Ejercicios Tema 2 - Variables aleatorias

Ricardo Alberich, Juan Gabriel Gomila y Arnau Mir

Curso de Probabilidad y Variables Aleatorias con R y Python

Contents

1 Variables aleatorias discretas

1.1 Problema 1.

Hay 10 estudiantes inscritos en una clase de Estadística, de entre los cuales 3 tienen 19 años, 4 tienen 20 años, 1 tiene 21 años, 1 tiene 24 años y 1 tiene 26 años. De esta clase se seleccionan dos estudiantes sin reposición. Sea X la edad media de los dos estudiantes seleccionados. Hallar la función de probabilidad para X.

1.1.1 Solución

Los valores que puede alcanzar X son los siguientes:

- $X = 19$ si se eligen los dos estudiantes de 19 años.
- $X = 19.5$ si se elige un estudiante de 19 años y uno de 20 años.
- $X = 20$ si se eligen los dos estudiantes de 20 años o un estudiante de 19 años y el otro de 21 años.
- $X = 20.5$ si se elige un estudiante de 20 años y otro de 21 años.
- $X = 21.5$ si se elige un estudiante de 19 años y otro de 24 años.
- $X = 22$ si se elige un estudiante de 20 años y otro de 24 años.
- $X = 22.5$ si se elige un estudiante de 19 años y otro de 26 años o un estudiante de 21 años y otro de 24 años.
- $X = 23$ si se elige un estudiante de 20 años y otro de 26 años.
- $X = 23.5$ si se elige un estudiante de 21 años y otro de 26 años.
- $X = 25$ si se elige un estudiante de 24 años y otro de 26 años.

La función de probabilidad de X es la siguiente:

$$P_X(x) = P(X = x) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos posibles}} = \begin{cases} \frac{\binom{3}{2}}{\binom{10}{2}} = \frac{3}{45} = 0.0666667, & \text{si } x = 19, \\ \frac{3\cdot 4}{\binom{10}{2}} = \frac{12}{45} = 0.2666667, & \text{si } x = 19.5, \\ \frac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} + \frac{3}{\binom{10}{2}} = \frac{6}{45} + \frac{3}{45} = 0.2, & \text{si } x = 20, \\ \frac{4\cdot 1}{\binom{10}{2}} = \frac{4}{45} = 0.0888889, & \text{si } x = 20.5, \\ \frac{3\cdot 1}{\binom{10}{2}} = \frac{3}{45} = 0.0666667, & \text{si } x = 21.5, \\ \frac{4\cdot 1}{\binom{10}{2}} = \frac{4}{45} = 0.0888889, & \text{si } x = 22, \\ \frac{3}{\binom{10}{2}} + \frac{1}{\binom{10}{2}} = \frac{3}{45} + \frac{1}{45} = 0.0888889, & \text{si } x = 22.5, \\ \frac{4\cdot 1}{\binom{10}{2}} = \frac{4}{45} = 0.0888889, & \text{si } x = 23, \\ \frac{1}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{45} = 0.0222222, & \text{si } x = 23.5, \\ \frac{1}{\binom{10}{2}} = \frac{1}{45} = 0.0222222, & \text{si } x = 25, \\ 0, & \text{en cualquier otro caso,} \end{cases}$$

1.2 Problema 2.

Verificar que:

