POLINOMIO DE TAYLOR – EXTREMOS

DIFERENCIALES SUCESIVAS

En la unidad temática Diferenciabilidad hemos definido el diferencial total de una función en un punto interior de su dominio. Recordemos dicha definición para campos escalares de R^2 en R.

Sea $f : D \subset R^2 \to R$, y sea (x_0, y_0) un punto interior de *D*. Si $f \in C^1$ en (x_0, y_0), entonces se define el diferencial total:

$$d\ f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f'_y(x_0, y_0)(y - y_0)$$

Si denominamos *dx* al incremento de la variable *x*, y *dy* al incremento de la variable *y*, el diferencial total se expresa como:

$$d\ f(x_0, y_0) = f'_x(x_0, y_0)\ dx + f'_y(x_0, y_0)\ dy$$

A partir del diferencial total en un punto, puede definirse la función diferencial total, de la siguiente manera:

Sea el campo escalar $f : D \subset R^2 \to R$, de modo que $f \in C^1$ en D, se define la función diferencial total como:

$$d\ f = f'_x\ dx + f'_y\ dy$$

La función diferencial total es un campo escalar de dos variables, que puede volver a diferenciarse, para hallar la diferencial segunda. Definimos:

Sea el campo escalar $f : D \subset R^2 \to R$, de modo que $f \in C^2$ en *D*, se define la función diferencial total segunda como:

$$d(d\ f) = d^2 f = d(f'_x\ dx + f'_y\ dy) = \frac{\partial}{\partial x}(f'_x\ dx + f'_y\ dy)\ dx + \frac{\partial}{\partial y}(f'_x\ dx + f'_y\ dy)\ dy$$

Recordemos que tanto *dx* como *dy* son los incrementos de las variables, es decir, son números reales. Por ello resulta que:

$$d^2 f = \frac{\partial}{\partial x}(f'_x\ dx + f'_y\ dy)\ dx + \frac{\partial}{\partial y}(f'_x\ dx + f'_y\ dy)\ dy = (f''_{xx}\ dx + f''_{yx}\ dy)dx + (f''_{xy}\ dx + f''_{yy}\ dy)dy =$$

$$d^2 f = f''_{xx}\ dx^2 + f''_{yx}\ dy\,dx + f''_{xy}\ dx\,dy + f''_{yy}\ dy^2$$

Dado que el campo escalar $f \in C^2$ en *D*, se cumple el teorema de Schwartz, y las derivadas cruzadas son iguales. Por lo tanto:

$$d^2 f = f''_{xx}\ dx^2 + 2 f''_{xy}\ dx\,dy + f''_{yy}\ dy^2$$

Este proceso puede continuar, diferenciando la diferencial segunda para obtener la diferencial tercera; diferenciar la diferencial tercera para obtener la diferencial cuarta, y así sucesivamente. La diferencial de orden *n* puede obtenerse mediante el siguiente operador:

$$d^n f = \left(\frac{\partial}{\partial x}dx + \frac{\partial}{\partial y}dy\right)^{(n)}(f) = \left(\frac{\partial}{\partial x}(x - x_0) + \frac{\partial}{\partial y}(y - y_0)\right)^{(n)}(f)$$

Para que quede bien definida la diferencial enésima $d^n f$, el campo escalar $f : D \subset R^2 \to R$ debe ser clase C^n en *D*.

POLINOMIO DE TAYLOR

Repasamos el desarrollo en serie de Taylor y el polinomio de Taylor para funciones escalares de AMI.

Sea $f : D \subset R \to R$, sea x_0 un punto interior de *D*, con f es derivable hasta el orden $n+1$ en x_0. Entonces, en un entorno de x_0 se verifica que:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!} f'''(x_0)(x-x_0)^3 + ... + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n + T_{n+1}$$

$$T_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(c)\ (x-x_0)^{n+1} \quad \text{con} \quad x < c < x_0 \quad \vee \quad x_0 < c < x$$

Se puede aproximar la función f en un entorno del punto x_0 considerando el Polinomio de Taylor, que consiste en el polinomio asociado al anterior desarrollo en serie de Taylor, sin tener en cuenta el término T_{n+1} (llamado resto o término complementario). El polinomio de Taylor de grado *n* se define como:

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{1}{2!} f''(x_0)(x-x_0)^2 + \frac{1}{3!} f'''(x_0)(x-x_0)^3 + ... + \frac{1}{n!} f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n$$

Este concepto se puede generalizar para funciones de varias variables.

