DERIVADA DE FUNCIONES DE VARIAS VARIABLES.

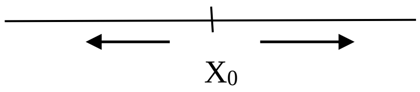
DERIVADA DE CAMPOS ESCALARES

En el caso de los campos escalares, también vamos a generalizar la definición de derivada de funciones escalares, donde se trabaja con el límite del cociente incremental. Repasemos la definición.

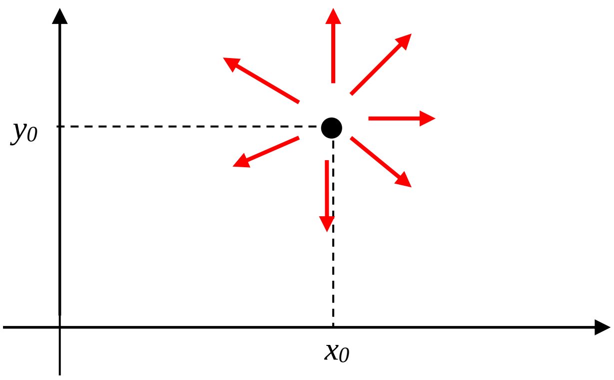
Sea $f : Dom\ f \subset R \rightarrow R$, y x_0 punto interior de *Dom f*. Se define la derivada de f en x_0 al siguiente límite:

$$f\,'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \quad \text{si el límite existe y es finito}$$

En el caso de las funciones escalares de AMI, para incrementar la variable tenemos que hacerlo sobre el eje x, por lo cual existe una única dirección de incremento.



Sin embargo, cuando trabajamos con campos vectoriales, las posibilidades de realizar un incremento desde un punto $\overline{X}_0$ son más complejas. Veamos el siguiente gráfico, para un punto de $(x_0, y_0) \in R^2$. Cuando queremos incrementar, podemos hacerlo en cualquiera de las direcciones marcadas con vectores rojos.



Esta idea de distintas direcciones para realizar el incremento, se puede generalizar a campos escalares definidos en un subconjunto de R^n.

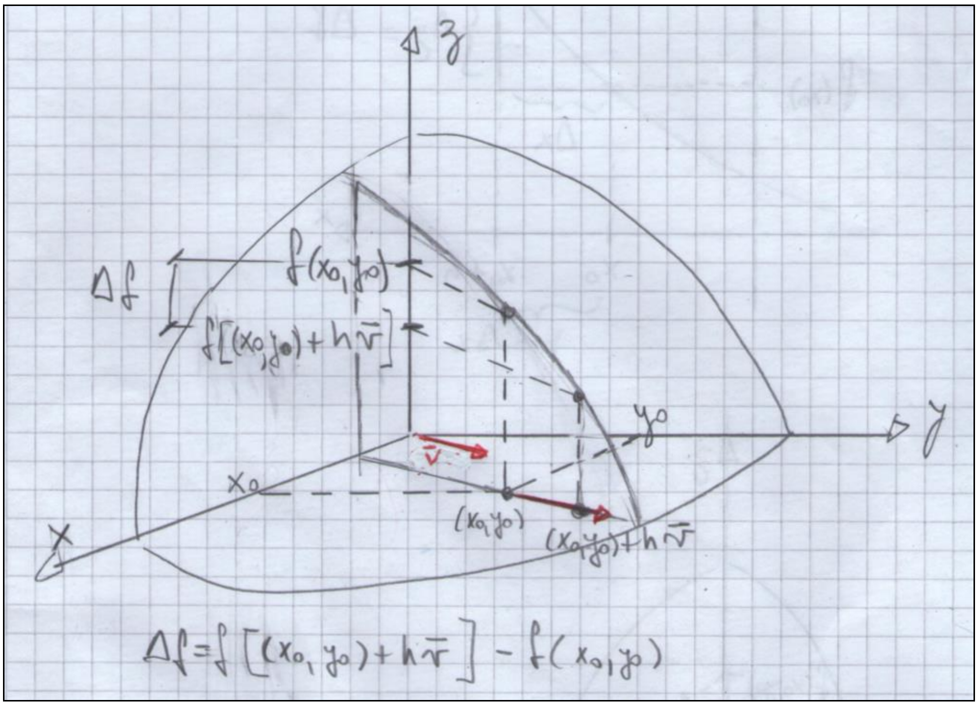
Por todo lo expuesto, cuando definimos la derivada de un campo escalar, no solamente debemos indicar el punto $\overline{X}_0$ en el cual se va a calcular dicha derivada, sino que debemos indicar un vector que nos da la dirección de incremento. Debido a que existen infinitos vectores para indicar la dirección de derivación, cada campo escalar tiene infinitas derivadas en un punto (siempre que estén definidas).

