Categorías. Parte 2.

Silvio Reggiani

Complementos de Matemática II (LCC)
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

10 de noviembre de 2020

Monomorfismos

Definición

Decimos que $f \in \mathrm{Hom}(B, C)$ es un **monomorfismo** si

$$\forall A \in \mathrm{ob}\,\mathscr{C}, \forall g, h \in \mathrm{Hom}(A, B), [f \circ g = f \circ h \implies g = h]$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & B \arrow[r, "f"] & C \end{tikzcd}$$

Ejemplo/Ejercicio

En **Set** los monomorfismos coinciden con las funciones inyectivas.

$$\begin{tikzcd}
A & B & C \\
 & b \arrow[dr, bend left, "f"] & \\
a \arrow[ur, bend left, "g"] \arrow[dr, bend right, "h"'] & & c \\
 & b' \arrow[ur, bend right, "f"'] &
\end{tikzcd}$$

Epimorfismos

Definición

Decimos que $f \in \operatorname{Hom}(A, B)$ es un **epimorfismo** si

$$\forall C \in \operatorname{ob}\mathscr{C}, \forall g, h \in \operatorname{Hom}(B, C), [g \circ f = h \circ f \implies g = h]$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & C \end{tikzcd}$$

Observación/Ejercicio

Las definiciones de monomorfismo y epimorfismo son definiciones duales. Es decir, f es un monomorfismo en la categoría $\mathscr{C}$ si y sólo si f es un epimorfismo en la categoría $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$.

Ejemplo/Ejercicio

En **Set** los epimorfismos coinciden con las funciones sobreyectivas.

$$
\begin{tikzcd}
A & B & C \\
 & b \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[dr, bend right, "h"'] & c \\
a \arrow[dr, bend right, "f"'] & & c' \\
 & b' \arrow[r, bend left, "g"] \arrow[r, bend right, "h"'] & c''
\end{tikzcd}
$$

Ejemplo

- $\mathscr{C} = \mathbf{Mon}$ (categoría de monoides)
- $A = (\mathbb{N}_0, +, 0)$
- $B = (\mathbb{Z}, +, 0)$
- $i : A \hookrightarrow B$
- i es monomorfismo, pues es inyectiva y **Mon** es una categoría concreta (¿por qué?).
- i no es sobreyectiva pero SÍ es un epimorfismo. En efecto, sea $(M, *, e)$ un monoide y supongamos que el siguiente diagrama conmuta:

$$\mathbb{N}_0 \xhookrightarrow[i]{} \mathbb{Z} \underset{h}{\overset{g}{\rightrightarrows}} M$$

Ejemplo (cont.)

- Si $n \in \mathbb{Z}$ y $n \geq 0$, entonces

$$g(n) = g(i(n)) = h(i(n)) = h(n)$$

- Si $n \in \mathbb{Z}$ y $n \leq 0$

$$\begin{aligned}
g(n) &= g(n) * e = g(n) * h(0) \\
&= g(n) * h(-n + n) \\
&= g(n) * h(-n) * h(n) \\
&= g(n) * g(-n) * h(n) && [-n \geq 0] \\
&= g(n - n) * h(n) \\
&= g(0) * h(n) \\
&= e * h(n) = h(n)
\end{aligned}$$

- Usamos que $\mathbb{Z}$ es un grupo.

Ejercicio

En **Grp**:

- mono $\iff$ inyectiva.
- epi $\iff$ sobreyectiva.

Isomorfismos

Definición

Decimos que un morfismo $f : A \to B$ es un **isomorfismo** si existe un morfismo $f^{-1} : B \to A$ tal que $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_B$ y $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_A$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_A"'] & B \arrow[r, "f^{-1}"] & A \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} B \arrow[r, "f^{-1}"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_B"'] & A \arrow[r, "f"] & B \end{tikzcd}$$

Ejemplo

$$f \text{ iso} \implies \begin{cases} f & \text{mono} \\ f & \text{epi} \end{cases}$$

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, shift left, "g"] \arrow[r, shift right, "h"'] & A \arrow[r, shift left, "f"] & B \arrow[l, shift left, "f^{-1}"] \end{tikzcd}$$

- $f \circ g = f \circ h \implies \underbrace{f^{-1} \circ f \circ g}_{=g} = \underbrace{f^{-1} \circ f \circ h}_{=h}$
- Luego f mono. Probar como ejercicio que f es epi (dualidad).

