Relaciones, Preórdenes

Silvio Reggiani

Complementos de Matemática II (LCC)
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

14 de septiembre de 2020

Repaso de relaciones

Una **relación** $\mathcal{R}$ entre un conjunto A y un conjunto B es un subconjunto del producto cartesiano $A \times B$:

$$\mathcal{R} \subset A \times B \qquad \text{(el orden importa)}$$

- La relación $\mathcal{R}$ nos dice con qué elementos de B (posiblemente ninguno) se "relaciona" cada elemento de A
- Si $a \in A$, $b \in B$, significan lo mismo:
  - a está relacionado con b
  - $(a, b) \in \mathcal{R}$
  - $a\mathcal{R}b$

Ejemplos triviales

- $\mathcal{R} = \varnothing \subset A \times B$ (ningún elemento de A se relaciona con ningún elemento de B)
- $\mathcal{R} = A \times B$ (todos los elementos de A se relacionan con todos los elementos de B)

Relación funcional

$$(a, b), (a, c) \in \mathcal{R} \implies b = c \qquad \text{(función parcial)}$$

Dominio e imagen de una relación $\mathcal{R} \subset A \times B$

- $\operatorname{dom} \mathcal{R} := \{a \in A : \exists b \in B, a\mathcal{R}b\}$
- $\operatorname{im} \mathcal{R} := \{b \in B : \exists a \in A, a\mathcal{R}b\}$

Ejemplo

Una función (total) $f : A \to B$ es una relación funcional "total a izquierda", es decir $\operatorname{dom} f = A$:

$$(a, b) \in f \subset A \times B$$

- $\forall a \in A, \exists! b \in B, afb$
- $b := f(a)$ (notación)

Operaciones con relaciones

Inversión

Si $\mathcal{R}$ es una relación entre A y B se define la **relación inversa** entre B y A por

$$\mathcal{R}^{-1} := \{(b, a) \in B \times A : a\mathcal{R}b\}$$

Proposición

Sea f una relación funcional. Entonces f^{-1} es una relación funcional sii f es inyectiva.

Demostración.

$\Rightarrow$ $bf^{-1}a \wedge bf^{-1}a' \implies a = a'$

$\Leftarrow$ $afb \wedge a'fb \implies a = a'$ $\square$

Unión

$$\mathcal{R} \cup \mathcal{S} \subset A \times B$$

(solo funciona cuando $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ son ambas relaciones entre A y B)

Ejemplo

- $\mathcal{R} = \text{“} < \text{”} = \{(a, b) : a < b\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
- $\mathcal{S} = \text{“} = \text{”} = \{(a, a) : a \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
- $\text{“} < \text{”} \cup \text{“} = \text{”} = \text{“} \leq \text{”}$

Intersección

$$\mathcal{R} \cap \mathcal{S} = \{(a, b) : a\mathcal{R}b \wedge a\mathcal{S}b\}$$

Diferencia, etc...

Composición

- $\mathcal{R}$ relación entre A y B
- $\mathcal{S}$ relación entre B y C
- $\mathcal{S} \circ \mathcal{R} := \{(a, c) \in A \times C : \exists b \in B, a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{S}c\}$

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, bend left, "(a{,}b)\in\mathcal{R}"] \arrow[rr, bend right, "(a{,}c)\in\mathcal{S}\circ\mathcal{R}"'] & b \arrow[r, bend left, "(b{,}c)\in\mathcal{S}"] & c
\end{tikzcd}$$

Ejemplo

Si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son funciones, entonces $g \circ f$ (como lo acabamos de definir) es una función:

- Dado $a \in A$, $\exists! b \in B, afb$ $[b = f(a)]$
- $\exists! c \in C, bgc$ $[c = g(b) = g(f(a))]$
- Luego, dado $a \in A$, $\exists! c \in C, a(g \circ f)c$. Es decir, $g \circ f$ es una relación funcional.

La composición de relaciones coincide con la composición de funciones en el sentido usual.

