# Funtores adjuntos

Silvio Reggiani

Complementos de Matemática II (LCC)
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

1 de diciembre de 2020

# Adjunciones

**Idea:** es uno de los conceptos más importantes en teoría de categorías, captura el comportamiento que tienen ciertos pares de funtores destacados.

$$\mathscr{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathscr{D}$$

(Enseguida veremos ejemplos.)

Hay otras nociones similares que estudiamos anteriormente.

## Categorías isomorfas

$$\mathscr{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathscr{D} \qquad \begin{aligned} F \circ G &= \mathrm{id}_{\mathscr{D}} \\ G \circ F &= \mathrm{id}_{\mathscr{C}} \end{aligned} \qquad \text{(isomorfismo en } \mathbf{Cat}\text{)}$$

## Categorías equivalentes

$$\mathscr{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathscr{D} \qquad \left.\begin{aligned} \mathrm{id}_{\mathscr{C}} &\overset{\cdot}{\longrightarrow} G \circ F \\ \mathrm{id}_{\mathscr{D}} &\overset{\cdot}{\longrightarrow} F \circ G \end{aligned}\right\} \text{ isomorfismos naturales}$$

## Para tener en cuenta

- A diferencia de los conceptos anteriores, la noción de adjunción es una relación entre funtores, no entre categorías
- Es un concepto más débil.

Antes de dar una definición formal tratemos de entender qué es una adjunción dando un ejemplo.

## Ejemplo

- $\Sigma$ un conjunto (alfabeto)
- $\Sigma^*$ monoide libre generado por $\Sigma$
  - producto = concatenación
  - neutro = “ ” (palabra vacía)
- $\Sigma^* \simeq \mathrm{List}(\Sigma)$

Este monoide tiene la siguiente propiedad universal:

## Ejemplo (cont.)

- $i : \Sigma \hookrightarrow \Sigma^*$ (palabras de longitud 1).
- Para todo monoide $M$ y para toda función $f : \Sigma \to M$, existe un único morfismo de monoides $\tilde{f} : \Sigma^* \to M$ tal que $f = \tilde{f} \circ i$.

$$
\begin{tikzcd}
\Sigma \arrow[rr, hook, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & \Sigma^* \arrow[dl, dashed, "\tilde{f}"] \\
& M &
\end{tikzcd}
\qquad
\tilde{f}(a_1 a_2 \cdots a_n) = f(a_1) f(a_2) \cdots f(a_n)
$$

- ATENCIÓN: este no es un diagrama de categorías
  - $i, f$ son flechas en **Set**
  - $\tilde{f}$ es una flecha en **Mon**
- ¿Cómo podemos describir esta situación en un lenguaje más categórico?

## Ejemplo (cont.)

- free : **Set** $\to$ **Mon**, el funtor "libre" que asigna a cada conjunto $\Sigma$ el monoide libre $\Sigma^*$ (y a cada morfismo $f : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ en **Set**, el morfismo $\tilde{f} : \Sigma_1^* \to \Sigma_2^*$ en **Mon**. Ejercicio: usar la propiedad universal para explicar cómo se define este morfismo $\tilde{f}$)
- fgt : **Mon** $\to$ **Set** el funtor "olvido"

$$\begin{tikzcd}
\Sigma \arrow[rr, hook, "i"] \arrow[dr, "f"'] & & \mathrm{fgt}(\mathrm{free}(\Sigma)) \arrow[dl, dashed, "\mathrm{fgt}(\tilde{f})"] \\
& \mathrm{fgt}(M) &
\end{tikzcd}$$

## Definición

Una **adjunción** entre dos funtores $\mathscr{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathscr{D}$ es una transformación natural $\eta : \mathrm{id}_{\mathscr{C}} \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} G \circ F$ tal que para todo $X \in \mathrm{ob}\,\mathscr{C}$, para todo $Y \in \mathrm{ob}\,\mathscr{D}$ y para todo $f : X \to G(Y)$ existe un único morfismo $\tilde{f} : F(X) \to Y$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\eta_X"] \arrow[dr, "f"'] & & G(F(X)) \arrow[dl, dashed, "G(\tilde{f})"] \\ & G(Y) & \end{tikzcd}$$

## Nomenclatura (la explicaremos más adelante)

- $F$ se dice que es un **adjunto a izquierda** de $G$.
- $G$ se dice que es un **adjunto a derecha** de $F$.
- $\eta$ es la **unidad de adjunción.**