Definición: derivada de un campo escalar respecto de un VECTOR

Sea $f : D \subset R^n \rightarrow R$, sea $\overline{X}_0$ punto interior de D y sea $\overline{v} \in R^n$, $\overline{v} \neq \overline{0}$. Se define la derivada de f en $\overline{X}_0$ respecto del vector $\overline{v}$ al siguiente límite:

$$f\,'(\overline{X}_0, \overline{v}) = \frac{\partial f}{\partial \overline{v}}(\overline{X}_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\overline{X}_0 + h\overline{v}) - f(\overline{X}_0)}{h} \quad \text{si el límite existe y es finito}$$

Veamos un gráfico de los elementos involucrados en la definición de derivada respecto de un vector, para un campo escalar definido de un subconjunto de R^2 en R.



Como ejemplo, calculamos la derivada del campo escalar $f(x,y)=2x+3y$ en el punto (2 , –1) en la dirección del vector $\bar{v}=(1,1)$.

$$f\,'((2,-1)\,,(1,1))=\frac{\partial f}{\partial(1,1)}(2,-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f((2,-1)+h(1,1))-f(2,-1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h,-1+h)-(2.2-3.1)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h,-1+h)-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(2+h)+3(-1+h)-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4+2h-3+3h-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{5h}{h}=5$$

Si queremos que la derivada sea una tasa de cambio, el valor obtenido de 5 indicaría esa razón de cambio para la función, cuando nos desplazamos en la dirección del vector (1,1) a partir del punto (2 ,–1). Si calculamos la derivada de la misma función, para el mismo punto del dominio, pero respecto del vector (3,3), la dirección de incremento no se modifica (recordemos que (1,1) y (3,3) son vectores que tienen la misma dirección y sentido, aunque diferentes normas). Realicemos el cálculo de la derivada respecto del vector (3 , 3) y comparemos los resultados obtenidos.

$$f\,'((2,-1)\,,(3,3))=\frac{\partial f}{\partial(3,3)}(2,-1)=\lim_{h\to 0}\frac{f((2,-1)+h(3,3))-f(2,-1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h,-1+3h)-(2.2-3.1)}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(2+3h,-1+3h)-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(2+3h)+3(-1+3h)-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{4+6h-3+9h-1}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{15h}{h}=15$$

El valor de la derivada de f en el punto (2 ,–1) respecto del vector (1,1) es de 5, mientras que respecto del vector (3,3) es de 15, aún cuando no cambió la dirección y sentido de derivación. Por ello, esta derivada no está indicando una real tasa de cambio del campo f.

Podemos realizar otra observación: cuando triplicamos el módulo del vector que indica la dirección de derivación, se triplicó el valor de la derivada. Esta propiedad no es exclusiva del ejemplo anterior, sino que puede demostrase de forma general mediante el teorema que desarrollamos a continuación.

