ECUACIONES DIFERENCIALES DE 2do. ORDEN

EDO LINEALES DE 2do. ORDEN

Funciones linealmente independientes

Para poder justificar las soluciones de las EDO de 2do. orden que vamos a analizar, debemos trabajar con ciertos conceptos previos. Comenzamos definiendo funciones linealmente independiente.

Dado el conjunto de funciones $\{ y_1(x), y_2(x), \ldots, y_i(x), \ldots, y_n(x)\}$ definidas en [a , b], y las constantes $c_1, c_2, \ldots, c_i, \ldots, c_n$, se propone la siguiente ecuación:

$$c_1 y_1(x) + c_2\, y_2(x) + \ldots + c_i\, y_i(x) + \ldots + c_n\, y_n(x) = 0 \qquad \forall x \in [a\,,b] \qquad (1)$$

Si la ecuación (1) se verifica solamente cuando $c_1 = c_2 = \ldots = c_i = \ldots = c_n = 0$, entonces el conjunto de funciones $\{ y_1(x), y_2(x), \ldots, y_i(x), \ldots, y_n(x)\}$ es un conjunto linealmente independiente (LI).

Si la ecuación (1) se verifica con alguna constante no nula, es decir, se satisface con $c_i \neq 0$ para algún valor de $1 \leq i \leq n$, entonces el conjunto de funciones $\{ y_1(x), y_2(x), \ldots, y_i(x), \ldots, y_n(x)\}$ es un conjunto linealmente dependiente (LD).

Para analizar la dependencia o independencia lineal de un conjunto de funciones, definimos el Wronskiano, que resulta un determinante funcional.

Sean las funciones $\{ y_1(x), y_2(x), \ldots, y_i(x), \ldots, y_n(x)\}$ definidas en [a , b], y derivables hasta el orden $n-1$ en $(a\,,b)$. Definimos:

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_n) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots\cdots & y_n \\ y_1' & y_2' & \cdots\cdots & y_n' \\ y_1'' & y_2'' & \cdots\cdots & y_n'' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \cdots\cdots & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix}$$

Teorema (conjunto de funciones LI)

Sean las funciones $\{ y_1(x), y_2(x), \ldots, y_i(x), \ldots, y_n(x)\}$ definidas en [a , b], y derivables hasta el orden $n-1$ en $(a\,,b)$.

Si $W(y_1, y_2, \ldots, y_i, \ldots, y_n) \neq 0 \quad \forall x \in [a,b] \quad \Rightarrow \quad \{ y_1(x), y_2(x), \ldots, y_i(x), \ldots, y_n(x)\}$ es un conjunto LI

EDO LINEALES DE 2do. ORDEN, LINEALES A COEFICIENTES CONSTANTES.

Definición y clasificación

Una ecuación diferencial de 2do. orden, lineal y a coeficientes constantes es una ecuación del tipo:

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = Q(x)$$

siendo $a_2 \neq 0$, con $a_i \in R \quad \forall\, i = 0,1,2$.

- Si $Q(x) = 0$ la ED se denomina **incompleta u homogénea**
- Si $Q(x) \neq 0$ la ED se denomina **completa**

Teorema: resolución EDO 2do. orden, lineales a coeficientes constantes, homogéneas

Sea la ecuación diferencial de 2do. orden, lineal y a coeficientes constantes dada por:

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (\text{con} \quad a_2 \neq 0)$$

Sean dos soluciones particulares de dicha ecuación, las funciones $y_1(x) \wedge y_2(x)$, de modo que $\{\, y_1(x), y_2(x) \,\}$ es un conjunto LI. Entonces, la solución general de la ecuación diferencial dada es:

$$y_H = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x) \quad \text{con } c_1, c_2 \in R$$

Demostración:

Demostraremos que y_H es solución de la ecuación diferencial. Para ello, sustituimos la función y_H y sus derivadas en la ecuación diferencial para verificar que la satisface.

$$y_H = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x)$$

$$y'_H = c_1\, y'_1(x) + c_2\, y'_2(x)$$

$$y''_H = c_1\, y''_1(x) + c_2\, y''_2(x)$$

Sustituyendo en la ED:

$$a_2[c_1\, y''_1(x) + c_2\, y''_2(x)] + a_1[c_1\, y'_1(x) + c_2\, y'_2(x)] + a_0[c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x)] =$$

$$= a_2\, c_1\, y''_1(x) + a_2\, c_2\, y''_2(x) + a_1\, c_1\, y'_1(x) + a_1\, c_2\, y'_2(x) + a_0\, c_1\, y_1(x) + a_0\, c_2\, y_2(x) =$$

$$= c_1\, \underbrace{[a_2\ y''_1(x) + a_1\ y'_1(x) + a_0\ y_1(x)]}_{0} + c_2\, \underbrace{[a_2\ y''_2(x) + a_1\ y'_2(x) + a_0\ y_2(x)]}_{0} = 0$$

porque $y_1(x) \wedge y_2(x)$ son SP de la ecuación diferencial, y por lo tanto, la verifican.

Hemos demostrado que $y_H = c_1\, y_1(x) + c_2\, y_2(x)$ satisface la ecuación diferencial, y por ello es solución de la misma. Debemos demostrar ahora que se trata de una solución general.

