

# Categorías. Parte 2.

Silvio Reggiani

Complementos de Matemática II (LCC)  
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura  
Universidad Nacional de Rosario

10 de noviembre de 2020

# Monomorfismos

## Definición

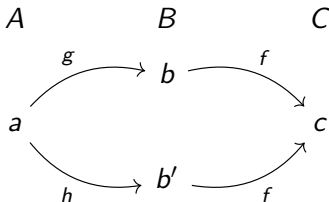
Decimos que  $f \in \text{Hom}(B, C)$  es un **monomorfismo** si

$$\forall A \in \text{ob } \mathcal{C}, \forall g, h \in \text{Hom}(A, B), [f \circ g = f \circ h \implies g = h]$$

$$A \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{h} \end{array} B \xrightarrow{f} C$$

## Ejemplo/Ejercicio

En **Set** los monomorfismos coinciden con las funciones inyectivas.



# Epimorfismos

## Definición

Decimos que  $f \in \text{Hom}(A, B)$  es un **epimorfismo** si

$$\forall C \in \text{ob } \mathcal{C}, \forall g, h \in \text{Hom}(B, C), [g \circ f = h \circ f \implies g = h]$$

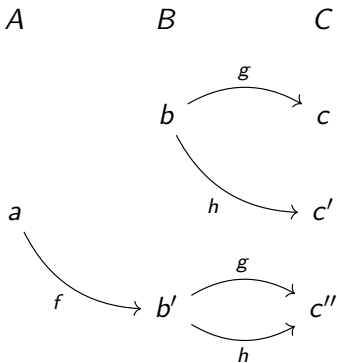
$$A \xrightarrow{f} B \begin{matrix} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{h} \end{matrix} C$$

## Observación/Ejercicio

Las definiciones de monomorfismo y epimorfismo son definiciones duales. Es decir,  $f$  es un monomorfismo en la categoría  $\mathcal{C}$  si y sólo si  $f$  es un epimorfismo en la categoría  $\mathcal{C}^{\text{op}}$ .

## Ejemplo/Ejercicio

En **Set** los epimorfismos coinciden con las funciones sobreyectivas.



## Ejemplo

- ▶  $\mathcal{C} = \mathbf{Mon}$  (categoría de monoides)
- ▶  $A = (\mathbb{N}_0, +, 0)$
- ▶  $B = (\mathbb{Z}, +, 0)$
- ▶  $i : A \hookrightarrow B$
- ▶  $i$  es monomorfismo, pues es inyectiva y  $\mathbf{Mon}$  es una categoría concreta (¿por qué?).
- ▶  $i$  no es sobreyectiva pero SÍ es un epimorfismo. En efecto, sea  $(M, *, e)$  un monoide y supongamos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\mathbb{N}_0 \xhookrightarrow{i} \mathbb{Z} \begin{matrix} \xrightarrow{g} \\ \xrightarrow{h} \end{matrix} M$$

## Ejemplo (cont.)

- Si  $n \in \mathbb{Z}$  y  $n \geq 0$ , entonces

$$g(n) = g(i(n)) = h(i(n)) = h(n)$$

- Si  $n \in \mathbb{Z}$  y  $n \leq 0$

$$\begin{aligned} g(n) &= g(n) * e = g(n) * h(0) \\ &= g(n) * h(-n + n) \\ &= g(n) * h(-n) * h(n) \\ &= g(n) * g(-n) * h(n) & [-n \geq 0] \\ &= g(n - n) * h(n) \\ &= g(0) * h(n) \\ &= e * h(n) = h(n) \end{aligned}$$

- Usamos que  $\mathbb{Z}$  es un grupo.

## Ejercicio

En **Grp**:

- ▶ mono  $\iff$  inyectiva.
- ▶ epi  $\iff$  sobreyectiva.

# Isomorfismos

## Definición

Decimos que un morfismo  $f : A \rightarrow B$  es un **isomorfismo** si existe un morfismo  $f^{-1} : B \rightarrow A$  tal que  $f \circ f^{-1} = \text{id}_B$  y  $f^{-1} \circ f = \text{id}_A$

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{f^{-1}} & A \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \text{id}_A & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} B & \xrightarrow{f^{-1}} & A & \xrightarrow{f} & B \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \text{id}_B & & \end{array}$$

## Ejemplo

$$f \text{ iso} \implies \begin{cases} f & \text{mono} \\ f & \text{epi} \end{cases}$$

$$C \begin{array}{c} \xrightarrow{g} \\ \xleftarrow{h} \end{array} A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xleftarrow{f^{-1}} \end{array} B$$

$$\blacktriangleright f \circ g = f \circ h \implies \underbrace{f^{-1} \circ f \circ g}_{=g} = \underbrace{f^{-1} \circ f \circ h}_{=h}$$

$\blacktriangleright$  Luego  $f$  mono. Probar como ejercicio que  $f$  es epi (dualidad).