Teorema de homogeneidad

Sea $f: D \subset R^n \to R$, sea $\overline{X}_0$ punto interior de D y sea $\overline{v} \in R^n$, $\overline{v} \neq \overline{0}$. Si existes la derivada $f\,'(\overline{X}_0, \overline{v})$, entonces existe la derivada $f\,'(\overline{X}_0, k\overline{v})$ (con $k \in R - \{0\}$ ya que el vector de incremento no puede ser el vector nulo), y además $f\,'(\overline{X}_0, k\overline{v}) = k.\, f\,'(\overline{X}_0, \overline{v})$

<u>Demostración</u>: calculamos la derivada $f\,'(\overline{X}_0, k\overline{v})$ mediante la definición

$$f\,'(\overline{X}_0, k\,\overline{v}) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\overline{X}_0 + h(k\,\overline{v})) - f(\overline{X}_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(\overline{X}_0 + (hk)\overline{v}) - f(\overline{X}_0)}{h} \qquad (*)$$

Para continuar con el cálculo del límite, realizamos la siguiente sustitución:

$u = hk \Rightarrow h = \dfrac{u}{k}$ (porque $k \neq 0$). Siendo: $h \to 0 \Rightarrow$ h.k$\to 0 \Rightarrow u \to 0$

Evaluamos el límite (*) aplicando la sustitución:

$$\lim_{u\to 0} \frac{f(\overline{X}_0 + u\overline{v})) - f(\overline{X}_0)}{\frac{u}{k}} = \lim_{u\to 0} k\, \frac{f(\overline{X}_0 + u\overline{v})) - f(\overline{X}_0)}{u} = k\, \underbrace{\lim_{u\to 0} \frac{f(\overline{X}_0 + u\overline{v})) - f(\overline{X}_0)}{u}}_{f\,'(\overline{X}_0, \overline{v})} = k\, f'(\overline{X}_0, \overline{v})$$

Con la demostración de este teorema, vemos que la derivada respecto de un vector varía si cambia el módulo de dicho vector, aún cuando no se modifiquen la dirección y sentido del incremento. Por ello, para que la derivada de un campo escalar indique realmente la tasa de cambio de la función en la dirección de incremento, se define una nueva derivada que no dependa de la longitud del vector incremento.

Definición: derivada direccional de un campo escalar (respecto de un VERSOR)

Sea $f: D \subset R^n \to R$, sea $\overline{X}_0$ punto interior de D y sea $\breve{v} \in R^n$. Se define la derivada de f en $\overline{X}_0$ respecto del versor $\breve{v}$ al siguiente límite:

$$f\,'(\overline{X}_0, \breve{v}) = \frac{\partial f}{\partial \breve{v}}(\overline{X}_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\overline{X}_0 + h\breve{v}) - f(\overline{X}_0)}{h} \quad \text{si el límite existe y es finito}$$

La derivada direccional es un caso particular de la derivada respecto de un vector, ya que se define para vectores de módulo 1. Cuando se analice la derivabilidad de un campo escalar, se analizará la existencia de sus derivadas direccionales.

De todos los versores del espacio vectorial R^n, podemos considerar el caso particular de los versores de la base canónica. Con ellos vamos a realizar una nueva definición: las derivadas parciales.

Definición: derivada parcial de un campo escalar

Sea $E = \{\breve{e}_1, \breve{e}_2, ..., \breve{e}_i, ..., \breve{e}_n\}$ base canónica de R^n.

Sea $f: D \subset R^n \to R$, sea $\overline{X}_0$ punto interior de D. Se define la derivada parcial de f en $\overline{X}_0$ respecto de $\breve{e}_i$ al siguiente límite:

$$f\,'_{x_i}(\overline{X}_0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{X}_0) = f\,'(\overline{X}_0, \breve{e}_i) = \frac{\partial f}{\partial \breve{e}_i}(\overline{X}_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\overline{X}_0 + h\breve{e}_i) - f(\overline{X}_0)}{h} \quad \text{si el límite existe y es finito}$$

Si existen todas sus derivadas parciales en un punto, un campo escalar definido de un subconjunto de R^n en R tendrá *n* derivadas parciales. Sin embargo, para decir que un campo escalar es **derivable** en un punto habrá que analizar la **existencia de todas sus derivadas direccionales** en dicho punto. Recordemos que las derivadas parciales son solamente un caso particular de las derivadas direccionales, donde los versores corresponden a los versores de la base canónica del espacio vectorial.

