Algoritmos y Estructuras de Datos

Grafos Dirigidos

1

Resultados esperados del aprendizaje

- Analizar la conveniencia de representar algunos problemas reales mediante el modelo "grafos dirigido".
- Discutir alternativas de implementación de grafos
- Implementar algoritmos para resolver problemas cotidianos de búsqueda de caminos mínimos, centro del grafo y listado de caminos alternativos,
- Continuar desarrollando las habilidades de construcción de software de calidad

2

Grafos

- Los grafos son modelos naturales para representar relaciones entre objetos de datos.
- Un grafo consiste de un conjunto finito de vértices V y de un conjunto de arcos A.

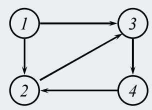
$$\mathbf{G = (V, A)}$$

- Sea el conjunto de vértices o nodos $V = \{v_1, v_2, \ldots v_n\}$ entonces el conjunto de arcos o aristas es $A = \{(v_i, v_j)\}$. un conjunto de pares de vértices.
- Si las aristas son no dirigidas, es decir $(v_i, v_j) = (v_j, v_i)$, el grafo se llama no dirigido.
- En un grafo dirigido, la arista es un par ordenado de vértices.

3

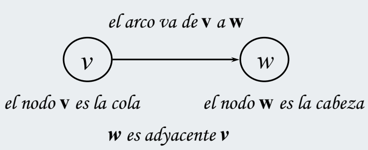
Grafos

- Existe como máximo una arista conectando cualesquiera dos vértices.
- Dos vértices se llaman ***adyacentes*** si existe una arista que los conecta.
- Se dice que un grafo está ***conectado*** si existe un camino entre cualquier par de vértices.
- La figura muestra estas definiciones: un grafo con cuatro vértices y cinco aristas. El vértice 4 es adyacente al 3 pero no al 1. El sub-grafo compuesto por los vértices 2, 3 y 4 está ***conectado***.

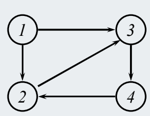


4

Grafos Dirigidos



Grafo dirigido de cuatro vértices y cinco aristas.



5

Grafos: Ejemplos de uso

- Los vértices pueden representar ciudades y los arcos la distancia entre ellas.
- Los vértices pueden representar bloques de un programa de computador y los arcos posibles transferencias de flujo de control.
- Los vértices pueden representar las asignaturas de una carrera universitaria y los arcos la relación de previaturas entre ellas.
- Los vértices pueden representar los estados, por ejemplo de un autómata, y los arcos la transición entre ellos.
- Los vértices pueden representar los eventos de principio y fin de una tarea, y las aristas las tareas necesarias para la ejecución de un proyecto.

6

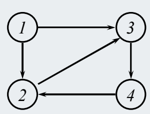
Grafos dirigidos: camino

- Un camino en un grafo dirigido es una secuencia de vértices $v_1, v_2, \ldots, v_n$, tal que
  - $(v_1,v_2), (v_2,v_3), \ldots, (v_{n-1},v_n)$ son arcos.
- Este camino va del vértice v_1 al vértice v_n, pasando por todos los vértices intermedios.
- La longitud de un camino es el número de arcos del camino. Un vértice por sí mismo implica un camino de largo 0.
- Un camino es simple si todos sus vértices, excepto tal vez el primero y el último, son distintos.
- Un ciclo es un camino simple de longitud por lo menos dos, que empieza y termina en el mismo vértice.