## Ejemplo

$\mathcal{C} = \mathbf{Mon}$ ,  $i : \mathbb{N}_0 \hookrightarrow \mathbb{Z}$ .

- ▶  $i$  es mono.
- ▶  $i$  es epi.
- ▶ ¿ $i$  es iso?

$$\begin{array}{ccccc} \mathbb{N}_0 & \xrightarrow{i} & \mathbb{Z} & \xrightarrow[f]{?} & \mathbb{N}_0 \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \text{id}_{\mathbb{N}_0} & & \end{array}$$

- ▶  $f(n) = n$  para todo  $n \geq 0$
- ▶ Además, si  $n \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} 0 &= f(0) = f(-n + n) \\ &= f(-n) + f(n) \\ &= f(-n) + n \end{aligned}$$

- ▶ Luego  $f(-n) = -n$ . Absurdo.

# Objetos iniciales y terminales

## Definición

Un objeto  $0 \in \text{ob } \mathcal{C}$  se dice **inicial** si

$$\forall A \in \text{ob } \mathcal{C}, \exists ! 0 \rightarrow A.$$

## Definición (dual)

Un objeto  $1 \in \text{ob } \mathcal{C}$  se dice **terminal** si

$$\forall A \in \text{ob } \mathcal{C}, \exists ! A \rightarrow 1.$$

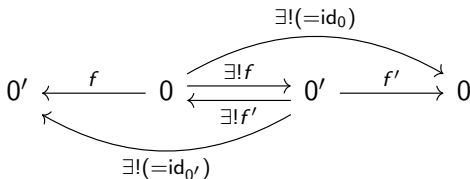
## Ejemplo

En **Set**:

- ▶  $\emptyset$  es el único objeto inicial (¿por qué?).
- ▶  $\{x\}$  son (todos) los objetos terminales.

## Ejemplo

Los objetos iniciales/terminales son únicos salvo isomorfismos. Más aún, entre dos objetos iniciales/terminales existe un único isomorfismo.



- $f' \circ f = id_0$ ,
- $f \circ f' = id_{0'}$ ,
- Luego,  $f' = f^{-1}$ .

## Ejemplo

Pensemos en un poset  $(P, \leq)$  como una categoría. ¿Cuáles son los objetos iniciales/terminales?

- ▶ Objeto inicial: mínimo
- ▶ Objeto terminal: máximo

Notar que no siempre existen.

## Ejemplo

- ▶ En **Grp**, el grupo trivial  $\{e\}$  es inicial y terminal a la vez.
- ▶ Ídem en **Vect** $_{\mathbb{K}}$  con el espacio nulo  $\{0\}$ .

## Observación

Los objetos que son iniciales y terminales a la vez son muy importantes y suelen llamarse objetos nulos. Volveremos sobre esto más adelante.

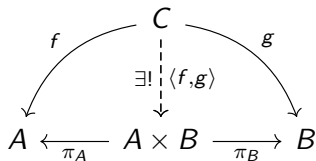
# Productos

## Ejemplo

En **Set**, sabemos que

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\},$$

pero ¿cómo podemos caracterizar  $A \times B$  usando sin hacer mención a sus elementos?

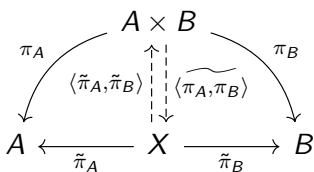
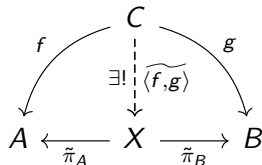


- ▶ Tenemos dos proyecciones
  - ▶  $\pi_A(a, b) = a$
  - ▶  $\pi_B(a, b) = b$
- ▶ Para cada conjunto  $C$  y cada par de funciones  $f : C \rightarrow A$ ,  $g : C \rightarrow B$ , existe una única función  $\langle f, g \rangle : C \rightarrow A \times B$  tal que el diagrama conmuta
- ▶  $\langle f, g \rangle(c) = (f(c), g(c))$

## Observación

La terna  $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$  es “única” con la propiedad antes mencionada.

