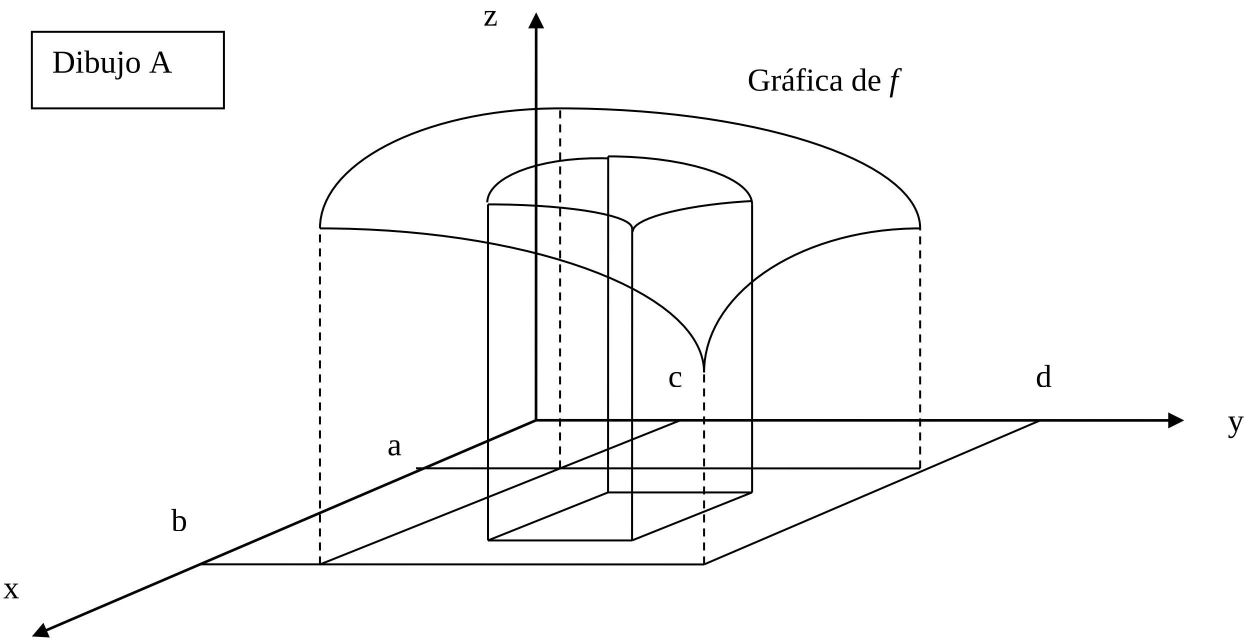
INTEGRALES MÚLTIPLES

INTEGRALES DOBLES DE RIEMANN

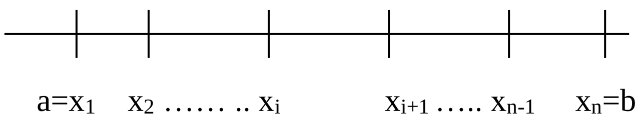
Consideramos una función $f : D \subset R^2 \to R$, definida y acotada en el recinto rectangular $[a\,,b]\times[c\,,d]\subset D$. Denominamos $A=[a\,,b]\times[c\,,d]$

Gráficamente podemos considerar la siguiente situación:



Recordemos a qué se denomina partición de un intervalo $[a\,,b]$. Llamamos partición P del intervalo $[a\,,b]$ al conjunto de puntos tales que: $a = x_1 < x_2 < .... < x_i < x_{i+1} < .... < x_{n-1} < x_n = b$

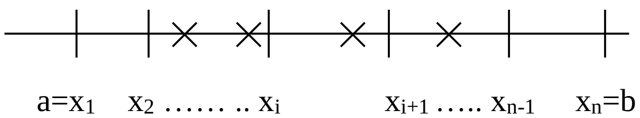
Patición P



Llamamos $\Delta x_i = |x_i - x_{i-1}|$ con $i = 1\,,2\,,.....,$ n.

Un refinamiento de la partición P es otra partición P_1 de $[a\,,b]$ que contiene a los puntos de la partición P, y agrega más puntos al conjunto, siendo $\Delta x_i \to 0 \;\; \forall i$ con $1 \le i \le n$.