Dado que la EDO es de segundo orden, su solución general deberá tener dos constantes esenciales y arbitrarias. Debemos demostrar entonces que las constantes c_1 y c_2 son esenciales.

Debido a que el conjunto $\{ y_1(x) , y_2(x) \}$ es un conjunto LI, no puede expresarse una de las funciones como combinación lineal de la otra. Es decir, $y_1(x) \neq a\, y_2(x) \quad \wedge \quad y_2(x) \neq b\, y_1(x) \quad (a, b \in R)$. Por ello, no es posible reescribir la solución planteada de forma tal que puedan realizarse procedimientos algebraicos para reagrupar las constantes c_1 y c_2. En este sentido, dichas constantes resultan esenciales.

Soluciones particulares de la EDO lineal de 2º orden a coeficientes constantes, homogénea

Consideramos la ecuación $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ (con $a_2 \neq 0$).

Para este tipo de ecuaciones diferenciales recordemos que la solución general será de la forma $y = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, según el teorema visto anteriormente, donde y_1 e y_2 son soluciones particulares de la misma. En este caso buscamos las funciones y_1 y y_2, linealmente independientes, de modo que la solución general resulte una combinación lineal de estas funciones.

Como debemos proponer una solución a la ecuación, comenzamos por analizar las ecuaciones diferenciales lineales de primer orden a coeficientes constantes, homogénea. En este caso, la ecuación será: $a_1 y' + a_0 y = 0$ (con $a_1 \neq 0$). Podemos resolverla aplicando la metodología de variables separables:

$$a_1 y' + a_0 y = 0$$

$$y' = -\frac{a_0}{a_1} y$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{a_0}{a_1} y$$

$$\frac{dy}{y} = -\frac{a_0}{a_1} dx \quad \text{Si hacemos } k = -\frac{a_0}{a_1} \text{ tenemos:}$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int k\, dx$$

$$\ln y = kx + c$$

Consideramos la solución particular en la cual $c = 0$. En este caso: $y = e^{kx}$.

La solución particular hallada es una función exponencial. Suponiendo que esto puede generalizarse a las ecuaciones lineales de 2º orden, proponemos como solución particular otra función exponencial. Es decir, para la ecuación $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$ proponemos como solución particular la función $y = e^{kx}$. El problema ahora es hallar el valor de la constante k para que la función propuesta resulte solución de la ecuación. Para ello veremos qué condiciones deben cumplirse para que la solución propuesta satisfaga la ecuación diferencial. Por lo tanto:

$$y = e^{kx} \qquad y' = ke^{kx} \qquad y'' = k^2 e^{kx}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$

$$a_2 k^2 e^{kx} + a_1 k e^{kx} + a_0 e^{kx} = 0 \Rightarrow e^{kx}(a_2 k^2 + a_1 k + a_0) = 0$$

Como $\forall x \in R : e^{kx} \neq 0$, debe cumplirse que:

$$a_2 k^2 + a_1 k + a_0 = 0$$

Ahora podemos hallar los valores de k para que la solución propuesta sea solución particular de la ecuación: los valores de k serán las raíces de una ecuación de segundo grado.

Este polinomio se denomina **polinomio característico** de la ecuación diferencial, y para armarlo se utilizan los mismos coeficientes de la ecuación que se desea resolver.

Las raíces del polinomio característico nos permitirán hallar las soluciones particulares que, mediante una combinación lineal, generen la solución general de la ecuación.

La situación que se plantea ahora, es ver qué sucede en cada uno de los distintos casos posibles para las raíces de polinomios de segundo grado: raíces reales distintas, una raíz doble, raíces complejas conjugadas. En todos los casos habrá que identificar claramente las funciones y_1 y y_2, y demostrar que son linealmente independientes, para generar la solución general como combinación lineal de ellas.

Raíces reales distintas: suponemos las raíces del polinomio característico $k_1 \neq k_2$

En este caso, las soluciones particulares propuestas serán:

$$y_1 = e^{k_1 x} \qquad y_2 = e^{k_2 x}$$

Necesitamos probar que ambas funciones son LI. Para ello utilizamos el Wronskiano.

$$W(e^{k_1 x}, e^{k_2 x}) = \begin{vmatrix} e^{k_1 x} & e^{k_2 x} \\ k_1 e^{k_1 x} & k_2 e^{k_2 x} \end{vmatrix} = k_2 e^{(k_1+k_2)x} - k_1 e^{(k_1+k_2)x} = (k_2 - k_1) e^{(k_1+k_2)x}$$

Siendo $e^{(k_1+k_2)x} \neq 0 \quad \forall x \in R$, y además $k_2 - k_1 \neq 0$ porque $k_1 \neq k_2$, resulta que:

$$W(e^{k_1 x}, e^{k_2 x}) \neq 0 \Rightarrow \{y_1 \, , \, y_2\} \text{ es LI.}$$

Por lo tanto, la solución general será de la forma: $\boxed{y = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x}}$

Raíces reales iguales: suponemos las raíces del polinomio característico $k_1 = k_2$

Llamaremos $k = k_1 = k_2$ a la raíz doble del polinomio.

