Algoritmos y Estructuras de Datos

Grafos No Dirigidos

Universidad Católica del Uruguay

Grafos No Dirigidos

- Los grafos son modelos naturales para representar relaciones entre objetos de datos.
- Un grafo consiste de un conjunto finito de vértices V y de un conjunto de arcos A.

$$\mathbf{G = (V, A)}.$$

- Sea el conjunto de vértices o nodos

V= $\{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ entonces el conjunto de arcos o aristas es A = $\{(v_i, v_j)\}$. un conjunto de pares de vértices.

- **Si las aristas son no dirigidas, es decir $(v_i, v_j) = (v_j, v_i)$, el grafo se llama no dirigido.**

Grafos No Dirigidos

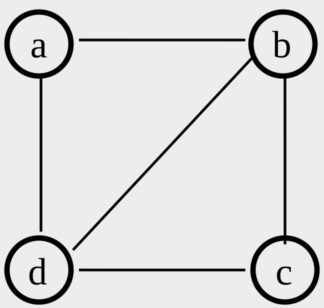
- Sea ***G = (V,A)*** un grafo no dirigido,entonces si *(v,w)* pertenece a ***A***, resulta *(v,w)* = *(w,v)* .
- Si *(v,w)* es una arista, se dice que es incidente sobre los vértices *v* y *w*, y los vértices son adyacentes entre sí.
- Un camino es una secuencia de vértices v_1, v_2, ..., v_n, tal que (v_i, v_{i+1}) es una arista.
- Un grafo es conexo si todos sus pares de vértices están conectados.
- Un ciclo (simple) es un camino (simple) de longitud **mayor o igual a tres (3)**, que conecta un vértice consigo mismo.

Árboles libres

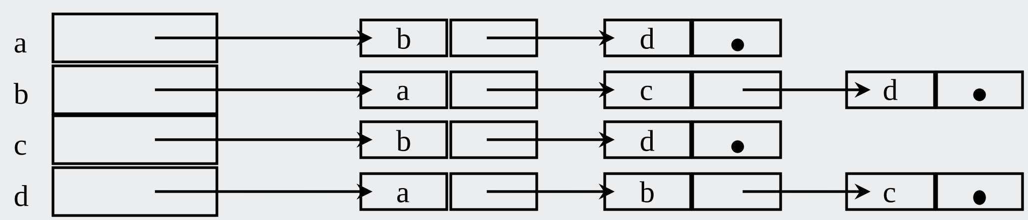
- Un grafo no dirigido *conexo acíclico* se conoce también como ***árbol libre***
- Un *árbol libre* puede convertirse en uno ordinario eligiendo un vértice como *raíz*.
- **Todo árbol libre con n >= 1 vértices tiene exactamente n-1 aristas.**
- **Si se agrega cualquier arista a un árbol libre, resulta un ciclo.**

Grafos No Dirigidos

- Métodos de representación de grafos no dirigidos
  - Se pueden usar los mismos que para grafos dirigidos: matrices o listas de adyacencias.
  - Una arista no dirigida entre *v* y *w* se representa mediante dos aristas dirigidas de *v* a *w* y de *w* a *v*.
  - Notar que la matriz de adyacencias es simétrica.



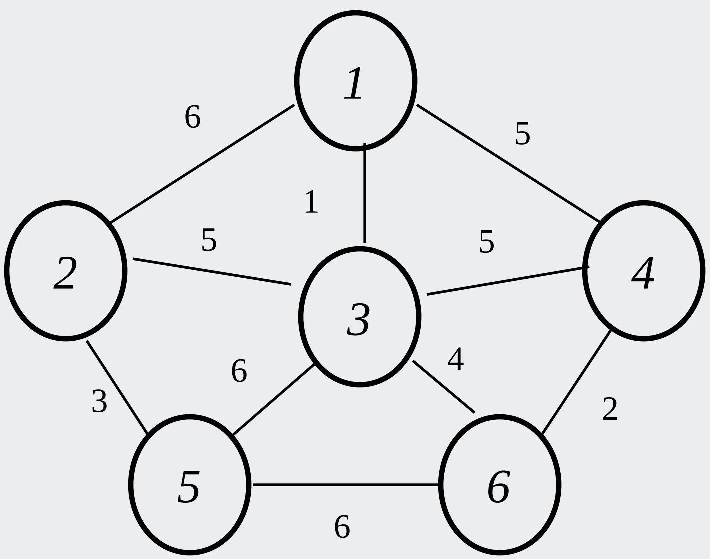
	a	b	c	d
a	0	1	0	1
b	1	0	1	1
c	0	1	0	1
d	1	1	1	0

