Práctica 1: Relaciones

Relaciones funcionales

1. Determinar si cada una de las siguientes relaciones es una función. En caso de que lo sea, determinar su imagen:

a) $\mathcal{R}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : y = x^2 + 7\}$.

b) $\mathcal{R}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y^2 = x\}$.

c) $\mathcal{R}_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : y = 3x + 1\}$.

2. Sea f una relación funcional. Demostrar que f^{-1} es una relación funcional si y solo si f es inyectiva.

3. Mostrar que la composición de relaciones coincide con la composición de funciones en el sentido usual. Es decir, si $f : A \to B$ y $g : B \to C$ son funciones, entonces la relación dada por $g \circ f = \{(a, c) \in A \times C : \exists\, b \in B, f(a) = b \wedge g(b) = c\}$ es una función.

4. Sea $f : A \to B$ función y $A' \subseteq A$. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Si f es inyectiva (resp. sobreyectiva), entonces $f_{|A'}$ es inyectiva (resp. sobreyectiva).

b) Si $f_{|A'}$ es inyectiva (resp. sobreyectiva), entonces f es inyectiva (resp. sobreyectiva).

5. Mostrar que hay una correspondencia biyectiva entre las relaciones de A en B y las funciones de A en $\mathcal{P}(B)$.

Relaciones en un conjunto

6. En cada uno de los siguientes casos, determinar si la relación $\mathcal{R}$ en $\mathbb{Z}$ es reflexiva, simétrica, antisimétrica, o transitiva.

a) $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x = y^2$.

b) $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x > y$.

c) $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x \geq y$.

d) $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x + y$ es par.

e) $x\mathcal{R}y \Leftrightarrow x - y$ es impar.

7. Sea $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ relaciones en A. Determinar la validez de los siguientes enunciados:

a) Si $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ son reflexivas, entonces:

i. $\mathcal{R} \cup \mathcal{S}$ es reflexiva.
ii. $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}$ es reflexiva.
iii. $\mathcal{R} \circ \mathcal{S}$ es reflexiva.

b) Repetir el ejercicio anterior sustituyendo "reflexiva" por simétrica, antisimétrica, o transitiva.

c) Si $\mathcal{R}$ es reflexiva (resp. simétrica, antisimétrica, transitiva), entonces $\mathcal{R}^{-1}$ también lo es.

8. Sean $\mathcal{R}$ y $\mathcal{S}$ relaciones en A tal que $\mathcal{R} \subseteq \mathcal{S}$, y sea $A' \subseteq A$. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a) Si $\mathcal{R}$ es reflexiva (resp. simétrica, antisimétrica, o transitiva), entonces $\mathcal{S}$ también lo es.

b) Si $\mathcal{S}$ es reflexiva (resp. simétrica, antisimétrica, o transitiva), entonces $\mathcal{R}$ también lo es.

c) Si $\mathcal{R}$ es reflexiva (resp. simétrica, antisimétrica, o transitiva), entonces $\mathcal{R}_{|A' \times A'}$ también lo es.

Relaciones de equivalencia

9. Analizar en cada caso si la relación dada en el conjunto A es de equivalencia. En caso de serlo, describir su conjunto cociente:

a) $A = \mathbb{Z}$, $x \sim y \Leftrightarrow x - y$ es un entero par.

b) $A = \mathbb{R}$, $x \sim y \Leftrightarrow xy > 0$.

c) $A = \mathbb{R}$, $x \sim y \Leftrightarrow xy \geq 0$.

d) $A = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = c + b$.

10. Sea $\sim$ una relación de equivalencia en A y $a, b \in A$. Demostrar:

a) $\overline{a} \neq \emptyset$.

b) $a \sim b$ si y solo si $\overline{a} = \overline{b}$.

c) $a \not\sim b$ si y solo si $\overline{a} \cap \overline{b} = \emptyset$.

11. Demostrar que hay una correspondencia biyectiva entre relaciones de equivalencia en A y particiones de A.

12. Considerar en $\mathbb{Z}$ la relación de congruencia módulo n, esto es, $x \sim y \Leftrightarrow x - y$ es múltiplo de n.

a) Mostrar que $\sim$ es una relación de equivalencia.

b) Mostrar que $\sim$ induce la partición $\mathbb{Z} = \overline{0} \cup \overline{1} \cup \ldots \cup \overline{n-1} = \bigcup_{i=0}^{n-1} \overline{i}$.