Ejemplo

$\mathscr{C} = \mathbf{Mon}$, $i : \mathbb{N}_0 \hookrightarrow \mathbb{Z}$.

- i es mono.
- i es epi.
- ¿i es iso?

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{N}_0 \arrow[r, "i"] \arrow[rr, bend right, "\mathrm{id}_{\mathbb{N}_0}"'] & \mathbb{Z} \arrow[r, "f", "?"'] & \mathbb{N}_0
\end{tikzcd}
$$

- $f(n) = n$ para todo $n \geq 0$
- Además, si $n \geq 0$,

$$
\begin{aligned}
0 = f(0) &= f(-n+n) \\
&= f(-n) + f(n) \\
&= f(-n) + n
\end{aligned}
$$

- Luego $f(-n) = -n$. Absurdo.

Objetos iniciales y terminales

Definición

Un objeto $0 \in \operatorname{ob}\mathscr{C}$ se dice **inicial** si

$$\forall A \in \operatorname{ob}\mathscr{C}, \exists! 0 \to A.$$

Definición (dual)

Un objeto $1 \in \operatorname{ob}\mathscr{C}$ se dice **terminal** si

$$\forall A \in \operatorname{ob}\mathscr{C}, \exists! A \to 1.$$

Ejemplo

En **Set**:

- $\varnothing$ es el único objeto inicial (¿por qué?).
- $\{x\}$ son (todos) los objetos terminales.

Ejemplo

Los objetos iniciales/terminales son únicos salvo isomorfismos. Más aún, entre dos objetos iniciales/terminales existe un único isomorfismo.

$$
\begin{tikzcd}
0' & 0 \arrow[l, "f"'] \arrow[r, shift left, "\exists ! f"] \arrow[rr, bend left, "\exists !(=\mathrm{id}_0)"] & 0' \arrow[l, shift left, "\exists ! f'"] \arrow[r, "f'"] \arrow[ll, bend left, "\exists !(=\mathrm{id}_{0'})"] & 0
\end{tikzcd}
$$

- $f' \circ f = \mathrm{id}_0$,
- $f \circ f' = \mathrm{id}_{0'}$,
- Luego, $f' = f^{-1}$.

Ejemplo

Pensemos en un poset $(P, \leq)$ como una categoría. ¿Cuáles son los objetos iniciales/terminales?

- Objeto inicial: mínimo
- Objeto terminal: máximo

Notar que no siempre existen.

Ejemplo

- En **Grp**, el grupo trivial $\{e\}$ es inicial y terminal a la vez.
- Ídem en $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ con el espacio nulo $\{0\}$.

Observación

Los objetos que son iniciales y terminales a la vez son muy importantes y suelen llamarse objetos nulos. Volveremos sobre esto más adelante.

Productos

Ejemplo

En **Set**, sabemos que

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A, b \in B\},$$

pero ¿cómo podemos caracterizar $A \times B$ usando sin hacer mención a sus elementos?

$$\begin{tikzcd}
& C \arrow[dl, bend right, "f"'] \arrow[d, dashed, "\exists!"', "{\langle f,g \rangle}"] \arrow[dr, bend left, "g"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi_A"] \arrow[r, "\pi_B"'] & B
\end{tikzcd}$$

- Tenemos dos proyecciones
  - $\pi_A(a, b) = a$
  - $\pi_B(a, b) = b$
- Para cada conjunto C y cada par de funciones $f : C \to A$, $g : C \to B$, existe una única función $\langle f, g\rangle : C \to A \times B$ tal que el diagrama conmuta
- $\langle f, g\rangle(c) = (f(c), g(c))$

Observación

La terna $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$ es "única" con la propiedad antes mencionada.

Es decir, si $(X, \tilde{\pi}_A, \tilde{\pi}_B)$ tiene la siguiente propiedad universal, entonces X es biyectivo con $A \times B$, vía una biyección que conmuta con las proyecciones.

$$
\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, bend right, "f"'] \arrow[d, dashed, "\exists!"', "\widetilde{\langle f, g\rangle}"] \arrow[dr, bend left, "g"] & \\
A & X \arrow[l, "\tilde{\pi}_A"] \arrow[r, "\tilde{\pi}_B"'] & B
\end{tikzcd}
$$

$$
\begin{tikzcd}
 & A \times B \arrow[dl, bend right, "\pi_A"'] \arrow[dr, bend left, "\pi_B"] \arrow[d, dashed, shift left, "\widetilde{\langle \pi_A, \pi_B\rangle}"] & \\
A & X \arrow[l, "\tilde{\pi}_A"] \arrow[r, "\tilde{\pi}_B"'] \arrow[u, dashed, shift left, "\langle \tilde{\pi}_A, \tilde{\pi}_B\rangle"] & B
\end{tikzcd}
$$

