# Modelo Integrate-and-Fire de Neuronas Biológicas

Agustín Marcelo Domínguez

Redes Neuronales 2020 - Practico II

## 1 Introducción

Los modelos *Integrate-and-Fire* son descripciones del comportamiento de sistemas nerviosos biológicos donde neuronas procesan señales que reciben de otras neuronas y generan condicionalmente sus propias señales, o eventos, a otras neuronas. La dinámica neuronal se piensa como la suma integrada de las señales entrantes y, cuando la diferencia de potencial entre el interior y exterior de la membrana de una neurona particular cruza cierto umbral, se produce una descarga de energía y esa neurona realiza un disparo.

En este modelo se describe el voltaje de la membrana neuronal como una función de la entrada actual, y se supone que la estructura interna de las neuronas que procesa las señales son poco cambiantes entre distintas neuronas, por lo que la configuración para procesar la información no está condensada en la forma de integrar las señales entrantes, sino en las conexiones que permite entrar y por lo tanto la información se encuentra en la frecuencia y tiempo de las señales de entrada y salida.

## 2 Resolución Analítica

Partimos de la ecuación del modelo:

$$\tau_m \frac{dV_m}{dt} = E_L - V_m(t) + R_m I_e(t)$$

Suponemos una diferencia de potencial inicial $V(t=0) = V_0$ y una corriente externa constante $I_e(t) = I_e$ y , por lo que podemos reescribir la ecuación como:

$$\frac{dV_m}{dt} = \frac{1}{\tau_m}\left(E_L - V_m(t) + R_m I_e\right)$$

Definimos $U(t)$ como la función del alejamiento del potencial con la carga constante al valor de reposo:

$$U(t) = V_m(t) - (E_L + R_m I_e)$$

$$\Rightarrow \frac{dU(t)}{dt} = \frac{V_m(t)}{dt} - \frac{d\left(E_L + R_m I_e\right)}{dt}$$

Como $E_L + R_m I_e$ es constante:

$$\Rightarrow \frac{dU(t)}{dt} = \frac{dV_m(t)}{dt}$$

Reemplazando en la ecuación original obtenemos:

$$\frac{dU(t)}{dt} = \frac{dV_m(t)}{dt} = \frac{1}{\tau_m}\left(E_L - V_m(t) + R_m I_e\right) = -\frac{U(t)}{\tau_m}$$

$$\Rightarrow \frac{dU(t)}{dt} = -\frac{U(t)}{\tau_m}$$

Queda una ecuación diferencial separable de primer orden que se resuelve como:

$$\int \frac{1}{U}\frac{dU}{dt}\,dt = \int -\frac{1}{\tau_m}\,dt \quad \wedge \quad \frac{dU}{dt}dt = dU$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{U}\,dU = -\frac{1}{\tau_m}\int dt$$

$$\Rightarrow \ln U = -\frac{t}{\tau_m} + C$$

Despejamos $U(t)$:

$$\exp\left(ln(U)\right) = \exp\left(-\frac{t}{\tau_m} + C\right) \Rightarrow \quad U(t) = e^{-\frac{t}{\tau_m}+C}$$

Obtenemos de la definicion de $V_m(t=0)$: $U(t=0) = U_0 = V_0 - (E_L + R_m I_e)$ con lo que obtenemos:

$$\ln\left(U_0\right) = -\frac{0}{\tau_m} + C \Rightarrow C = \ln\left(U_0\right)$$

Por lo que finalizamos la resolución de la ecuación con:

$$U(t) = e^{-\frac{t}{\tau_m}+\ln\left(U_0\right)} = e^{-\frac{t}{\tau_m}}e^{\ln\left(U_0\right)}$$

$$\Rightarrow U(t) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau_m}}$$

Si reemplazamos con las definiciones de $U(t)$ y $U_0$ obtenemos la expresión analítica de $V_m(t)$:

$$V_m(t) - (E_L + R_m I_e) = U_0 e^{-\frac{t}{\tau_m}}$$

$$\Rightarrow V_m(t) = (E_L + R_m I_e) + U_0 e^{-\frac{t}{\tau_m}}$$

$$\mathrm{V}_m(t) = (E_L + R_m I_e) + \left(V_0 - E_L - R_m I_e\right) e^{-\frac{t}{\tau_m}}$$