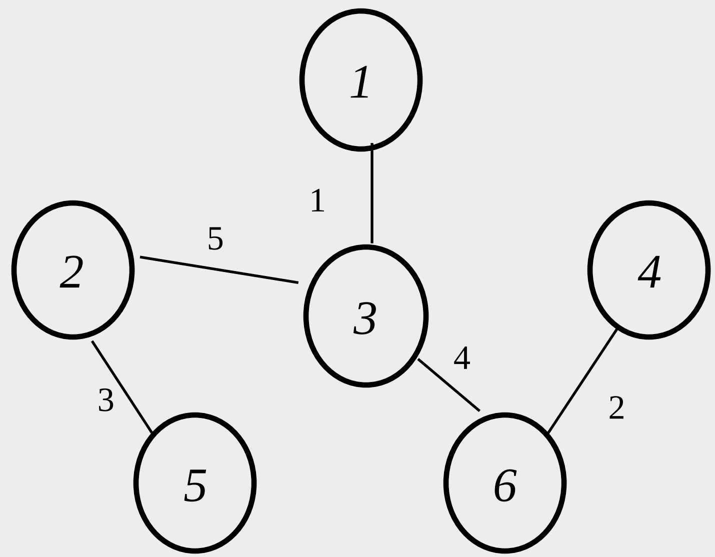


ATENCIÓN: REVISAR EJERCICIO DOMICILIARIOS PD1-EJERCICIO 1, CÓDIGO IMPLEMENTACION DE GRAFO NO DIRIGIDO!

Árboles abarcadores de costo mínimo

- Dado un grafo ***G = (V, A)*** donde cada arista (*u,v*) de ***A*** tiene un costo asociado ***c(u,v):***
  - Un ***árbol abarcador*** de G es un ***árbol libre*** que conecta **todos** los vértices de ***V***.
  - El ***costo*** de ese árbol es la suma de los costos de todas las aristas.





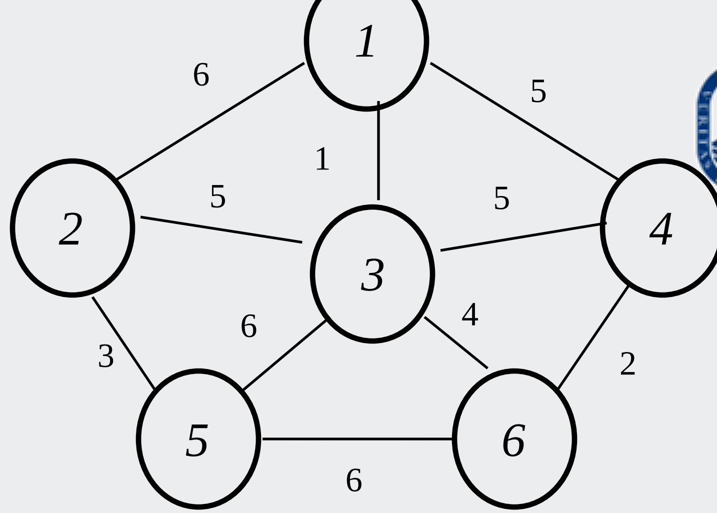
Propiedad AAM (Árbol Abarcador de costo Mínimo)

- Sea G = (V, A) un grafo conexo con una función de costo definida para sus aristas. Sea U algún subconjunto propio del conjunto de vértices V.
  - Si (u,v) es una arista de **costo mínimo** tal que u pertenece a U y v pertenece a V-U, existe un AAM que incluye a (u,v) entre sus aristas.
- Dos algoritmos hacen uso de esta propiedad: Prim y Kruskal

Algoritmo de Prim

- ***G = (V , A)***
- ***V*** = {1, 2, 3…..n) y una función de costo definida en las aristas de ***A***
- El algoritmo de Prim comienza cuando se asigna a un conjunto ***U*** un vértice inicial {1}, en el cual el árbol abarcador "crece" arista por arista.
- En cada paso, localiza la arista más corta *(u,v)* que conecta **U** y **V-U**, y después agrega ***v***, el vértice en **V**, a **U**.
- Este paso se repite hasta que **U = V.**

Algoritmo de Prim.



