Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Escuela de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Ciencia de la Computación
Complementos de Matemática II

Práctica 4 Teoría de categorías

1. Considerar los siguientes diagramas. En ambos casos, probar que si los dos triángulos conmutan, también conmuta el cuadrado.

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & \bullet \arrow[d] \\
\bullet \arrow[r] & \bullet
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \arrow[dl] \\
\bullet \arrow[r] & \bullet
\end{tikzcd}
$$

2. Sea X un conjunto ordenado. Mostrar que X puede considerarse como una categoría.

3. Verificar que un monoide M define una categoría con un único objeto cuyas flechas son los elementos de M.

4. Dada una categoría $\mathcal{C}$, podemos definir $\mathcal{C}^{op}$ con los mismos objetos que $\mathcal{C}$ pero las flechas con sentido inverso, es decir, $\mathrm{ob}(\mathcal{C}^{op}) = \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}^{op}}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)$. Verificar que $\mathcal{C}^{op}$ es una categoría.

5. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías. Se define $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ cuyos objetos son pares ordenados de la forma (C, D) con $C \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ y $D \in \mathrm{ob}(\mathcal{D})$ y $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\times\mathcal{D}}((C, D),(C', D')) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(C, C')\times$ $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(D, D')$. Verificar que $\mathcal{C} \times \mathcal{D}$ es una categoría.

6. Definamos $C^{\rightarrow}$ como la categoría de las flechas de una categoría C, es decir, los objetos de $C^{\rightarrow}$ son las flechas de C. Una flecha de $C^{\rightarrow}$ de $f\colon A \to B$ en $g\colon D \to E$ es un par (a, b) de flechas de C tales $g \circ a = b \circ f$.

a) Expresar las flechas de $C^{\rightarrow}$ en términos de diagramas conmutativos.

b) Probar que si en el diagrama los cuadrados conmutan, entonces también conmuta el rectángulo exterior.

$$
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[r] \arrow[d] & \bullet \arrow[d] \\
\bullet \arrow[r] & \bullet \arrow[r] & \bullet
\end{tikzcd}
$$

c) Utilizar **b)** para definir la composición en $C^{\rightarrow}$.

d) Verificar que $C^{\rightarrow}$ es una categoría.

7. Sean C una categoría y A un objeto de C. Definimos $C|A$ como la categoría cuyos objetos son las flechas f de C tales que $\mathtt{cod}(f) = A$. Una flecha g en $C|A$ de $f\colon X \to A$ en $h\colon Y \to A$ es una flecha $g\colon X \to Y$ de C tal que $f = h \circ g$.

a) Expresar las flechas de $C|A$ en términos de diagramas conmutativos.

b) Verificar que $C|A$ es una categoría.

c) Si P es la categoría definida por un conjunto ordenado y $x \in P$, determinar $P|x$.

8. Probar que en `Set` los monomorfismos (epimorfismos) son exactamente las funciones inyectivas (resp. sobreyectivas).

9. Sean C una categoría y f, g flechas de C. Probar que

a) Si f y g son monomorfismos, entonces $g \circ f$ también lo es.

b) Si $g \circ f$ es un monomorfismo, f también lo es.

c) Si f y g son epimorfismos, entonces $g \circ f$ también lo es.

d) Si $g \circ f$ es un epimorfismo, g también lo es.

e) Si f^{-1} es la inversa de f y g^{-1} es la inversa de g, entonces $f^{-1} \circ g^{-1}$ es la inversa de $g \circ f$.

10. Mostrar que una flecha de una categoría puede ser mono y epimorfismo y no isomorfismo.

11. Mostrar que una flecha de una categoría concreta puede ser epimorfismo y no sobreyectiva.

12. Mostrar que dos objetos terminales en una categoría son isomorfos. Por dualidad, ¿qué se puede decir de los objetos iniciales?

13. ¿Cuáles son los objetos iniciales y terminales en $\texttt{Set} \times \texttt{Set}$? ¿Cuáles en $\texttt{Set}^{\to}$?

14. Dar una categoría sin objetos iniciales. Dar una sin objetos finales. Dar una donde los objetos finales e iniciales coincidan.

15. Sea $\mathcal{C}$ una categoría. Probar que si dos objetos admiten producto (coproducto), éste es único salvo isomorfismo.

16. Determinar objetos iniciales, objetos terminales, productos y coproductos en las siguientes categorías: un Poset P visto como categoría, `Set`, `Poset`, `Mon` y `Grp`.

