# Categorías. Parte 1.

Silvio Reggiani

Complementos de Matemática II (LCC)
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

3 de noviembre de 2020

## Definición

Una **categoría** $\mathscr{C}$ consiste de

- una clase de **objetos**: $\operatorname{ob}\mathscr{C}$;
- una clase de **morfismos** o **flechas**: $\operatorname{mor}\mathscr{C}$;
- dos funciones de clase:
  - $\operatorname{dom} : \operatorname{mor}\mathscr{C} \to \operatorname{ob}\mathscr{C}$ (dominio),
  - $\operatorname{codom} : \operatorname{mor}\mathscr{C} \to \operatorname{ob}\mathscr{C}$ (codominio).
- Notación:
  - para $f \in \operatorname{mor}\mathscr{C}$, escribimos

$$f : A \to B \iff \operatorname{dom} f = A,\ \operatorname{codom} f = B$$

  - $\operatorname{Hom}(A, B) := \{f \in \operatorname{mor}\mathscr{C} : \operatorname{dom} f = A,\ \operatorname{codom} f = B\}$.
- Y para cada $A, B, C \in \operatorname{ob}\mathscr{C}$ una operación

$$\circ : \operatorname{Hom}(A, B) \times \operatorname{Hom}(B, C) \to \operatorname{Hom}(A, C)$$

llamada **composición** con las siguientes propiedades...

## Definición (cont.)

- Denotamos $\circ(f, g) = g \circ f$.
- **Asociatividad:** $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ siempre que tengan sentido las composiciones.

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend left, "g\circ f"] \arrow[rrr, bend left=40, "h\circ(g\circ f)"] \arrow[rrr, bend right=40, swap, "(h\circ g)\circ f"] & B \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend right, swap, "h\circ g"] & C \arrow[r, "h"] & D
\end{tikzcd}
$$

- Para cada $A \in \operatorname{ob} \mathscr{C}$ existe un **morfismo identidad** $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Hom}(A, A)$ tal que
  - $\forall B, \forall f \in \mathrm{Hom}(A, B),\ f \circ \mathrm{id}_A = f$,
  - $\forall C, \forall g \in \mathrm{Hom}(C, A),\ \mathrm{id}_A \circ g = g$.

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, swap, "g"] & A \arrow[loop above, "\mathrm{id}_A"] \arrow[r, swap, "f"] & B
\end{tikzcd}
$$

## Ejemplo: **Set**

- $\operatorname{ob}\mathbf{Set}$ = conjuntos
- $\operatorname{mor}\mathbf{Set}$ = funciones

## Observación (sutil)

En teoría de categorías las funciones $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2$ y $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^{\geq 0}$, $g(x)=x^2$, se consideran distintas. En teoría de conjuntos estas dos funciones se consideran iguales.

## Conjuntos vs. Clases

- $\operatorname{ob}\mathscr{C}$, $\operatorname{mor}\mathscr{C}$ fueron definidos específicamente como "clases". No necesariamente son conjuntos. Los conjuntos son clases que son elementos de otras clases más grandes. Las clases propias no son elementos de ninguna clase.
- Por ejemplo $\operatorname{ob}\mathbf{Set}$, $\operatorname{mor}\mathbf{Set}$ son clases propias (ejercicio).

### Definición

Decimos que una categoría $\mathscr{C}$ es una categoría

- **pequeña** si $\operatorname{ob}\mathscr{C}$ y $\operatorname{mor}\mathscr{C}$ son conjuntos;
- **localmente pequeña** si $\operatorname{Hom}(A, B)$ es un conjunto para todos $A, B \in \operatorname{ob}\mathscr{C}$.
- Si $\mathscr{C}$ no es una categoría pequeña se dice que es una categoría **grande**.

### Observación

Pequeña $\implies$ Localmente pequeña.

### Ejemplo

**Set** es una categoría localmente pequeña.

# Más ejemplos

## Ejemplo: categoría discreta

$$\forall A, B \in \operatorname{ob}\mathscr{C},\ \operatorname{Hom}(A,B) = \begin{cases} \varnothing, & A \neq B \\ \{\mathrm{id}_A\}, & A = B \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[loop above, "\mathrm{id}_A"] & & B \arrow[loop above, "\mathrm{id}_B"] & \\
& C \arrow[loop above, "\mathrm{id}_C"] & & D \arrow[loop above, "\mathrm{id}_D"] \\
E \arrow[loop above, "\mathrm{id}_E"] & & \ddots &
\end{tikzcd}$$

- Localmente pequeña.