En este caso, las soluciones particulares propuestas serán:

$$y_1 = e^{kx} \qquad y_2 = e^{kx}$$

La función y_2 es claramente LD con la función y_1 (de hecho ambas funciones son iguales). Por ello debemos propones otra función y_2 para poder armar la solución general. Un método práctico para transformar dos funciones LD en LI es multiplicar una de ellas por la variable x. Por eso, en este caso proponemos como solución particular la función $y_2 = xe^{kx}$.

Ahora necesitamos probar que la función propuesta y_2 es solución de la ecuación diferencial de segundo orden, y además que es LI respecto de y_1.

Comencemos por analizar si y_2 es solución de la EDO. Para ello, la función $y_2 = xe^{kx}$ debe satisfacer la ecuación diferencial. Por lo tanto:

$$y_2 = xe^{kx} \qquad y_2' = e^{kx} + kxe^{kx} \qquad y_2'' = ke^{kx} + ke^{kx} + k^2 xe^{kx} = 2ke^{kx} + k^2 xe^{kx}$$

Reemplazando en la ecuación diferencial:

$$a_2(2ke^{kx}+k^2xe^{kx})+a_1(e^{kx}+kxe^{kx})+a_0(xe^{kx})=e^{kx}(2ka_2+k^2xa_2+a_1+kxa_1+a_0x)=$$
$$=e^{kx}[x(a_2k^2+a_1k+a_0)+(2ka_2+a_1)]=\ \otimes$$

La expresión $a_2k^2+a_1k+a_0$ se anula porque k es raíz del polinomio característico.

A su vez, la expresión $2ka_2+a_1$ también es igual a 0. Esto se debe a que el número k es raíz doble del polinomio característico. Recordando un teorema de Análisis Matemático I, si un número es raíz de multiplicidad mayor que 1 de un polinomio, será también raíz de su derivada.

Siendo $P(x)=a_2x^2+a_1x+a_0=a_2(x-k)^2$, resulta $P'(x)=2a_2(x-k) \quad \Rightarrow \quad P'(k)=0$.

Si analizamos la derivada de la expresión polinómica de P: $P'(x)=2a_2x+a_1$. Por lo tanto, $2a_2k+a_1=0$

Volviendo a lo anterior:

$$\otimes\ =\ e^{kx}[x(a_2k^2+a_1k+a_0)+(2ka_2+a_1)]=e^{kx}[x.0+0]=0$$

Por lo tanto la función propuesta y_2 es solución de la ecuación diferencial. Ahora deberemos probar que el conjunto $\{y_1\ ,\ y_2\}$ es LI. Vamos a utilizar el Wronskiano.

$$W(e^{kx},xe^{kx})=\begin{vmatrix} e^{kx} & xe^{kx} \\ ke^{kx} & e^{kx}+kxe^{kx} \end{vmatrix}=e^{2kx}(1+kx)-e^{2kx}(kx)=e^{2kx}(1+kx-kx)=e^{2kx}\neq 0$$

Siendo $e^{2kx}\neq 0 \quad \forall x\in R$ (por tratarse de una función exponencial), resulta:

$$W(e^{k_1x},e^{k_2x})\neq 0 \Rightarrow \{y_1\ ,\ y_2\} \text{ es LI.}$$

Por lo tanto, la solución general será de la forma: $\boxed{y=C_1e^{kx}+C_2xe^{kx}}$

Raíces complejas conjugadas: suponemos las raíces del polinomio característico

$$k_1=a+bi \quad \wedge \quad k_2=a-bi$$

En este caso, las soluciones particulares propuestas serán:

$$y_1=e^{(a+bi)x} \qquad y_2=e^{(a-bi)x}$$

Ya sabemos que ambas funciones son soluciones de la EDO de segundo orden, por la forma en que fueron obtenidas, por lo tanto debemos probar que ambas sean LI para obtener la solución general. Para ello utilizamos el Wronskiano.

$$W(e^{(a+bi)x}, e^{(a-bi)x}) = \begin{vmatrix} e^{(a+bi)x} & e^{(a-bi)x} \\ (a+bi)e^{(a+bi)x} & (a-bi)e^{(a-bi)x} \end{vmatrix} = e^{(a+bi)x}e^{(a-bi)x}(a-bi) - e^{(a+bi)x}e^{(a-bi)x}(a+bi) =$$

$$= e^{(a+bi)x}e^{(a-bi)x}(a-bi-a-bi) = e^{(a+bi)x}e^{(a-bi)x}(-2bi) \neq 0$$

Sabemos que $e^{(a+bi)x} \neq 0 \quad \wedge \quad e^{(a-bi)x} \neq 0 \quad \forall x \in R$, por tratarse de funciones exponenciales.

En este caso, resulta $b \neq 0$ porque las raíces son números complejos, por lo que la parte imaginaria de dichas raíces debe ser no nula. Por lo tanto $-2bi \neq 0$, y tenemos que:

$$W(e^{(a+bi)x}, e^{(a-bi)x}) \neq 0 \Rightarrow \{y_1 , y_2\} \text{ es LI.}$$

Por lo tanto, la solución general será de la forma: $y = C_1\, e^{(a+bi)x} + C_2\, e^{(a-bi)x}$

Vamos a transformar esta expresión mediante la fórmula de Euler. Recordemos que:

$$e^{bi} = \cos b + i\ sen b$$

Aplicando esta fórmula, obtenemos lo siguiente:

$$y = C_1 e^{(a+bi)x} + C_2\, e^{(a-bi)x} = C_1 e^{ax} e^{bix} + C_2 e^{ax} e^{-bix} =$$
$$= e^{ax}\left[C_1(\cos bx + i\ sen bx) + C_2(\cos(-bx) + i\ sen(-bx))\right] =$$