7

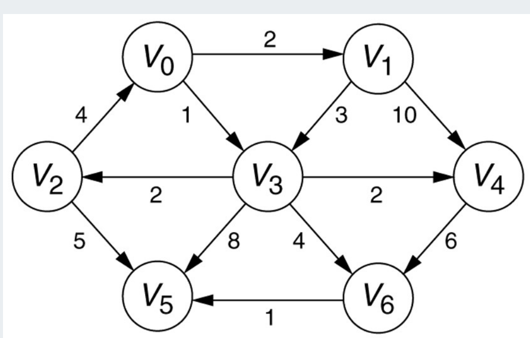
Representaciones de grafos dirigidos

- **Matriz de adyacencias**: requiere un espacio mínimo del orden de $\mathbf{n^2}$, siendo **n** la cantidad de vértices.
- **Lista de adyacencias**: requiere una cantidad de espacio proporcional a la suma de la cantidad de arcos más la cantidad de vértices.
- Las listas pueden implementarse en forma estática o dinámica.



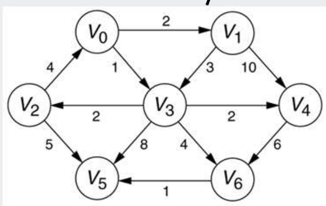
8

Grafo dirigido



9

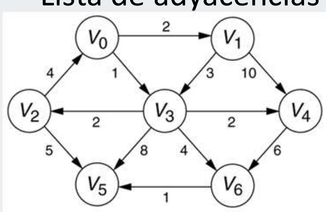
Matriz de adyacencias

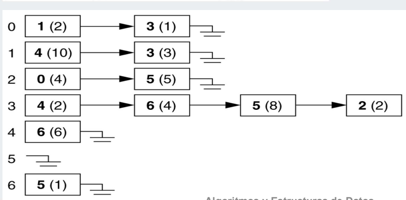


	0	1	2	3	4	5	6
0		**2**		**1**			
1				**3**	**10**		
2	**4**					**5**	
3			**2**		**2**	**8**	**4**
4							**6**
5							
6						**1**	

10

Lista de adyacencias





11

TDA Grafo

- **Grafo (Vértices, Aristas)**
- Dado **un vértice orig**en, indicar los **caminos mínimos** a todos los otros
- **Todos los caminos mínimos**, de todo vértice a todo otro
- **Centro de Grafo**, **excentricidad** de un vértice
- **Cerradura transitiva**
- **Búsqueda en profundidad** (recorrer sistemáticamente todo el grafo en profundidad)
- **Camino**, Caminos

12

Problema de los caminos más cortos con un origen: el algoritmo de Dijkstra

- Sea un **Grafo dirigido *G= (V,A)*** en que cada arco tiene una etiqueta no negativa, y donde un vértice se especifica como ***origen***
- **Problema**: determinar el **costo del camino más corto** desde el ***origen*** a ***cada uno*** de los demás vértices de ***V***
- La longitud de un camino es la suma de los costos de los arcos del camino
- **Técnica "ávida"**
- ***S*** conjunto de vértices cuya distancia más corta al origen es conocida. Al principio ***S*** sólo contiene el origen
- En cada paso se agrega algún vértice ***v*** restante a **S**, cuya distancia desde el origen es la más corta posible
- ***D*** vector que registra la longitud de camino especial más corta a cada vértice

13

Algoritmos "ávidos" ("avaros", "voraces" – "greedy")

- Dado **C** (entradas) , el algoritmo ávido devuelve en cada iteración un conjunto **S** tal que $S \subseteq C$
- **S** "prometedor"
- **elementos de la técnica**:
  - **C** – conjunto de candidatos (entradas)
  - Función **solución**
  - Función de **selección**
  - Función de **factibilidad**
  - Función **objetivo**

14

Algoritmos "ávidos" Funcionamiento básico

1. Elegir el mejor elemento de ***C*** posible (elemento *más prometedor*)
2. Retirarlo del conjunto ***C*** de candidatos
3. Comprobar si produce una solución factible, y si es así, incluirlo en ***S***
4. Si no es factible, descartar
5. Repetir 1-4 hasta alcanzar la función objetivo o agotar los elementos de ***C***