Dado que la entrada de carga $I_e$ es constante, podemos también deducir analíticamente la frecuencia de disparo. El período es el tiempo en que toma la función en llegar al valor del *threshold* desde el punto de equilibrio $E_L$. Es decir si suponemos $V_0 = E_L$ y threshold $V_{th}$ podemos deducir:

$$V_m(T) = (E_L + R_m I_e) - (R_m I_e)e^{-\frac{T}{\tau_m}} = V_{th}$$

$$\Rightarrow \frac{V_{th} - E_L - R_m I_e}{-(R_m I_e)} = e^{-\frac{T}{\tau_m}}$$

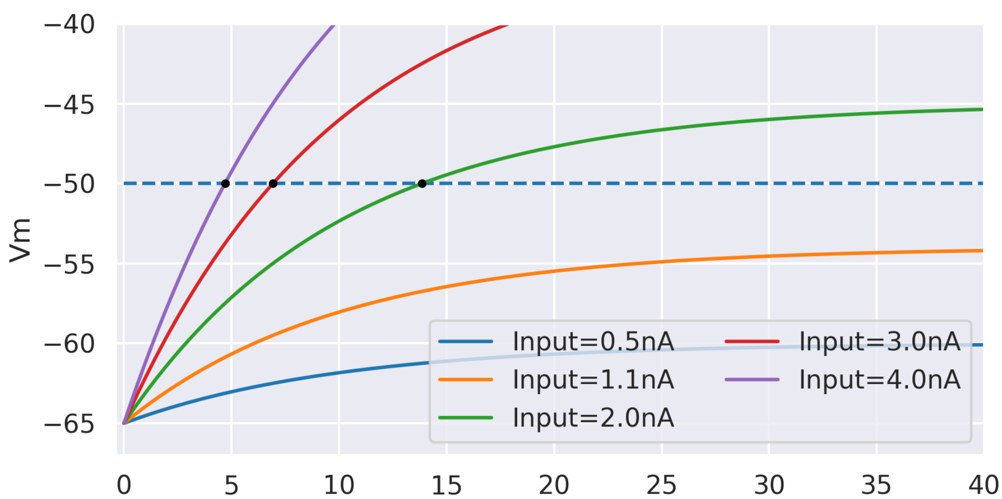
$$\Rightarrow \ln\left(\frac{E_L + R_m I_e - V_{th}}{R_m I_e}\right) = -\frac{T}{\tau_m}$$

$$\Rightarrow \quad T(I_e) = -\tau_m \ln\left(\frac{E_L + R_m I_e - V_{th}}{R_m I_e}\right)$$

Como el logaritmo está definido para valores positivos, esta expresión solo tendrá sentido si lo evaluado dentro del $ln$ es positivo. La carga y resistencia son valores positivos por lo que esta expresión da un valor *sii* $E_L + R_m I_e > V_{th}$.

Este resultado es consistente con nuestro modelo: Sabemos que la función tiende a $E_L + R_m I_e$ cuando $t \to \infty$, y la neurona solo debería tener un período finito si en algún momento logra cruzar el umbral $V_{th}$ y como es creciente si el valor al que crece asintóticamente es menor que el umbral, nunca podrá disparar, es decir el período es infinito.

La frecuencia se obtiene como el inverso del período: $F = \frac{1}{T}$



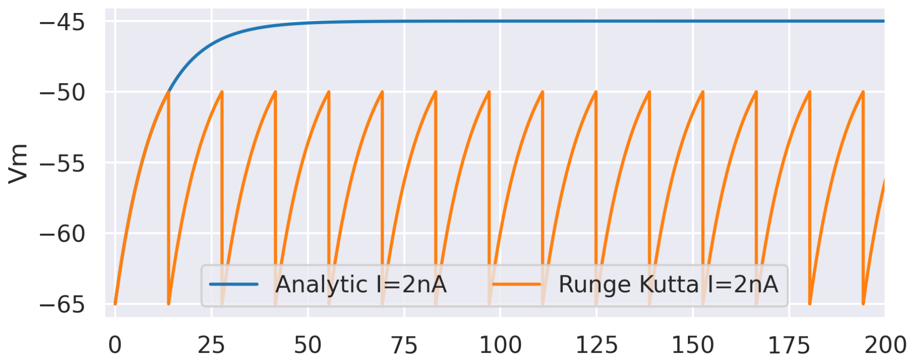

l1

Evaluación del resultado analítico con distintos valores de I, y en puntos de período obtenidos con la expresión analítica. Eje X: tiempo [ms]