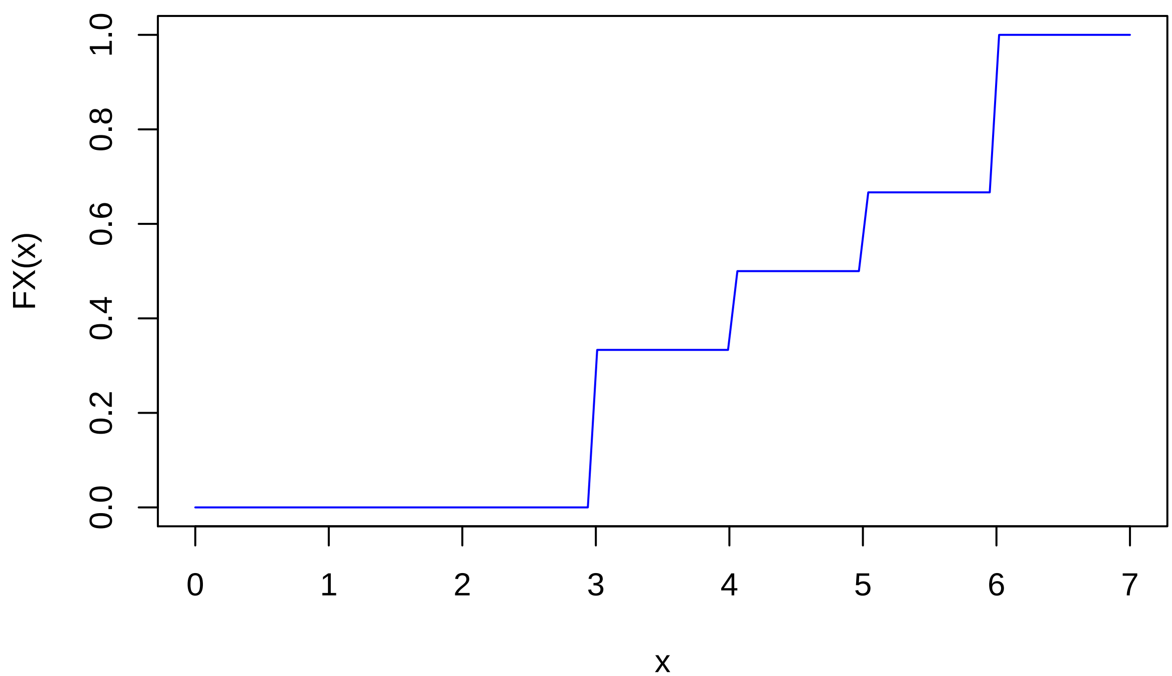
$$F_W(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 3, \\ \frac{1}{3}, & \text{si } 3 \le t < 4, \\ \frac{1}{2}, & \text{si } 4 \le t < 5, \\ \frac{2}{3}, & \text{si } 5 \le t < 6, \\ 1, & \text{si } t \ge 6, \end{cases}$$

es una función de distribución y especificar la función de probabilidad para W. Hallar también $P(3 < W \le 5)$.

1.2.1 Solución

```
FX=function(x){
  aux=function(t){
    if(t<3) {return(0)}
    if(3<=t & t<4) {return(1/3)}
    if(4<= t & t< 5) {return(1/2)}
    if(5<= t & t< 6) {return(2/3)}
    if(t>=6){return(1)}
    }
  sapply(x,FUN=aux)
}

curve(FX,0,7,col="blue")
```



La función F_X cumple todas las propiedades de una función de distribución discreta:

- $0 \leq F_X(t) \leq 1$ para todo $t \in mathbbR$.
- Es solo continua por la derecha, luego es dicreta no es continua con dominio $D_X = \{3, 4, 5, 6\}$ que son los valores dónde $P(X = x) = F_X(x) - F_X(x-) \neq 0$.
- Tiende asintóticamente a 1 cuando $x \to +\infty$ y a 0 cuandor $x \to -\infty$.

El Dominio es $D_X = \{3, 4, 5, 6\}$

$P(X = 3) = F_X(3) - F_X(3^-) = F_X(3) - lim_{x \to 3^-} F_X(x) = \frac{1}{3} = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$.

$P(X = 4) = F_X(4) - F_X(4^-) = F_X(4) - lim_{x \to 4^-} F_X(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

$P(X = 5) = F_X(5) - F_X(5^-) = F_X(5) - lim_{x \to 5^-} F_X(x) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

$P(X = 6) = F_X(6) - F_X(6^-) = F_X(6) - lim_{x \to 5^-} F_X(x) = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$.

$P(X = x) = 0$ si $x \notin \{3, 4, 5, 6\}$.

1.3 Problema 3.

La variable aleatoria Z tiene por función de probabilidad:

$$f_Z(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & \text{si } x = 0, 1, 2, \\ 0, & \text{en los otros casos.} \end{cases}$$

¿Cuál es la función de distribución para Z?

1.3.1 Solución

Es discreta.

1.4 Problema 4.

Sea X_n una variable aleatoria dependiendo de un valor natural n cuya función de probabilidad es:

$$f(x) = \begin{cases} k \cdot i, & \text{si } i = 1, 2 \ldots, n, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

- Hallar el valor de k y la función de distribución de X. - Calcular la probabilidad de que X tome un valor par.

1.4.1 Solución

1.5 Problema 5.

Un examen tipo test consta de cinco preguntas con tres posibles opciones cada una. Un alumno contesta al azar las cinco cuestiones. Suponiendo que cada respuesta acertada vale dos puntos, hallar la distribución de número de puntos obtenidos por el alumno.

1.5.1 Solución

1.6 Problema 6.

Continuamos con el ejercicio anterior pero ahora suponemos que restamos una cierta cantidad por respuesta incorrecta. Suponiendo que el examen tiene n preguntas, cada pregunta tiene k posibles respuestas, y que cada pregunta acertada vale 1 punto, ¿qué cantidad hay que restar a cada pregunta para que la esperanza de la nota de una pregunta contestada al azar sea 0? Repetir el ejercicio anterior pero ahora suponiendo que restamos a cada pregunta la cantidad obtenida en el caso en que éste se reponda de forma errónea.