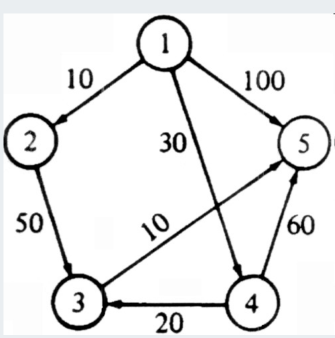
15

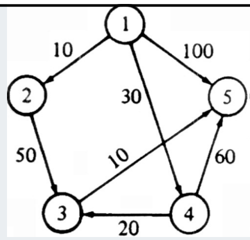
Problema de los caminos más cortos con un origen: el algoritmo de Dijkstra

- Dado un grafo dirigido ***G= (V,A)*** en que cada arco tiene una etiqueta no negativa, y donde un vértice se especifica como ***origen***
- **Problema**: determinar el costo del camino más corto desde el ***origen*** a ***todos*** los demás vértices de ***V***
- La longitud de un camino es la suma de los costos de los arcos del camino
- **Técnica "ávida"**
- ***S*** conjunto de vértices cuya distancia más corta al origen es conocida. Al principio ***S*** sólo contiene el origen
- En cada paso se agrega algún vértice ***v*** restante a S, cuya distancia desde el origen es la más corta posible
- ***D*** vector que registra la longitud de camino especial más corta a cada vértice

El algoritmo de Dijkstra

Función Dijkstra
COM
 Inicializar *S*, *D*
 S = {1};
 para i = 2 a n hacer D[i] = C[1,i] *//(el valor inicial, infinito si*
 //no hay camino directo)
 Mientras *V* <> *S* hacer
  Elegir *w* perteneciente a *V-S*, tal que la distancia ***D[w])*** sea un **mínimo**
  Agregar ***w*** a ***S***
  ParaCada *v* perteneciente a ***V-S*** hacer
   D[v] = min (D[v], D[w]+ costo(w,v)
 FinMientras;
FIN {Dijkstra}





Iteration	S	w	D[2]	D[3]	D[4]	D[5]
initial	{1}	–	10	∞	30	100
1	{1, 2}	2	10	60	30	100
2	{1,2,4}	4	10	50	30	90
3	{1,2,4,3}	3	10	50	30	60
4	{1,2,4,3,5}	5	10	50	30	60

Dijkstra: recuperación de caminos

- Usar otro array P de vértices, tal que P[v] contiene el vértice inmediato anterior a v en el camino menor. Inicialmente todos los **P[v] = 1**.

procedure Dijkstra (con caminos)
COM
Inicializar *S*, *D*, *P*. *S = {1};*
***para i = 2 a n hacer D[i]* = *C[1,i]* (*el valor inicial, infinito si no hay camino directo*)**
Mientras *V* <> *S* hacer
Elegir *w* perteneciente a *V-S*, tal que la distancia *D[w])* sea un mínimo
Agregar *w* a *S*
Para cada *v* perteneciente a *V-S* hacer
Si D[w]+ costo(w,v) < D[v] entonces
D[v] = D[w] + costo(w,v) y P[v] = w
finsi
Fin para cada
FinMientras;
FIN {Dijkstra}

Dijkstra: recuperación de caminos

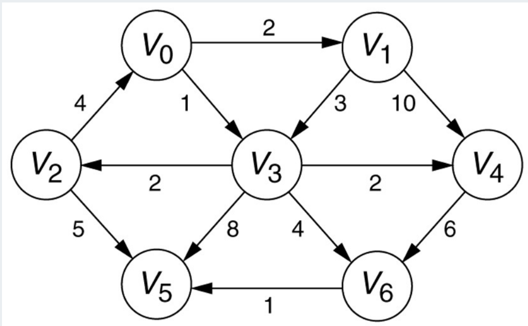
- Para el grafo del ejercicio anterior, el vector P al final del algoritmo tendrá los valores:

$P[2] = 1$, $P[3] = 4$, $P[4] = 1$, y $P[5] = 3$.