## 3 Resolución Numérica

Para incorporar la descarga de voltaje cuando se cruza el umbral, se hizo un modelo con *Runge Kutta de orden 4* que manualmente resetea el voltaje:

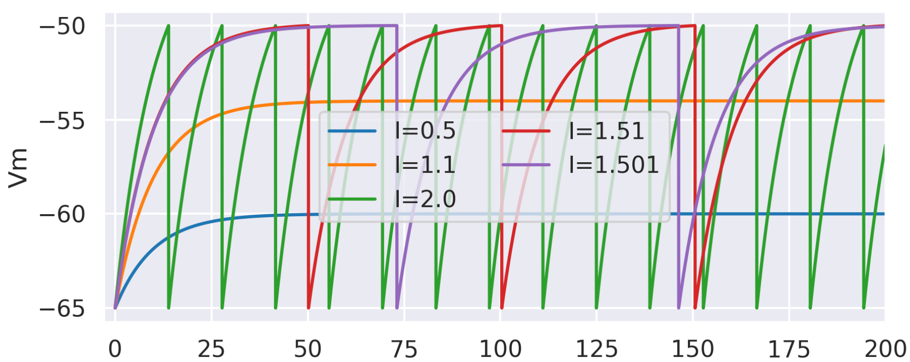
https://github.com/AgustinMDominguez/Redes_Neuronales_Practico_2




l1

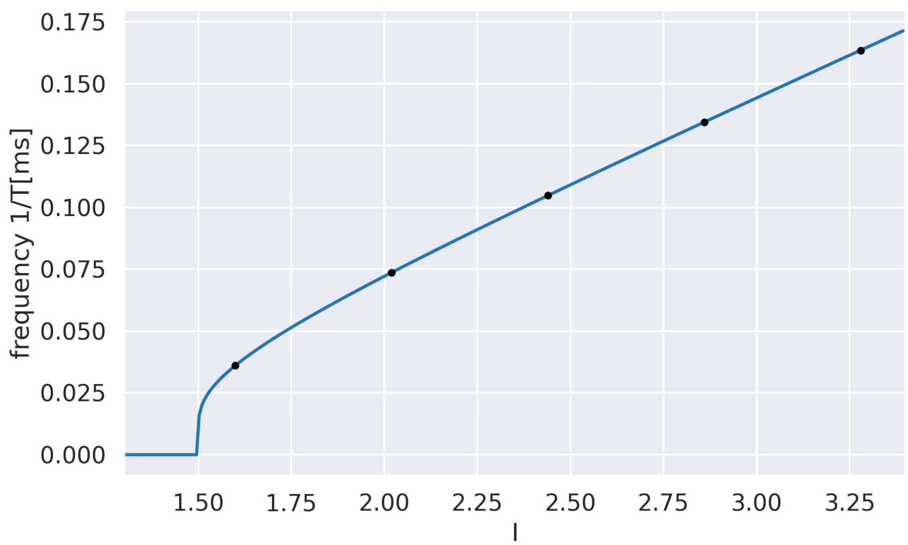
Comparación de la evolución del voltaje entre el método analítico y RK4. El eje X es tiempo [ms]

Con el modelo podemos comparar distintas cargas y comprobar que generan distintas frecuencias:




l1

También podemos comprobar que numéricamente obtenemos valores consistentes con la función obtenída para la frecuencia. En la siguiente figura se graficó el resultado analítico con algunos valores calculados numéricamente:




l

Con esto se ve claramente que cerca del valor 1.5 se encuentra la frontera entre las Entradas que pueden generar disparos y las que no, y que en valores mas grandes la frecuencia se asemeja a una función lineal de la entrada.

Por último, con el modelo en RK4 podemos alterar la entrada durante la actualización de la función y obtener un comportamiento más cercano al observado en neuronas biológicas. Se produjeron distintas secuencias aleatorias de entradas y se graficó el resultado de disparos.