Método TGRAFO. Prim (conjunto de aristas T);
  U: conjunto de vértices;
   u, v: vértice;
// el TGRAFO representado por un conjunto de vértices **V** y un conjunto de Aristas **A**
COMIENZO
   T. Vaciar;
   U.Agregar (1);
   MIENTRAS U < > V **hacer**
      elegir una arista (u,v) *de costo mínimo*
      tal que u *está en* U *y* v *está en* V-U*;*
      T.agregar (u,v)*;*
      *U.agregar(*v)*;*
   FIN MIENTRAS
FIN;

Estructuras auxiliares para Prim

- TArista
  - Origen, Destino : Comparable
  - Costo: numérico

- TAristas // colección de elementos del tipo Tarista
  - buscar(origen, destino: TEtiqueta) : TArista
  - buscarMin(U,V: listas de vertices): Tarista

- TGrafoNoDirigido
  - Agregar Aristas: TAristas
  - Modificar el TDA Grafo y el constructor para también poner las aristas en “Aristas”
  - PRIM….. //devuelve un nuevo grafo, que es el AAM correspondiente

Ej. Implementación PRIM

Dada nuestra implementación de TGrafoNoDirigido

- Constructor: recibe colección de Vértices y colección de Aristas
- TArista
  - Origen, Destino (comparable), costo
- TAristas // por ejemplo, podría heredar de *LinkedList*
  - buscar(origen, destino: comparable) : TArista
  - buscarMin(U,V: colecciones de vertices): TArista

TGrafoNoDirigido.Prim(): TGrafoNoDirigido

- Dada una instancia ya creada del Grafo No Dirigido (vértices, aristas), ejecuta el algoritmo de Prim y devuelve ***un nuevo grafo, que es el AAM***
- ***PRECONDICIONES???***
- Auxiliares:
  - Colección de vértices "**U**", colección de vértices "**V**"
  - **V** contiene las etiquetas de los vértices del grafo original
  - "**AristasAAM**" del tipo "**TAristas**" en donde se irán agregando las aristas de costo mínimo
  - tempArista de tipo TArista para ir llevando la mín.

TGrafoNoDirigido.Prim(): TGrafoNoDirigido

```
U.agregar(V.quitarprimero)
Mientras V no vacío hacer
    tempArista <-aristas.buscarMin(U,V)
    aristasAAM.Insertar(tempArista)
    V.quitar(tempArista.etiquetaDestino)
    U.agregar(tempArista.etiquetaDestino)
    costoPrim <- costoPrim + tempArista.costo
Fin mientras
Devolver nuevo TGrafoNoDirigido(U, AristasAAM)
```

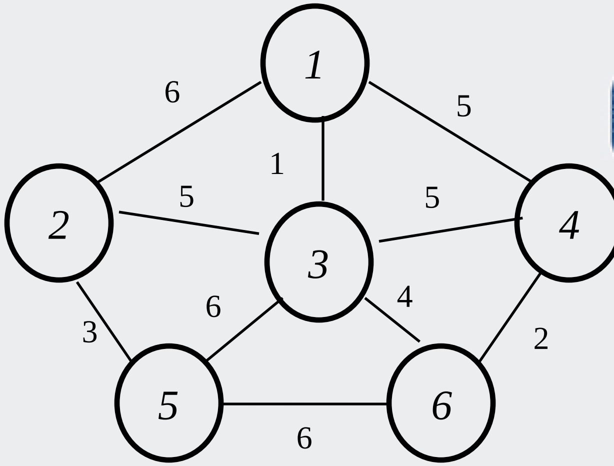
TAristas extends LinkedList

- buscar(origen, destino: comparable) : TArista
  - **// ¿cómo sería?**
- **buscarMin**(U,V: colecciones de vertices): TArista
  - TArista minArista = null, int minCosto = maxInt
  - Para cada ***u*** en ***U***
    - Para cada ***v*** en ***V***
    - tempArista <- buscar(u,v)
    - Si tempArista <> null
      - si tempArista.costo < minCosto
      - minArista <- tempArista
      - minCosto <- tempArista.costo
    - Fin Si
  - **Devolver minArista**