Aplicando propiedades de paridad e imparidad de las funciones seno y coseno, se obtiene:

$$= e^{ax}(C_1 \cos bx + iC_1\, sen\, bx + C_2 \cos bx - iC_2\, sen\, bx) = e^{ax}[(C_1 + C_2)\cos bx + (iC_1 - iC_2)\ sen\, bx] =$$

Renombrando a las constantes de la siguiente manera: $Q_1 = C_1 + C_2$ y $Q_2 = iC_1 - iC_2$ resulta una expresión para la solución general de la forma:

$$\boxed{y = e^{ax}(Q_1 \cos bx + Q_2\ sen\, bx)}$$

siendo *a* la parte real de las raíces del polinomio característico y *b* el módulo de la parte imaginaria de dichas raíces.

Este tipo de procedimiento se generaliza para resolver ecuaciones diferenciales lineales a coeficientes constantes de orden *n* (con $n \geq 3$): se determina el polinomio característico de la ecuación diferencial y se hallan las raíces asociadas a dicho polinomio. Para armar la solución general, se van sumando las soluciones particulares asociadas a cada una de las raíces del polinomio característico, multiplicadas cada una de ellas por una constante esencial y arbitraria.

Resolvemos algunos ejercicios.

Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $y'' + y' - 2y = 0$

El polinomio característico es: $k^2 + k - 2 = 0$

Las raíces del polinomio característico son: $k_1 = 1 \quad \wedge \quad k_2 = -2$

Como ambas raíces son reales y distintas, la solución general de la EDO es:

$$y = c_1\, e^{x} + c_2\, e^{-2x}$$

b) $y'' - 6y' + 9y = 0$

El polinomio característico es: $k^2 - 6k + 9 = 0$

Las raíces del polinomio característico son: $k_1 = 3 \quad \wedge \quad k_2 = 3$

Como la raíz es una raíz doble, la solución general de la EDO es:

$$y = c_1\, e^{3x} + c_2\, x\, e^{3x}$$

c) $y^{IV} - y'' - 6y = 0$

El polinomio característico es: $k^4 - k^2 - 6 = 0$

Las raíces del polinomio característico son: $k_1 = \sqrt{3} \quad , \quad k_2 = -\sqrt{3} \quad , \quad k_3 = \sqrt{2}\, i \quad , \quad k_4 = -\sqrt{2}\, i$

En este caso, hay dos raíces reales distintas, y un par de raíces complejas conjugadas. Por ello, la solución general de la EDO es:

$$y = c_1\, e^{\sqrt{3}x} + c_2\, e^{-\sqrt{3}x} + e^{0.x}[c_3 \cos(\sqrt{2}\; x) + c_4 \sin(\sqrt{2}\; x)]$$

$$y = c_1\, e^{\sqrt{3}x} + c_2\, e^{-\sqrt{3}x} + c_3 \cos(\sqrt{2}\; x) + c_4 \sin(\sqrt{2}\; x)$$

Ecuaciones diferenciales de segundo orden, lineales, a coeficientes constantes, completas

La forma general de estas ecuaciones es:

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = Q(x) \quad (\text{con} \quad a_2 \neq 0 \;\wedge\; Q(x) \neq 0)$$

Una vez que hemos resuelto las ecuaciones de segundo orden homogéneas, vamos a tratar de hallar un método para resolver las ecuaciones completas. Para ello comenzamos por plantear el siguiente teorema.

Teorema

Sea la ecuación lineal de segundo orden lineal a coeficientes constantes no homogénea (o completa), de la forma

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = Q(x) \quad (\text{con} \quad a_2 \neq 0 \;\wedge\; Q(x) \neq 0) \qquad \otimes$$

Sea y_H la solución general de la ecuación diferencial homogénea asociada a la anterior, es decir que y_H es la solución general de la ecuación

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0 \quad (\text{con} \quad a_2 \neq 0)$$

Sea y_P una solución particular de la ecuación $\otimes$.

Entonces, la solución general de $\otimes$ está dada por: $\quad y_G = y_H + y_P$

Demostración

Debemos probar que y_G es solución de la ecuación diferencial, es decir que y_G satisface la ecuación $\otimes$.

$$y_G = y_H + y_P \quad \Rightarrow \quad y'_G = y'_H + y'_P \quad \Rightarrow \quad y''_G = y''_H + y''_P$$

Sustituyendo en la ecuación:

$$a_0(y_H + y_P) + a_1(y'_H + y'_P) + a_2(y''_H + y''_P) = a_0 y_H + a_0 y_P + a_1 y'_H + a_1 y'_P + a_2 y''_H + a_2 y''_P =$$

$$= \underbrace{\left[a_0 y_H + a_1 y'_H + a_2 y''_H\right]}_{0} + \underbrace{\left[a_0 y_P + a_1 y'_P + a_2 y''_P\right]}_{Q(x)} = 0 + Q(x) = Q(x)$$

porque y_H es SG de la ecuación homogénea

porque y_P es una SP de la ecuación $\otimes$

La solución $y_G = y_H + y_P$ es solución general porque posee dos constantes esenciales y arbitrarias: las constantes que aparecen en y_H.