- $\tilde{\pi}_A(\widetilde{\langle \pi_A, \pi_B\rangle}(a, b)) = \pi_A(a, b) = a$
- $\tilde{\pi}_B(\widetilde{\langle \pi_A, \pi_B\rangle}(a, b)) = \pi_B(a, b) = b$
- Por unicidad (ejercicio)

$$\langle \tilde{\pi}_A, \tilde{\pi}_B\rangle \circ \widetilde{\langle \pi_A, \pi_B\rangle} = \mathrm{id}_{A \times B}$$

- Ídem $\widetilde{\langle \pi_A, \pi_B\rangle} \circ \langle \tilde{\pi}_A, \tilde{\pi}_B\rangle = \mathrm{id}_X$

Definición

El **producto** de dos objetos A, B en una categoría $\mathscr{C}$ es una terna $(A \times B, \pi_A, \pi_B)$ donde

- $\pi_A \in \mathrm{Hom}(A \times B, A)$
- $\pi_B \in \mathrm{Hom}(A \times B, B)$

que tiene la siguiente propiedad universal:

- para todo objeto C y para todo par de morfismos $f : C \to A$, $g : C \to B$, existe un único morfismo $\langle f, g \rangle : C \to A \times B$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd}
 & C \arrow[dl, bend right, "f"'] \arrow[d, dashed, "\exists!"', "\langle f,g \rangle"] \arrow[dr, bend left, "g"] & \\
A & A \times B \arrow[l, "\pi_A"] \arrow[r, "\pi_B"'] & B
\end{tikzcd}$$

Ejercicio

$(A \times B, \pi_A, \pi_B)$ es único salvo isomorfismo.

Ejemplo

Supongamos que existen los productos $A \times B$, $C \times D$ y que tenemos dados dos morfismos $f : A \to C$, $g : B \to D$. Entonces se puede definir un morfismo

$$f \times g : A \times B \to C \times D$$

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[d, "f"'] & A \times B \arrow[l, "\pi_A"'] \arrow[r, "\pi_B"] \arrow[dl, "f \circ \pi_A"'] \arrow[d, dashed, "\exists!"] \arrow[dr, "g \circ \pi_B"] & B \arrow[d, "g"] \\
C & C \times D \arrow[l, "\pi_C"] \arrow[r, "\pi_D"'] & D
\end{tikzcd}$$

$$\boxed{f \times g = \langle f \circ \pi_A, g \circ \pi_B \rangle}$$

Coproductos

Definición

Un **coproducto** de A, B es una terna $(A + B, \iota_A, \iota_B)$ con la siguiente propiedad universal:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\iota_A"] \arrow[dr, bend right, "f"'] & A + B \arrow[d, dashed, "{[f,g]}", "\exists !"'] & B \arrow[l, "\iota_B"'] \arrow[dl, bend left, "g"] \\
 & C &
\end{tikzcd}$$

para todo objeto C y para todo par de morfismos $f : A \to C$, $g : B \to C$ existe un único morfismo

$$[f, g] : A + B \to C$$

tal que el diagrama conmuta.

Proposición

$(A + B, \iota_A, \iota_B)$, *si existe, es único salvo isomorfismo.*

Demostración.

Por dualidad (coproductos en $\mathscr{C}$ son productos en $\mathscr{C}^{\mathrm{op}}$). $\square$

Ejemplo

En **Set** hay coproductos.

- $A + B = \,? = A \bigsqcup B$ (unión disjunta).