Regla práctica para la obtención de las derivadas parciales

Para obtener una forma de cálculo sencilla para las derivadas parciales, vamos a particularizar la definición en un campo escalar $f : D \subset R^2 \to R$. En este caso $\overline{X}_0 = (x_0, y_0)$, y los versores de la base canónica son $E = \{ (1,0) , (0,1) \}$. Calculamos las dos derivadas parciales:

$$f'_x(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f((x_0, y_0) + h(1,0)) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f((x_0, y_0) + (h,0)) - f(x_0, y_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

En este caso, de las dos variables, solamente se incrementó la *x*. La variable *y* no se ve afectada por el incremento.

$$f'_y(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f((x_0, y_0) + h(0,1)) - f(x_0, y_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f((x_0, y_0) + (0,h)) - f(x_0, y_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

En este caso, de las dos variables, solamente se incrementó la *y*. La variable *x* no se ve afectada por el incremento.

De acuerdo a las observaciones realizadas, podemos aplicar una regla práctica para el cálculo de derivadas parciales. Para ello, se utilizan las reglas de derivación para la variable respecto de la cual se deriva, considerando la otra variable como una constante, ya que no sufre incrementos.

Como ejemplo, resolvemos un ejercicio del TP4

4)c) Halle las funciones derivadas parciales de 1er. orden de la siguiente función: $f(x, y) = x\, e^{x^2+y^2}$

Para hallar f_x' derivamos el campo escalar considerando la *x* variable, y la *y* constante.

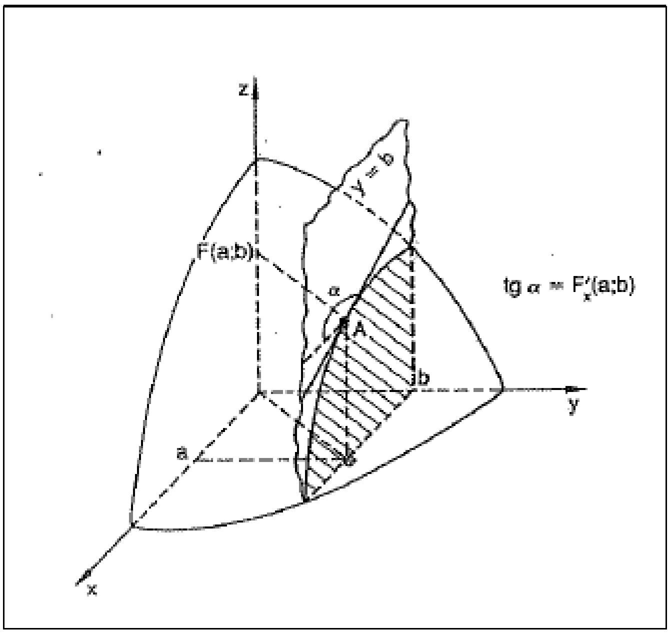
$$f_x' = e^{x^2+y^2} + x\, e^{x^2+y^2} . 2x = e^{x^2+y^2} + 2x^2\, e^{x^2+y^2}$$

Para hallar f_y' derivamos el campo escalar considerando la *y* variable, y la *x* constante.