Para hallar entonces la solución general de una ecuación diferencial de segundo orden completa, comenzamos por obtener la solución general de la ecuación diferencial homogénea asociada (y_H), que ya sabemos cómo encontrarla. Necesitamos entonces un método que nos permita obtener la solución particular asociada a la ecuación completa (y_P).

Método de los coeficientes indeterminados

Consideramos la ecuación diferencial

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = Q(x) \quad (\text{con } \ a_2 \neq 0 \ \wedge \ \ Q(x) \neq 0)$$

Este método es aplicable si la función $Q(x)$ es polinómica, exponencial, senos, cosenos o suma de algunas de las anteriores.

Si $y_H = C_1 \ y_1(x) + C_2 \ y_2(x)$ es la solución general de la ecuación diferencial homogénea asociada, este método consiste en proponer una solución particular y_P que tenga la misma estructura algebraica que $Q(x)$, y que además sea linealmente independiente respecto de $y_1(x) \ \wedge \ y_2(x)$.

Veamos algunos ejemplos (TP 12 ejercicio 8)

Primer ejemplo: Hallar la solución de la ecuación diferencial: $\qquad y'' - y' - 2y = 4x^2$

1) Como $y_G = y_H + y_P$, hallamos la solución general de la ED homogénea asociada: $y'' - y' - 2y = 0$

Determinamos el polinomio característico y hallamos sus raíces

$$k^2 - k - 2 = 0 \quad \Rightarrow \quad k_1 = 2 \quad \wedge \quad k_2 = -1$$

Las raíces del polinomio característico son reales y distintas. Por ello, resulta:

$$y_H = c_1 \ e^{2x} + c_2 \ e^{-x}$$

2) Proponemos una solución particular con la misma estructura algebraica de $Q(x)$. Dado que dicha función es un polinomio de segundo grado, se propone:

$$y_P = a\,x^2 + b\,x + c$$

Verificamos que la función propuesta es LI respecto de las funciones asociadas a la solución de la ecuación diferencial homogénea (y_H). En este caso, esa condición se verifica.

3) Sabiendo que y_P es solución de la ecuación diferencial, sustituimos dicha función en la ecuación dada para hallar los valores de los parámetros a , b y c , de modo tal que se satisfaga la ED.

$$y_P = a\,x^2 + b\,x + c \quad \Rightarrow \quad y_P' = 2a\,x + b \quad \Rightarrow \quad y_P'' = 2a$$

Reemplazamos en la ED original $\ y'' - y' - 2y = 4x^2$:

$$y_P'' - y_P' - 2y_P = 4x^2 \quad \Rightarrow \quad 2a - (2a\,x + b) - 2(a\,x^2 + b\,x + c) = 4x^2 \quad \Rightarrow$$

$$-2a\,x^2 + (-2a - 2b)x + (2a - b - 2c) = 4x^2 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -2a = 4 \\ -2a - 2b = 0 \\ 2a - b - 2c = 0 \end{cases}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones resulta: $a = -2 \quad , \quad b = 2 \quad , \quad c = -3$

Por ello, la solución particular es $\ y_P = -2\,x^2 + 2\,x - 3$

4) Obtenemos la solución general de la ecuación diferencial completa

$$\boxed{y_G = y_H + y_P = c_1 \ e^{2x} + c_2 \ e^{-x} - 2x^2 + 2x - 3}$$

Segundo ejemplo: Hallar la solución de la ecuación diferencial: $y''-y'-2y=2e^{3x}$

1) Como $y_G = y_H + y_P$, hallamos la solución general de la ED homogénea asociada: $y''-y'-2y=0$.
Este paso ya fue resuelto en el ejemplo anterior, de modo que: $y_H = c_1\, e^{2x} + c_2\, e^{-x}$

2) Proponemos una solución particular con la misma estructura algebraica de $Q(x)$. Dado que dicha función es exponencial, se propone:

$$y_P = a\, e^{3x}$$

Verificamos que la función propuesta es LI respecto de las funciones asociadas a la solución de la ecuación diferencial homogénea (y_H). En este caso, esa condición se verifica.

3) Sabiendo que y_P es solución de la ecuación diferencial, sustituimos dicha función en la ecuación dada para hallar el valor del parámetro a , de modo tal que se satisfaga la ED.

$$y_P = a\, e^{3x} \quad\Rightarrow\quad y_P' = 3a\, e^{3x} \quad\Rightarrow\quad y_P'' = 9a\, e^{3x}$$

Reemplazamos en la ED original $y''-y'-2y=2e^{3x}$:

$$y_P''-y_P'-2y_P = 2e^{3x} \quad\Rightarrow\quad 9a\, e^{3x} - 3a\, e^{3x} - 2a\, e^{3x} = 2e^{3x} \quad\Rightarrow\quad 4a\, e^{3x} = 2e^{3x} \quad\Rightarrow\quad a = \frac{1}{2}$$

Por ello, la solución particular es $y_P = \frac{1}{2} e^{3x}$

4) Obtenemos la solución general de la ecuación diferencial completa

$$\boxed{y_G = y_H + y_P = c_1\, e^{2x} + c_2\, e^{-x} + \frac{1}{2} e^{3x}}$$

Tercer ejemplo: Hallar la solución de la ecuación diferencial: $y''-y'-2y=-3\cos(2x)$