Restricción

- $\mathcal{R}$ relación entre A y B
- $A' \subset A$, $B' \subset B$
- La restricción de $\mathcal{R}$ a $A' \times B'$ es

$$\mathcal{R}|_{A' \times B'} := \{(a, b) : a \in A', b \in B', a\mathcal{R}b\}$$

Restricción de funciones

Si $f : A \to B$, $A' \subset A$,

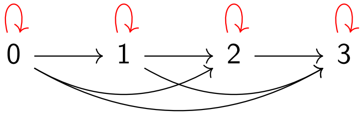
$$f|_{A'} = f|_{A' \times B}$$

Relación en un conjunto

- Un caso muy interesante es cuando $\mathcal{R} \subset A \times A$ relaciona los elementos del conjunto A entre sí. Esto también se llama una **relación en** A.
- Las relaciones en A se pueden representar con grafos dirigidos:
  - Vértices: elementos de A
  - $a\mathcal{R}a'$ se representa con una flecha $a \to a'$

Ejemplo: igualdad

Ejemplo: menor (o igual)



Tipos de relaciones

Reflexiva: $\forall a \in A : a\mathcal{R}a$
La igualdad es la menor relación reflexiva

Simétrica: $\forall a, b \in A : a\mathcal{R}b \implies b\mathcal{R}a$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left] & b \arrow[l, bend left] \end{tikzcd}$$

Antisimétrica: $\forall a, b \in A : a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}a \implies a = b$

$$a \longrightarrow b \qquad\qquad a \longleftarrow b \qquad\qquad a \qquad b$$

Transitiva: $\forall a, b, c \in A : a\mathcal{R}b \wedge b\mathcal{R}c \implies a\mathcal{R}c$

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & b \arrow[r] & c \end{tikzcd}$$

Importante en
teoría de categorías

Tipos de relaciones

Ejercicio

Las propiedades anteriores se heredan cuando restringimos la relación a un subconjunto de A.

Relaciones de equivalencia

- Notación: $\mathcal{R} = \sim$
- $\sim$ reflexiva
- $\sim$ simétrica
- $\sim$ transitiva

Las relaciones de equivalencia son importantes porque nos permiten "etiquetar" los elementos de un conjunto sin ambigüedades o repeticiones.

Ejemplos de relaciones de equivalencia

- "$=$": ejemplo trivial (muchas etiquetas)
- Congruencia módulo 2 en $\mathbb{Z}$:

  $$x \sim y \iff x - y \equiv 0 \mod 2$$

  Etiquetas: "par", "impar"
- Congruencia módulo n en $\mathbb{Z}$"

  $$x \sim y \iff x - y \equiv 0 \mod n$$

  Etiquetas: $0, 1, 2, \ldots, n-1$

Ejercicio

Las operaciones en los enteros (suma, resta, multiplicación) inducen operaciones en las etiquetas de las relaciones de congruencia

¿Qué significa etiquetar?

- $\sim$ relación de equivalencia en A
- $\bar{a} = \{b \in A : a \sim b\}$ es la **clase de equivalencia** u **órbita** de $a \in A$
- $\bar{a} \neq \varnothing$ (siempre tenemos $a \in \bar{a}$)
- Dados $a, b \in A$, o bien $\bar{a} = \bar{b}$ o bien $\bar{a} \cap \bar{b} = \varnothing$
- A es unión disjunta de la clases de equivalencia de $\sim$
- Conjunto cociente:

$$A/\sim \,:= \{\bar{a} : a \in A\} \subset \mathcal{P}(A)$$

  es una **partición** de A. Es decir,
  - $A = \bigcup_{X \in A/\sim} X$
  - $\forall X \in A/\sim, X \neq \varnothing$
  - $\forall X, Y \in A/\sim : X \neq Y \implies X \cap Y = \varnothing$

Teorema

Hay una correspondencia biyectiva entre relaciones de equivalencia en A y particiones de A.

Demostración.

- Ya vimos que una relación de equivalencia induce una partición
- Recíprocamente, dada una partición $P \subset \mathcal{P}(A)$ definimos

  $$a \sim b \iff \exists X \in P : a, b \in X$$

  (verificar como ejercicio que $\sim$ es una relación de equivalencia)
- Estas dos construcciones son recíprocas $\square$

Ejemplo 1 (importante)

Dada una función $f : A \to B$,

$$\ker f := \{(a, a') : f(a) = f(a')\}$$

es una relación de equivalencia en A (volveremos sobre esto más adelante)

Ejemplo 2

Dada una relación de equivalencia $\sim$ en A, podemos construir la **proyección al cociente**

$$\pi : A \to A/\sim, \qquad \pi(a) = \bar{a}$$

Se tiene que $\ker \pi = \sim$. Luego toda relación de equivalencia es el kernel de una función (también volveremos sobre esto)

Teorema (de factorización)

Si $\sim$ es una relación de equivalencia en A y $f : A \to B$ es una función tal que $a \sim b \implies f(a) = f(b)$, entonces existe una única función $\tilde{f} : A/\!\sim \to B$ tal que $f = \tilde{f} \circ \pi$.