**Nota:** El repositorio en GitHub contiene todo el código usado para generar los resultados numéricos, copias de tamaño mas grande de los gráficos mostrados, y documentación de cómo se generaron las secuencias de números aleatorios. https://github.com/AgustinMDominguez/Redes_Neuronales_Practico_2

Figure 1: Entrada con distribución Uniforme de salto instantáneo (tiempo [ms])

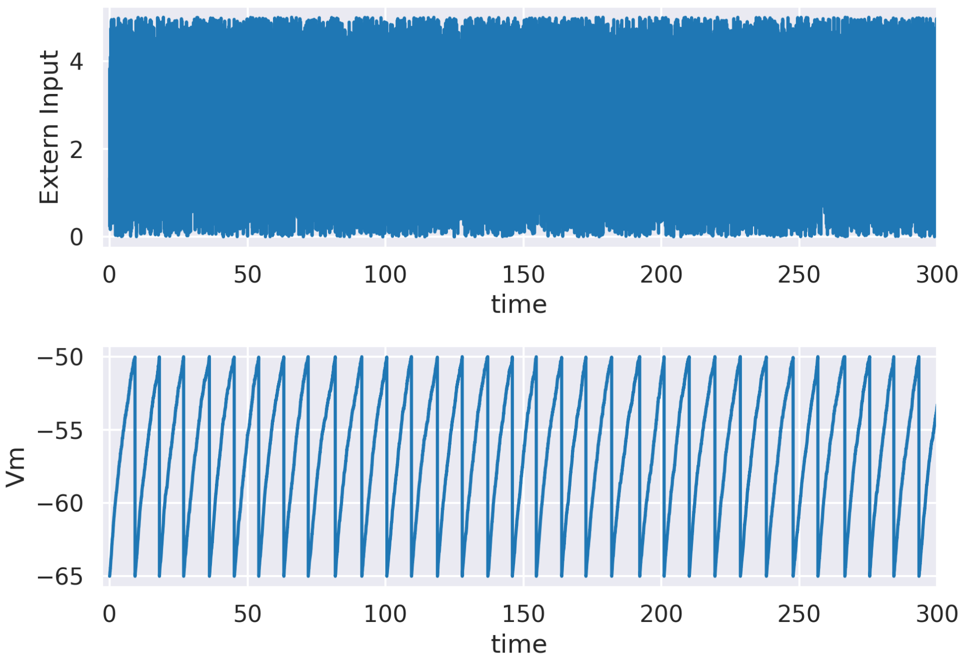



Figure 2: Distribución uniforme con caminata lineal entre valores aleatorios.

