Conjuntos parcialmente ordenados

Silvio Reggiani

Complementos de Matemática II (LCC)
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

21 de septiembre de 2020

Conjuntos parcialmente ordenados

Una relación $\leq$ en un conjunto A es un **orden parcial** (o simplemente un **orden**) si es

- reflexiva: $\forall a, a \leq a$,
- transitiva: $\forall a, b, c, (a \leq b \text{ y } b \leq c \implies a \leq c)$,
- antisimétrica: $\forall a, b, (a \leq b \text{ y } b \leq a \implies a = b)$.

Se dice que $(A, \leq)$ es un **conjunto parcialmente ordenado** o un **poset**. La noción de orden parcial es mucho más intuitiva que la noción de preorden (de hecho es un caso particular, que no admite ciclos).

Ejemplos importantes

- $(\mathbb{R}, \leq)$, $(\mathbb{Q}, \leq)$, $(\mathbb{Z}, \leq)$, $(\mathbb{N}, \leq)$, ... son posets.
- Si X es un conjunto, $(\mathcal{P}(X), \subset)$ es un poset.
- $(\mathbb{Z}, \mid)$ no es un poset.
- $(\mathbb{N}_0, \mid)$ sí es un poset.
- Si $(A, \leq)$, $(B, \leq)$ son dos posets (ATENCIÓN: usamos el mismo símbolo $\leq$ para denotar dos relaciones distintas) hay dos formas naturales de definir un orden parcial en el producto cartesiano $A \times B$.
  - **Orden producto** $(A \times B, \leq_{\text{prod}})$

    $$(a, b) \leq_{\text{prod}} (a', b') \iff (a \leq a' \text{ y } b \leq b').$$

  - **Orden lexicográfico** $(A \times B, \leq_{\text{lex}})$

    $$(a, b) \leq_{\text{lex}} (a', b') \iff (a < b \text{ ó } (a = a' \text{ y } b \leq b'))$$

    Notación: $a < b$ significa $a \leq b$ y $a \neq b$.

Orden total

Es un orden parcial tal que la relación es total:

$$\forall a, b, (a \leq b \text{ ó } b \leq a).$$

Ejemplo

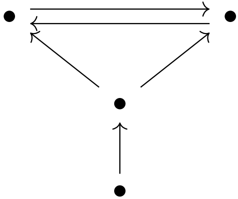
Si $(A, \leq)$ y $(B, \leq)$ tienen órdenes totales, entonces

- $(A \times B, \leq_{\text{lex}})$ es un orden total.
- $(A \times B, \leq_{\text{prod}})$ no es necesariamente un orden total: por ejemplo $(1, 2) \not\leq_{\text{prod}} (2, 1)$ y $(2, 1) \not\leq_{\text{prod}} (1, 2)$

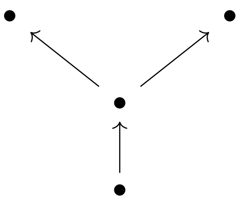
Diferencias entre preorden y orden parcial

En un poset

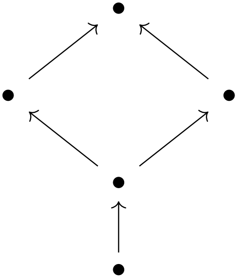
- Máximos y mínimos, si existen, son únicos
- Si a es un elemento maximal y $a \leq x$, entonces $a = x$



2 máximos (preorden)



2 maximales (poset)



1 máximo (poset)

Ejemplo/Ejercicio

¿Cómo obtener un poset a partir de un conjunto preordenado?

- Dato: $(A, \leq)$ conjunto preordenado
- Definimos una relación de equivalencia en A:

$$a \sim b \iff (a \leq b \wedge b \leq a)$$

  (identificamos ciclos en el grafo del preorden, verificar que $\sim$ es un relación de equivalencia)

- El orden "pasa al cociente": definimos un orden parcial en $(A/\sim, \leq)$ por

$$\bar{a} \leq \bar{b} \iff a \leq b$$

  - Buena definición: $a \leq b, a \sim a', b \sim b' \implies a' \leq b'$
  - Reflexiva ✓, transitiva ✓, ¿antisimétrica?
  - $\pi : A \to A/\sim$ es morfismo de orden (monótona creciente)

Aplicamos la construcción anterior a algunos ejemplos de preórdenes que no son posets.