## Categoría $\mathbf{0}$

- $\mathsf{ob}\,\mathbf{0} = \varnothing$
- $\mathsf{mor}\,\mathbf{0} = \varnothing$

## Categoría $\mathbf{1}$

- $\mathsf{ob}\,\mathbf{1} = \{*\}$
- $\mathsf{mor}\,\mathbf{1} = \{\mathsf{id}_*\}$

$$\begin{tikzcd} * \arrow[loop above, "\mathsf{id}_*"] \end{tikzcd}$$

## Categoría $\mathbf{2}$

- $\mathsf{ob}\,\mathbf{2} = \{A, B\}$
- $\mathsf{mor}\,\mathbf{2} = \{\mathsf{id}_A, \mathsf{id}_B, A \xrightarrow{f} B\}$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[loop above, "\mathsf{id}_A"] \arrow[r, "f"'] & B \arrow[loop above, "\mathsf{id}_B"] \end{tikzcd}$$

## Categoría **3**

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[loop above, "\mathrm{id}_B"] \arrow[dr, "g"] & \\
A \arrow[loop left, "\mathrm{id}_A"] \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "h"] & & C \arrow[loop right, "\mathrm{id}_C"]
\end{tikzcd}$$

$$g \circ f = h$$

## Ejercicio

¿Cómo se definirían las categorías $\mathbf{4}, \mathbf{5}, \mathbf{6}, \ldots$?

## Ejemplo: $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$

- $\operatorname{ob} \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} = \mathbb{K}$-espacios vectoriales
- $\operatorname{mor} \mathbf{Vect}_{\mathbb{K}} =$ transformaciones lineales

## Ejemplo: **Grp**

- $\operatorname{ob} \mathbf{Grp} =$ grupos
- $\operatorname{mor} \mathbf{Grp} =$ morfismos de grupos

## Ejemplo: **Ab**

- $\operatorname{ob} \mathbf{Ab} =$ grupos abelianos
- $\operatorname{mor} \mathbf{Ab} =$ morfismos de grupos

## Comentario

Si bien uno puede pensar a **Ab** “dentro de” **Grp**, estructuralmente estas dos categorías son muy diferentes.

# Categorías concretas

### Definición (simplificada)

Una categoría $\mathscr{C}$ se dice **concreta** si los objetos de $\mathscr{C}$ son conjuntos, los morfismos de $\mathscr{C}$ son funciones entre dichos conjuntos y la composición es la composición usual de funciones. La idea es que los objetos de una categoría concreta son conjuntos con una *estructura adicional* y los morfismos son las funciones que *preservan* dicha estructura. Advertencia: esta no es la definición "verdadera" de categoría concreta.

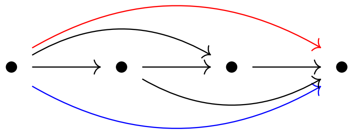
## Ejemplo

Un poset $(P, \leq)$ puede pensarse como una categoría como sigue

- $\mathrm{ob}(P, \leq) = P$
- $\mathrm{mor}(P, \leq) : \begin{cases} p \to q \iff p \leq q \\ \mathrm{dom}(p \to q) = p \\ \mathrm{codom}(p \to q) = q \end{cases}$
- Composición: $p \leq q, q \leq r \implies p \leq r$ (transitividad)

$$\begin{tikzcd} p \arrow[r, "\leq"'] \arrow[rr, bend left, "\leq"] & q \arrow[r, "\leq"'] & r \end{tikzcd}$$

- Asociatividad:



La flecha azul y la flecha roja son iguales porque hay a lo sumo una flecha entre dos elementos distintos.

## Ejemplo (cont.)

- Identidad: $p \leq p$ corresponde a $\mathrm{id}_p : p \to p$. Estas flechas, como siempre están presentes, casi nunca las dibujamos.
- Es una categoría concreta? (con la definición simplificada)
- Es una categoría pequeña, pues $\forall p, q, |\operatorname{Hom}(p, q)| \leq 1$.

