Práctica 2 Retículos

Retículos

1. Dar todos los diagramas posibles para retículos con 1, 2, 3, 4, 5, y 6 elementos respectivamente.

2. Mostrar que los siguientes posets son retículos:

a) $(P(X), \subseteq)$.

b) $(D_n, |)$, donde $D_n = \{x \in \mathbb{N} : x \mid n\}$.

c) $(L, \subseteq)$, donde L es el conjunto de subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$.

d) Álgebra de Lindenbaum-Tarski.

3. Sea $(L, \leq)$ un retículo. Se definen las operaciones:

$$x \vee y = \sup\{x, y\}$$

$$x \wedge y = \inf\{x, y\}$$

Probar que para todo $x, y, z, w \in L$, $\vee$ y $\wedge$ verifican las siguientes propiedades:

a) $x \leq x \vee y$.

b) $x \wedge y \leq x$.

c) $x \leq y \Leftrightarrow x \vee y = y \Leftrightarrow x \wedge y = x$.

d) Asociatividad:
$(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$.
$(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$.

e) Conmutatividad:
$x \vee y = y \vee x$.
$x \wedge y = y \wedge x$.

f) Idempotencia:
$x \vee x = x = x \wedge x$.

g) Absorción:
$x \vee (x \wedge y) = x = x \wedge (x \vee y)$.

h) Compatibilidad:

$$\left.\begin{matrix} x \leq z \\ y \leq w \end{matrix}\right\} \Longrightarrow \begin{cases} x \vee y \leq z \vee w \\ x \wedge y \leq z \wedge w \end{cases}$$

4. Probar que:

a) Si $\mathcal{L} = (L, \leq)$ es un retículo, entonces las operaciones

$$x \vee y = \sup\{x, y\}$$

$$x \wedge y = \inf\{x, y\}$$

definen un retículo $\mathcal{L}^{alg} = (L, \vee, \wedge)$.

b) Si $\mathcal{L} = (L, \vee, \wedge)$ es un retículo, entonces la relación

$$x \leq y \Leftrightarrow x \vee y = y$$

define un retículo $\mathcal{L}^{ord} = (L, \leq)$.

c) Estas construcciones son recíprocas.

5. Sean $\mathcal{L}_1 = (L_1, \vee, \wedge)$ y $\mathcal{L}_2 = (L_2, \vee, \wedge)$ retículos. Probar:

a) Si $f : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ es un morfismo de retículo, entonces $f : \mathcal{L}_1^{ord} \to \mathcal{L}_2^{ord}$ es un morfismo de orden. ¿Vale la recíproca?

b) $f : \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ es un isomorfismo de retículo si y solo si $f : \mathcal{L}_1^{ord} \to \mathcal{L}_2^{ord}$ es un isomorfismo de orden.

6. Sea una función $f : X \to Y$. Considerar las funciones:

$$F : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X),\ F(B) = f^{-1}(B) \text{ (imagen inversa)}$$
$$G : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(Y),\ G(A) = f(A) \text{ (imagen directa)}$$

a) Mostrar que F define un morfismo de retículo.

b) Mostrar que G define un morfismo de retículo si y solo si f es inyectiva.

7. Sea $(L, \preceq)$ un retículo. Un *polinomio* p en n-variables es una función $p : L^n \to L$ que pertenece al conjunto inductivo P_L:

- $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\pi_i \in P_L$, donde $\pi_i(x_1, \ldots, x_n) = x_i$.
- Si $f, g \in P_L$ entonces $f \vee g \in P_L$, donde $(f \vee g)(\overline{x}) = f(\overline{x}) \vee g(\overline{x})$.
- Si $f, g \in P_L$ entonces $f \wedge g \in P_L$, donde $(f \wedge g)(\overline{x}) = f(\overline{x}) \wedge g(\overline{x})$.

Probar que todo $p \in P_L$ es un morfismo de orden entre $(L^n, \preceq)$ y $(L, \preceq)$.

8. Probar que $(D_n, |)$ y su retículo dual son isomorfos. ¿Es cierto para un retículo arbitrario?

Retículos acotados, complementados y completos

9. Sea $(L, \leq)$ retículo y $(L, \vee, \wedge)$ su retículo asociado. Mostrar que son equivalentes:

a) L tiene máximo (resp. mínimo).

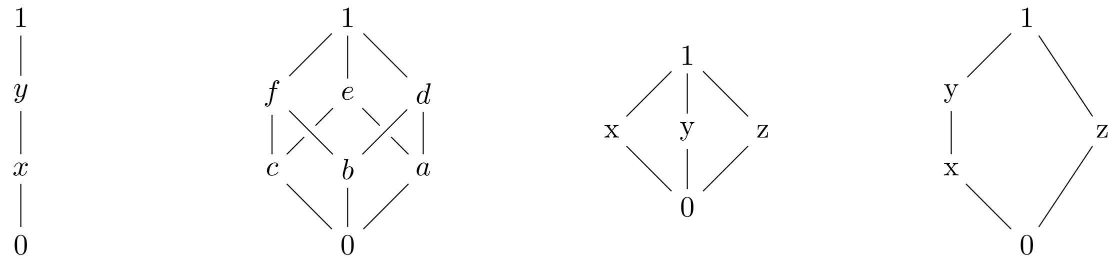
b) Existe $1 \in L$ tal que $x = x \wedge 1$ para todo $x \in L$ (resp. existe $0 \in L$ tal que $x = x \vee 0$ para todo $x \in L$).

c) Existe $1 \in L$ tal que $1 = x \vee 1$ para todo $x \in L$ (resp. existe $0 \in L$ tal que $0 = x \wedge 0$ para todo $x \in L$).

