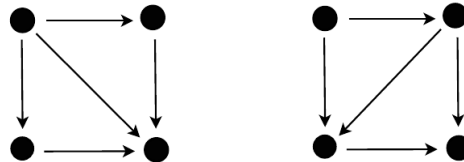


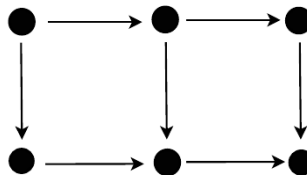


## Práctica 4 Teoría de categorías

1. Considerar los siguientes diagramas. En ambos casos, probar que si los dos triángulos conmutan, también conmuta el cuadrado.



2. Sea  $X$  un conjunto ordenado. Mostrar que  $X$  puede considerarse como una categoría.
3. Verificar que un monoide  $M$  define una categoría con un único objeto cuyas flechas son los elementos de  $M$ .
4. Dada una categoría  $\mathcal{C}$ , podemos definir  $\mathcal{C}^{op}$  con los mismos objetos que  $\mathcal{C}$  pero las flechas con sentido inverso, es decir,  $\text{ob}(\mathcal{C}^{op}) = \text{ob}(\mathcal{C})$  y  $\text{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$ . Verificar que  $\mathcal{C}^{op}$  es una categoría.
5. Sean  $\mathcal{C}$  y  $\mathcal{D}$  dos categorías. Se define  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$  cuyos objetos son pares ordenados de la forma  $(C, D)$  con  $C \in \text{ob}(\mathcal{C})$  y  $D \in \text{ob}(\mathcal{D})$  y  $\text{Hom}_{\mathcal{C} \times \mathcal{D}}((C, D), (C', D')) = \text{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C') \times \text{Hom}_{\mathcal{D}}(D, D')$ . Verificar que  $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$  es una categoría.
6. Definamos  $C^{\rightarrow}$  como la categoría de las flechas de una categoría  $C$ , es decir, los objetos de  $C^{\rightarrow}$  son las flechas de  $C$ . Una flecha de  $C^{\rightarrow}$  de  $f: A \rightarrow B$  en  $g: D \rightarrow E$  es un par  $(a, b)$  de flechas de  $C$  tales  $g \circ a = b \circ f$ .
- a) Expresar las flechas de  $C^{\rightarrow}$  en términos de diagramas conmutativos.
- b) Probar que si en el diagrama los cuadrados conmutan, entonces también conmuta el rectángulo exterior.



- c) Utilizar b) para definir la composición en  $C^{\rightarrow}$ .
- d) Verificar que  $C^{\rightarrow}$  es una categoría.
7. Sean  $C$  una categoría y  $A$  un objeto de  $C$ . Definimos  $C|A$  como la categoría cuyos objetos son las flechas  $f$  de  $C$  tales que  $\text{cod}(f) = A$ . Una flecha  $g$  en  $C|A$  de  $f: X \rightarrow A$  en  $h: Y \rightarrow A$  es una flecha  $g: X \rightarrow Y$  de  $C$  tal que  $f = h \circ g$ .
- a) Expresar las flechas de  $C|A$  en términos de diagramas conmutativos.

- b) Verificar que  $C|A$  es una categoría.
  - c) Si  $P$  es la categoría definida por un conjunto ordenado y  $x \in P$ , determinar  $P|x$ .
8. Probar que en **Set** los monomorfismos (epimorfismos) son exactamente las funciones inyectivas (resp. sobreyectivas).
9. Sean  $C$  una categoría y  $f, g$  flechas de  $C$ . Probar que
- a) Si  $f$  y  $g$  son monomorfismos, entonces  $g \circ f$  también lo es.
  - b) Si  $g \circ f$  es un monomorfismo,  $f$  también lo es.
  - c) Si  $f$  y  $g$  son epimorfismos, entonces  $g \circ f$  también lo es.
  - d) Si  $g \circ f$  es un epimorfismo,  $g$  también lo es.
  - e) Si  $f^{-1}$  es la inversa de  $f$  y  $g^{-1}$  es la inversa de  $g$ , entonces  $f^{-1} \circ g^{-1}$  es la inversa de  $g \circ f$ .
10. Mostrar que una flecha de una categoría puede ser mono y epimorfismo y no isomorfismo.
11. Mostrar que una flecha de una categoría concreta puede ser epimorfismo y no sobreyectiva.
12. Mostrar que dos objetos terminales en una categoría son isomorfos. Por dualidad, ¿qué se puede decir de los objetos iniciales?
13. ¿Cuáles son los objetos iniciales y terminales en **Set**  $\times$  **Set**? ¿Cuáles en **Set** $^{\rightarrow}$ ?
14. Dar una categoría sin objetos iniciales. Dar una sin objetos finales. Dar una donde los objetos finales e iniciales coincidan.
15. Sea  $\mathcal{C}$  una categoría. Probar que si dos objetos admiten producto (coproducto), éste es único salvo isomorfismo.
16. Determinar objetos iniciales, objetos terminales, productos y coproductos en las siguientes categorías: un Poset  $P$  visto como categoría, **Set**, **Poset**, **Mon** y **Grp**.
17. Dar una categoría donde algún par de objetos carecen de producto.
18. Sea  $\mathcal{C}$  una categoría y sean  $A, B, C, D$  objetos de  $\mathcal{C}$ . Mostrar que en caso de existir  $A \times B$ ,  $C \times D$  y dos morfismos  $f : A \rightarrow C$  y  $g : B \rightarrow D$ , entonces puede definirse un morfismo  $f \times g : A \times B \rightarrow C \times D$ .
19. Mostrar las siguientes identidades:
- a)  $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle = id$
  - b)  $\langle f \circ h, g \circ h \rangle = \langle f, g \rangle \circ h$
  - c)  $(f \times h) \circ \langle g, k \rangle = \langle f \circ g, h \circ k \rangle$
  - d)  $(f \times h) \circ (g \times k) = (f \circ g) \times (h \circ k)$
  - e)  $\langle [f, g], [h, k] \rangle = [\langle f, h \rangle, \langle g, k \rangle]$
20. Probar los siguientes isomorfismos:
- a)  $A \times B \cong B \times A$