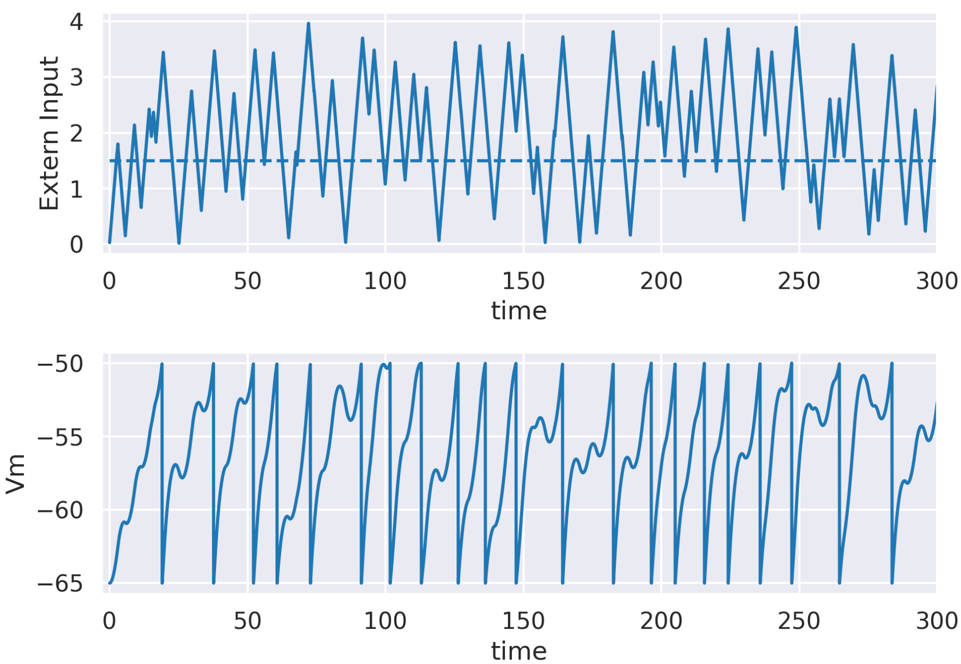


Figure 3: Cambios pequeños de entrada en cada actualización

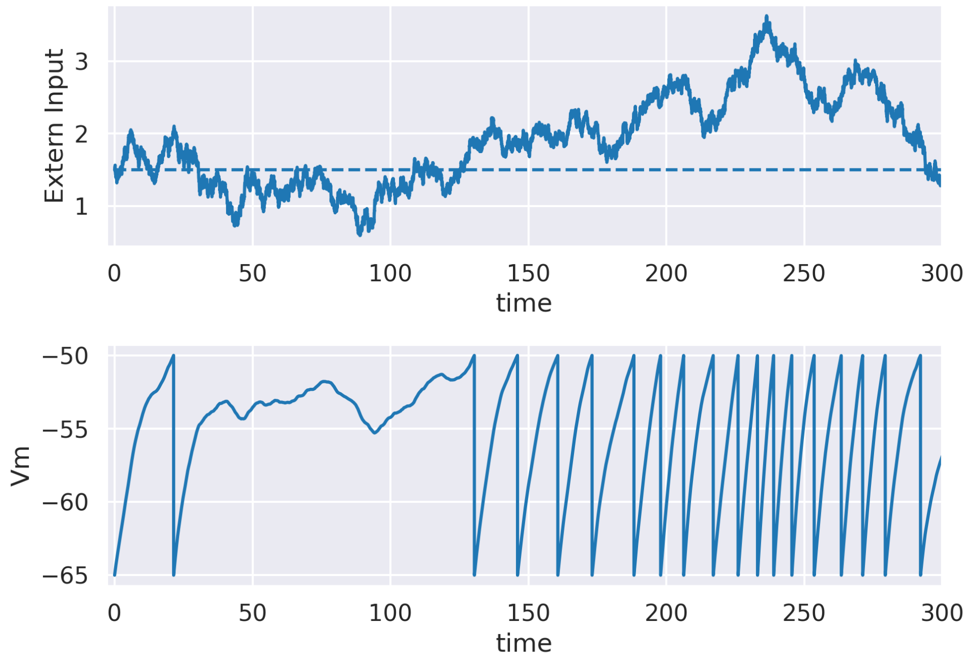



Figure 4: Evaluación escalon con dos valores aleatorios (largo del escalon e intensidad de carga)