10. Determinar si los retículos del ejercicio 2 son acotados.

11. Sea $(X, \vee, \wedge, 0, 1)$ un retículo acotado. Probar que 0 y 1 son complementos uno del otro.

12. Determinar si cada uno de los siguientes retículos admite estructura de retículo complementado. En caso afirmativo, decidir cuántas funciones complemento distintas se pueden definir.



13. Un poset $(L, \leq)$ es un *retículo completo* si todo subconjunto (posiblemente infinito) $S \subseteq L$ tiene ínfimo y supremo. Vale aclarar que en el caso $S = \emptyset$, todos los elementos de L son cotas inferiores y superiores de S. Mostrar que los siguientes posets son retículos completos:

a) $(\mathcal{P}(\mathbb{N}_0), \subseteq)$.

b) $(\mathbb{N}_0, |)$.

14. Probar que todo retículo completo es acotado. ¿Vale la recíproca?

15. Verificar que basta con pedir una de las condiciones en la definición de retículo completo. Es decir, si $(L, \leq)$ es un poset tal que todo subconjunto $S \subseteq L$ tiene supremo (resp. ínfimo), entonces $(L, \leq)$ es un retículo completo.

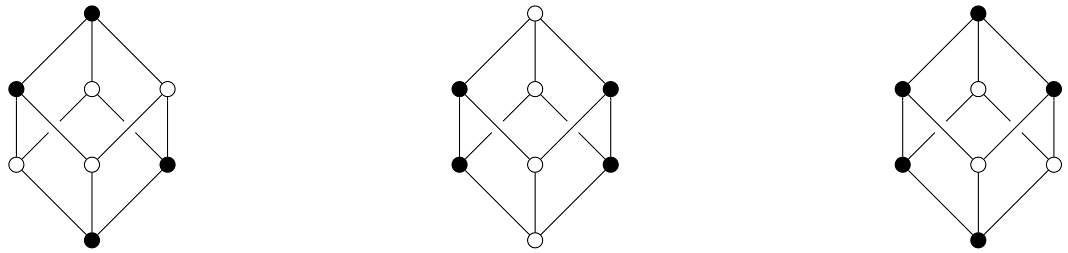
16. **Knaster-Tarski.** Sea $(L, \sqsubseteq)$ un retículo completo y $f : L \to L$ una función monónotona. Probar que el mínimo punto fijo de f es $\bigwedge\{x \in L | f(x) \sqsubseteq x\}$

17. Aplicar el resultado del ejercicio anterior para definir el conjunto inductivo de los números pares como el mínimo punto fijo de una función monótona. La definición inductiva del conjunto P de pares es:

- $0 \in P$.
- Si $n \in P$, entonces $n + 2 \in P$.
- "Estos son todos".

Subretículos, retículos distributivos y modulares

18. Determinar si en los siguientes diagramas, los puntos negros determinan un subretículo.



19. Sea $(X, \leq)$ un retículo y $a, b \in X$ con $a \leq b$. Probar que los siguientes subconjuntos de X son subretículos.

a) $\{x \in X : x \leq a\}$

b) $\{x \in X : b \leq x\}$

c) $\{x \in X : a \leq x \leq b\}$

20. Sea $(X, \vee, \wedge)$ un retículo.

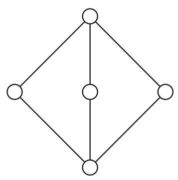
a) Probar que para todos $x, y, z \in X$ se satisface:

i. $x \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$
ii. $x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

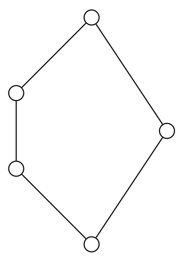
b) Probar que si una de las desigualdades anteriores es una igualdad, la otra también lo es.

21. Determinar si los siguientes diagramas admiten estructura de retículo distributivo.

M_3



N_5



22. Demostrar que si $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ es un retículo acotado y distributivo, entonces todo elemento tiene a lo sumo un complemento. Utilizar este argumento para probar que los retículos del ejercicio anterior no son distributivos.

23. Probar que un orden total es un retículo distributivo.

24. Probar que son equivalentes:

a) $a \leq c \Rightarrow a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge c$ para todos $a, b, c \in L$.

b) $a \geq c \Rightarrow a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee c$ para todos $a, b, c \in L$.

c) $a \vee (b \wedge (a \vee c)) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$ para todos $a, b, c \in L$

d) $a \wedge (b \vee (a \wedge c)) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$ para todos $a, b, c \in L$

25. Probar que todo retículo distributivo es modular. ¿Es cierta la recíproca?

26. Demostrar que un subrretículo de un retículo modular (resp. distributivo) es modular (resp. distributivo).

27. Determinar si los siguientes retículos son distributivos y/o modulares:

a) $(L, \subseteq)$ de subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^n$.

b) $(D_n, |)$.

Álgebras de Boole

28. Sea $(B, \vee, \wedge, 0, 1, ()^c)$ un álgebra de Boole. Probar que para todo $x, y \in B$:

a) $(x \vee y)^c = x^c \wedge y^c$.

b) $(x \wedge y)^c = x^c \vee y^c$.

29. Probar que $(D_n, |)$ admite estructura de álgebra de Boole si y solo si n es producto de factores primos distintos.

30. Mostrar que $f : (B_1, \vee, \wedge, 0, 1, ()^c) \to (B_2, \vee, \wedge, 0, 1, ()^c)$ es un isomorfismo de álgebra del Boole si y solo si $f : (B_1, \vee, \wedge) \to (B_2, \vee, \wedge)$ es un isomorfismo de retículo.