$$f_y' = x\, e^{x^2+y^2} . 2y = 2x\, y\, e^{x^2+y^2}$$

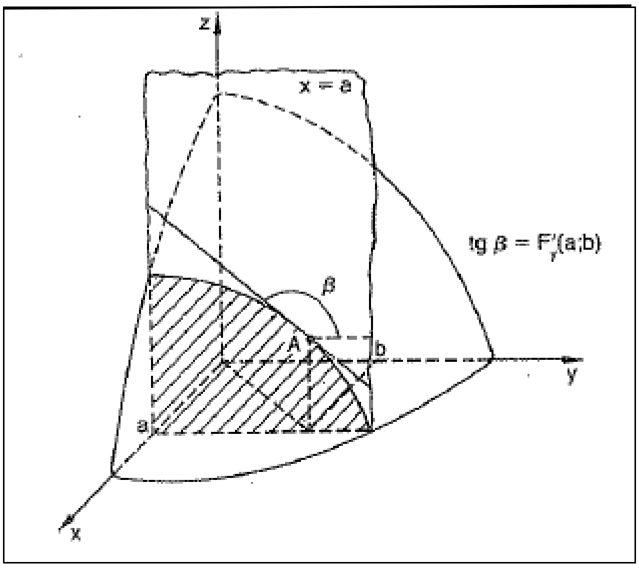
Interpretación geométrica de las derivadas parciales

Derivada parcial respecto de x



La derivada parcial $f_x'(a,b)$ es la pendiente de la recta tangente en el punto $A=(a,b,f(a,b))$, a la curva plana intersección de la superficie gráfica de ecuación $z=f(x,y)$ con el plano de ecuación $y=b$.

Derivada parcial respecto de y



La derivada parcial $f_y'(a,b)$ es la pendiente de la recta tangente en el punto $A=(a,b,f(a,b))$, a la curva plana intersección de la superficie gráfica de ecuación $z=f(x,y)$ con el plano de ecuación $x=a$.

Derivadas sucesivas

Como sucede con las funciones escalares de AMI, podemos considerar la situación de derivar de forma sucesiva un campo escalar. En este sentido, a partir de un campo escalar inicial de dos o más variables, se obtienen nuevos campos escalares definidos mediante las derivadas parciales primeras. Estas nuevas funciones pueden admitir, a su vez, nuevas derivadas parciales.

Tomemos como ejemplo el campo escalar del ejercicio 4)c) que resolvimos previamente, $f(x,y) = x\, e^{x^2+y^2}$

Derivando parcialmente obtuvimos:

$$f_x' = e^{x^2+y^2} + 2x^2\, e^{x^2+y^2}$$

$$f_y' = 2x\, y\, e^{x^2+y^2}$$

Estas funciones, que resultan derivadas parciales del campo escalar, pueden a su vez volver a derivarse parcialmente, tanto respecto de *x* como respecto de *y*.

● Derivamos $f_x' = e^{x^2+y^2} + 2x^2\, e^{x^2+y^2}$ respecto de *x*:

$$\frac{\partial}{\partial x}(f_x') = f''_{xx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2x e^{x^2+y^2} + 4x e^{x^2+y^2} + 2x^2\, e^{x^2+y^2}\, 2x = 6x e^{x^2+y^2} + 4x^3\, e^{x^2+y^2}$$

● Derivamos $f_x' = e^{x^2+y^2} + 2x^2\, e^{x^2+y^2}$ respecto de *y*:

$$\frac{\partial}{\partial y}(f_x') = f''_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2y e^{x^2+y^2} + 2x^2\, e^{x^2+y^2}\, 2y = 2y e^{x^2+y^2} + 4x^2 y\, e^{x^2+y^2}$$

● Derivamos $f_y' = 2x\, y\, e^{x^2+y^2}$ respecto de *x*:

$$\frac{\partial}{\partial x}(f_y') = f''_{yx} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 2y e^{x^2+y^2} + 2xy e^{x^2+y^2}\, .2x = 2y e^{x^2+y^2} + 4x^2 y e^{x^2+y^2}$$

● Derivamos $f_y' = 2x\, y\, e^{x^2+y^2}$ respecto de *y*:

$$\frac{\partial}{\partial y}(f_y') = f''_{yy} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2x e^{x^2+y^2} + 2xy e^{x^2+y^2}\, .2y = 2x e^{x^2+y^2} + 4xy^2\, e^{x^2+y^2}$$

Análogamente puede continuarse el proceso derivando parcialmente las derivadas parciales segundas, y obtener las derivadas parciales terceras f'''_{xxx} , f'''_{xxy} , f'''_{xyx} , f'''_{xyy} , f'''_{yxx} , f'''_{yxy} , f'''_{yyx} , f'''_{yyy} . Derivando parcialmente las derivadas terceras se obtienen las derivadas cuartas, y así sucesivamente.