13. Dada una función $f : A \to B$, mostrar que

$$\ker(f) \doteq \{(a, a') \in A \times A : f(a) = f(a')\}$$

es una relación de equivalencia en A.

14. Dar una definición de $\ker(f)$ en términos de f, la composición y la inversa de relaciones.

15. Sea `espar` $: \mathbb{N} \to \mathbb{B}$ la función que retorna valor `true` en los pares y valor `false` en los impares. Calcular $\mathbb{N}/\ker($`espar`$)$.

16. Mostrar que toda relación de equivalencia es el kernel de una función.

17. **Teorema de factorización.** Dada una función $f : A \to B$ y una relación de equivalencia $\sim \subseteq \ker(f)$, probar que existe una única función $\tilde{f} : A/\sim \to B$ tal que $f = \tilde{f} \circ \pi$. Donde $\pi : A \to A/\sim$ se define como $\pi(a) = \overline{a}$ para todo $a \in A$.

Relaciones de preorden

18. Mostrar que las siguentes relaciones son preórdenes, y determinar si existen máximos y mínimos.

a) $(\mathbb{Z}, \leq)$.

b) $(\mathbb{Z}, |)$, donde $a|b \Leftrightarrow \exists\ c \in \mathbb{Z} : b = ac$.

c) $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ para todo conjunto X.

19. Lema de Yoneda. Sean $(P, \leq)$ un conjunto preordenado. Mostrar:

$$(x \leq y) \Leftrightarrow (\forall z.\ (z \leq x) \Rightarrow (z \leq y))$$

20. Sea $(A, \leq)$ un conjunto preordenado. Probar:

a) Si existe un elemento máximo, entonces todos los maximales son máximos.

b) Sea $B \subseteq A$. Si $a \in B$ es cota superior de B, entonces a es un elemento maximal de B. ¿Vale la recíproca?

21. Mostrar que $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ satisface el axioma del supremo.

22. ¿El axioma del supremo es una propiedad hereditaria? Es decir, si $(A, \leq)$ es un conjunto preordenado que satisface el axioma del supremo y $B \subseteq A$, ¿$(B, \leq_{|B\times B})$ también lo satisface?

23. Sea $(A, \leq)$ un conjunto preordenado. Mostrar que $(A, \leq)$ satisface el axioma del supremo si y solo si $(A, \leq)$ satisface el axioma del ínfimo.

Relaciones de orden

24. ¿Cuántas relaciones posibles hay en $A = \{a, b, c\}$? Responder la misma pregunta para: preórdenes, órdenes parciales, órdenes totales, y relaciones de equivalencia. ¿Y para un conjunto finito de n elementos?

25. Determinar si las siguientes expresiones son posets, y en caso afirmativo, si además son conjuntos totalmente ordenados.

a) $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$.

b) $(\mathbb{Z}, |)$.

c) $(\mathbb{N}_0, |)$.

d) $(\texttt{Prop}, D)$, donde `Prop` son las fórmulas del cálculo proposicional y $\phi D \psi \Leftrightarrow \{\phi\} \vdash \psi$.

26. Sean $(A, \leq_1)$ y $(A, \leq_2)$ posets. Determinar si las siguientes relaciones determinan un orden parcial en A:

a) $\leq_1 \cup \leq_2$.

b) $\leq_1 \cap \leq_2$.

27. Sean $(A, \leq_A)$ y $(B, \leq_B)$ posets. Probar que los siguientes conjuntos son posets:

a) $(A \times B, \leq_{prod})$ donde:
$$(a, b) \leq_{prod} (a', b') \Leftrightarrow (a \leq_A a' \wedge b \leq_B b').$$

b) $(A \times B, \leq_{lex})$, donde
$$(a, b) \leq_{lex} (a', b') \Leftrightarrow (a <_A a' \vee (a = a' \wedge b \leq_B b')).$$

c) Si además $(A, \leq_A)$ y $(B, \leq_B)$ son conjuntos totalmente ordenados, ¿lo son también $(A \times B, \leq_{prod})$ y $(A \times B, \leq_{lex})$?

d) Dados los posets $(\mathcal{P}(\{0\}), \subseteq)$ y $(\mathcal{P}(\{1, 2\}), \subseteq)$, construir $(\mathcal{P}(\{0\}) \times \mathcal{P}(\{1, 2\}), \leq_{prod})$ y $(\mathcal{P}(\{0\}) \times \mathcal{P}(\{1, 2\}), \leq_{lex})$.

e) Mostrar que $(\mathcal{P}(\{0\}) \times \mathcal{P}(\{1, \ldots, n\}), \leq_{prod}) \simeq (\mathcal{P}(\{0, \ldots, n\}), \subseteq)$.