- Para encontrar el camino más corto desde el vértice ***1*** al vértice ***5***, recorremos los predecesores en orden inverso, comenzando por el vértice ***5***
- Vemos que ***3*** es el predecesor de ***5***, ***4*** el de ***3***, y ***1*** el de ***4***
- Entonces el camino más corto de ***1*** a ***5*** es:

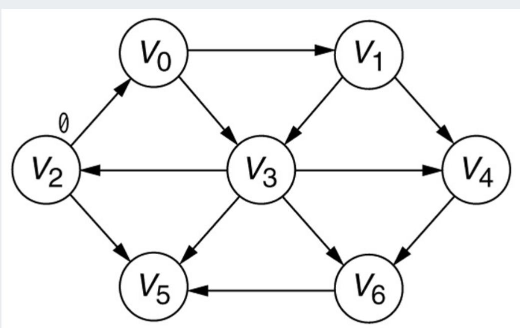
1, 4, 3, 5

Grafo dirigido



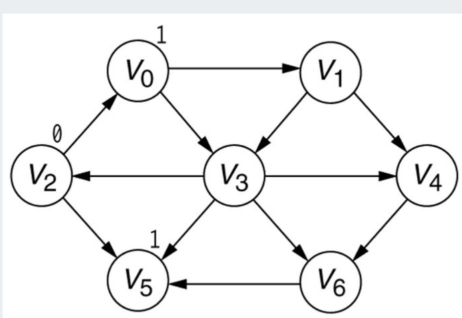
22

El grafo luego de marcar los vértices alcanzables desde el origen (V2) con costo 0



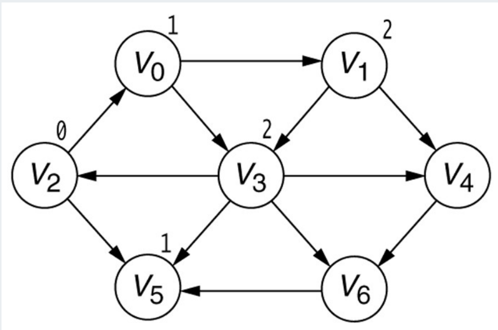
23

El grafo luego de marcar los vértices alcanzables desde el origen con costo 1

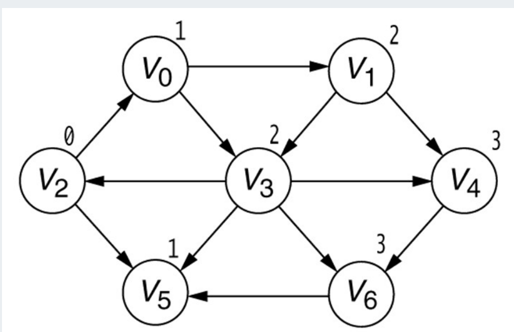


24

El grafo luego de marcar los vértices alcanzables desde el origen (V2) con costo 2



Los caminos más cortos finales



Dibuje el Grafo y Resuelva por Dijkstra

	A	B	C	D	E
A	-	1	2	7	-
B	7	-	1	2	-
C	-	-	-	3	-
D	6	-	4	-	4
E	-	2	-	8	-

Caminos más cortos entre todos los pares

- Problema: obtener una tabla que indique el menor camino entre todos los pares de vértices
  - Ejemplo: tiempos de vuelos entre ciudades
- Dado un grafo dirigido G= (V,A) en que cada arco tiene un costo no negativo C[v,w]
- Encontrar el camino de longitud más corta para cada par ordenado de vértices (v,w)
- Se podría utilizar Dijkstra, tomando por turno cada vértice como origen…
- Más directo: algoritmo de Floyd.