Las derivadas f''_{xy} y f''_{yx} se denominan derivadas cruzadas. Observen que para el ejemplo anterior resulta $f''_{xy} = f''_{yx} \quad \forall (x,y) \in R^2$, es decir, que las derivadas cruzadas son iguales. Para generalizar este resultado, es necesario que el campo escalar cumpla ciertas condiciones, que se explicitan en el siguiente teorema.

Teorema de Schwartz

Sea $f : D \subset R^2 \to R$, sea $\overline{X}_0$ punto interior de *D*. Si se cumple que $\exists\, f'_x$, $\exists f'_y$, $\exists f''_{xy}$, y todas ellas son continuas en un entorno de $\overline{X}_0$, entonces $\exists f''_{yx}(\overline{X}_0)$ y además $f''_{yx}(\overline{X}_0) = f''_{xy}(\overline{X}_0)$

Este teorema puede generalizarse para campos escalares definidos de R^n en R. Por otro lado, el teorema se extiende a las derivadas parciales de orden superior, siempre que se verifiquen las condiciones de hipótesis para las derivadas previas correspondientes.

En el siguiente gráfico, las derivadas recuadradas con el mismo color son iguales si se cumplen las hipótesis del teorema de Schwartz

$$f\begin{cases} f'_x\begin{cases} f''_{xx}\begin{cases} f'''_{xxx}\begin{cases}\cdots\\ \cdots\end{cases}\\ \boxed{f'''_{xxy}}\begin{cases}\cdots\\ \cdots\end{cases}\end{cases}\\ \boxed{f''_{xy}}\begin{cases} \boxed{f'''_{xyx}}\begin{cases}\cdots\\ \cdots\end{cases}\\ \boxed{f'''_{xyy}}\begin{cases}\cdots\\ \cdots\end{cases}\end{cases}\end{cases}\\ f'_y\begin{cases} \boxed{f''_{yx}}\begin{cases} \boxed{f'''_{yxx}}\begin{cases}\cdots\\ \cdots\end{cases}\\ \boxed{f'''_{yxy}}\begin{cases}\cdots\\ \cdots\end{cases}\end{cases}\\ f''_{yy}\begin{cases} \boxed{f'''_{yyx}}\begin{cases}\cdots\\ \cdots\end{cases}\\ f'''_{yyy}\begin{cases}\cdots\\ \cdots\end{cases}\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

Gradiente de un campo escalar

De acuerdo a lo que estuvimos desarrollando hasta el momento, sabemos que un campo escalar $f: D \subset R^n \to R$ tiene n derivadas parciales (si es que todas ellas están definidas). Estas derivadas parciales se organizan en un vector llamado gradiente, que se define de la siguiente manera:

Sea $f: D \subset R^n \to R$, sea $\overline{X}_0$ punto interior de *D*. Si existen todas las derivadas parciales $\dfrac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{X}_0)$ $\forall 1 \leq i \leq n$, se define el gradiente del campo escalar *f* en $\overline{X}_0$:

$$\nabla f(\overline{X}_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\overline{X}_0)\,,\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(\overline{X}_0)\,, \ldots.,\ \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{X}_0)\,,\ \ldots.\,,\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(\overline{X}_0)\right)$$

Ejemplo: dado el campo escalar $f(x,y,z) = x^2yz - 3xy + 2z^3x$ hallar $\nabla f(1,0,-2)$

$$\nabla f = (f'_x\,,\ f'_y\,,\ f'_z) = (2xyz - 3y + 2z^3\,,\ x^2z - 3x\,,\ x^2y + 6z^2x) \Rightarrow \nabla f(1,0,-2) = (-16,-5,24)$$