Definición:

Sea $f : D \subset R^n \to R$, sea X_0 un punto interior de *D*, con f diferenciable hasta el orden $n+1$ en X_0 ($f \in C^{n+1}$ en X_0). Entonces, en un entorno de X_0 se verifica que:

$$f(X) = f(X_0) + df(X_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(X_0) + \frac{1}{3!} d^3 f(X_0) + ... + \frac{1}{n!} d^{(n)} f(X_0) + T_{n+1}$$

$$T_{n+1} = \frac{1}{(n+1)!} d^{(n+1)} f(X_0 + cH) \quad \text{con} \quad 0 < c < 1 \quad \wedge \quad H = X - X_0$$

Se puede aproximar el campo escalar f en un entorno del punto X_0 considerando el Polinomio de Taylor, que consiste en el polinomio asociado al anterior desarrollo en serie de Taylor, sin tener en cuenta el término T_{n+1} (llamado resto o término complementario). El polinomio de Taylor de grado *n* se define como:

$$P_n(X) = f(X_0) + df(X_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(X_0) + \frac{1}{3!} d^3 f(X_0) + ... + \frac{1}{n!} d^n f(X_0)$$

Caso particular para $f : D \subset R^2 \to R$

Desarrollamos el polinomio de Taylor de segundo orden para un campo escalar $f : D \subset R^2 \to R$, en un punto interior de su dominio (x_0, y_0), sabiendo que $f \in C^2$ en (x_0, y_0).

$$P_2(x,y) = f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0) + \frac{1}{2!} d^2 f(x_0,y_0)$$

$$P_2(x,y) = f(x_0,y_0) + [\, f'_x(x_0,y_0)\,(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)\,(y-y_0)] + \frac{1}{2}[\, f''_{xx}(x_0,y_0)\,(x-x_0)^2 + 2 f''_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) +$$
$$+ f''_{yy}(x_0,y_0)\,(y-y_0)^2]$$

Una propiedad importante y muy utilizada en los ejercicios, es que el valor de la función en el punto (x_0, y_0), y el valor de sus derivadas parciales en (x_0, y_0) (de primer orden y las sucesivas), coinciden con el valor del polinomio Taylor en (x_0, y_0) y de sus derivadas en dicho punto (de primer orden y las sucesivas). Demostramos esta propiedad para un campo escalar $f : D \subset R^2 \to R$ con un polinomio de Taylor de orden 2 desarrollado en un punto (x_0, y_0) interior de su dominio.

Sabiendo que:

$$P(x,y) = f(x_0,y_0) + [f'_x(x_0,y_0)(x-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)] + \frac{1}{2}[f''_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 + 2f''_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + $$
$$+ f''_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2]$$

Evaluamos los siguientes casos:

$$P(x_0,y_0) = f(x_0,y_0) + [f'_x(x_0,y_0)(x_0-x_0) + f'_y(x_0,y_0)(y_0-y_0)] + \frac{1}{2}[f''_{xx}(x_0,y_0)(x_0-x_0)^2 + 2f''_{xy}(x_0,y_0)(x_0-x_0)(y_0-y_0) + $$
$$+ f''_{yy}(x_0,y_0)(y_0-y_0)^2] \Rightarrow \boxed{P(x_0,y_0) = f(x_0,y_0)}$$

$$P'_x(x,y) = f'_x(x_0,y_0) + \frac{1}{2}[2f''_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0) + 2f''_{xy}(x_0,y_0)(y-y_0)]$$

$$P'_x(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0) + \frac{1}{2}[2f''_{xx}(x_0,y_0)(x_0-x_0) + 2f''_{xy}(x_0,y_0)(y_0-y_0)] \Rightarrow \boxed{P'_x(x_0,y_0) = f'_x(x_0,y_0)}$$

$$P'_y(x,y) = f'_y(x_0,y_0) + \frac{1}{2}[2f''_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0) + 2f''_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)]$$

$$P'_y(x_0,y_0) = f'_y(x_0,y_0) + \frac{1}{2}[2f''_{xy}(x_0,y_0)(x_0-x_0) + 2f''_{yy}(x_0,y_0)(y_0-y_0)] \Rightarrow \boxed{P'_y(x_0,y_0) = f'_y(x_0,y_0)}$$

$$P''_{xx}(x,y) = \frac{1}{2}[2f''_{xx}(x_0,y_0)] = f''_{xx}(x_0,y_0) \Rightarrow \boxed{P''_{xx}(x_0,y_0) = f''_{xx}(x_0,y_0)}$$

$$P''_{xy}(x,y) = \frac{1}{2}[2f''_{xy}(x_0,y_0)] = f''_{xy}(x_0,y_0) \Rightarrow \boxed{P''_{xy}(x_0,y_0) = f''_{xy}(x_0,y_0) = P''_{xy}(x_0,y_0)}$$

$$P''_{yy}(x,y) = \frac{1}{2}[2f''_{yy}(x_0,y_0)] = f''_{yy}(x_0,y_0) \Rightarrow \boxed{P''_{yy}(x_0,y_0) = f''_{yy}(x_0,y_0)}$$