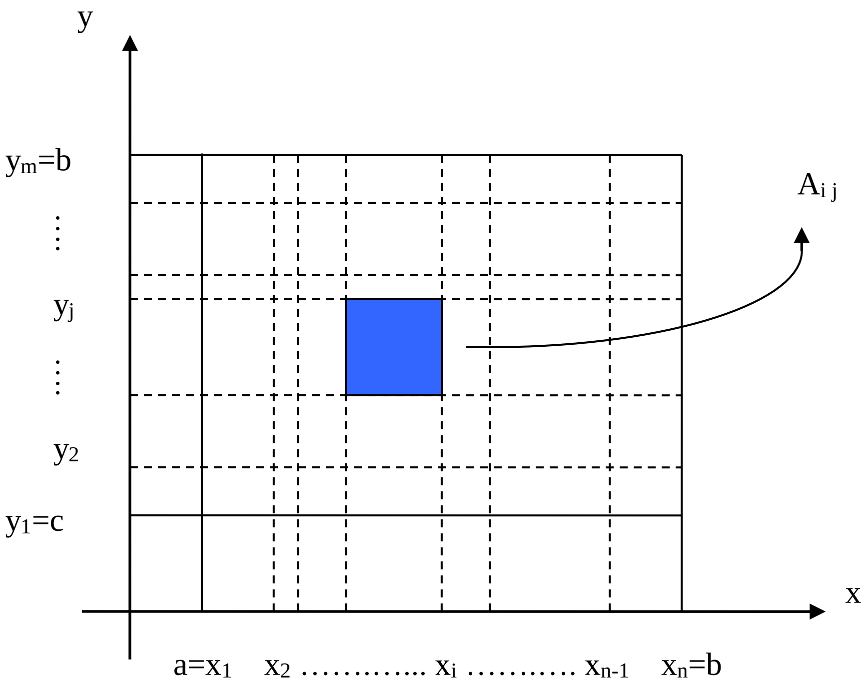
Patición P_1



Marcamos con $\times$ los puntos agregados a la partición P, lo que genera más subintervalos de longitud Δx_i.

En nuestro caso particular, cuando el dominio es un rectángulo del plano, particionamos el intervalo $[a\,,b]$ de x_1 a x_n; y particionamos el intervalo $[c\,,d]$ de y_1 a y_m .

Dibujo B



Obtenemos entonces m x n subrectángulos, donde la unión de todos ellos resulta el conjunto *A*. Utilizaremos la siguiente notación para denominar a cada uno de estos subrectángulos: $A_{i\,j} = [x_{i-1}\,, x_i\,] \times [y_{j-1}\,, y_j\,]$ (Ver Dibujo B)

Esta partición P del conjunto *A* puede refinarse, refinando sucesivamente las particiones de los intervalos $[a\,,b]$ y $[c\,,d]$. En este caso, el refinamiento P_1, agregará mas subrectángulos, con la condición de que la diagonal de estos subrectángulos (lo que se denomina la norma de la partición) tiendan a 0.

Una vez realizada la partición de *A*, levantamos semirrectas paralelas al eje z por los vértices de los subrectángulos $A_{i\,j}$: obtenemos así una serie de prismas, donde el "techo" es un trozo de la superficie $z = f(x, y)$ (Ver Dibujo A).

Dado que la función f está definida y acotada en *D*, estará también definida y acotada en cada $A_{i\,j}$. De todas las infinitas cotas superiores de f en cada $A_{i\,j}$ nos interesa la menor de dichas cotas superiores: el supremo. Denominaremos $M_{i\,j}$ al supremo de f en el subrecinto $A_{i\,j}$.

Análogamente, vamos a considerar la mayor de las cotas inferiores de f en $A_{i\,j}$, a la cual denominaremos $m_{i\,j}$.

Tanto $M_{i\,j}$ como $m_{i\,j}$ son números reales. Por lo tanto podemos establecer los siguientes productos:

1) $M_{i\,j}\ .\ \text{Área}\ (A_{i\,j}) = M_{i\,j}\ .\ \Delta A_{i\,j} = M_{i\,j}\,(\Delta x_i\ \Delta y_j\,)$

2) $m_{i\,j}$ **.** Área $(A_{i\,j}) =$ $m_{i\,j}$ **.** $\Delta A_{i\,j} = m_{i\,j}\,(\Delta x_i\ \Delta y_j\,)$

Definimos ahora la Suma Superior de f en A: $\overline{S}(f, A, P) = \sum\limits_{\substack{i=1..n \\ j=1..m}} M_{i\,j}\ \Delta x_i\ \Delta y_j$