El algoritmo de Floyd

- Usa una matriz **A** de **n** x **n** en la que se calculan las longitudes de los caminos más cortos.
- Inicialmente **A[i,j] = C[i,j]** para todo i <> j, y si no hay arco de i a j se pone **∞**. Los elementos de la diagonal se hacen **0**.
- **n** iteraciones en la matriz A. Al final de la k-ésima iteración **A[i,j]** tendrá por valor la longitud menor de ir de i hasta j y que no pase por un vértice mayor que **k**

$$A_k[i,j] = \min\begin{cases} A_{k-1}[i,j] \\ A_{k-1}[i,k] + A_{k-1}[k,j] \end{cases}$$

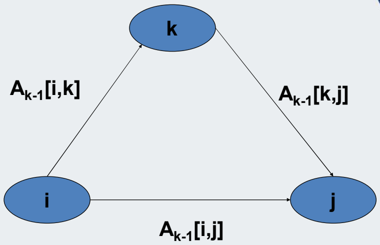
El algoritmo de Floyd

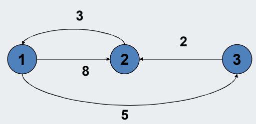
Problema de los caminos más cortos entre todos los pares:

```
Función Floyd (A : array[1..n,1..n] of real;
                        C : array[1..n,1..n] of real);
var i, j, k : integer;
begin
  for i:= 1 to n do
    for j:= 1 to n do
      A[i,j]:= C[i,j];
  for i:= 1 to n do A[i,i]:= 0;
  for k:= 1 to n do
    for i:= 1 to n do
      for j:= 1 to n do
        if (A[i,k]+A[k,j]) < A[i,j]
          then   A[i,j]:= A[i,k]+A[k,j];
end;
```


10

Algoritmo de Floyd





Floyd: recuperación de caminos

- Agregamos una matriz P en donde *P*[*i*, *j*] contiene aquél vértice ***k*** que determinó que Floyd encontrara el menor valor para *A*[*i*, *j*].
- Si *P*[*i*, *j*]=0, entonces el camino más corto desde *i* a *j* es directo, siguiendo el arco de *i* a *j*.
- Para el grafo del ejemplo anterior, la matriz P al final de Floyd contiene:

	1	2	3
1	0	3	0
2	0	0	1
3	2	0	0

P

Floyd con recuperación de caminos

```
Función Floyd (var A : array[1..n,1..n] of real;
                        C : array[1..n,1..n] of real);
i, j, k : integer;
COM
  for i:= 1 to n do
    for j:= 1 to n do
      A[i,j]:= C[i,j]; P[i, j] := 0 ;
  for i:= 1 to n do A[i,i]:= 0;
  for k:= 1 to n do
    for i:= 1 to n do
      for j:= 1 to n do
        if (A[i,k]+A[k,j]) < A[i,j]
          then   A[i,j]:= A[i,k]+A[k,j]; P[i, j] := k ;
END;
```

Floyd: recuperación de caminos

```
procedure camino ( i, j: integer );
var k: integer;
begin
    k := P[i, j];
    if k = 0 then salir;
    camino(i, k);
    imprimir(k);
    camino(k, j)
end; { camino }
```

	1	2	3
1	0	3	0
2	0	0	1
3	2	0	0

P

34

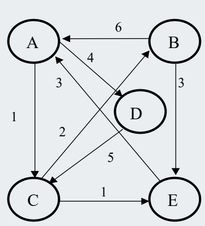
Localización del centro de un grafo: *excentricidad*

- Dado *G=(V,A),* la **excentricidad** de un nodo ***v*** se define como la ***máxima*** de todas las longitudes mínimas de los caminos entre cada uno de los otros nodos y el nodo ***v***.
- El centro de **G** es un vértice de mínima excentricidad.
- Para obtener el centro de un grafo hacer:
  - aplicar Floyd para obtener el largo de los caminos,
  - encontrar el ***máximo*** valor en cada columna **i**, y con ello se obtiene la excentricidad de i,
  - encontrar el vértice con **excentricidad mínima**: el **centro de G**.

35

Ejercicio Floyd y excentricidad

- Utilizando Floyd calcule los caminos mínimos
- ¿cuáles son las excentricidades de todos los vértices?
- ¿cuál es el Centro del Grafo, y cual la excentricidad?