Algoritmo de Kruskal

- G = (V , A), V = {1, 2, 3.....n) y una función de costo definida en las aristas de A
- Se empieza con un grafo T = (V,), constituido sólo por los vértices de G y sin aristas. Cada vértice es un componente conexo en sí mismo.
- Al avanzar, habrá siempre una colección de componentes conexos
- Para cada componente se seleccionarán las aristas que formen un árbol abarcador.
- Para construir componentes cada vez mayores, se agrega la arista de costo mínimo que conecte dos componentes distintos.
- La arista se descarta si conecta dos vértices que están en el mismo componente conexo, pues crearía un ciclo.
- Cuando todos los vértices están en un sólo componente, T es un árbol abarcador de costo mínimo para G.

Algoritmo de Kruskal



Método TGrafo. Kruskal;

F conjunto de aristas;

COM

F.Vaciar;

Repetir

Elegir una arista de costo mínimo tal que no esté en F *ni haya sido elegida;*

Si *la arista* ***no*** *conecta dos vértices del mismo componente* **entonces** *agregarla a* **F***;*

hasta que *todos los vértices estén en un solo componente;*

FIN

Recorridos de grafos no dirigidos

- Visitar sistemáticamente todos los vértices del grafo.
- Existen dos técnicas: búsqueda en profundidad y búsqueda en amplitud.
- Ejemplo de aplicación: determinar eficientemente si todos los vértices están conectados a un vértice dado.

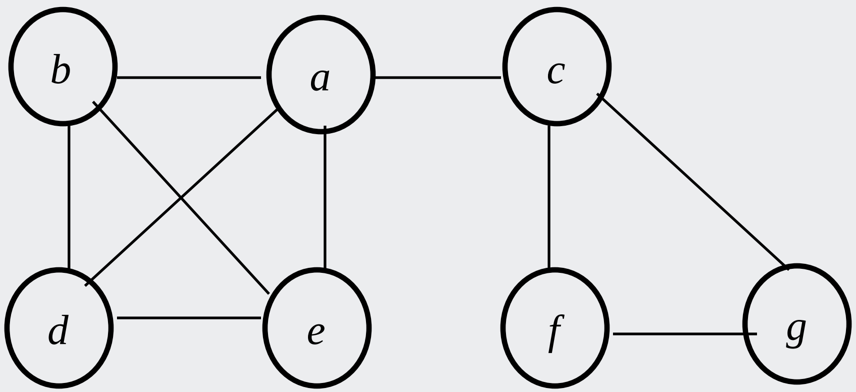
Búsqueda en profundidad.

- Se puede emplear el mismo algoritmo definido para grafos dirigidos.
- En este caso, si el grafo es conexo, de la búsqueda en profundidad se obtiene un sólo árbol.
- Para grafos no dirigidos, hay dos clases de arcos: de árbol y de retroceso.

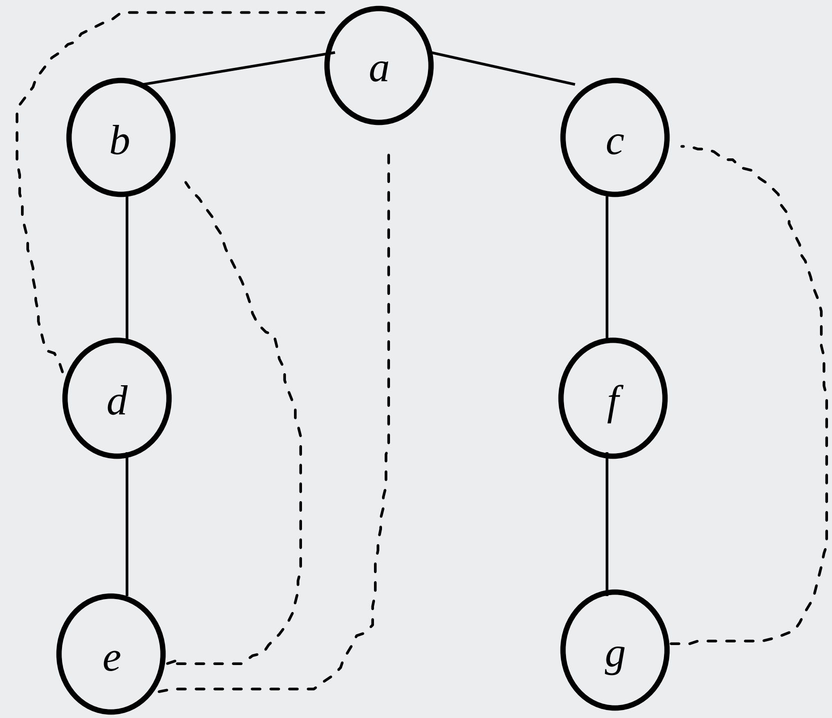
Búsqueda en amplitud.