1) Como $y_G = y_H + y_P$, hallamos la solución general de la ED homogénea asociada: $y''-y'-2y=0$.
Este paso ya fue resuelto en el primer ejemplo, de modo que: $y_H = c_1\, e^{2x} + c_2\, e^{-x}$

2) Proponemos una solución particular con la misma estructura algebraica de $Q(x)$. Dado que dicha función es un coseno, se propone:

$$y_P = a\cos(2x) + b\sin(2x)$$

La función $Q(x)$ es un coseno, sin embargo, para generar la función y_P se suma también un seno, ya que el seno y el coseno se alternan en las derivadas sucesivas (siendo una ecuación diferencial de 2do. orden, siempre aparecerán seno o coseno en la derivada primera o segunda de y_P). De la misma manera, si la función $Q(x)$ es un seno, en la propuesta de la solución particular se sumará un coseno.

Verificamos que la función propuesta es LI respecto de las funciones asociadas a la solución de la ecuación diferencial homogénea (y_H). En este caso, esa condición se verifica.

3) Sabiendo que y_P es solución de la ecuación diferencial, sustituimos dicha función en la ecuación dada para hallar los valores de los parámetros a y b, de modo tal que se satisfaga la ED.

$$y_P = a\cos(2x) + b\sin(2x) \quad \Rightarrow \quad y'_P = -2a\sin(2x) + 2b\cos(2x) \quad \Rightarrow \quad y''_P = -4a\cos(2x) - 4b\sin(2x)$$

Reemplazamos en la ED original $y'' - y' - 2y = -3\cos(2x)$:

$$y''_P - y'_P - 2y_P = -3\cos(2x) \quad \Rightarrow \quad [-4a\cos(2x) - 4b\sin(2x)] - [-2a\sin(2x) + 2b\cos(2x)] - 2[a\cos(2x) +$$
$$+ b\sin(2x)] = -3\cos(2x) \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad (-6a - 2b)\cos(2x) + (-6b + 2a)\sin(2x) = -3\cos(2x) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} -6a - 2b = -3 \\ -6b + 2a = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{9}{20} \quad \wedge \quad b = \frac{3}{20}$$

Por ello, la solución particular es $y_P = \dfrac{9}{20}\cos(2x) + \dfrac{3}{20}\sin(2x)$

4) Obtenemos la solución general de la ecuación diferencial completa

$$\boxed{y_G = y_H + y_P = c_1\, e^{2x} + c_2\, e^{-x} + \frac{9}{20}\cos(2x) + \frac{3}{20}\sin(2x)}$$

Cuarto ejemplo: Hallar la solución de la ecuación diferencial: $y'' - y' - 2y = -4e^{2x}$

1) Como $y_G = y_H + y_P$, hallamos la solución general de la ED homogénea asociada: $y'' - y' - 2y = 0$. Este paso ya fue resuelto en el ejemplo anterior, de modo que: $y_H = c_1\, e^{2x} + c_2\, e^{-x}$

2) Proponemos una solución particular con la misma estructura algebraica de $Q(x)$. Dado que dicha función es exponencial, se propone:

$$y_P = a\, e^{2x}$$

Verificamos que la función propuesta es LI respecto de las funciones asociadas a la solución de la ecuación diferencial homogénea (y_H). En este caso, la función es LD respecto de $c_1 e^{2x}$ (de hecho, es la misma función, nombrando de manera diferente a la constante). Como la independencia lineal no se cumple, debemos proponer otra función que resulte solución particular.

Un método práctico para transformar dos funciones LD en LI es multiplicar una de ellas por la variable x. Por eso, en este caso proponemos como solución particular la función:

$$y_P = a\; x\; e^{2x}$$

3) Sabiendo que y_P es solución de la ecuación diferencial, sustituimos dicha función en la ecuación dada para hallar el valor del parámetro a, de modo tal que se satisfaga la ED.

$$y_P = a\,x\,e^{2x} \quad \Rightarrow \quad y'_P = a\, e^{2x} + 2a\; x\; e^{2x} \quad \Rightarrow \quad y''_P = 2a\, e^{2x} + 2a\, e^{2x} + 4a\; x\; e^{2x} = 4a\, e^{2x} + 4a\; x\; e^{2x}$$

Reemplazamos en la ED original $y'' - y' - 2y = -4e^{2x}$:

$$y''_P - y'_P - 2y_P = -4e^{2x} \quad \Rightarrow \quad [4a\, e^{2x} + 4a\; x\; e^{2x}] - [a\, e^{2x} + 2a\; x\; e^{2x}] - 2[a\; x\; e^{2x}] = -4e^{2x} \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 3a\, e^{2x} = -4e^{2x} \quad \Rightarrow \quad a = -\frac{4}{3}$$

Por ello, la solución particular es $y_P = -\dfrac{4}{3}\, x\, e^{2x}$

4) Obtenemos la solución general de la ecuación diferencial completa

$$\boxed{y_G = y_H + y_P = c_1\, e^{2x} + c_2\, e^{-x} - \frac{4}{3}\, x\, e^{2x}}$$