Ejemplo

- Dato: $(\mathbb{Z}, \mid)$.
- $(\mathbb{Z}/\sim, \mid) \simeq (\mathbb{N}_0, \mid)$ (existe una biyección que preserva el orden).

Ejemplo

- Dato: un conjunto X con una relación de equivalencia $\sim$.
- $(X, \sim)$ es un preorden (no es un poset, en general).
- $(X/\sim, \sim) = (X/\sim, =)$:

$$\bar{x} \sim \bar{y} \iff \bar{x} = \bar{y}$$

el orden parcial inducido es la igualdad.

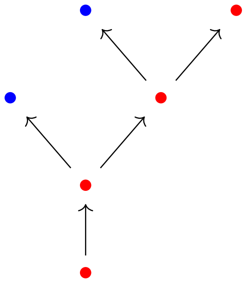
Cadenas y anticadenas

Sea $(A, \leq)$ un poset y $X \subset A$ un subconjunto.

- $(X, \leq)$ es una **cadena** si el orden es total.
  - Ejemplo: $(\mathbb{R}, \leq)$.
- $(X, \leq)$ es una **anticadena** si

$$\forall x, y \in X, (x \leq y \implies x = y).$$

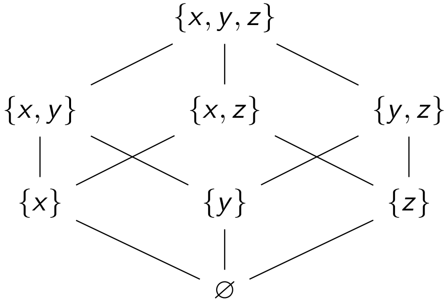
  - Ejemplo: $(\mathbb{R}, =)$



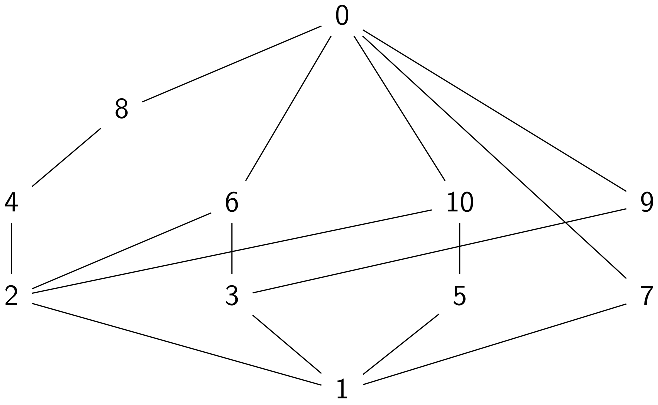
Diagramas de Hasse

- Se usan para graficar posets finitos.
- Orden estricto: $a < b \iff (a \leq b \land a \neq b)$.
  - a se dibuja debajo de b.
  - Se dibuja una línea entre a y b si $\nexists c, a < c < b$ (no hace falta poner una flecha, pues ya sabemos que los elementos de arriba son más grandes que los de abajo).

Ejemplo $(\mathcal{P}(\{x, y, z\}), \subset)$



Ejemplo $(\{0, 1, 2, \dots, 10\}, \mid)$



- 1ra fila: máximo
- última fila: mínimo
- penúltima: átomos (primos)

Corolario

En un poset finito siempre existen elementos maximales/minimales.

Posets infinitos

Lema (Zorn)

Sea $(A, \leq)$ *un poset no vacío en el que toda cadena no vacía tiene una cota superior. Entonces existen elementos maximales.*

- Es un enunciado muy profundo de la matemática.
- Es en realidad equivalente a un axioma de la teoría de conjuntos llamado el axioma de elección.
- Sirve para hacer inducción transfinita (razonamientos inductivos sobre conjuntos muy grandes, que no pueden ser indexados con números naturales).

A modo de ejemplo tratemos de probar el

Teorema (de la base de Hamel)