- Se denomina “en amplitud” porque, desde cada vértice v se visitan todos los adyacentes, para luego visitar los descendientes.
- Al realizar una búsqueda en amplitud también se puede construir un bosque abarcador.
- Si el grafo no es conexo, la búsqueda en amplitud debe realizarse a partir de un vértice de cada componente.

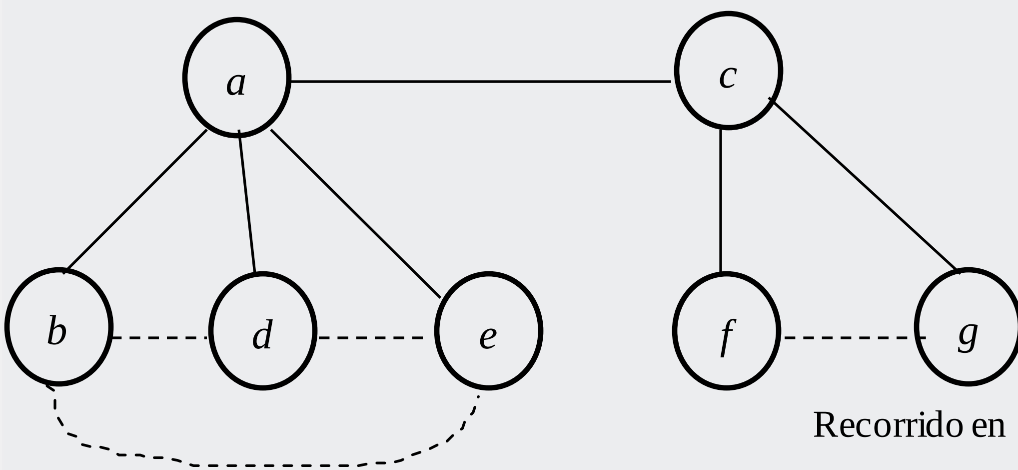
Búsqueda en Amplitud y Profundidad



Grafo G



Recorrido en profundidad



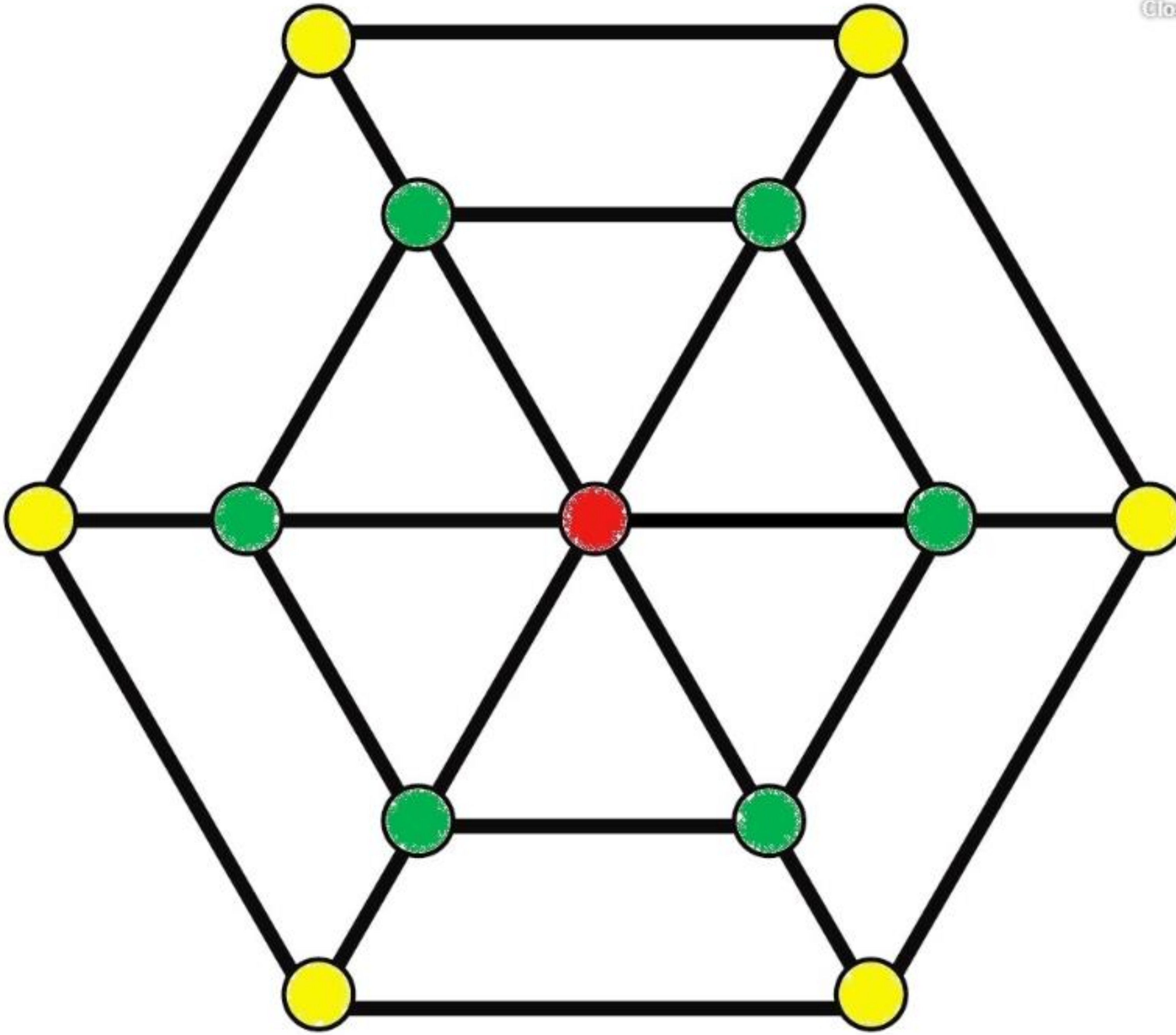
Recorrido en amplitud

Algoritmo de búsqueda en amplitud.

- Método Tvertice ***bea*** : String
- //{bea visita todos los vértices conectados a ***v*** usando búsqueda en amplitud.}

- C: ColaDeVértices;
- x,y : Vértice;
- tempstr : String

- **COM**
- Visitar();
- C.Insertar (this);
- tempstr <- tempstr + etiqueta
- **mientras no** vacía(C) **hacer**
-    x ▯ C.eliminar () // en x queda el elemento frente de la cola
-    **para** cada vértice ***y*** adyacente a ***x*** **hacer**
-       **Si no** y.Visitado() **entonces**
-          y.Visitar();
-          C.insertar (y);
-          tempstr <- tempstr + y.etiqueta
-       **fin si**
-    **fin para cada**;
- **fin mientras**;
- Devolver tempstr
- **FIN**; {bea}



Puntos de articulación y componentes biconexos

- Punto de articulación: vértice ***v*** tal que, cuando se elimina, junto con todas las aristas incidentes sobre él, se divide un componente conexo en dos o más partes.
- A un grafo sin puntos de articulación se le llama **“grafo biconexo”.**
- Un grafo tiene ***conectividad k*** si la eliminación de k-1 vértices cualesquiera no lo desconecta.
- La búsqueda en profundidad es muy útil para encontrar los componentes biconexos de un grafo.

Algoritmo para encontrar puntos de articulación

- Realizar búsqueda en profundidad numerando en ***orden previo*** los vértices (obtener ***número_ bp[v]***).