Resolvemos algunos ejercicios del TP 12

6)f) Halle la SG de la siguiente ecuación diferencial: $y'' + y' = 2\sin x$

6) f) $y'' + y' = 2\,\text{sen}\, x$

$y_G = y_H + y_P$

$\underline{y_H}$ $r^2 + r = 0 \Rightarrow r(r+1) = 0 \Rightarrow r = 0 \vee r = -1$

$y_H = c_1\, e^{0.x} + c_2 e^{-x} = c_1 + c_2 e^{-x}$

y_P propongo $y_P = A\,\text{sen}\, x + B\cos x$

$y'_P = A\cos x - B\,\text{sen}\, x$

$y''_P = -A\,\text{sen}\, x - B\cos x$

$y''_P + y'_P = -A\,\text{sen}\, x - B\cos x + A\cos x - B\,\text{sen}\, x =$

$= \text{sen}\, x\,(-A - B) + \cos x\,(-B + A)$ = 2 sen(x)

$\begin{cases} -A - B = 2 \\ -B + A = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = B \\ -2A = 2 \end{cases} \Rightarrow A = B = -1$

$y_P = -\text{sen}\, x - \cos x$

$\underline{y_G}$ $y_G = c_1 + c_2 e^{-x} - \text{sen}\, x - \cos x$

7) Hallar g de manera que $\overline{f}(x,y) = (y\,g'(x)\,,\,x^2 - g'(x))$ admita función potencial

7) $$\frac{\partial\left(y\,g'(x)\right)}{\partial y} = \frac{\partial\left(x^2 - g'(x)\right)}{\partial x}$$

$$g'(x) + 0 \cdot y = 2x - g''(x) \Rightarrow g'' + g' = 2x$$

y_H | $r^2 + r = 0 \Rightarrow r(1+r) = 0 \Rightarrow r = 0 \ \vee\ r = -1$

$$y_H = c_1 e^{0x} + c_2 e^{-x} \Rightarrow y_H = c_1 + c_2 e^{-x}$$

y_P | $y_P = Ax^2 + Bx + C \qquad y'_P = 2Ax + B \qquad y''_P = 2A$

$$y'' + y' = 2x \Rightarrow 2A + 2Ax + B = 2x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2A = 2 \\ 2A + B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 1 \\ B = -2 \end{cases} \qquad \text{hago } C = 0$$

$$y_P = x^2 - 2x$$

$$y_G = c_1 + c_2 e^{-x} + x^2 - 2x$$

$$g(x) = c_1 + c_2 e^{-x} + x^2 - 2x$$

$g'(x) = -c_2\,e^{-x} + 2x - 2 \quad \Rightarrow \quad \overline{f}(x,y) = (y\,(-c_2 e^{-x} + 2x - 2)\,,\,x^2 + c_2 e^{-x} - 2x + 2)$

$Dom\,\overline{f} = R^2$, simplemente conexo: se cumple la condición suficiente para la existencia de función potencial

Método de variación de los parámetros

Consideramos la ecuación diferencial

$$a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = Q(x) \quad (\text{con } \ a_2 \neq 0 \ \wedge \ \ Q(x) \neq 0) \qquad \otimes$$

Sea $y_H = C_1 \ y_1(x) + C_2 \ \ y_2(x)$ la solución general de la ecuación diferencial homogénea asociada a $\otimes$.

Proponemos como solución particular de $\otimes$ a la siguiente función:

$$y_P = u(x) \ y_1(x) + v(x) \ \ y_2(x)$$

con $u(x)$ y $v(x)$ funciones arbitrarias. Observemos que para armar y_P en la solución general de la ecuación diferencial homogénea, en lugar de las constantes esenciales proponemos dos funciones de x.

Para que esta y_P propuesta sea solución de la ecuación diferencial, debe satisfacer la ecuación $\otimes$. Por lo tanto realizaremos las derivadas primera y segunda de y_P para sustituir en la ecuación.

$$y_P = u \ y_1 + v \ y_2 \quad \Rightarrow \quad y'_P = u' \ y_1 + u \ y'_1 + v' \ y_2 + v \ y'_2$$

La derivada segunda será aún más complicada. Por lo tanto, siento u y v funciones arbitrarias, podemos imponer condiciones que faciliten los cálculos.

Pedimos entonces: $u' \ y_1 + v' \ y_2 = 0$

Bajo estas condiciones resulta:

$$y_P = u \ y_1 + v \ y_2 \quad \Rightarrow \quad y'_P = u \ y'_1 + v \ y'_2 \quad \Rightarrow \quad y''_P = u' \ y'_1 + u \ y''_1 + v' \ y'_2 + v \ y''_2$$

Sustituimos entonces en la ecuación $\otimes$, ya que si es solución debe satisfacer dicha ecuación.

$$a_0(u \ y_1 + v \ y_2) + a_1(u \ y'_1 + v \ y'_2) + a_2(u' \ y'_1 + u \ y''_1 + v' \ y'_2 + v \ y''_2) = Q(x)$$

$$a_0 \ u \ y_1 + a_0 \ v \ y_2 + a_1 \ u \ y'_1 + a_1 \ v \ y'_2 + a_2 \ u' \ y'_1 + a_2 \ u \ y''_1 + a_2 \ v' \ y'_2 + a_2 \ v \ y''_2 = Q(x)$$

$$u\underbrace{(a_0 \ y_1 + a_1 \ y'_1 + a_2 \ y''_1)}_{0} + v\underbrace{(a_0 \ y_2 + a_1 \ y'_2 + a_2 \ y''_2)}_{0} + a_2 \ u' \ y'_1 + a_2 \ v' \ y'_2 = Q(x)$$