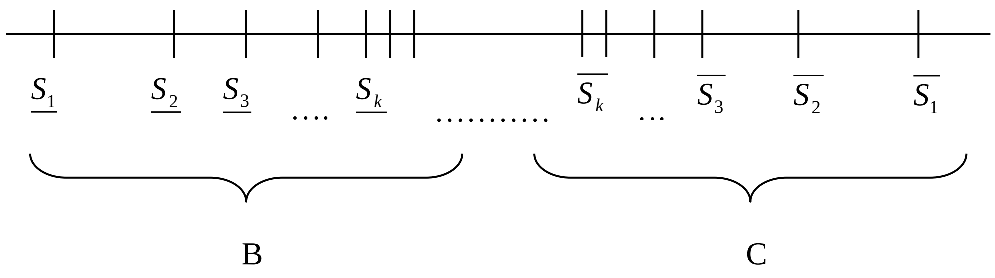
El valor de la suma superior depende de la función f, del recinto A y de la partición P que se ha establecido en dicho recinto.
Análogamente definimos la Suma Inferior de f en A: $\underline{S}(f, A, P) = \sum\limits_{\substack{i=1..n \\ j=1..m}} m_{i\,j}\ \Delta x_i\ \Delta y_j$

Este valor también dependerá de la función f, del recinto A y de la partición P que se ha establecido en dicho recinto.
Tanto $\overline{S}$ como $\underline{S}$ son números reales, que cumplen ciertas propiedades (que pueden demostrarse):

1) Si P es una partición de A, entonces $\underline{S}(f, A, P) \le \overline{S}(f, A, P)$
2) Si P_1 es un refinamiento de la partición de A, entonces $\begin{cases} \underline{S}(f, A, P) \le \underline{S}(f, A, P_1) \\ \overline{S}(f, A, P) \ge \overline{S}(f, A, P_1) \end{cases}$
3) Si P_1 y P_2 son dos particiones distintas (no refinamientos) se cumple que $\underline{S}(f, A, P_1) \le \overline{S}(f, A, P_2)$

Según lo establecido por estas tres propiedades una suma inferior nunca puede superar a una suma superior.

Para definir entonces la integral doble, se realiza una partición sobre el conjunto A, y se refina sucesivamente esta partición. Se calculan los valores de las sumas inferiores y superiores para estas sucesivas particiones, y se representan los valores de $\overline{S}$ y $\underline{S}$ obtenidos en la recta real.



Establecemos dos conjuntos: el conjunto B con los valores de las sumas inferiores, y el conjunto C con los valores de las sumas superiores.
B está acotado superiormente (cualquiera de las $\overline{S}$ es cota superior), por lo que B tendrá supremo. Asimismo, C está acotado inferiormente (cualquier de las $\underline{S}$ es cota inferior), por lo que tendrá ínfimo. Utilizaremos dichos ínfimo y supremo mencionados para definir la integral inferior y superior.

Integral inferior: $\underline{\iint_A}\ f(x, y)\, dx\, dy =$ supremo de B

Integral superior: $\overline{\iint_A} f(x,y)\,dx\,dy =$ ínfimo de C

Cuando ambos valores coincidan, podremos definirlo como la integral doble de f en A.

Definición.

Sea $f: D \subset R^2 \to R$, definida y acotada en el recinto rectangular $A = [a\,,b] \times [c\,,d] \subset D$. Si se cumple que $\underline{\iint_A} f(x,y)\,dx\,dy = \overline{\iint_A} f(x,y)\,dx\,dy$ se dice que el campo escalar f es integrable en A, y a ese valor común se lo define como la integral doble de la función f en A.

Por lo tanto: $\iint_A f(x,y)\,dx\,dy = \underline{\iint_A} f(x,y)\,dx\,dy = \overline{\iint_A} f(x,y)\,dx\,dy$

Condiciones de integrabilidad

Debemos analizar ahora bajo qué condiciones se cumple que el valor de la integral superior de una función en un determinado recinto coincida con el valor de la integral inferior, para que la integral doble quede definida.

Enunciaremos las condiciones de integrabilidad, que pueden demostrarse.

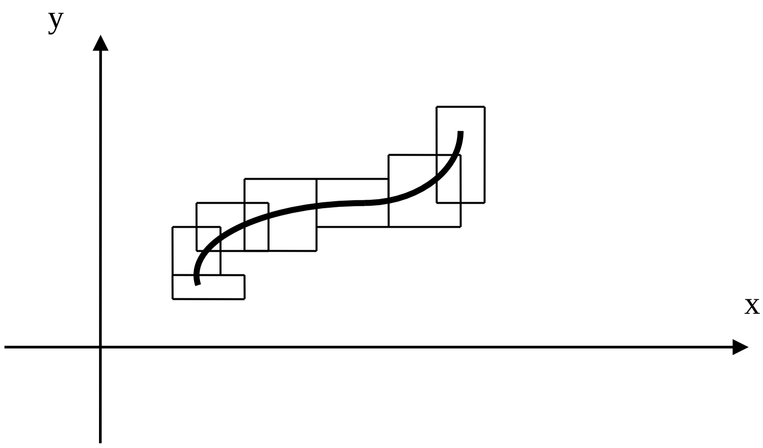
Sea $f: D \subset R^2 \to R$, definida y acotada en el recinto rectangular $A = [a\,,b] \times [c\,,d] \subset D$.