## Observación

En el ejemplo anterior, el funtor free : **Set** $\to$ **Mon** también lo podemos realizar como

$$\mathsf{List} : \mathbf{Set} \to \mathbf{Mon}$$

En este caso, el morfismo

$$\eta_\Sigma : \Sigma \to \mathsf{fgt}(\mathsf{List}(\Sigma))$$

está definido por $\eta_\Sigma(s) = [s]$, para cada $s \in \Sigma$. Siempre hay que verificar que $\eta$ es una transformación natural: o sea si $f : \Sigma_1 \to \Sigma_2$ es una función, entonces el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{tikzcd}
\Sigma_1 \arrow[r, hook, "\eta_{\Sigma_1}"] \arrow[d, "f"'] & \mathsf{fgt}(\mathsf{List}(\Sigma_1)) \arrow[d, "\mathsf{fgt}(\mathsf{List}(f))"] \\
\Sigma_2 \arrow[r, hook, "\eta_{\Sigma_2}"] & \mathsf{fgt}(\mathsf{List}(\Sigma_2))
\end{tikzcd}$$

$\forall s_1 \in \Sigma_1,$

$$\begin{aligned}
(\mathrm{fgt}(\mathrm{List}(f)) \circ i_1)(s_1) &= \mathrm{fgt}(\mathrm{List}(f))(i_1(s_1)) \\
&= \mathrm{fgt}(\mathrm{List}(f))([s_1]) \\
&= \mathrm{List}(f)([s_1]) \\
&= [f(s_1)] \\
&= i_2(f(s_1)) \\
&= (i_2 \circ f)(s_1).
\end{aligned}$$

Luego

$$\mathrm{fgt}(\mathrm{List}(f)) \circ i_1 = i_2 \circ f.$$

## Ejemplo

Consideremos el siguiente caso particular:

- $f : \Sigma \to \mathsf{fgt}(\mathbb{N}_0)$,

$$f \equiv 1 \qquad \text{(función constante)}$$

- El morfismo de monoides asociado $\tilde{f} : \mathsf{List}(\Sigma) \to \mathbb{N}_0$ es la función longitud

$$\boxed{\tilde{f} = \mathsf{len}}$$

$$\begin{tikzcd}
\Sigma \arrow[rr, "\eta_\Sigma"] \arrow[dr, "1"'] & & \mathsf{fgt}(\mathsf{List}(\Sigma)) \arrow[dl, "\mathsf{fgt}(\mathsf{len})"] \\
& \mathsf{fgt}(\mathbb{N}_0) &
\end{tikzcd}$$

# Co-unidad de adjunción

- Unidad de una adjunción

$$\mathscr{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathscr{D} \qquad \boxed{\eta : \mathrm{id}_{\mathscr{C}} \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} G \circ F}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\eta_X"] \arrow[dr, "f"'] & & G(F(X)) \arrow[dl, dashed, "(G(\tilde{f}))"] \\
& G(Y) &
\end{tikzcd} \qquad \exists! \tilde{f} : F(X) \to Y$$

- Co-unidad de una adjunción

$$\mathscr{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathscr{D} \qquad \boxed{\varepsilon : F \circ G \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} \mathrm{id}_{\mathscr{D}}}$$

$$\begin{tikzcd}
F(G(Y)) \arrow[rr, "\varepsilon_Y"] & & Y \\
& F(X) \arrow[ul, dashed, "F(g^*)"] \arrow[ur, "g \text{ (arbitraria)}"'] &
\end{tikzcd} \qquad \exists! g^* : X \to G(Y)$$

¿Cómo se construyen estas cosas?

- Debemos definir $\varepsilon_Y$
- Verificar que es una transformación natural
- Definir $g^*$
- Probar la unicidad

## Definición de $\varepsilon_Y$

$$
\begin{tikzcd}
G(Y) \arrow[rr, "\eta_{G(Y)}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{G(Y)}"'] & & G(F(G(Y))) \arrow[dl, dashed, "G(\varepsilon_Y)"] \\
& G(Y) &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(G(Y)) \arrow[d, dashed, "\exists! \varepsilon_Y"] \\
Y
\end{tikzcd}
$$

## $\varepsilon : F \circ G \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} \mathrm{id}_{\mathscr{D}}$ (naturalidad)