Resolvemos algunos ejercicios del TP4

6) Dada $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$

a) Pruebe que f no es continua en (0,0)

b) Pruebe que $f'(\bar{0},\breve{r})$ sólo queda definida para $\breve{r}$: (1,0) , (-1,0) , (0,1) , (0,-1)

6) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & si\ (xy)\neq(00)\\ 0 & si\ (xy)=(00)\end{cases}$

a) Continuidad

i) $\exists f(0,0)=0$

ii) $\lim\limits_{(xy)(00)} f(x,y)=\lim\limits_{(xy)(00)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$

$\boxed{y=mx}$ $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\,mx}{x^2+m^2x^2}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{m\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}(1+m^2)}=$

$=\dfrac{m}{1+m^2}$ depende de m $\therefore \nexists L \Rightarrow f$ no es continua en $\bar{0}$

b) Derivabilidad $\breve{r}=(a,b)/\ a^2+b^2=1$

$f'((0,0),\breve{r})=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f[(0,0)+h(a,b)]-\overbrace{f(0,0)}^{=0}}{h}=$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(ha,hb)}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\dfrac{ha\,hb}{h^2a^2+h^2b^2}}{h}=$

$=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{\cancel{h^2}ab}{\cancel{h^2}\underbrace{(a^2+b^2)}_{=1}}\cdot\dfrac{1}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{ab}{h}$

si $ab\neq0$ $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{ab}{h}=\infty \therefore \nexists f'(\bar{0},\breve{r})$

si $ab=0$ $\lim\limits_{h\to0}\dfrac{ab}{h}=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{0}{h}=0$

si $ab=0$ $\exists f'(\bar{0},\breve{r})=0$

$ab=0 \Rightarrow a=0 \vee b=0$ → $a=0$, $b=0$

$\breve{r}_1=(0,1)$ $\breve{r}_2=(0,-1)$
$\breve{r}_3=(1,0)$ $\breve{r}_4=(-1,0)$

7) Dada $g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Demostrar que $\forall \breve{r}\in R^2$ la función es derivable en el origen, aun cuando g es discontinua en (0,0)

7) $g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2} & si\ (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & si\ (x,y)=(0,0)\end{cases}$

Derivabilidad $\qquad \acute{r}=(a,b)\ /\ a^2+b^2=1$

$$g'(\bar{0},\acute{r})=\frac{\partial g}{\partial \acute{r}}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{g[(0,0)+h(a,b)]-\overbrace{g(0,0)}^{=0}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{g(ha,hb)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\dfrac{h^3a^3hb}{h^6a^6+h^2b^2}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{h^4a^3b}{\cancel{h^2}(h^4a^6+b^2)}\cdot\frac{1}{\cancel{h}}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{ha^3b}{h^4a^6+b^2}=0$$

Luego g es derivable en toda dirección y sentido en (0,0)

Continuidad

i) $g(0,0)=0$

ii) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} g(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3y}{x^6+y^2}$

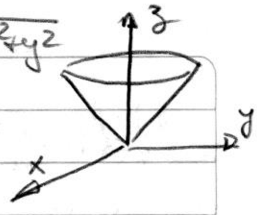
$l_{12}=l_{21}=0$

$\boxed{y=x^3}\quad \lim_{x\to 0}\dfrac{x^3x^3}{x^6+x^6}=\dfrac{1}{2}\neq l_{12}=0\ \nexists L\Rightarrow g$ no continua en $\bar{0}$

g es derivable en toda direcc y sentido en (0,0) pero no es continua en (0,0)

9) Demuestre por definición que $f: R^2 \to R \,/\, f(x,y) = \sqrt{4x^2 + y^2}$ es continua pero no admite derivadas parciales en el origen

gráfico f: $z = \sqrt{4x^2+y^2}$



9) $f(x,y) = \sqrt{4x^2+y^2}$

Continuidad

i) $f(0,0) = 0$

ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{4x^2+y^2} = 0 = L$

iii) $f(0,0) = L$

Luego f es continua en $(0,0)$

Derivadas parciales

$$\left.\begin{aligned} f'_x &= \frac{1}{2\sqrt{4x^2+y^2}} \cdot 8x \\ f'_y &= \frac{1}{2\sqrt{4x^2+y^2}} \cdot 2y \end{aligned}\right\} \text{ no pueden evaluarse en } (0,0)$$