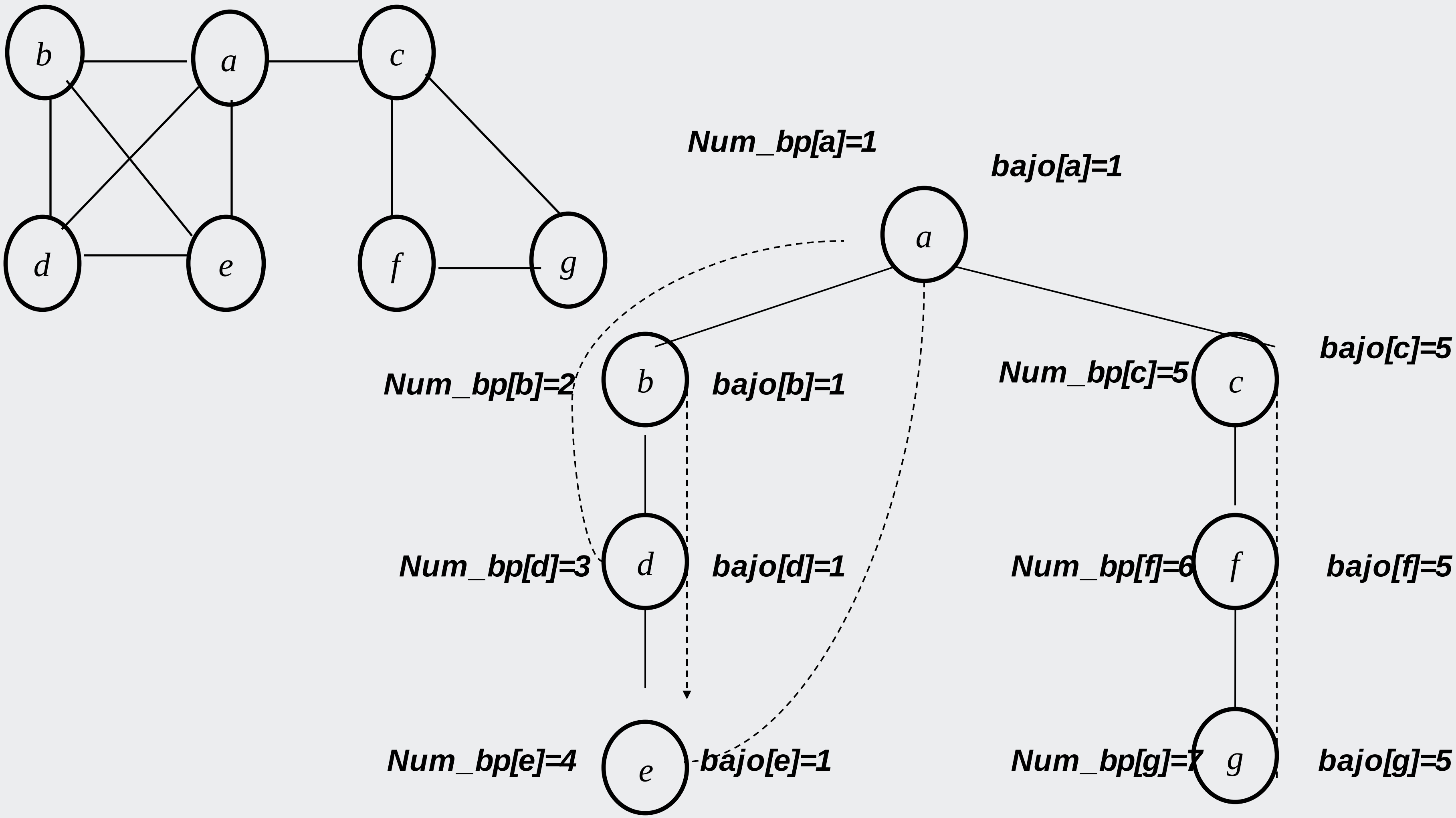
- Por cada vértice ***v*** obtener ***bajo[v].***

- Los puntos de articulación se encuentran como sigue:
  - la raíz es un punto de articulación si y sólo si tiene ***dos o más*** hijos.
  - un vértice ***v*** distinto de la raíz es un punto de articulación si y sólo si hay un hijo ***w***, de ***v***, tal que el ***bajo[w]*** es mayor o igual que el número de ***número_bp[v}***.