Es decir, si  $(X, \tilde{\pi}_A, \tilde{\pi}_B)$  tiene la siguiente propiedad universal, entonces  $X$  es biyectivo con  $A \times B$ , **vía una biyección que conmuta con las proyecciones.**



- ▶  $\tilde{\pi}_A(\widetilde{\langle \pi_A, \pi_B \rangle}(a, b)) = \pi_A(a, b) = a$
- ▶  $\tilde{\pi}_B(\widetilde{\langle \pi_A, \pi_B \rangle}(a, b)) = \pi_B(a, b) = b$
- ▶ Por unicidad (ejercicio)

$$\langle \tilde{\pi}_A, \tilde{\pi}_B \rangle \circ \widetilde{\langle \pi_A, \pi_B \rangle} = \text{id}_{A \times B}$$

- ▶ Ídem  $\widetilde{\langle \pi_A, \pi_B \rangle} \circ \langle \tilde{\pi}_A, \tilde{\pi}_B \rangle = \text{id}_X$

## Definición

El **producto** de dos objetos  $A, B$  en una categoría  $\mathcal{C}$  es una terna  $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$  donde

►  $\pi_A \in \text{Hom}(A \times B, A)$

►  $\pi_B \in \text{Hom}(A \times B, B)$

que tiene la siguiente propiedad universal:

- para todo objeto  $C$  y para todo par de morfismos  $f : C \rightarrow A$ ,  $g : C \rightarrow B$ , existe un único morfismo  $\langle f, g \rangle : C \rightarrow A \times B$  tal que el siguiente diagrama conmuta

The diagram illustrates the universal property of the product. At the top is object  $C$ . Below it is object  $A \times B$ . At the bottom are objects  $A$  and  $B$ . A curved arrow labeled  $f$  points from  $C$  to  $A$ . A curved arrow labeled  $g$  points from  $C$  to  $B$ . A vertical dashed arrow labeled  $\exists! \langle f, g \rangle$  points from  $C$  down to  $A \times B$ . A horizontal arrow labeled  $\pi_A$  points from  $A \times B$  to  $A$ . A horizontal arrow labeled  $\pi_B$  points from  $A \times B$  to  $B$ .

## Ejercicio

$(A \times B, \pi_A, \pi_B)$  es único salvo isomorfismo.

## Ejemplo

Supongamos que existen los productos  $A \times B$ ,  $C \times D$  y que tenemos dados dos morfismos  $f : A \rightarrow C$ ,  $g : B \rightarrow D$ . Entonces se puede definir un morfismo

$$f \times g : A \times B \rightarrow C \times D$$

$$\begin{array}{ccccc} A & \xleftarrow{\pi_A} & A \times B & \xrightarrow{\pi_B} & B \\ f \downarrow & f \circ \pi_A \swarrow & \downarrow \exists! & \searrow g \circ \pi_B & \downarrow g \\ C & \xleftarrow{\pi_C} & C \times D & \xrightarrow{\pi_D} & D \end{array}$$

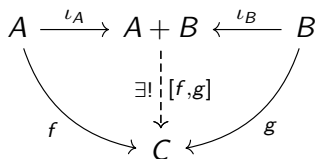
$$f \times g = \langle f \circ \pi_A, g \circ \pi_B \rangle$$



# Coproductos

## Definición

Un **coproducto** de  $A, B$  es una terna  $(A + B, \iota_A, \iota_B)$  con la siguiente propiedad universal:



para todo objeto  $C$  y para todo par de morfismos  $f : A \rightarrow C$ ,  $g : B \rightarrow C$  existe un único morfismo

$$[f, g] : A + B \rightarrow C$$

tal que el diagrama conmuta.

## Proposición

$(A + B, \iota_A, \iota_B)$ , si existe, es único salvo isomorfismo.

## Demostración.

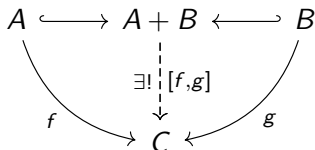
Por dualidad (coproductos en  $\mathcal{C}$  son productos en  $\mathcal{C}^{\text{op}}$ ).



## Ejemplo

En **Set** hay coproductos.