1) Si $\forall \varepsilon > 0\,, \exists$ una partición P del recinto A tal que $\overline{S}(f, D, P) - \underline{S}(f, D, P) < \varepsilon$, entonces f es integrable en A.
2) Si f es continua en A, entonces f es integrable en A
3) Si f es continua en A, excepto en un subconjunto de A de medida nula, entonces f es integrable en A.

Conjunto de puntos de medida nula.

La definición formal para subconjuntos del plano de medida nula es la siguiente.

Sea $S \subset R^2$, se dice que S es de medida nula si $\forall \varepsilon > 0$ existe un conjunto finito de rectángulos cuya unión incluya al conjunto S y cuya área sea menor que ε.



Intuitivamente, podemos decir que un subconjunto del plano de medida nula será aquel que “no tenga área”, por ejemplo puntos aislados, segmentos, curvas, etc.

Una vez establecidas las condiciones de integrabilidad, vamos a enunciar un teorema que me permita efectuar el cálculo de la integral doble, a través del cálculo de integrales simples sucesivas.

Teorema

Sea $f : D \subset R^2 \to R$ integrable en $D = [a\,, b] \times [c\,, d]$.

Si $\forall x \in [a\,, b]$, $\exists\, g(x) = \int_c^d f(x,y)\,dy$, entonces:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy \right] dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x,y)\,dy$$

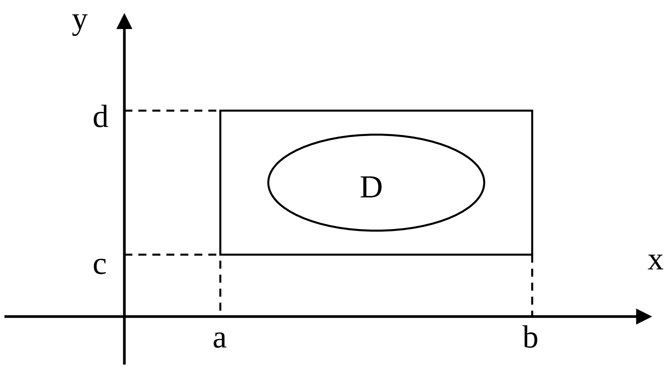
Si $\forall x \in [c\,, d]$, $\exists\, h(y) = \int_a^b f(x,y)\,dx$, entonces:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx \right] dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x,y)\,dx$$

Integrales en recintos no rectangulares

Debemos ahora generalizar la definición de integral doble a recintos más generales, no necesariamente rectangulares.

Sea $f : D \subset R^2 \to R$, siendo D un conjunto acotado. Suponemos f integrable y D no rectangular. Para poder definir $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$, incluimos al conjunto D en un rectángulo $[a\,, b] \times [c\,, d]$.



Definimos la denominada función característica del conjunto *D*:

$$\delta(x,y) = \begin{cases} 1 & \forall (x,y) \in D \\ 0 & \forall (x,y) \notin D \end{cases}$$

Luego redefinimos la función f de la siguiente manera: $f^*(x,y) = f(x,y)\,.\,\delta(x,y)$

De este modo, la función redefinida f^* resultará: $f^*(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & \forall (x,y) \in D \\ 0 & \forall (x,y) \notin D \end{cases}$

Siendo $A = [a\,, b] \times [c\,, d]$, resulta $D \subset A$. De esta manera definimos la integral doble de *f* sobre el recinto *D* de la siguiente manera:

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_A f^*(x,y)\,dx\,dy$$

Para que la definición tenga sentido y sea correcta, debemos garantizar que f^* sea integrable en *A*. Por la forma en que dicha función está definida, las discontinuidades de f^* en *D* serán las mismas discontinuidades de *f*. Dado que *f* es integrable, estas discontinuidades no afectarán la integrabilidad de f^*. Ahora debemos analizar el caso de posible discontinuidad en la frontera de *D*, pero aún cuando se presente una discontinuidad en dicho conjunto, se trata de un conjunto de medida nula que no afecta la integrabilidad de f^*. Por todo lo expuesto, resulta f^* una función integrable en *A*.