Puntos de articulación

- El número ***bajo*** de un vértice ***v*** es el número más pequeño de ese nodo ***v*** o de cualquier otro ***w*** accesible desde él, siguiendo cero o más aristas de árbol hasta un descendiente ***x*** de ***v*** (***x*** puede ser ***v***), y después seguir una arista de retroceso ***(x,w)***.
- Se calcula ***bajo(v)*** para todos los vértices ***v*** visitándolos en un recorrido en orden posterior. Cuando se procesa ***v***, se ha calculado ***bajo(y)*** para todo hijo ***y*** de ***v***. Entonces se toma ***bajo(v)*** como el mínimo de :
- 1. ***número_bp*** de ***v*** .
- 2. ***número_bp*** de ***z*** para cualquier vértice ***z*** para el cual haya una arista de retroceso ***(v,z)***.
- 3. ***bajo(y)*** para cualquier hijo ***y*** de ***v***.

Puntos de articulación

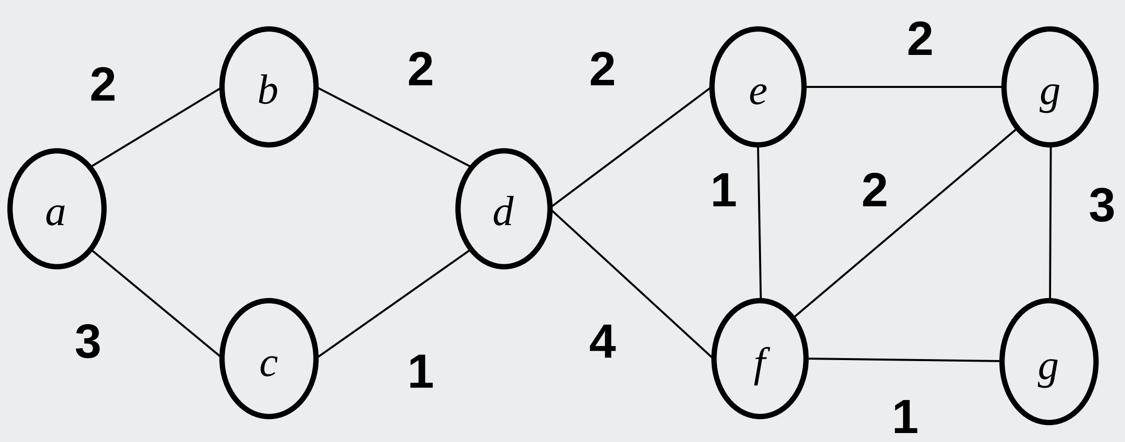


Ejercicios grafos no dirigidos

- Define árbol abarcador de costo mínimo
- Describe el algoritmo de Kruskal.
- Describe el algoritmo de Prim
- Define búsqueda en amplitud y desarrolle el algoritmo correspondiente
- ¿qué son los puntos de articulación de un grafo no dirigido?
- ¿qué es un grafo biconexo?
- Define conectividad de un grafo y escriba un algoritmo para identificarla
- Indica posibles aplicaciones prácticas de hallar los árboles abarcadores de costo mínimo de un grafo, y los puntos de articulación del mismo

Ejercicios de grafos

- Dado el grafo de la figura, encuentra:
  - Un árbol abarcador de costo mínimo usando el algoritmo de Prim
  - Un árbol abarcador de costo mínimo usando el algoritmo de Prim
  - Un árbol abarcador en profundidad empezando en los vértices ***a*** y ***d***
  - Un árbol abarcador en amplitud empezando en los vértices ***a*** y ***d***



Ejercicios de grafos no dirigidos

- TDA GRAFO NO DIRIGIDO
  - Describe en lenguaje natural un método para hallar puntos de articulación en un grafo no dirigido.
  - Escribe en seudocódigo un algoritmo que implemente el método descripto.
  - Demuestra la ejecución con un ejemplo

Ejercicios de grafos

- Dado el siguiente grafo NO DIRIGIDO, halla el ÁRBOL ABARCADOR DE COSTO MÍNIMO mediante el algoritmo de KRUSKAL, mostrando el orden en que fueron elegidas las aristas, y cómo va quedando el grafo en cada iteración.
- Idem, utilizando el algoritmo de PRIM