28. Mostrar que si un poset tiene máximo (resp. mínimo), éste es único. ¿Vale para un preorden?

29. Probar que el conjunto de todos los elementos maximales (resp. minimales) de un conjunto ordenado, es una anticadena.

30. Sea $(P, \leq)$ un conjunto preordenado.

a) Construir un poset $(P/\!\sim, \preccurlyeq)$ donde $x \sim y \Leftrightarrow (x \leq y \wedge y \leq x)$, tal que la proyección al cociente $\pi : P \to P/\!\sim$ es morfismo de orden.

b) Aplicar esta construcción a los siguientes conjuntos preordenados:

i. Una relación de equivalencia $\sim$ en un conjunto X vista como preorden.
ii. $(\mathbb{Z}, |)$. Mostrar que la construcción es isomorfa a $(\mathbb{N}_0, |)$.
iii. $(\texttt{Prop}, D)$. Para este caso particular, la construcción se llama álgebra de Lindenbaum-Tarski.

31. Sean $(X, \leq_X)$ y $(Y, \leq_Y)$ posets. Probar que son equivalentes:

a) $(X, \leq_X) \simeq (Y, \leq_Y)$.

b) Existe $f : (X, \leq_X) \to (Y, \leq_Y)$ morfismo de orden sobreyectivo tal que $f(a) \leq_Y f(b) \Rightarrow a \leq_X b$.

c) Existen $f : (X, \leq_X) \to (Y, \leq_Y)$ y $g : (Y, \leq_Y) \to (X, \leq_X)$ morfismos de orden tales que $f \circ g = id_Y$ y $g \circ f = id_X$, es decir, $g = f^{-1}$.

32. Sea $(A, \leq)$ poset. Para todo $a \in A$ se define:
$$A_a \doteq \{x \in A : x \leq a\}$$
Sea $\mathcal{A} = \{A_a : a \in A\}$, mostrar que $(\mathcal{A}, \subseteq) \simeq (A, \leq)$.

33. Definir un morfismo de orden biyectivo entre $(\mathbb{N}, |)$ y $(\mathbb{N}, \leq)$. ¿Son posets isomorfos?

34. ¿Existe algún conjunto con dos órdenes totales distintos (salvo isomorfismo)? Ayuda: pensar en $(\mathbb{N}, \leq)$ y $(\mathbb{N}, \geq)$. ¿Existe un orden total diferente a $\leq$ y $\geq$ para $\mathbb{N}$? ¿Cuántos órdenes totales hay en $\mathbb{N}$?

35. Sean $(X, \leq_X)$ y $(Y, \leq_Y)$ posets. Una conexión de Galois es un par de funciones (f, g) con $f : X \to Y$ y $g : Y \to X$ tales que:
$$f(x) \leq_Y y \Leftrightarrow x \leq_X g(y) \quad \forall\, x \in X, y \in Y.$$

a) Probar que todo isomorfismo de orden f induce una conexión de Galois (f, f^{-1}).

b) Dada una función $f : A \to B$, probar que se puede construir una conexión de Galois entre $\mathcal{P}(A)$ y $\mathcal{P}(B)$ utilizando los operadores que calculan la imagen de f sobre un subconjunto de A y la imagen inversa de f sobre un subconjunto de B.

c) Encontrar una conexión de Galois (id, g) entre $(\mathbb{N}, \leq)$ y $(\mathbb{Q}_0^+, \leq)$, donde id es la inclusión.

d) Dada una conexión de Galois (f, g) entre $(X, \leq_X)$ y $(Y, \leq_Y)$, probar que $x \leq_X g(f(x))$ y $f(g(y)) \leq_Y y$ para todo $x \in X, y \in Y$.

e) Dada una conexión de Galois (f, g) entre $(X, \leq_X)$ y $(Y, \leq_Y)$, probar que f y g son morfismos de orden.

36. Determinar si los siguientes posets están bien ordenados:

- $(\mathbb{N}, \leq)$.
- $(\mathbb{N}, \geq)$.
- $(\mathbb{R}, \leq)$.
- $(\mathbb{R}_0^+, \leq)$.

37. ¿Es posible construir una relación de equivalencia $\sim$ sobre posets tal que $(X, \leq_X) \sim (Y, \leq_Y) \Leftrightarrow (X, \leq_X) \simeq (Y, \leq_Y)$?