Todo espacio vectorial V *tiene una base.*

Demostración*

- Para dimensión finita ya lo sabemos (no hace falta LZ).
- Poset: $\mathcal{L} = \{B \subset V : B \text{ es LI}\} \subset \mathcal{P}(V)$ (ordenado por inclusión).
- $\varnothing \in \mathcal{L} \implies \mathcal{L} \neq \varnothing$.
- $\mathcal{C} \in \mathcal{L}$ cadena $\implies \bigcup \mathcal{C} \in \mathcal{L}$ y es cota superior de $\mathcal{C}$:
  - Suponer $v_1, \ldots, v_k \in \bigcup \mathcal{C}$ y $a_1 v_1 + \cdots + a_k v_k = 0$ $(a_i \in \mathbb{R})$
  - $v_i \in C_i \in \mathcal{C}$ y $\exists i_0, (\forall i, C_i \subset C_{i_0})$ (orden total en $\mathcal{C}$).
  - Luego, $(\forall i, v_i \in C_{i_0}) \implies (\forall i, a_i = 0)$ (pues C_{i_0} es LI)
- LZ $\implies \exists B \subset V$ subconjunto LI y maximal en $\mathcal{L}$.
- B es base: si así no fuera, $\exists v \in V, v \notin \langle B \rangle$.
- $B' = B \cup \{v\}$ es LI $\implies B' \in \mathcal{L}$.
- $B \subsetneq B'$. Absurdo. $\square$

Ejemplo

Encontrar una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x+y) = f(x) + f(y)$ que no sea de la forma $f(x) = cx$.

- $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0) \implies f(0) = 0$.
- $0 = f(0) = f(x-x) = f(x) + f(-x) \implies f(-x) = -f(x)$.
- $f(nx) = f(x + \cdots + x) = f(x) + \cdots + f(x) = nf(x)$, $n \in \mathbb{N}$.
- $f(x) = f(\frac{x}{n} + \cdots + \frac{x}{n}) = nf(\frac{x}{n}) \implies f(\frac{1}{n}x) = \frac{1}{n}f(x)$, $n \in \mathbb{N}$.
- $f(\frac{m}{n}x) = \frac{m}{n}f(x)$, $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$.
- $\mathbb{R}$ es $\mathbb{Q}$-espacio vectorial y f es $\mathbb{Q}$-lineal.
- Si B es una $\mathbb{Q}$-base de $\mathbb{R}$ (debe tener una cantidad no numerable de elementos), entonces cualquier elemento de $\mathbb{R}$ se escribe como $x = \sum_{b\in B} x_b b$ (a lo sumo una cantidad finita de $x_b \neq 0$).
- Fijando $b_0 \in B$, podemos definir $f(x) = x_{b_0}$ (proyección a la coordenada según b_0) y f será una transformación $\mathbb{Q}$-lineal.

Morfismos de posets

Los morfimos de posets son las funciones que “respetan” la estructura (es decir, el orden).

Funciones monótonas

Sea $f : (A, \leq) \to (B, \leq)$ una función entre dos posets.

- f es **creciente** si $x \leq y \implies f(x) \leq f(y)$.
- f es **decreciente** si $x \leq y \implies f(y) \leq f(x)$.

Observación

La existencia de una función biyectiva y monótona $f : (A, \leq) \to (B, \leq)$ no implica que los posets $(A, \leq)$ y $(B, \leq)$ sean “equivalentes” (es decir, el mismo orden pero cambiando el nombre a los elementos) desde el punto de vista de la teoría del orden. Veremos un ejemplo de esto más adelante.

Isomorfismos de orden

Una función biyectiva $f : (A, \leq) \to (B, \leq)$ entre dos posets es un

- **isomorfismo de orden** si

$$x \leq y \iff f(x) \leq f(y),$$

- **antiisomorfismo de orden** si

$$x \leq y \iff f(y) \leq f(x).$$

Ejercicio

f es un isomorfismo (resp. antiisomorfismo) de orden $\iff f, f^{-1}$ son crecientes (resp. decrecientes).

Ejemplo

- $\mathrm{id} : (\mathbb{N}, \mid) \to (\mathbb{N}, \leq)$ es un morfismo de orden (es creciente)
- $\mathrm{id} : (\mathbb{N}, \leq) \to (\mathbb{N}, \mid)$ no es morfismo de orden. Por ejemplo, $2 \leq 3$, pero $2 \nmid 3$ ni $3 \nmid 2$.
- Luego, $\mathrm{id} : (\mathbb{N}, \mid) \to (\mathbb{N}, \leq)$ no es un isomorfismo de orden. Más aún, estos posets no son isomorfos (no existe ningún isomorfismo entre ellos). Una forma sencilla de probar esto es observando que en $(\mathbb{N}, \leq)$ el orden es total, en tanto que el orden de $(\mathbb{N}, \mid)$ es un orden parcial que no es total.

Orden total

El orden en $(A, \leq)$ es una relación total. También se llama **orden lineal**.

