Práctica 5 Teoría de categorías (continuación)

Funtores

1. Sean $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ dos categorías. Probar que $P_1 \colon \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ tal que $P_1(C,D) = C$ y $P_2 \colon \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ tal que $P_2(C,D) = D$ definen functores.

2. Dado un conjunto X, definimos el conjunto $\mathrm{List}(X)$ de las listas finitas de elementos de X. Probar que $\mathrm{List} \colon \mathtt{Set} \to \mathtt{Set}$ es un funtor. Considerando ahora $\mathrm{List}(X)$ como un monoide, probar que $\mathrm{List} \colon \mathtt{Set} \to \mathtt{Mon}$ es un funtor. Determinar si List preserva productos. **Ayuda:** pensar en cuál monoide es isomorfo $\mathrm{List}(X)$ cuando X es un conjunto con un solo elemento.

3. Se ha visto que puede considerarse a un monoide como una categoría con un único objeto, ¿qué es un funtor entre dos categorías de este tipo? ¿Y entre categorías formadas a partir de conjuntos ordenados?

4. Dados dos funtores $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G \colon \mathcal{D} \to \mathcal{E}$, definir un funtor que componga ambos. ¿Es posible definir una categoría cuyos objetos sean las categorías y sus flechas sean los funtores entre estas?

5. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con productos, coproductos y exponenciales y $A \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$. Probar que las siguientes aplicaciones pueden extenderse con estructura funtorial:

a) $\Delta : \mathcal{C} \to \mathcal{C} \times \mathcal{C}$ tal que $\Delta(B) = (B,B)$.

b) $- \times A \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tal que $(- \times A)(B) = B \times A$.

c) $-^A \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tal que $(-^A)(B) = B^A$.

d) $-^A \times A \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tal que $(-^A \times A)(B) = B^A \times A$.

e) $\prod : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tal que $\prod(B,C) = B \times C$.

f) $\sum : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tal que $\sum(B,C) = B + C$.

g) $A^- \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tal que $(A^-)(B) = A^B$ y es contravariante en los morfismos.

h) $A^{A^-} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ tal que $(A^{A^-})(B) = A^{A^B}$.

6. Sea $\mathcal{C}$ una categoría localmente pequeña, para cada objeto X de $\mathcal{C}$ definimos $\mathtt{Hom}(X,-) \colon \mathcal{C} \to \mathtt{Set}$ donde $\mathtt{Hom}(X,-)(Y) = \mathtt{Hom}(X,Y)$ y $\mathtt{Hom}(X,-)(f) = \mathtt{Hom}(X,f) = \lambda g.f \circ g$. Probar que $\mathtt{Hom}(X,-)$ es efectivamente un funtor para cada X. Definir análogamente un funtor $\mathtt{Hom}(-,X)$.

7. Si $f \colon A \to B$ en $\mathtt{Set}$, entonces definimos $f^{-1}(X) = \{a \in A \colon f(a) \in X\}$ donde $X \subset B$. Probar que $I \colon \mathtt{Set} \to \mathtt{Set}$ es un funtor contravariante, llevando $I(A) = \mathcal{P}(\mathcal{A})$ y $I(f) = f^{-1}$.

8. Dado un semigrupo $(S, .)$, podemos construir un monoide $(S', .')$ donde $S' = S \uplus \{e\}$, $(0,x).'(0,y) = (0,x.y)$, y $(1,e).'x = x = x.'(1,e)$. Utilizando esta construcción, definir un funtor $F \colon \mathtt{Sem} \to \mathtt{Mon}$ y probar que es un monomorfismo en $\mathtt{Cat}$.

9. Probar o refutar: sea $\mathcal{C}$ una categoría con productos, y $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ un functor, entonces siempre existe un único morfismo $F(A \times B) \to FA \times FB$.

10. Sea $U \colon \mathtt{Mon} \to \mathtt{Set}$ el functor que olvida la estructura de monoide. Definimos además $U^2 \colon \mathtt{Mon} \to \mathtt{Set}$ que en objetos actúa llevando $(X, \oplus, e) \mapsto X \times X$. Probar que a U^2 se lo puede dotar de estructura functorial.

Transformaciones naturales

11. Dadas dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, probar que todo funtor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ es naturalmente isomorfomo a sí mismo, es decir, existe una isomorfismo natural $id_F \colon F \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} F$.

12. Considere el funtor $\mathrm{List} : \mathtt{Set} \to \mathtt{Set}$. Mostrar que puede construirse un isomorfismo natural $\mathrm{rev} \colon \mathrm{List} \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} \mathrm{List}$ tal que rev_X es la función que invierte las palabras de $\mathrm{List}(X)$. ¿Se puede hacer lo mismo con el funtor $\mathrm{List} : \mathtt{Set} \to \mathtt{Mon}$?

13. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con productos y exponenciales y $A \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$. Definir una transformación natural $\eta \colon (-^A \times A) \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$.

14. Sea $\mathcal{C}$ una categoría cartesiana cerrada, y A un objeto de la misma. Definir una transformación natural $\eta : Id \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} A^{A^-}$, y probar que efectivamente es una transformación natural. **Ayuda:** puede ser útil probar los siguientes lemas $curry(f) \circ g = curry(f \circ (g \times id))$ y $\mathrm{swap} \circ (h \times i) = (i \times h) \circ \mathrm{swap}$, donde swap es el isomorfismo que conmuta los factores de un producto.