## Ejercicio

Con un argumento similar, cualquier preorden puede ser visto como una categoría en donde hay a lo sumo una flecha entre dos objetos.

$$\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] \arrow[rr, bend right] & \bullet \arrow[r] \arrow[l, bend right] & \bullet \arrow[l, bend right] \arrow[ll, bend right]
\end{tikzcd}$$

## Ejemplo: **Poset** (categoría concreta)

- $\operatorname{ob}\mathbf{Poset}$ = conjuntos parcialmente ordenados.
- $\operatorname{mor}\mathbf{Poset}$ = funciones crecientes.

## Ejemplo

Un monoide $(M, \cdot, e)$ se puede presentar con una categoría $\mathscr{M}$ con:

- $\operatorname{ob}\mathscr{M} = \{*\}$
- $\operatorname{mor}\mathscr{M} = \mathrm{Hom}(*, *) = M$
    - $m_1 \circ m_2 := m_1 m_2$
    - $\mathrm{id}_* = e$

$$
\begin{tikzcd}
* \arrow[loop above, "e"] \arrow[loop left, "m_1"] \arrow[loop right, "m_2"] \arrow[loop below, "m_1 m_2"]
\end{tikzcd}
$$

Recíprocamente, cualquier categoría (pequeña) con un solo objeto representa un monoide.

## Caso particular

Un grupo $G$ puede ser visto como una categoría $\mathscr{G}$ con

- $\operatorname{ob}\mathscr{G} = \{*\}$
- $\operatorname{mor}\mathscr{G} = G$

con la misma construcción que hicimos antes, pero donde ahora se satisface la siguiente propiedad adicional:

- $\forall g \in \operatorname{mor}\mathscr{G}, \exists g^{-1} \in \operatorname{mor}\mathscr{G}$, es decir,

$$g \circ g^{-1} = g^{-1} \circ g = \mathrm{id}_* \,.$$

- Son categorías pequeñas.
- ¿Son categorías concretas? Depende de cómo elijamos $*$.

## Observación

- En los ejemplos anteriores de categorías que no son concretas hay algo un poco forzado: que los morfismos no representen funciones entre los objetos, no significa que no podamos encontrar otra categoría "equivalente" (digamos con el mismo multigrafo dirigido) que sí sea concreta.
- Existen ejemplos de categorías que no son concretas con esta definición más restrictiva pero no son tan fáciles de construir (hace falta saber topología algebraica, por ejemplo).

## Ejemplo/Ejercicio

Si pensamos el grupo simétrico $S_n$ como una categoría con un solo objeto, podemos realizarlo como una categoría concreta con un único objeto $* = \{1, 2, \ldots, n\}$ y $\mathrm{Hom}(*, *)$ las permutaciones de $1, 2, \ldots, n$. El **teorema de Cayley** dice que esto en realidad se puede hacer con cualquier grupo $G$.

## Ejemplo (informal)

Un lenguaje de programación funcional puede ser ser modelado como una categoría.

**Objetos:** tipos

- $Int$
- $Real$
- $Bool$
- $Unit$

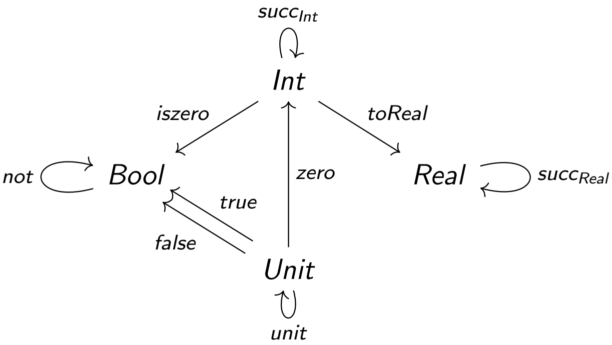
**Morfismos**

- $iszero : Int \to Bool$
- $not : Bool \to Bool$
- $succ_{Int} : Int \to Int$
- $succ_{Real} : Real \to Real$
- $toReal : Int \to Real$

**Constantes**

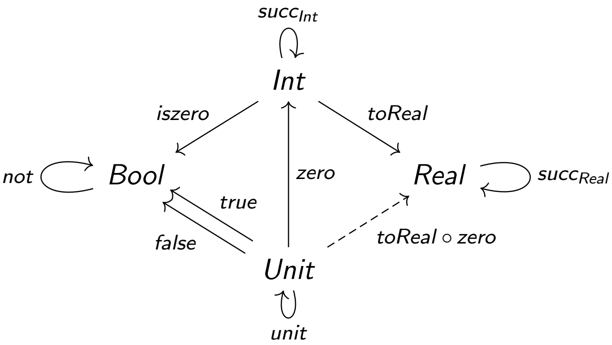
- $zero : Int$
- $true : Bool$
- $false : Bool$
- $unit : Unit$