36

Cerradura transitiva: algoritmo de Warshall.

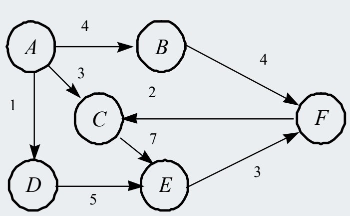
- Puede ser interesante saber sólo si existe un camino que vaya del vértice i al j
- En este caso, la matriz de costos indicará 1 si hay arco, o 0 si no lo hay
- Se desea obtener la matriz A tal que A[i,j]=1 si hay camino de i a j, o 0 si no lo hay
- Se conoce como cerradura transitiva de la matriz de adyacencia

Cerradura transitiva: algoritmo de Warshall.

```
procedure Warshall (A : array[1..n,1..n] of boolean;
                    C : array[1..n,1..n] of boolean);
i, j, k : integer;
COM
  for i:= 1 to n do
    for j:= 1 to n do
      A[i,j]:= C[i,j];
  for k:= 1 to n do
    for i:= 1 to n do
      for j:= 1 to n do
        if A[i,j] = false
          then  A[i,j]:= A[i,k] and A[k,j];
FIN;
```


Ejercicios

- Aplique el algoritmo de Warshall para calcular la cerradura transitiva del siguiente grafo



- Calcule los caminos mínimos, excentricidad y centro del grafo

Recorridos de grafos dirigidos

- Es necesario visitar los vértices y los arcos de forma sistemática.
- Búsqueda en profundidad, generalización del recorrido en preorden de árboles.
- Dado un grafo **G**, en el cual inicialmente todos los vértices están marcados como no visitados
- Se selecciona un vértice **v** como vértice de partida y se marca como visitado.
- Luego se recorre cada vértice no visitado adyacente a **v** usando recursivamente la búsqueda en profundidad.
- Una vez visitados todos los vértices que se pueden alcanzar desde **v**, la búsqueda está completa. Si quedan vértices sin visitar, se selecciona otro como partida y se repite el procedimiento

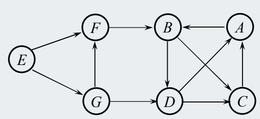
40

Búsqueda en profundidad

```
métodoTvertice.bpf ();

 w : Tvertice;
COM
(1)  Visitar();
       Para cada adyacente w hacer
(2)        Si no(w.visitado()) entonces
(3)           w.bpf()
           Fin Si
       Fin para cada
FIN {bpf}
```

¿De qué orden es el tiempo de ejecución es este algoritmo?



41

Búsqueda en profundidad, análisis

```
métodoTvertice.bpf ();

 w : Tvertice;
COM
(1)  Visitar();
(2)    Para cada adyacente w hacer
(3)      Si no(w.visitado()) entonces
            w.bpf()
          Fin Si
       Fin para cada
FIN {bpf}
```

- Todas las llamadas a bpf en la búsqueda en profundidad de un grafo con ***a*** arcos y ***n*** <= a vértices llevan un tiempo O(a):
  - No se llama a **bpf** en ningún vértice más de una vez
  - El tiempo consumido en las líneas (2) y (3) es proporcional a la suma de las longitudes de las listas, O(a)
- Entonces el tiempo total de la bfp de un grafo completo es O(a), o sea, el tiempo necesario para recorrer cada arco.

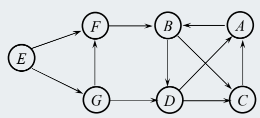
42

Búsqueda en profundidad

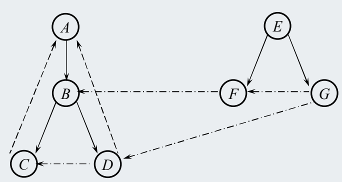
- Como se ve, el algoritmo anterior no tiene ninguna salida, “solamente” realiza la visita de los vértices en el orden indicado.
- Es el algoritmo **base** para la obtención de caminos, verificación de ciclos, etcétera.
- Un camino desde un vértice Origen a otro vértice Destino puede ser obtenido a partir de este algoritmo, agregando una condición de corte al llegar al Destino.