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "\pi"'] & & B \\
& A/\!\sim \arrow[ur, dashed, "\exists!\tilde{f}"'] &
\end{tikzcd}$$

Demostración.

Ejercicio. Definir $\tilde{f}(\bar{a}) = f(a)$ y probar que esta definición no depende del representante elegido. $\square$

Conjuntos preordenados

Un preorden en un conjunto A es una relación que establece jerarquías entre sus elementos (con mínimos requisitos)

Definición formal

Una relación $\leq$ en A es un preorden si es

- reflexiva ($a \leq a$) y
- transitiva ($a \leq b, b \leq c \implies a \leq c$)

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "\leq"] \arrow[rr, bend right, "\leq"'] & b \arrow[r, "\leq"] & c \end{tikzcd}$$

Observación

Un preorden puede tener ciclos

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, bend left] \arrow[rr, bend left] & b \arrow[l, bend left] \arrow[r] & c \end{tikzcd}$$ es un preorden válido

Convención

Cuando graficamos un preorden no dibujamos los loops que corresponden a "$x \leq x$".

Ejemplo

¿Cuántos preórdenes hay en $A = \{a, b\}$? Rta: 4

$$a \qquad b \qquad\qquad a \longrightarrow b \qquad\qquad a \longleftarrow b \qquad\qquad a \rightleftarrows b$$

Ejercicio

¿Cuántos preórdenes hay en $A = \{a, b, c\}$? Rta: 29

Ejercicio*

¿Cuántos preórdenes hay en un conjunto con n elementos? Rta: muchos

Ejemplo

- Una relación de equivalencia en A es un preorden.
- ¿Cuántas relaciones de equivalencia hay en $A = \{a, b, c\}$?
- Relaciones de equivalencia en A $\iff$ Particiones de A
  - $P_1 = \{\{a, b, c\}\}$
  - $P_2 = \{\{a, b\}, \{c\}\}$
  - $P_3 = \{\{a, c\}, \{b\}\}$
  - $P_4 = \{\{b, c\}, \{a\}\}$
  - $P_5 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$
- $|\text{Relaciones de equivalencia}| = 5 \ll 29 = |\text{Preórdenes}|$
- $|\text{Relaciones en } A| = |\mathcal{P}(A \times A)| = 2^9 = 512$

Ejercicio

Graficar los preórdenes asociados a las relaciones de equivalencia anteriores.

Ejemplo

- $A = \{\text{Piedra}, \text{Papel}, \text{Tijera}\}$
- Piedra $\lesssim$ Papel, Papel $\lesssim$ Tijera, Tijera $\lesssim$ Piedra
- No es un preorden (¿por qué?)

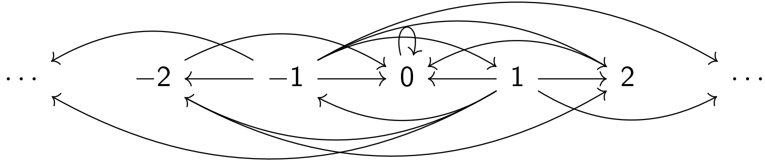
Ejemplo/Ejercicio

Construcción de un preorden a partir de una relación cualquiera $\mathcal{R}$ en un conjunto A.

- $\mathcal{R}^{=} = \mathcal{R} \cup \{(a, a) : a \in A\}$ (clausura reflexiva)
- $\mathcal{R}^{<} = \mathcal{R} \cup \{(a, c) : \exists \text{ un camino de } a \text{ a } c \text{ con flechas de } \mathcal{R}\}$
  $= \bigcap_{\substack{\mathcal{S} \supset \mathcal{R} \\ \mathcal{S} \text{ transitiva}}} \mathcal{S}$ (clausura transitiva)
- $(\mathcal{R}^{=})^{<} = (\mathcal{R}^{<})^{=}$ es el menor preorden que contiene a $\mathcal{R}$.