Por definición:

$$f'_x(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f[(0,0)+h(1,0)] - \overbrace{f(0,0)}^{=0}}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{4h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{2|h|}{h}$$

$$\left.\begin{aligned} &\lim_{h\to 0^+} \frac{2h}{h} = 2 \\ &\lim_{h\to 0^-} \frac{2(-h)}{h} = -2 \end{aligned}\right] \neq \ \nexists \lim \therefore \nexists f'_x(0,0)$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f[(0,0)+h(0,1)] - f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{\sqrt{h^2}}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{|h|}{h} \left\langle \begin{aligned} &\lim_{h\to 0^+} \frac{h}{h} = 1 \\ &\lim_{h\to 0^-} \frac{-h}{h} = -1 \end{aligned} \right] \neq \ \nexists \lim \ \nexists f'_y(0,0)$$

11)b) Estudie la derivabilidad en distintas direcciones y sentidos en el punto (0,0) para

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^2}{x} & si\ (x,y)\neq(0,y)\\ 0 & si\ (x,y)=(0,y)\end{cases}$$

11) b) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{y^2}{x} & si\ (x,y)\neq(0,y)\to x\neq 0\\ 0 & si\ (x,y)=(0,y)\to x=0\end{cases}$

Derivabilidad $\quad \check{v}=(a,b) / a^2+b^2=1$

$$\frac{\partial f}{\partial \check{v}}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f[(0,0)+h(a,b)]-\overbrace{f(0,0)}^{=0}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{f(ha,hb)}{h}=(*)$$

- si $ha=0\Rightarrow a=0$ (para $(0,1)$ ó $(0,-1)$)

$$(*)=\lim_{h\to 0}\frac{0}{h}=0$$

- si $ha\neq 0\Rightarrow a\neq 0$

$$(*)\lim_{h\to 0}\frac{\frac{h^2b^2}{ha}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h^2}b^2}{\cancel{h^2}a}=\frac{b^2}{a}$$

Es derivable en toda dirección y sentido en (0,0).

- Para $\check{v}_1=(0,1)$ y $\check{v}_2=(0,-1)$ la derivada es nula
- Para cualquier otro versor $\check{v}=(a,b)$, la derivada es $\frac{b^2}{a}$

Por ejemplo: hallamos $f'_x(0,0)=\frac{\partial f}{\partial(1,0)}(0,0)=\frac{0^2}{1}=0$

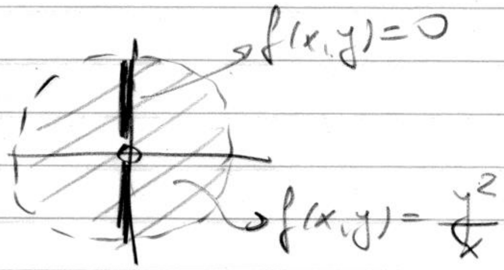
Hallamos $f'_y(0,0)=0$ (corresponde a $\check{v}_1$)

Hallamos $\dfrac{\partial f}{\partial\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}(0,0) = \dfrac{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2}{1/\sqrt{2}} = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

Analizamos continuidad en $(0,0)$

i) $f(0,0)=0$

ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$



$\boxed{x=0}$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} 0 = 0$

$\boxed{x\neq 0}$ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{y^2}{x}$

$\boxed{x=y^2}$ $\lim\limits_{y\to 0} \frac{y^2}{y^2} = 1 \neq L_{x=0} \Rightarrow \nexists L=0$

$\Rightarrow f$ no es continua en $(0,0)$

f es derivable en toda dirección y sentido en $(0,0)$, pero no es continua en $(0,0)$