Hay que ver que para cada $g : Y \to Y'$, conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
F(G(Y)) \arrow[r, "\varepsilon_Y"] \arrow[d, "F(G(g))"'] & Y \arrow[d, "g"] \\
F(G(Y')) \arrow[r, "\varepsilon_{Y'}"] & Y'
\end{tikzcd}$$

$$g \circ \varepsilon_Y \stackrel{?}{=} \varepsilon_{Y'} \circ F(G(g))$$

## $\varepsilon : F \circ G \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} \mathrm{id}_{\mathscr{D}}$ (cont.)

Primero notamos que en el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
G(Y) \arrow[rr, "G(g)"] \arrow[dr, "\eta_{G(Y)}"] \arrow[dd, "\mathrm{id}_{G(Y)}"'] & & G(Y') \arrow[dr, "\eta_{G(Y')}"] \arrow[dd, "\mathrm{id}_{G(Y')}" near end] & \\
& G(F(G(Y))) \arrow[rr, "G(F(G(g)))" near start, crossing over] \arrow[dl, "G(\varepsilon_Y)"] & & G(F(G(Y'))) \arrow[dl, "G(\varepsilon_{Y'})"] \\
G(Y) \arrow[rr, "G(g)"'] & & G(Y') &
\end{tikzcd}$$

conmutan los triángulos laterales, el rectángulo de atrás y el paralelogramo superior (pues $\eta$ es una transformación natural). Con lo cual tenemos que,

$$G(\varepsilon_{Y'}) \circ G(F(G(g))) \circ \eta_{G(Y)} = G(g) = G(g) \circ G(\varepsilon_Y) \circ \eta_{G(Y)}$$

## $\varepsilon : F \circ G \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} \mathrm{id}_{\mathscr{D}}$ (cont.)

Así, obtenemos que tanto $G(\varepsilon_{Y'} \circ F(G(g)))$ como $G(g \circ \varepsilon_Y)$ hacen que conmute el diagrama

$$\begin{tikzcd}
G(Y) \arrow[rr, "\eta_{G(Y)}"] \arrow[dr, "G(g)"'] & & G(F(G(Y))) \arrow[dl, dashed] \\
& G(Y') &
\end{tikzcd}$$

y por propiedades de la adjunción sigue que

$$\boxed{\varepsilon_{Y'} \circ F(G(g)) = g \circ \varepsilon_Y}$$

como queríamos probar.

## Existencia y unicidad de $g^*$

Buscamos $g^* : X \to G(Y)$ tal que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
F(G(Y)) \arrow[rr, "\varepsilon_Y"] & & Y \\
& F(X) \arrow[ul, dashed, "F(g^*)"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

Si existe tal $g^*$, entonces usando la definición de $\varepsilon_Y$ y que $\eta$ es transformación natural, tenemos

$$\begin{aligned}
g^* &= \mathrm{id}_{G(Y)} \circ g^* \\
&= G(\varepsilon_Y) \circ \eta_{G(Y)} \circ g^* \\
&= G(\varepsilon_Y) \circ G(F(g^*)) \circ \eta_X \\
&= G(\varepsilon_Y \circ F(g^*)) \circ \eta_X. \\
&= G(g) \circ \eta_X
\end{aligned}$$

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[d, "\eta_X"] \arrow[dd, bend right=60, "g^*"'] \\
G(F(X)) \arrow[d, "G(g)"] \\
G(Y)
\end{tikzcd}$$

Lo cual muestra la existencia y la unicidad.

## Ejercicio

Construir la unidad de adjunción a partir de la co-unidad de adjunción (esto ayudará a entender mejor lo que acabamos de hacer).

## Observación/Ejercicio (importante)

Una adjunción $\mathscr{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathscr{D}$ determina un isomorfismo (biyección) de Hom-sets

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{D}}(F(X), Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X, G(Y))$$

que es natural en $X$ e $Y$. Esto explica la terminología de adjunto a izquierda para $F$ y adjunto a derecha para $G$.

## Notación

$$\frac{X \to G(Y)}{F(X) \to Y}$$

A cada $f : X \to G(Y)$ le corresponde $\tilde{f} : F(X) \to Y$ y a cada $g : F(X) \to Y$ le corresponde $g^* : X \to G(Y)$.

## Ejemplo

Consideremos el funtor $G : \mathscr{D} \to \mathbf{1}$. ¿Tiene $G$ un adjunto a izquierda?

- $\mathbf{1}$ : $\bullet \circlearrowleft \mathrm{id}_\bullet$
- $F : \mathbf{1} \to \mathscr{D} \iff F(\bullet) \in \mathrm{ob}\,\mathscr{D}$
- $F$ adjunto a izquierda de $G$:

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[rr, "!"] \arrow[dr, "!"'] & & G(F(\bullet)) \arrow[dl, "G(F(\bullet)\to Y)"] \\
& G(Y) &
\end{tikzcd}$$

- $\exists! F(\bullet) \to Y$
- $F$ es un adjunto a izquierda de $G \iff F(\bullet)$ es un objeto inicial en la categoría $\mathscr{D}$.