Más ejemplos

- $A \times A$ es un preorden en A
- $\varnothing$ no es un preorden en A (si $A \neq \varnothing$)
- El orden (menor o igual) en la recta $\mathbb{R}$ es un preorden y se hereda a cualquier subconjunto: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, ...
- Importante: $a \mid b$ (a divide a b) es un preorden en $\mathbb{Z}$.
  Recordar: $a \mid b \iff \exists c \in \mathbb{Z} : b = ac$



- No es antisimétrico:$n \leq -n \leq n$
- Hay máximo: $\forall n, n \leq 0$
- Hay "mínimos": $\forall n, 1 \leq n$, $\forall n, -1 \leq n$

Jerarquías

- a es **elemento maximal** si

$$\forall x, a \leq x \implies x \leq a$$

Nadie le gana a a

- a es un **máximo** si

$$\forall x, x \leq a$$

a le gana a todos

- a es **elemento minimal** si

$$\forall x, x \leq a \implies a \leq x$$

a no le gana a nadie

- a es un **mínimo** si

$$\forall x, a \leq x$$

Todos le ganan a a

Ejercicio

- Máximo $\implies$ Maximal
- Mínimo $\implies$ Minimal

Ejemplos

- $(\mathbb{Z}, \leq)$ no tienen elementos maximales ni minimales
- $(\mathbb{Z}, \mid)$
  - 0 es máximo
  - ± 1 son los mínimos
- "$\leq$" $= A \times A$: todo elemento es máximo y mínimo
- "$=$" $= \varnothing^{=}$ (clausura reflexiva de la relación vacía): todo elemento es minimal y maximal a la vez; no hay máximos ni mínimos si $|A| \geq 2$

Cotas superiores/inferiores, supremos/ínfimos

Sean $(A, \leq)$ un conjunto preordenado, $B \subset A$ y $a \in A$. Decimos que

- a es **cota superior** de B si $\forall b \in B, b \leq a$. Si existe una cota superior de B decimos también que B está **acotado superiormente**
- a es **cota inferior** de B si $\forall b \in B, a \leq b$. Si existe una cota inferior de B decimos también que B está **acotado inferiormente**
- a es un **supremo** de B si A es un mínimo de

$$\{c \in A : c \text{ es cota superior de } B\}$$

- a es un **ínfimo** de B si a es un máximo de

$$\{c \in A : c \text{ es cota inferior de } A\}$$

Axioma del supremo

Axioma del supremo

Todo subconjunto no vacío y acotado superiormente (de un conjunto preordenado) tiene supremo.

Ejemplo

- $(\mathbb{R}, \leq)$ satisface el axioma del supremo.
- $(\mathbb{Q}, \leq)$ no satisface el axioma del supremo. Por ejemplo

  $$\{q \in \mathbb{Q} : q^2 \leq 2\}$$

  es acotado superiormente pero no tiene supremo.
- Luego el axioma del supremo no es una propiedad hereditaria.

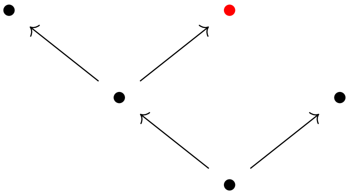
Ejemplo/Ejercicio importante

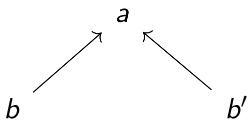
- X conjunto (dato)
- $(\mathcal{P}(X), \subset)$ es un conjunto preordenado
- X es máximo
- $\varnothing$ es mínimo
- Luego, todo subconjunto no vacío $B \subset \mathcal{P}(X)$ es acotado superior/inferiormente (B es un conjunto de subconjuntos de X)
- $\sup B = \bigcup B$
- $\text{ínf } B = \bigcap B$

Observación

Sea $(A, \leq)$ un conjunto preordenado y $B \subset A$

- a cota superior de B y $a \in B \implies a$ elemento maximal de B
- $a \in B$ elemento maximal $\not\Longrightarrow a$ cota superior de B





Orden inverso

- Si $(A, \leq)$ es un conjunto preordenado, el orden inverso $\geq$ se define como

$$a \geq b \overset{\cdot}{\Longleftrightarrow} b \leq a \qquad \text{(relación inversa)}$$

- $(A, \geq)$ es un conjunto preordenado y todas las definiciones se dualizan:
  - a elto. maximal en $(A, \leq)$ $\iff$ a elto. minimal en $(A, \geq)$
  - a cota superior en $(A, \leq)$ $\iff$ a cota inferior en $(A, \geq)$
  - a supremo en $(A, \leq)$ $\iff$ a ínfimo en $(A, \geq)$
  - Axioma del supremo en $(A, \leq)$ $\iff$ Axioma del ínfimo en $(A, \geq)$
- El grafo del preorden $(A, \geq)$ es el mismo grafo de $(A, \leq)$ pero invirtiendo el sentido de las flechas

Ejercicio

$(A, \leq)$ satisface el Axioma del supremo $\iff$ $(A, \leq)$ satisface el Axioma del ínfimo (¡el mismo preorden!).