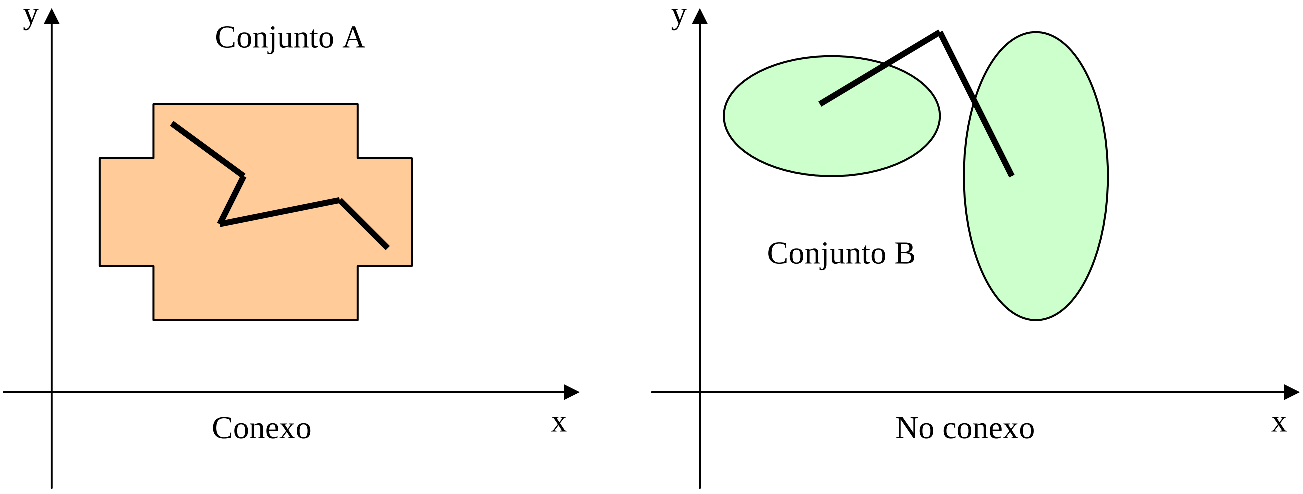


La definición topológica de conjunto conexo en R^n es un poco compleja:

Se dice que un conjunto $A \subset R^n$ es conexo si la única manera de escribir a *A* como la unión disjunta de dos subconjuntos abiertos de *A* es la trivial, es decir: $A = A \cup \phi$.

Para acercarnos más al concepto geométrico de conjunto conexo como conjunto constituido por “una sola pieza”, vamos a efectuar una definición para R^2 que resulta más accesible.

Se dice que el conjunto $A \subset R^2$ es un conjunto conexo si todo par de puntos pertenecientes al conjunto puede unirse mediante una poligonal totalmente contenida en el conjunto.

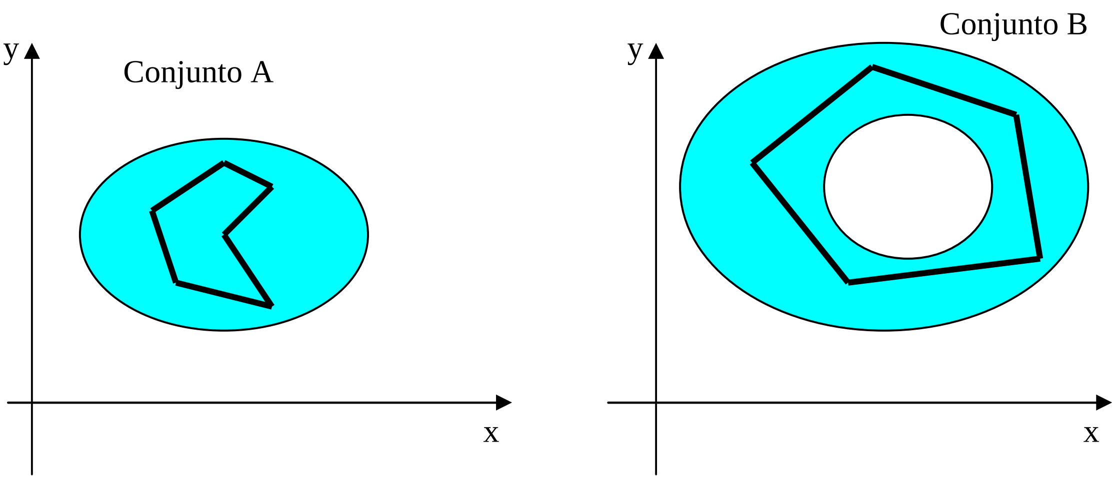


El conjunto A es conexo, ya que cualquier par de puntos pertenecientes al conjunto que consideremos, pueden unirse mediante una poligonal cuyos puntos estén totalmente incluidos en A. Observemos que A es conexo pero no convexo.

El conjunto B no es conexo, ya que para ciertos pares de puntos del conjunto es imposible construir una poligonal que los una y que esté totalmente incluida en B.

<u>Conjunto simplemente conexo</u>.
Para definir conjuntos simplemente conexos también nos referiremos a subconjuntos de R^2, donde la definición es más accesible.
Intuitivamente, un conjunto conexo será simplemente conexo si no tiene "agujeros".

Se dice que el conjunto $A \subset R^2$ es simplemente conexo (siendo A conexo), si toda poligonal cerrada cuyos puntos pertenecen a A determina un polígono que está totalmente incluido en el conjunto A.



Tanto el conjunto A como el conjunto B son conexos, sin embrago, el conjunto B **no es** simplemente conexo, ya que una de las poligonales cerradas cuyos puntos pertenecen al conjunto determina un polígono que no está contenido en B.