17. Dar una categoría donde algún par de objetos carecen de producto.

18. Sea $\mathcal{C}$ una categoría y sean A, B, C, D objetos de $\mathcal{C}$. Mostrar que en caso de existir $A \times B$, $C \times D$ y dos morfismos $f : A \to C$ y $g : B \to D$, entonces puede definirse un morfismo $f \times g : A \times B \to C \times D$.

19. Mostrar las siguientes identidades:

a) $\langle \pi_1, \pi_2 \rangle = id$

b) $\langle f \circ h, g \circ h \rangle = \langle f, g \rangle \circ h$

c) $(f \times h) \circ \langle g, k \rangle = \langle f \circ g, h \circ k \rangle$

d) $(f \times h) \circ (g \times k) = (f \circ g) \times (h \circ k)$

e) $\langle [f, g], [h, k] \rangle = [\langle f, h \rangle, \langle g, k \rangle]$

20. Probar los siguientes isomorfismos:

a) $A \times B \cong B \times A$

b) $A \times 1 \cong A$

c) $A \times (B \times C) \cong (A \times B) \times C$

¿Cuáles son los enunciados duales?

21. Probar que si dos morfismos $f,\, g\colon X \to Y$ admiten ecualizador (coecualizador), éste es único salvo isomorfismo.

22. Encontrar el ecualizador en `Set`.

23. Sean $f,\, g\colon X \to Y$ dos morfismos en `Set`. Probar que el coecualizador de f y g es el cociente de Y por la relación de equivalencia $y \equiv z$ si y sólo si existe $x \in X$ tal que $y = f(x)$ y $z = g(x)$ o bien $y = g(x)$ y $z = f(x)$.

24. Probar que en una categoría $\mathcal{C}$ todo ecualizador e es monomorfismo. Mostrar que si además e es epimorfismo, entonces se tiene un isomorfismo.

25. El pullback de dos morfismos $f\colon X \to Z$ y $g\colon Y \to Z$ consiste en un objeto P junto con dos morfismos $p_1\colon P \to X$, $p_2\colon P \to Y$ tal que $f \circ p_1 = g \circ p_2$, y además si es dado un objeto Q con dos morfismos $q_1\colon Q \to X$, $q_2\colon Q \to Y$ tal que $f \circ q_1 = g \circ q_2$, entonces existe un único morfismo $u\colon Q \to P$ tal que $p_1 \circ u = q_1$ y $p_2 \circ u = q_2$. A continuación, un diagrama que muestra la situación:

$$
\begin{tikzcd}
Q \arrow[dr, dotted, "u"] \arrow[drr, bend left, "q_2"] \arrow[ddr, bend right, "q_1"'] & & \\
& P \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] & Y \arrow[d, "g"] \\
& X \arrow[r, "f"'] & Z
\end{tikzcd}
$$

Probar que el pullback de dos morfismos, si existe, es único salvo isomorfismo.

26. Encontrar el pull-back en `Set`.

27. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con exponenciales,

a) Probar $curry(eval_{A,B}) = id_{B^A}$.

b) Dado un morfismo $f : B \to C$, construir un morfismo $B^A \to C^A$.

c) Dado un morfismo $f : A \to C^B$, construir un morfismo $uncurry(f) : A \times B \to C$.

d) Probar $uncurry(curry(f)) = f$ y $curry(uncurry(f)) = f$.

28. Sea $\mathcal{C}$ una CCC y sean A, B objetos de $\mathcal{C}$. Probar:

a) B^A es único salvo isomorfismo.

b) $1^A \cong 1$.

c) $B^1 \cong B$.

29. Hallar los exponenciales en `Set`.

30. Demostrar que un álgebra de Boole es una CCC.

31. En una categoría con coproductos y objeto final, podemos definir los booleanos como el objeto $Bool = 1 + 1$. En este caso, a i_1 le llamamos $true$ y a i_2 le llamamos $false$. Escribir un morfismo $not : Bool \to Bool$ tal que

$$\begin{aligned} not \circ true &= false \\ not \circ false &= true \end{aligned}$$

Suponiendo que la categoría tiene exponenciales, ¿puede escribir un morfismo and : $Bool \times Bool \to Bool$ que se comporte como la conjunción?

32. Una categoría se dice distributiva si tiene productos finitos, coproductos finitos, y para todos objetos A, B, C, los morfismos

$$\begin{aligned} &!`_{0\times A} : 0 \to 0 \times A \\ &[\iota_1 \times id_C, \iota_2 \times id_C] : A \times C + B \times C \to (A + B) \times C \end{aligned}$$

son isomorfismos.
Probar que toda CCC con coproductos finitos es distributiva.