43

Recorrido en profundidad



- Bosque abarcador en profundidad.



Grafo recorrido inicialmente en A y luego en E

44

Bosque abarcador en profundidad.

- Los arcos que llevan a vértices nuevos se conocen como “**arcos de árbol**” y forman un “**bosque abarcador en profundidad**”.
- Existen otros tres tipos de arcos:
  - **Arco de retroceso**. Va de un vértice a uno de sus antecesores en el árbol.
  - **Arco de avance**. Va de un vértice a un descendiente propio.
  - **Arco cruzado**. Va de un vértice a otro que no es ni antecesor ni descendiente.

45

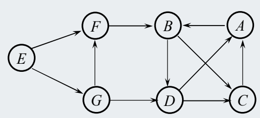
Identificación de los tipos de arco

- Numerar en profundidad.
- Si el arco es de avance, va de un vértice de baja numeración a uno de alta numeración (que ya fue visitado).
- Si es de retroceso, a la inversa (y el destino es un ancestro)
- Los arcos cruzados van de alta numeración a baja numeración (pero el destino no es un ancestro)
- **w** es un descendiente de **v** si y sólo si**,**

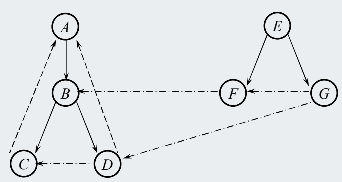
Num(v) < Num(w) <= Num(v) + Cantidad de descendientes de v

46

Recorrido en profundidad – identificación de arcos



- Bosque abarcador en profundidad.



Grafo recorrido inicialmente en A y luego en E

47

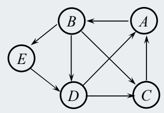
Obtención de un camino

```
método Camino (Destino : Tvértice;
              ElCamino: TCamino);
 w : Tvértice;
COM
  Visitar(); Agregar("this", ElCamino)
   Para cada adyacente w
    Si w = Destino entonces Guardar(ElCamino+Destino)
      Sino
       Si no(visitado(w)) entonces Camino(w,Destino,ElCamino)
       Fin si
     Fin si
   Fin para cada
   Quitar("this", ElCamino)
FIN
```


48

Obtención de un camino

```
método Camino (Destino : Tvértice;
                    ElCamino: TCamino);
 w : Tvértice;
COM
  Visitar(); Agregar("this", ElCamino)
   Para cada adyacente w
    Si w = Destino entonces Guardar(ElCamino+Destino)
      Sino
       Si no(visitado(w)) entonces Camino(w,Destino,ElCamino)
       Fin si
     Fin si
   Fin para cada
   Quitar("this", ElCamino)
FIN
```



Formas de recuperar caminos

- El algoritmo presentado es una propuesta que admite variantes, por ejemplo en qué lugar verificar si se llega al Destino. Continua realizando una "*bpf*" luego de haber encontrado un camino.
- "*El Camino*" que se define, en realidad es una colección de vértices que se maneja con disciplina LIFO, y que contiene todos los vértices que todavía están pendientes en la recursión.
- ¿Cómo puede usarse para recuperar **todos** los caminos posibles entre un par de vértices? Reflexionar sobre el hecho de estar marcado como visitado.
- ¿Cómo puede usarse para ayudar a clasificar los tipos de arcos de una recorrida? Notar la diferencia entre **estar en el camino** y haber sido **visitado**.