## Ejemplo (cont.)




- Faltan agregar las identidades.
- Faltan ciertas convenciones, e.g. $false = not \circ true$, etc.
- Faltan agregar las composiciones. Por ejemplo,
  - $+2 = succ_{Int} \circ succ_{Int}$,
  - $zero : Real = toReal \circ zero$.

# Ejemplo (cont.)




- Faltan agregar las identidades.
- Faltan ciertas convenciones, e.g. $false = not \circ true$, etc.
- Faltan agregar las composiciones. Por ejemplo,
  - $+2 = succ_{Int} \circ succ_{Int}$,
  - $zero : Real = toReal \circ zero$.

## Ejemplo: categoría opuesta

Si $\mathscr{C}$ es una categoría, $\mathscr{C}^{\mathsf{op}}$ se define con los mismos objetos que $\mathscr{C}$ pero las flechas con sentido inverso.

En $\mathscr{C}$,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"'] \arrow[dd, bend left, "g \circ f"] \\ B \arrow[d, "g"'] \\ C \end{tikzcd}$$

En $\mathscr{C}^{\mathsf{op}}$,

$$\begin{tikzcd} A \\ B \arrow[u, "f"] \\ C \arrow[u, "g"] \arrow[uu, bend right, "f \circ_{\mathsf{op}} g := g \circ f"'] \end{tikzcd}$$

- $\mathsf{ob}\,\mathscr{C}^{\mathsf{op}} = \mathsf{ob}\,\mathscr{C}$.
- $\mathsf{Hom}^{\mathsf{op}}(A, B) = \mathsf{Hom}(B, A)$.

## Ejemplo (cont.)

- Chequear como ejercicio que $\mathscr{C}^{\mathsf{op}}$ es una categoría.
- Veamos por ejemplo la asociatividad.

$$
\begin{aligned}
(f \circ_{\mathsf{op}} g) \circ_{\mathsf{op}} h &= h \circ (f \circ_{\mathsf{op}} g) \\
&= h \circ (g \circ f) \\
&= (h \circ g) \circ f \\
&= (g \circ_{\mathsf{op}} h) \circ f \\
&= f \circ_{\mathsf{op}} (g \circ_{\mathsf{op}} h)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"] \arrow[dd, bend left, "g \circ f"] \\
B \arrow[d, "g"] \arrow[dd, bend right, "h \circ g"'] \\
C \arrow[d, "h"] \\
D
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
A \\
B \arrow[u, "f"'] \\
C \arrow[u, "g"'] \arrow[uu, bend left, "f \circ_{\mathsf{op}} g"] \\
D \arrow[u, "h"'] \arrow[uu, bend right, "g \circ_{\mathsf{op}} h"']
\end{tikzcd}
$$

# Principio de dualidad

Una afirmación sobre una categoría $\mathscr{C}$ da lugar a una afirmación sobre la categoría $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$ (invirtiendo el sentido de las flechas en el enunciado). Luego, si uno demuestra un teorema para todas las categorías (o al menos para una familia autodual), automáticamente obtiene un "coteorema" válido para todas las categorías (de esa familia).

## Ejemplo

Si $G$ es un grupo, entonces $G^{\mathrm{op}}$ es un grupo.

- $G \iff \mathscr{G}$
- $\mathrm{ob}\,\mathscr{G} = \{*\}$
- $\mathrm{Hom}(*,*) = G$
- $g_1 \circ g_2 = g_1 g_2$
- toda flecha tiene inversa

- Categoría opuesta $\mathscr{G}^{\mathrm{op}}$
- $\mathrm{ob}\,\mathscr{G}^{\mathrm{op}} = \{*\}$
- $\mathrm{Hom}^{\mathrm{op}}(*,*) = G$
- $g_1 \circ_{\mathrm{op}} g_2 = g_2 g_1$
- toda flecha tiene inversa ✓