15. Probar o refutar: sea $U : \mathrm{Grp} \to \mathrm{Set}$ el funtor forgetful de grupos, entonces toda transformación natural $\eta : U \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} U$ es un isomorfismo natural.

16. Dadas dos categorías $\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$, mostrar que los funtores de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{D}$ forman una categoría con las transformaciones naturales como flechas. A esta categoría se la nota $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$.

17. Probar que `Cat` es una CCC.

18. Dada una categoría pequeña $\mathcal{C}$, mostrar que las categorías $\mathcal{C}^{\mathbf{2}}$ y $\mathcal{C}^{\to}$ son isomorfas en `Cat`.

Adjunciones

19. Definir una adjunción entre el funtor $\mathrm{List} : \mathtt{Set} \to \mathtt{Mon}$ y el funtor olvido $U : \mathtt{Mon} \to \mathtt{Set}$. Dado un conjunto de símbolos Σ y la función constante $f \colon \Sigma \to U(\mathbb{N}_0)$ tal que $f(x) = 1$, explicitar el morfismo de monoides asociado $\tilde{f} \colon \mathrm{List}(\Sigma) \to \mathbb{N}_0$.

20. Sea $\mathcal{C}$ una categoría con productos. Dar una relación de adjunción entre $\prod$ y $\triangle$. Dar un resultado análogo respecto al functor $\Sigma(X, Y) = X + Y$ cuando C tiene coproductos.

21. Dada una categoría $\mathcal{C}$ y un objeto A de $\mathcal{C}$. Probar que $- \times A \dashv -^A$.

22. Construir la unidad de adjunción a partir de la counidad de adjunción

23. Sea $F \colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ y $G \colon \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ dos funtores ($\mathcal{C}$ y $\mathcal{D}$ localmente pequeñas).

a) Explicar cómo se definen los funtores.

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(-), -) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \to \mathtt{Set}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G(-)) : \mathcal{C}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D} \to \mathtt{Set}$$

b) Probar que F es adjunto a izquierda de G si y solo si $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(-), -)$ es naturalmente isomorfo a $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, G(-))$.

24. Explicar qué es una adjunción en el caso de que las categorías en cuestión sean conjuntos ordenados vistos como categorías.

Mónadas

25. Considere un poset P visto como categoría y un endofuntor $T\colon P \to P$. Probar que si T admite estructura monádica, i.e. transformaciones naturales η y μ tal que los axiomas de mónadas se cumplan, entonces $x \leq T(x)$ y $T(T(x)) = T(x)$ para todo $x \in P$.

26. Considere el endofuntor $T\colon \mathtt{Set} \to \mathtt{Set}$ definido por $T(X) = \mathcal{P}(X)$ y $T(f\colon X \to X')$ es la función que asigna a cada $A \in \mathcal{P}(X)$ el conjunto $f(A) = \{f(a) : a \in A\} \in \mathcal{P}(X')$. Dar estructura monádica a T.

27. Sea $(M, \otimes, e)$ un monoide. Se define el endofunctor $F(X) = M \times X$ sobre $\mathtt{Set}$. Dar estructura monádica a F.

28. Una tupla (M, μ) es una semi-mónada sobre $\mathcal{C}$ cuando $M : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ es un functor, y $\mu : M \circ M \to M$ es una transformación natural tal que $\mu \circ \mu_M = \mu \circ M\mu$. Decimos que una semi-mónada (M, μ) se puede extender via $\eta : \mathrm{id}_{\mathcal{C}} \to M$ a una mónada si la tripla (M, μ, η) es una mónada. Probar que si una semi-mónada (M, μ) admite una extensión a una mónada via η, entonces η es única.

29. Sea **Form** el conjunto de fórmulas de la lógica proposicional. Se ha probado en prácticas anteriores que $\mathcal{P}(\textbf{Form})$ forma un poset, y por ende, se lo puede interpretar como una categoría. Dar un ejemplo de mónada sobre $\mathcal{P}(\textbf{Form})$.

30. Probar que toda adjunción $F \dashv G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ da origen a una mónada para el endofunctor $G \circ F : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$.

31. Probar que toda mónada (M, μ, η) se puede factorizar en $M = G \circ F$ mediante una adjunción $F \dashv G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. **Ayuda:**

a) Definir la *categoría Kleisli* (notada $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}$):

- Sus objetos son los mismos que los de $\mathcal{C}$.
- Por cada morfismo $A \to MB$ en $\mathcal{C}$, hay un morfismo $A \to B$ en $\mathcal{C}_{\mathcal{M}}$.

b) Definir un functor $F : C \to \mathcal{C}_{\mathcal{M}}$ que en los objetos se comporte $FA = A$.

c) Definir un functor $G : \mathcal{C}_{\mathcal{M}} \to \mathcal{C}$ que en los objetos se comporte $GA = MA$.

Lema de Yoneda

32. Enunciar y probar el lema de Yoneda para functores contravariantes.