1.6.1 Solución

1.7 Problema 6.

Hallar la esperanza y la varianza de todas las variables que han aparecido en los ejercicios anteriores.

2 Variables aleatorias continuas

2.1 Problema 1.

Verificar que:

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < -1, \\ \frac{t+1}{2}, & \text{si } -1 \leq t \leq 1, \\ 1, & \text{si } t > 1, \end{cases}$$

es una función de distribución y hallar la función de densidad para X. Calcular también $P\left(-\frac{1}{2} \leq X \leq \frac{1}{2}\right)$.

2.1.1 Solución

2.2 Problema 2.

Sea Y una variable continua con función de densidad:

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2(1-y), & \text{si } 0 < y < 1, \\ 0, & \text{en los otros casos.} \end{cases}$$

Hallar la función de distribución $F_Y(t)$.

2.2.1 Solución

2.3 Problema 3.

Verificar que:

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0, \\ \sqrt{t}, & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ 1, & \text{si } t > 1, \end{cases}$$

es una función de distribución y especificar la función de densidad para Y. Usar este resultado para hallar $P\left(-\frac{1}{2} < Y < \frac{3}{4}\right)$.

2.3.1 Solución

2.4 Problema 4.

Sea X una variable aleatoria con función de densidad:

$$f(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{si } |x| \leq 1, \\ 0, & \text{en caso contrario.} \end{cases}$$

1. Representar gráficamente dicha función. 2. Hallar y dibujar la función de distribución. 3. Calcular las siguientes probabilidades: $P(X \geq 0)$ y $P\left(|X| < \frac{1}{2}\right)$.

2.4.1 Solución

2.5 Problema 5.

Hallar la esperanza y la varianza de las variables de los ejercicios anteriores.

2.5.1 Solución

3 Transformación de variables aleatorias

3.1 Problema 1.

A partir de

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < -1, \\ \frac{t+1}{2}, & \text{si } -1 \leq t \leq 1, \\ 1, & \text{si } t > 1, \end{cases}$$

hallar la función de distribución para $Y = 15 + 2X$ y la función de densidad para Y.

3.1.1 Solución

Como $D_X = [-1, 1]$ entonces$Y = 15 + 2X$ varía desde $Y = 15 + 2 \cdot (-1) = 13$ hasta $Y = 15 + 2 \cdot 1 = 17$ y por lo tanto su dominio es $D_Y = [13, 17]$.

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(15 + 2 \cdot X \leq y) = P(X \leq \frac{y-15}{2}) \\ &= F_X(y\frac{y-15}{2}) = \begin{cases} 0, & \text{si } \frac{y-15}{2} < -1, \\ \frac{\frac{y-15}{2}+1}{2}, & \text{si } -1 \leq y \leq 1, \\ 1, & \text{si } \frac{y-15}{2} > 1, \end{cases} \\ &= \begin{cases} 0, & \text{si } y < -2 - 15 = 13, \\ \frac{y-13}{4}, & \text{si } 13 \leq y \leq 17, \\ 1, & \text{si } y > 17, \end{cases} \end{aligned}$$

$$f_Y(y) = (F_Y(y))' = \begin{cases} \frac{1}{4}, & \text{si } 13 \leq y \leq 17, \\ 0, & \text{en cualquier otro caso.} \end{cases}$$

3.2 Problema 2.

Si

$$F_X(t) = \begin{cases} 0, & \text{si } t < 0, \\ t, & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ 1, & \text{si } t > 1, \end{cases}$$

hallar la función de distribución y la función de densidad de la forma estándar de X ($Z = \frac{X-\mu_X}{\sigma_X}$), donde $\mu_X = E(X)$ y $\sigma_X = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$.

3.2.1 Solución

3.3 Problema 3.

Para formar un jardín circular, un jardinero corta una cuerda, la ata a una estaca y marca el perímetro. Suponer que la longitud de la cuerda tiene la misma verosimilitud de estar en el intervalo comprendido entre $r - 0.1$ y $r + 0.1$. ¿Cuál es la distribución de X, el área de la superficie del jardín? ¿Cuál es la probabilidad de que el área de la superficie sea mayor que πr^2?

3.3.1 Solución

3.4 Problema 4.

Sea X una variable aleatoria continua con función de densidad $f_X(x)$. Consideramos la variable aleatoria $Y = \mathrm{e}^X$. Hallar la función de densidad de la variable aleatoria Y, $f_Y(y)$.

3.4.1 Solución