## Ejemplo

Consideremos el funtor diagonal $\mathrm{diag} : \mathscr{C} \to \mathscr{C} \times \mathscr{C}$

$$\mathrm{diag}(X) = (X, X)$$
$$\mathrm{diag}(f) = (f, f)$$

¿Tiene diag un adjunto a derecha? Debería ser un funtor $G : \mathscr{C} \times \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ tal que

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\eta_X = ???"] \arrow[dr, "f"'] & & G(X,X) \arrow[dl, dashed, "G(\tilde{f})"] & & (X,X) \arrow[d, "\exists ! \tilde{f}"] \\
& G(Y_1, Y_2) & & & (Y_1, Y_2)
\end{tikzcd}$$

Si $G(Y_1, Y_2) = Y_1 \times Y_2$ puedo definir

$$\tilde{f} = (\pi_1 \circ f) \times (\pi_2 \circ f)$$
$$\eta_X = \langle \mathrm{id}_X, \mathrm{id}_X \rangle : X \to X \times X$$

## Ejemplo (cont.)

- Si $\mathscr{C}$ tiene productos binarios, entonces el funtor producto

$$- \times - : \mathscr{C} \times \mathscr{C} \to \mathscr{C}$$

  es un adjunto a izquierda para el funtor diagonal.

- Co-unit = ???

$$\varepsilon_{(Y_1, Y_2)} : \mathrm{diag}(- \times -(Y_1, Y_2)) \to (Y_1, Y_2)$$
$$\varepsilon_{(Y_1, Y_2)} : (Y_1 \times Y_2, Y_1 \times Y_2) \to (Y_1, Y_2)$$

  **Ejercicio:** $\varepsilon_{(Y_1, Y_2)} = (\pi_1, \pi_2)$.

## Ejemplo: exponenciales

$$\begin{tikzcd}
B^A \times A \arrow[rr, "\mathrm{eval}_B"] & & B \\
& C \times A \arrow[ul, dashed, "\mathrm{curry}(g)\times\mathrm{id}_A"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B^A \\
C \times A \arrow[u, dashed, "\mathrm{curry}(g)"']
\end{tikzcd}$$

- Hay una biyección $\mathrm{Hom}(C \times A, B) \to \mathrm{Hom}(C, B^A)$

$$g \mapsto \mathrm{curry}(g)$$

  **Ejercicio:** esta función es 1-1 y sobre.
- Informal: esto nos da una adjunción

$$\frac{C \to B^A}{C \times A \to B}$$

## Ejemplo (cont.)

- Formal: fijando un conjunto $A$, el funtor

$$- \times A : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$$

  tiene adjunto a derecha

$$(\ )^A : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$$

- Co-unidad de adjunción: $\varepsilon_B = \mathrm{eval}_B$

$$\begin{tikzcd}
B^A \times A \arrow[rr, "\varepsilon_B = \mathrm{eval}_B"] & & B \\
& C \times A \arrow[ul, dashed, "\underbrace{\mathrm{curry}(g)}_{g^*} \times \mathrm{id}_A"] \arrow[ur, "g"'] &
\end{tikzcd}$$

- ¿Unidad de adjunción?

### Ejercicio

Una categoría $\mathscr{C}$ con productos binarios tiene exponenciales $\iff$ para cada $A \in \operatorname{ob}\mathscr{C}$ el funtor $- \times A : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ tiene un adjunto a derecha.

## Ejemplo

Consideremos las categorías (posets)

- $Int = (\mathbb{Z}, \leq)$
- $Real = (\mathbb{R}, \leq)$

y los funtores

- $i : Int \hookrightarrow Real$
- $\lceil\ \rceil : Real \to Int$ (función techo)

$$x \leq y \implies \lceil x \rceil \leq \lceil y \rceil$$
$$x \to y \implies \lceil x \rceil \to \lceil y \rceil$$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[rr, "\leq"] \arrow[dr, "\leq"'] & & i(\lceil x \rceil) \arrow[dl, dashed, "\leq"] \\ & i(m) & \end{tikzcd}$$

- $\forall x,\ x \leq i(\lceil x \rceil)$
- Esto mismo vale para cualquier conexión de Galois (ejercicio).