El diagrama de Hasse de un orden total (si es que existe) es una línea.

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ \bullet \\ \uparrow \\ \bullet \\ \uparrow \\ \bullet \\ \uparrow \end{array}$$

Propiedades de conjuntos totalmente ordenados

- Sea $(A, \leq)$ un conjunto totalmente ordenado y $a \in A$. Entonces a es maximal (minimal) $\iff$ a es cota superior (inferior) $\iff$ a es supremo (ínfimo) $\iff$ a es máximo (mínimo) y por consiguiente a es único con estas propiedades.
- Si $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$, la cantidad de órdenes totales en A es $n!$.
- Como consecuencia, si A es un conjunto finito, existe un único orden total salvo isomorfismo (¿por qué?).
- ¿Vale lo mismo si A es un conjunto infinito? Rta: NO, por ejemplo $(\mathbb{N}, \leq) \not\simeq (\mathbb{N}, \geq)$ (¿por qué?).
- OK, pero hay un antiisomorfismo entre estos dos. Otro ejemplo podría ser $(\mathbb{N}, \leq')$, donde

$$\leq': \qquad 2 \leq' 3 \leq' 4 \leq' 5 \leq' \cdots \leq' 1.$$

  Luego $(\mathbb{N}, \leq') \not\simeq (\mathbb{N}, \leq)$ y $(\mathbb{N}, \leq') \not\simeq (\mathbb{N}, \geq)$ (tienen distinto diagrama de Hasse).

Ejercicio*

¿Cuántos órdenes totales hay en $\mathbb{N}$?

Teorema

Si $(A, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado, $(B, \leq)$ es un poset y $f : A \to B$ es biyectiva y creciente (resp. decreciente). Entonces f es un isomorfismo (resp. antiisomorfismo) de orden. En particular, $(B, \leq)$ es totalmente ordenado.

Demostración.

- Debemos ver que f^{-1} es creciente.
- Sean $b, b' \in B$ tales que $b \leq b'$ y sean $a, a' \in A$ tales que $f(a) = b$ y $f(a') = b'$. Debemos ver que $a \leq a'$.
- Si así no fuera, entonces $a > a'$ y por ende $b = f(a) > f(a') = b'$. Contradicción.
- Luego, $\forall b, b' \in B, (b \leq b' \implies f^{-1}(b) \leq f^{-1}(b'))$. Es decir, f^{-1} es creciente, f isomorfismo y por lo tanto $(B, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado. $\square$

Ejemplo/Ejercicio (de Análisis I)

$\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{>0}$ es un isomorfismo de orden con inversa

$$\log : \mathbb{R}^{>0} \to \mathbb{R}.$$

Más aún, cualquier función estrictamente creciente $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es un isomorfismo de orden sobre su imagen.

Conjuntos bien ordenados

Un poset $(A, \leq)$ se dice un conjunto **bien ordenado (BO)** si

- $(A, \leq)$ es un conjunto totalmente ordenado,
- $\forall B \subset A$, $(B \neq \varnothing \implies B$ tiene 1er elemento $(=$ mínimo$))$

Ejemplo/Ejercicio

- $(\mathbb{N}, \leq)$: $1 \leq 2 \leq 3 \leq 4 \leq \cdots$ es BO [AGII].
- $(\mathbb{N}, \lesssim)$: $2 \lesssim 3 \lesssim 4 \lesssim 5 \lesssim \cdots \lesssim 1$ es BO.
- $(\mathbb{N}, \geq)$: $\cdots \geq 4 \geq 3 \geq 2 \geq 1$ no es BO
- $(\mathbb{N}, \lesssim')$: $1 \lesssim' 3 \lesssim' 5 \lesssim' \cdots \lesssim' 2 \lesssim' 4 \lesssim' 6 \lesssim' \cdots$ es BO.

Ejemplo

- $(\mathbb{R}, \leq)$ no es BO.
- $(\mathbb{R}^{\geq 0}, \leq)$ no es BO.

Principio de buena ordenación

- El **principio de buena ordenación** es un teorema que dice que todo conjunto admite un buen orden.
- No confundir con el **principio del buen orden** que dice que cualquier subconjunto de $\mathbb{N}$ es BO (con el orden inducido).
- El principio de buena ordenación es un resultado fundacional de la matemática, de hecho, es equivalente al axioma de elección y por ende al lema de Zorn.

Ejemplo(?)

$\mathbb{R}$ admite un buen orden.