b)  $A \times 1 \cong A$

c)  $A \times (B \times C) \cong (A \times B) \times C$

¿Cuáles son los enunciados duales?

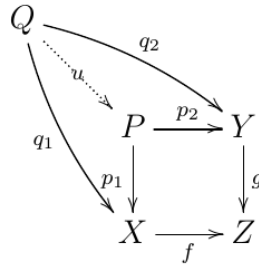
**21.** Probar que si dos morfismos  $f, g: X \rightarrow Y$  admiten ecualizador (coecualizador), éste es único salvo isomorfismo.

**22.** Encontrar el ecualizador en **Set**.

**23.** Sean  $f, g: X \rightarrow Y$  dos morfismos en **Set**. Probar que el coecualizador de  $f$  y  $g$  es el cociente de  $Y$  por la relación de equivalencia  $y \equiv z$  si y sólo si existe  $x \in X$  tal que  $y = f(x)$  y  $z = g(x)$  o bien  $y = g(x)$  y  $z = f(x)$ .

**24.** Probar que en una categoría  $\mathcal{C}$  todo ecualizador  $e$  es monomorfismo. Mostrar que si además  $e$  es epimorfismo, entonces se tiene un isomorfismo.

**25.** El pullback de dos morfismos  $f: X \rightarrow Z$  y  $g: Y \rightarrow Z$  consiste en un objeto  $P$  junto con dos morfismos  $p_1: P \rightarrow X$ ,  $p_2: P \rightarrow Y$  tal que  $f \circ p_1 = g \circ p_2$ , y además si es dado un objeto  $Q$  con dos morfismos  $q_1: Q \rightarrow X$ ,  $q_2: Q \rightarrow Y$  tal que  $f \circ q_1 = g \circ q_2$ , entonces existe un único morfismo  $u: Q \rightarrow P$  tal que  $p_1 \circ u = q_1$  y  $p_2 \circ u = q_2$ . A continuación, un diagrama que muestra la situación:



Probar que el pullback de dos morfismos, si existe, es único salvo isomorfismo.

**26.** Encontrar el pull-back en **Set**.

**27.** Sea  $\mathcal{C}$  una categoría con exponenciales,

a) Probar  $\text{curry}(\text{eval}_{A,B}) = \text{id}_{B^A}$ .

b) Dado un morfismo  $f: B \rightarrow C$ , construir un morfismo  $B^A \rightarrow C^A$ .

c) Dado un morfismo  $f: A \rightarrow C^B$ , construir un morfismo  $\text{uncurry}(f): A \times B \rightarrow C$ .

d) Probar  $\text{uncurry}(\text{curry}(f)) = f$  y  $\text{curry}(\text{uncurry}(f)) = f$ .

**28.** Sea  $\mathcal{C}$  una CCC y sean  $A, B$  objetos de  $\mathcal{C}$ . Probar:

a)  $B^A$  es único salvo isomorfismo.

b)  $1^A \cong 1$ .

c)  $B^1 \cong B$ .

**29.** Hallar los exponenciales en **Set**.

**30.** Demostrar que un álgebra de Boole es una CCC.

**31.** En una categoría con coproductos y objeto final, podemos definir los booleanos como el objeto  $Bool = 1 + 1$ . En este caso, a  $i_1$  le llamamos *true* y a  $i_2$  le llamamos *false*. Escribir un morfismo  $not : Bool \rightarrow Bool$  tal que

$$\begin{aligned}not \circ true &= false \\not \circ false &= true\end{aligned}$$

Suponiendo que la categoría tiene exponenciales, ¿puede escribir un morfismo  $and : Bool \times Bool \rightarrow Bool$  que se comporte como la conjunción?

**32.** Una categoría se dice distributiva si tiene productos finitos, coproductos finitos, y para todos objetos  $A, B, C$ , los morfismos

$$\begin{aligned}\iota_{0 \times A} : 0 \rightarrow 0 \times A \\[\iota_1 \times id_C, \iota_2 \times id_C] : A \times C + B \times C \rightarrow (A + B) \times C\end{aligned}$$

son isomorfismos.

Probar que toda CCC con coproductos finitos es distributiva.