Porque y_1 y y_2 son solución de la ecuación diferencial homogénea asociada a $\otimes$

$$a_2 \ u' \ y'_1 + a_2 \ v' \ y'_2 = Q(x)$$

$$u' \ y'_1 + v' \ y'_2 = \frac{Q(x)}{a_2} \quad \text{porque} \quad a_2 \neq 0$$

Tenemos entonces un sistema de ecuaciones que nos permite hallar las funciones u y v. La primera ecuación del sistema resulta de la condición impuesta para facilitar los cálculos, y la segunda ecuación surge del desarrollo algebraico anterior.

Por lo tanto:

$$\begin{cases} u' \ y_1 + v' \ y_2 = 0 \\ u' \ y'_1 + v' \ y'_2 = \dfrac{Q(x)}{a_2} \end{cases}$$

Aplicando la regla de Cramer para resolver el sistema tenemos que:

$$u' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \dfrac{Q(x)}{a_2} & y_2' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}$$

Tengamos en cuenta que el determinante del denominador nunca se hace cero, ya que se trata del Wronskiano $W(y_1 , y_2)$ que nunca se anula por ser las funciones LI.

Una vez obtenida la función u', se integra para obtener la función $u(x)$.

Análogamente resulta: $v' = \dfrac{\begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y_1' & \dfrac{Q(x)}{a_2} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}}$, y luego se integra para obtener la función $v(x)$

De este modo llegamos a la solución particular buscada para completar la solución general. Resulta $y_P = u\ y_1 + v\ y_2$

La expresión de la solución general será: $y_G = y_H + y_P = C_1\ y_1 + C_2\ y_2 + u\ y_1 + v\ y_2$

Resolvemos ejercicios del TP 12

6)d) Hallar la SG de la siguiente ecuación diferencial: $y'' + y = \sec x$

d) $y'' + y = \sec x$

y_H / $k^2 + 1 = 0 \rightarrow k_1 = i = 0 + i$, $k_2 = -i = 0 - i$

$y_H = e^{0x}(A \cos x + B \operatorname{sen} x)$

$y_H = A \cos x + B \operatorname{sen} x$

y_P /

$y_P = u \cos x + v \operatorname{sen} x$

$$\begin{cases} u' \cos x + v' \operatorname{sen} x = 0 \\ -u' \operatorname{sen} x + v' \cos x = \sec x \end{cases}$$

$$W = \begin{vmatrix} \cos x & \operatorname{sen} x \\ -\operatorname{sen} x & \cos x \end{vmatrix} = \cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x = 1$$

$$u' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \operatorname{sen} x \\ \sec x & \cos x \end{vmatrix}}{1} = -\operatorname{sen} x \sec x = -\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = -\operatorname{tg} x$$

$$\frac{du}{dx} = -\operatorname{tg} x \Rightarrow \int du = \int -\operatorname{tg} x \, dx \rightarrow u = \ln|\cos x|$$

$$v' = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 0 \\ -\operatorname{sen} x & \sec x \end{vmatrix}}{1} = \cos x \sec x = \frac{\cos x}{\cos x} = 1$$

$$\frac{dv}{dx} = 1 \Rightarrow \int dv = \int dx \Rightarrow v = x$$

$$y_P = \ln|\cos x| . \cos x + x \operatorname{sen} x$$

$$\boxed{y = A \cos x + B \operatorname{sen} x + \cos x \ln|\cos x| + x \operatorname{sen} x}$$

6)e) Hallar la SG de la siguiente ecuación diferencial: $y'' - 2y' + y = x^{-1}e^{x}$

e) $y'' - 2y' + y = \dfrac{e^x}{x}$ $\qquad y = y_H + y_P$

$\boxed{y_H}$ $y'' - 2y' + y = 0$

$r^2 - 2r + 1 = 0 \Rightarrow (r-1)^2 = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = 1$

$y_H = c_1 e^x + c_2 x e^x$

$$\begin{cases} u' e^x + v' x e^x = 0 \\ u' e^x + v'(e^x + x e^x) = \dfrac{e^x}{x} \end{cases}$$

$$W = \begin{vmatrix} e^x & x e^x \\ e^x & e^x + x e^x \end{vmatrix} = e^{2x} + \cancel{x e^{2x}} - \cancel{x e^{2x}} = e^{2x}$$

$$u' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & x e^x \\ \frac{e^x}{x} & e^x + x e^x \end{vmatrix}}{e^{2x}} \Rightarrow u' = \frac{-e^{2x}}{e^{2x}} = -1$$

$$\frac{du}{dx} = -1 \Rightarrow \int du = \int -dx \Rightarrow u = -x$$

$$v' = \frac{\begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{e^x}{x} \end{vmatrix}}{e^{2x}} = \frac{\frac{e^{2x}}{x}}{e^{2x}} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{dv}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow \int dv = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow v = \ln|x|$$

$$y_P = -x e^x + \ln|x| \, x e^x$$

$$\boxed{y = c_1 e^x + c_2 x e^x - x e^x + x \ln|x| \, e^x}$$