Introducción a la materia

Silvio Reggiani

Complementos de Matemática II (LCC)
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

14 de septiembre de 2020

Programa de la materia

- Unidad 1: Conjuntos ordenados
- Unidad 2: Retículos
- Unidad 3: Semigrupos, monoides y grupos
- Unidades 4 y 5: Teoría de categorías

¿Qué es la teoría de categorías?

- Los temas de las primeras unidades son importantes en sí mismos pero además proveen cierta intuición para entender y motivar la teoría de categorías
- La teoría de categorías sirve para formalizar y estudiar de manera global diferentes estructuras matemáticas
- Tiene sus orígenes en la topología algebraica (una rama de las matemáticas que estudia problemas de topología con herramientas del álgebra abstracta)
- Además resulta muy útil para estudiar ciertos lenguajes de programación
- Algunos autores también consideran a la teoría de categorías como un lenguaje alternativo para los fundamentos de la matemática, en lugar de la teoría de conjuntos

¿Qué es una estructura matemática?

- Es difícil definir abstractamente qué es una estructura matemática
- Simplificando un poco las cosas, podemos pensar que una estructura en un conjunto A nos da cierta información adicional sobre A (por ejemplo una operación, una distancia, etc.)
- Los conjuntos que tienen estructuras del mismo tipo (es decir que satisfacen ciertos axiomas) se dicen que son los **objetos** de una misma **categoría**
- Los **morfismos** de una categoría son las funciones que preservan la estructura. Siempre se pide que la composición de dos morfismos sea nuevamente un morfismo

Set: sin estructura

- Objetos: conjuntos
- Morfismos: funciones

Importante

En la teoría de categorías los objetos y los morfismos son elementos atómicos.

$a \in A$	✗
$f : A \to B$	✓

Ejercicio

Definir qué es una función inyectiva/sobreyectiva $f : A \to B$ sin recurrir a los elementos de A y B

Vect: categoría de espacios vectoriales

- Objetos: espacios vectoriales
- Morfismos: transformaciones lineales

$$T(v + cv') = T(v) + cT(v')$$

Ejemplo

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un morfismo de **Vect**, entonces

$$f(x) = cx$$

para algún $c \in \mathbb{R}$

Rng: categoría de anillos

- Objetos: anillos $(R, +, \cdot)$
- Morfismos

$$f(r + r') = f(r) + f(r')$$
$$f(r \cdot r') = f(r) \cdot f(r')$$

Ejercicio*

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un morfismo de anillos entonces $f = \mathrm{id}$ o $f \equiv 0$.

Ab y **Grp**

- Objetos: grupos conmutativos $(A, +, -, 0)$

$$a + (a' + a'') = (a + a') + a''$$
$$a + a' = a' + a$$
$$a + 0 = a = 0 + a$$
$$a + (-a) = 0 = -a + a$$

- Morfismos:

$$f(a + a') = f(a) + f(a')$$

Ejercicio**

Encontrar todos los morfismos de grupos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Top: categoría de espacios topológicos

- Objetos: espacios topológicos (conjuntos en los que hay una noción "cualitativa" de proximidad)
- Morfismos: funciones continuas

Ejercicio

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un morfismo de **Grp** y de **Top** entonces

$$f(x) = cx$$

para algún $c \in \mathbb{R}$

Estructuras geométricas

- Objetos: conjuntos donde están definidas las nociones de distancia y ángulos
- Morfismos*: funciones que preservan la distancia y los ángulos

Ejercicio: isometrías de $\mathbb{R}$

$$|f(y) - f(x)| = |y - x| \implies f(x) = \pm x + x_0$$

Ejercicio: isometrías de $\mathbb{R}^2$

$$f(x, y) = \pm(x, y)\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} + (x_0, y_0)$$

Poset: estructuras de orden

- Objetos: conjuntos (parcialmente) ordenados $(A, \leq)$
- Morfismos: funciones crecientes

$$x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$$

Ejercicio*

Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es creciente, entonces es continua en casi todo punto