Grafos dirigidos acíclicos

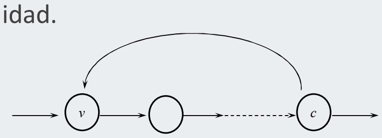
- El GDA es un grafo dirigido sin ciclos.
  - Son más generales que los árboles, pero menos que los grafos dirigidos arbitrarios.
  - Útiles para representar expresiones aritméticas con subexpresiones comunes.
  - También son apropiados para representar órdenes parciales.
- Ejemplo de expresión aritmética:

((a + b)* c + ((a + b) + e) * (e + f)) * ((a + b) * c)

17

Prueba de Aciclidad.

- Se realiza búsqueda en profundidad y **si se encuentra un arco de retroceso, el grafo tiene un ciclo.**
- Si un grafo dirigido tiene un ciclo, siempre habrá un arco de retroceso en la búsqueda en profundidad.



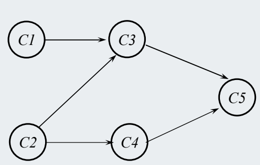
52

Clasificación topológica

- Es un proceso de asignación de un orden lineal a los vértices de un grafo dirigido acíclico tal que, si existe un arco del vértice *i* al vértice *j* , *i* aparece antes que *j* en el ordenamiento lineal de todos los vértices “orden parcial”
- Ejemplos.:
  - Proyecto que se divide en tareas, en donde pueden apreciarse relaciones de órdenes específicos de ejecución
  - Previaturas de cursos
- Los GDA pueden usarse para modelar de forma natural estas situaciones.

53

Clasificación topológica

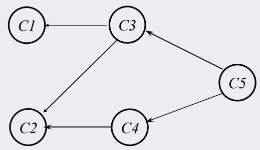


- Ej: estructura de previaturas de 5 cursos
- *C1, C2, C3, C4, C5* es una clasificación topológica de este grafo

54

18

Clasificación Topológica



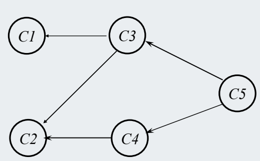
- Invertir los arcos, indicando entonces las dependencias
  - ej, C5 depende de C3 y de C4
- Ejecutar una búsqueda en profundidad, con procesamiento en la salida recursiva

Clasificación topológica

```
procedure ClasificacionTopologica ();
  w : Tvertice;

w : Tvertice;
COM
 (1)  Visitar();
 (2)     Para cada adyacente w hacer
 (3)       Si no(w.visitado()) entonces
              w.ClasificacionTopologica()
           Fin Si
         Fin para cada
         imprimir ();  //agregar "this" al principio de la lista de
previas….
FIN; {ClasificacionTopologica}
```

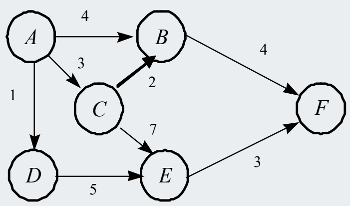

Clasificación Topológica



- Invertir los arcos, indicando entonces las dependencias
  - ej, C5 depende de C3 y de C4
- Ejecutar el algoritmo anterior, para el vértice destino (o para cada vértice que no tenga arcos incidentes, o sea, que son vértices "finales")

Ejercicios

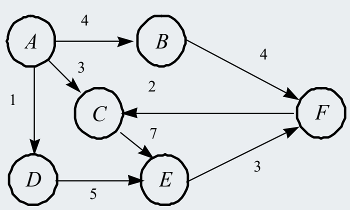
- Dado el siguiente grafo, halle uno o más órdenes topológicos para la tarea “F”



58

Ejercicios

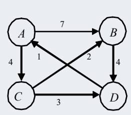
- Dado el siguiente grafo
  - Determine si contiene ciclos
  - encuentre los componentes fuertes y el grafo reducido



59

Ejercicios de grafos

- Aplique el algoritmo de Floyd al siguiente grafo, mostrando cada iteración.



- ¿Cuál es el Centro del Grafo? ¿Por qué?
- Escriba un algoritmo que implemente una BÚSQUEDA EN AMPLITUD de un grafo, y exprese el orden del tiempo de ejecución del mismo

60