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, hook] \arrow[dr, bend right, "f"'] & A+B \arrow[d, dashed, "{[f,g]}", "\exists!"'] & B \arrow[l, hook'] \arrow[dl, bend left, "g"] \\ & C & \end{tikzcd}$$

$$[f,g](x) = \begin{cases} f(x), & x \in A \\ g(x), & x \in B \end{cases}$$

Observación

La unión disjunta de dos conjuntos A y B se puede construir como

$$A \bigsqcup B := (A \times \{0\}) \cup (B \times \{1\}).$$

Por ejemplo

$$\{x, y, z\} \sqcup \{y, z, u\} = \{(x,0), (y,0), (z,0), (y,1), (z,1), (u,1)\}.$$

(co)Productos arbitrarios

Definición

Si $(A_i)_{i\in I}$ es una familia de objetos indexada por un conjunto I, un **producto** de $(A_i)_{i\in I}$ es un objeto $\prod_{i\in I} A_i$ junto con una familia de morfismos $\pi_j : \prod_{i\in I} A_i \to A_j$, $j \in I$ que tienen la siguiente propiedad universal: para todo objeto C y para toda familia de morfismos $f_i : C \to A_i$, existe un único morfismo

$$\langle f_i \rangle_{i\in I} : C \to \prod_{i\in I} A_i$$

tal que los siguientes diagramas conmutan:

$$\begin{tikzcd} C \arrow[d, dashed, "\exists!\langle f_i\rangle"'] \arrow[dr, "f_i"] & \\ \prod_{i\in I} A_i \arrow[r, "\pi_i"'] & A_i \end{tikzcd}$$

Ejercicio

Definir el coproducto $\bigoplus_{i \in I} A_i$ (aquí hay que considerar "inclusiones" $\iota_i : A_i \to \bigoplus_{i \in I} A_i$, en lugar de "proyecciones").

Ejemplo: $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[dl, bend right, "f \text{ lineal}"'] \arrow[d, "\langle f,g \rangle"] \arrow[dr, bend left, "g \text{ lineal}"] & \\ V & V \times W \arrow[l, "\pi_V"] \arrow[r, "\pi_W"'] & W \end{tikzcd}$$

$$\langle f, g \rangle(u) = (f(u), g(u)) \text{ (lineal)}$$

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, hook] \arrow[dr, bend right, "f"'] & V \times W \arrow[d, dashed, "{[f,g]}"] & W \arrow[l, hook'] \arrow[dl, bend left, "g"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

$$[f, g](v, w) = f(v) + g(w) \text{ (lineal)}$$

$$\boxed{V \oplus W = V \times W}$$

Obs: $V \hookrightarrow V \times W$ se define por $v \mapsto (v, 0)$ (ídem la otra).

Observación/Ejercicio

- Para una familia infinita de índices, $\prod_{i\in I} V_i$ es un producto en $\mathbf{Vect}_{\mathbb{K}}$ pero NO es un coproducto. Si intentáramos repetir el razonamiento anterior tendríamos que utilizar sumas infinitas, lo cual no tiene sentido. Igualmente, se debería dar una demostración formal para ver que falla la propiedad universal.
- ¿Quién sería $\bigoplus_{i\in I} V_i$?

Ejercicio

¿Hay coproductos en **Ab**?

Ejercicio*

¿Hay coproductos en **Grp**?

Ecualizadores

Definición

El **ecualizador** de dos morfismos $f, g : A \to B$ es un morfismo $e : X \to A$ tal que $f \circ e = g \circ e$ y tal que para todo morfismo $e' : X' \to A$ tal que $f \circ e' = g \circ e'$, existe un único $k : X' \to X$ tal que $e \circ k = e'$

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ X' \arrow[u, dashed, "\exists! k"] \arrow[ur, "e'"'] & & \end{tikzcd}$$

Ejemplo/Ejercicio

En **Set**:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, hook, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

- $X = \{a \in A : f(a) = g(a)\}$
- $f(e(a)) = g(e(a))$

Verificar que se cumple la propiedad universal.

Ejercicio

- ecualizador $\implies$ mono
- ecualizador + epi $\implies$ iso

Idea: considerar

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[r, shift left, "f'"] \arrow[r, shift right, "g'"'] & X \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \end{tikzcd}$$

$$e \circ f' = e \circ g' \overset{?}{\implies} f' = g'$$

Ejercicio (cont.)

Pero pensarlo así

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "e"] & A \arrow[r, shift left, "f"] \arrow[r, shift right, "g"'] & B \\ X' \arrow[u, shift left, "f'"] \arrow[u, shift right, "g'"'] \arrow[ur, "e'"'] & & \end{tikzcd}$$

con

$$e' = f \circ e \circ f' = f \circ e \circ g' = g \circ e \circ g' = g \circ e \circ f'$$

Ejercicio*

Definir coecualizador (esto no es difícil) e identificarlo en **Set**.