►  $A + B = ? = A \sqcup B$  (unión disjunta).



$$[f, g](x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ g(x), & x \in B \end{cases}$$

## Observación

La unión disjunta de dos conjuntos  $A$  y  $B$  se puede construir como

$$A \sqcup B := (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\}).$$

Por ejemplo

$$\{x, y, z\} \sqcup \{y, z, u\} = \{(x, 0), (y, 0), (z, 0), (y, 1), (z, 1), (u, 1)\}.$$

## (co)Productos arbitrarios

### Definición

Si  $(A_i)_{i \in I}$  es una familia de objetos indexada por un conjunto  $I$ , un **producto** de  $(A_i)_{i \in I}$  es un objeto  $\prod_{i \in I} A_i$  junto con una familia de morfismos  $\pi_j : \prod_{i \in I} A_i \rightarrow A_j$ ,  $j \in I$  que tienen la siguiente propiedad universal: para todo objeto  $C$  y para toda familia de morfismos  $f_i : C \rightarrow A_i$ , existe un único morfismo

$$\langle f_i \rangle_{i \in I} : C \rightarrow \prod_{i \in I} A_i$$

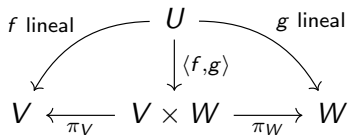
tal que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{array}{ccc} C & & \\ \exists! \langle f_i \rangle \downarrow & \searrow f_i & \\ \prod_{i \in I} A_i & \xrightarrow{\pi_i} & A_i \end{array}$$

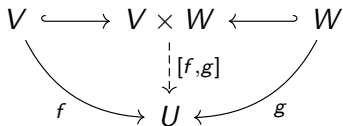
## Ejercicio

Definir el coproducto  $\bigoplus_{i \in I} A_i$  (aquí hay que considerar “inclusiones”  $\iota_i : A_i \rightarrow \bigoplus_{i \in I} A_i$ , en lugar de “proyecciones”).

## Ejemplo: $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$



$$\langle f, g \rangle(u) = (f(u), g(u)) \text{ (lineal)}$$



$$[f, g](v, w) = f(v) + g(w) \text{ (lineal)}$$

$$\boxed{V \oplus W = V \times W}$$

**Obs:**  $V \hookrightarrow V \times W$  se define por  $v \mapsto (v, 0)$  (ídem la otra).

## Observación/Ejercicio

- ▶ Para una familia infinita de índices,  $\prod_{i \in I} V_i$  es un producto en  $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$  pero **NO es un coproducto**. Si intentáramos repetir el razonamiento anterior tendríamos que utilizar sumas infinitas, lo cual no tiene sentido. **Igualmente, se debería dar una demostración formal para ver que falla la propiedad universal.**
- ▶ ¿Quién sería  $\bigoplus_{i \in I} V_i$ ?

## Ejercicio

¿Hay coproductos en **Ab**?

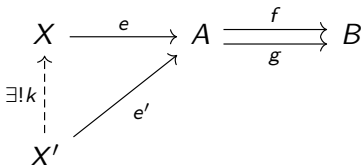
## Ejercicio\*

¿Hay coproductos en **Grp**?

# Ecualizadores

## Definición

El **ecualizador** de dos morfismos  $f, g : A \rightarrow B$  es un morfismo  $e : X \rightarrow A$  tal que  $f \circ e = g \circ e$  y tal que para todo morfismo  $e' : X' \rightarrow A$  tal que  $f \circ e' = g \circ e'$ , existe un único  $k : X' \rightarrow X$  tal que  $e \circ k = e'$



## Ejemplo/Ejercicio

En **Set**:

$$X \xrightarrow{e} A \begin{matrix} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{matrix} B$$

$$\blacktriangleright X = \{a \in A : f(a) = g(a)\}$$

$$\blacktriangleright f(e(a)) = g(e(a))$$

Verificar que se cumple la propiedad universal.

## Ejercicio

$\blacktriangleright$  ecualizador  $\implies$  mono

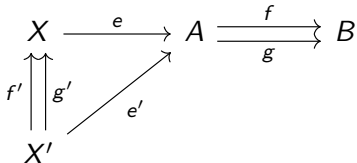
$\blacktriangleright$  ecualizador + epi  $\implies$  iso

Idea: considerar

$$X' \begin{matrix} \xrightarrow{f'} \\ \xrightarrow{g'} \end{matrix} X \xrightarrow{e} A \begin{matrix} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{matrix} B \qquad e \circ f' = e \circ g' \stackrel{?}{\implies} f' = g'$$

## Ejercicio (cont.)

Pero pensarlo así



con

$$e' = f \circ e \circ f' = f \circ e \circ g' = g \circ e \circ g' = g \circ e \circ f'$$

## Ejercicio\*

Definir coequalizador (esto no es difícil) e identificarlo en **Set**.