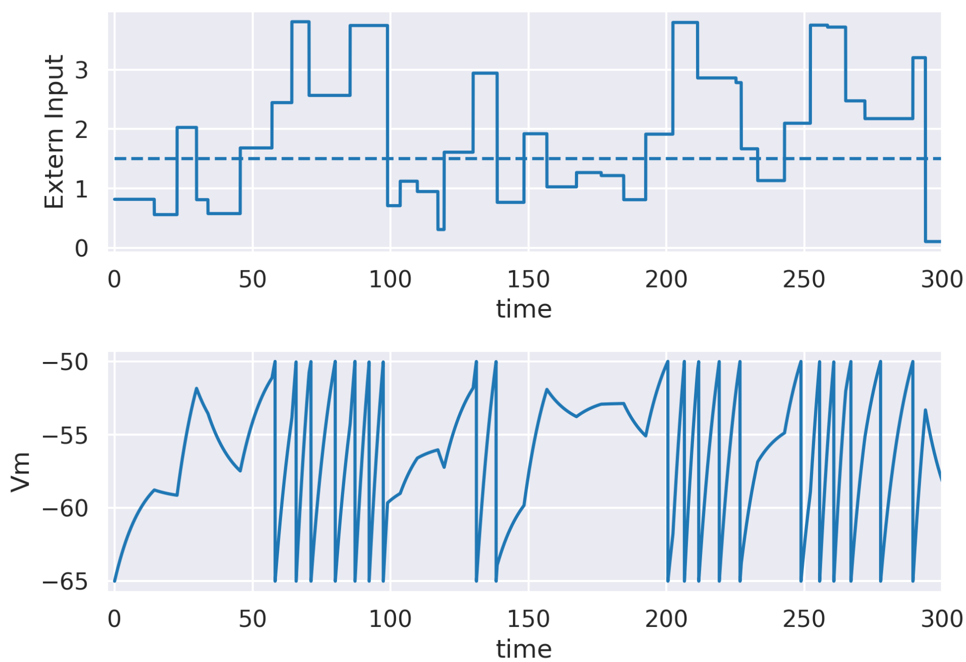


Figure 5: Evaluación escalon con distribución normal centrada en 1.5

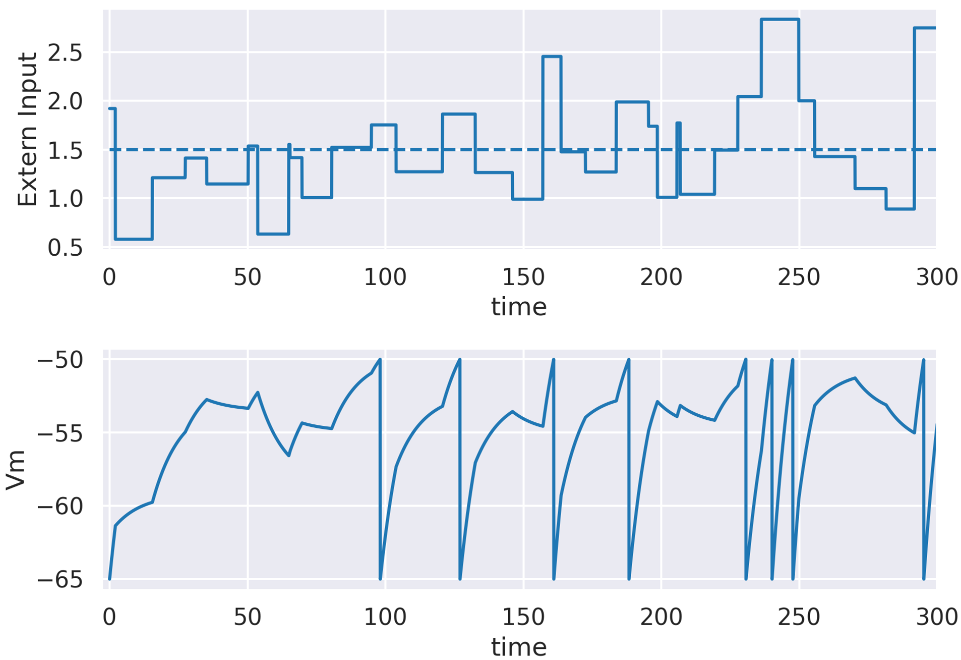



Figure 6: Escalonada con caminata lineal entre cambios de escalon

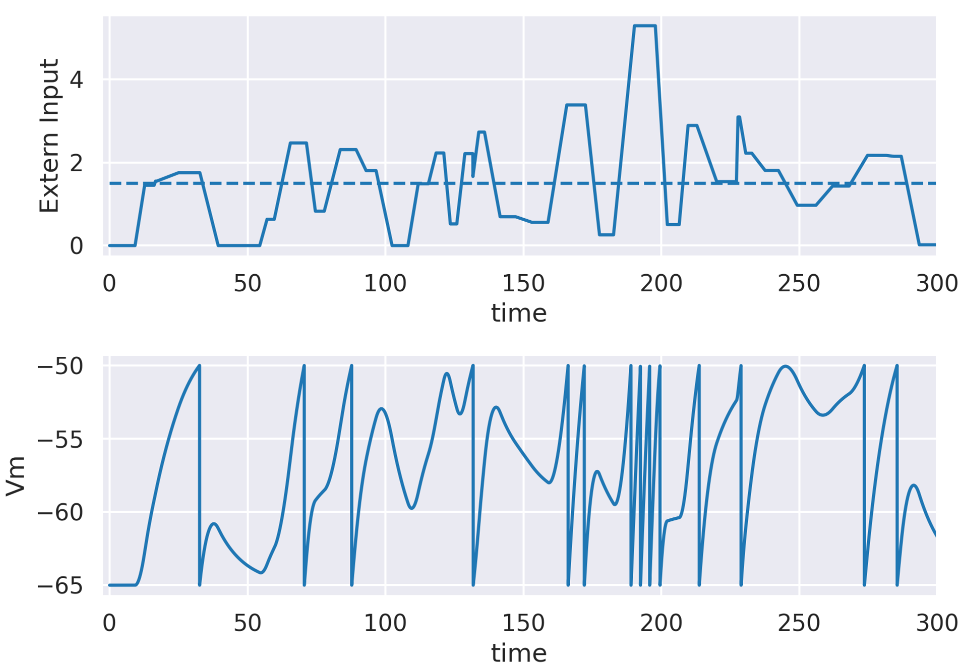


Figure 7: Escalonada con ruido