# Más ejemplos...

## Ejemplo: categoría producto

- Dato: dos categorías $\mathscr{C}, \mathscr{D}$.
- $\mathrm{ob}(\mathscr{C} \times \mathscr{D}) = \{(A, B) : A \in \mathrm{ob}\,\mathscr{C}, B \in \mathrm{ob}\,\mathscr{D}\}$ .
- $\mathrm{Hom}((A, B), (A', B')) = \mathrm{Hom}(A, A') \times \mathrm{Hom}(B, B')$.

$$\begin{tikzcd} (A,B) \arrow[d, "{(f,g)}"'] \\ (A',B') \end{tikzcd} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{tikzcd} A \arrow[d, "f"] & B \arrow[d, "g"] \\ A' & B' \end{tikzcd}$$

- $(f, g) \circ (f', g') := (f \circ f', g \circ g')$.
- $\mathrm{id}_{(A,B)} := (\mathrm{id}_A, \mathrm{id}_B)$.
- Ejercicio: $\mathscr{C} \times \mathscr{D}$ es una categoría.

## Ejemplo*: $\mathbf{Set}^{\to}$

- Categoría de flechas de **Set**.
- $\operatorname{ob}\mathbf{Set}^{\to} = \operatorname{mor}\mathbf{Set}$.
- $\operatorname{mor}\mathbf{Set}^{\to} = ???$

$$f \xrightarrow[(a,b)]{?} f'$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[d, "b"] \\ A' \arrow[r, "f'"] & B' \end{tikzcd} \qquad b \circ f = f' \circ a$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Hom}(f, f') := \{(a, b) :\ & a \in \operatorname{Hom}(\operatorname{dom} f, \operatorname{dom} f'), \\ & b \in \operatorname{Hom}(\operatorname{codom} f, \operatorname{codom} f'), \\ & b \circ f = f' \circ a\}. \end{aligned}$$

## Ejemplo* (cont.)

- Composición:

$$\begin{tikzcd} f \arrow[r, "(a,b)"] \arrow[rr, bend right] & f' \arrow[r, "(a',b')"] & f'' \end{tikzcd}$$

$$(a', b') \circ (a, b) := (a' \circ a, b' \circ b)$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[d, "b"] \\ A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "a'"'] & B' \arrow[d, "b'"] \\ A'' \arrow[r, "f''"] & B'' \end{tikzcd}$$

- Para ver la buena definición usamos el siguiente resultado general (ejercicio):

$$\left.\begin{array}{r} f' \circ a = b \circ f \\ f'' \circ a' = b' \circ f'' \end{array}\right\} \implies f'' \circ (a' \circ a) = (b' \circ b) \circ f$$

## Ejemplo* (cont.)

- Asociatividad:

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "a"'] & B \arrow[d, "b"] \\
A' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "a'"'] & B' \arrow[d, "b'"] \\
A'' \arrow[r, "f''"] \arrow[d, "a''"'] & B'' \arrow[d, "b''"] \\
A''' \arrow[r, "f'''"] & B'''
\end{tikzcd}
$$

$$\underbrace{[(a'', b'') \circ (a', b')] \circ (a, b)}_{=((a'' \circ a') \circ a,\, (b'' \circ b') \circ b)} = \underbrace{(a'', b'') \circ [(a', b') \circ (a, b)]}_{=(a'' \circ (a' \circ a),\, b'' \circ (b' \circ b))}$$

## Ejemplo*

- Identidad: $\mathrm{id}_f := (\mathrm{id}_A, \mathrm{id}_B)$

$$f \xrightarrow{(\mathrm{id}_A,\mathrm{id}_B)} f$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\mathrm{id}_A"'] & B \arrow[d, "\mathrm{id}_B"] \\ A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

# Diagramas conmutativos

Distintos caminos entre dos vértices dan el mismo resultado.

## Ejercicio

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{f} & B & \xrightarrow{g} & C \\ \downarrow{\scriptstyle a} & & \downarrow{\scriptstyle b} & & \downarrow{\scriptstyle c} \\ A' & \xrightarrow{f'} & B' & \xrightarrow{g'} & C' \end{array}$$

Si conmutan los cuadrados, conmuta el rectángulo (en cualquier categoría).

## Ejemplo

El siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} Int & \xrightarrow{succ_{Int}} & Int \\ {\scriptstyle toReal}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle toReal} \\ Real & \xrightarrow{succ_{Real}} & Real \end{array}$$