

Funtores adjuntos

Silvio Reggiani

Complementos de Matemática II (LCC)
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

1 de diciembre de 2020

Adjunciones

Idea: es uno de los conceptos más importantes en teoría de categorías, captura el comportamiento que tienen ciertos pares de funtores destacados.

$$\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{D}$$

(Enseguida veremos ejemplos.)

Hay otras nociones similares que estudiamos anteriormente.

Categorías isomorfas

$$\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{D}$$

$$F \circ G = \text{id}_{\mathcal{D}}$$

(isomorfismo en **Cat**)

$$G \circ F = \text{id}_{\mathcal{C}}$$

Categorías equivalentes

$$\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{D}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{id}_{\mathcal{C}} \xrightarrow{\cdot} G \circ F \\ \text{id}_{\mathcal{D}} \xrightarrow{\cdot} F \circ G \end{array} \right\} \text{isomorfismos naturales}$$

Para tener en cuenta

- ▶ A diferencia de los conceptos anteriores, la noción de adjunción es una relación **entre funtores**, no entre categorías
- ▶ Es un concepto más débil.

Antes de dar una definición formal tratemos de entender qué es una adjunción dando un ejemplo.

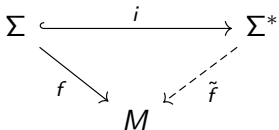
Ejemplo

- ▶ Σ un conjunto (alfabeto)
- ▶ Σ^* monoide libre generado por Σ
 - ▶ producto = concatenación
 - ▶ neutro = " " (palabra vacía)
- ▶ $\Sigma^* \simeq \text{List}(\Sigma)$

Este monoide tiene la siguiente propiedad universal:

Ejemplo (cont.)

- ▶ $i : \Sigma \hookrightarrow \Sigma^*$ (palabras de longitud 1).
- ▶ Para todo monoide M y para toda función $f : \Sigma \rightarrow M$, existe un único morfismo de monoides $\tilde{f} : \Sigma^* \rightarrow M$ tal que $f = \tilde{f} \circ i$.



$$\tilde{f}(a_1 a_2 \cdots a_n) = f(a_1) f(a_2) \cdots f(a_n)$$

- ▶ **ATENCIÓN:** este no es un diagrama de categorías
 - ▶ i, f son flechas en **Set**
 - ▶ \tilde{f} es una flecha en **Mon**
- ▶ ¿Cómo podemos describir esta situación en un lenguaje más categórico?

Ejemplo (cont.)

- $\text{free} : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Mon}$, el funtor “libre” que asigna a cada conjunto Σ el monoide libre Σ^* (y a cada morfismo $f : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ en \mathbf{Set} , el morfismo $\tilde{f} : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_2^*$ en \mathbf{Mon} .
Ejercicio: usar la propiedad universal para explicar cómo se define este morfismo \tilde{f})
- $\text{fgt} : \mathbf{Mon} \rightarrow \mathbf{Set}$ el funtor “olvido”

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{i} & \text{fgt}(\text{free}(\Sigma)) \\ & \searrow f & \swarrow \text{fgt}(\tilde{f}) \\ & \text{fgt}(M) & \end{array}$$

Definición

Una **adjunción** entre dos funtores $\mathcal{C} \xrightleftharpoons[G]{F} \mathcal{D}$ es una transformación natural $\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \rightarrow G \circ F$ tal que para todo $X \in \text{ob } \mathcal{C}$, para todo $Y \in \text{ob } \mathcal{D}$ y para todo $f : X \rightarrow G(Y)$ existe un único morfismo $\tilde{f} : F(X) \rightarrow Y$ tal que el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & G(F(X)) \\ & \searrow f & \swarrow G(\tilde{f}) \\ & G(Y) & \end{array}$$

Nomenclatura (la explicaremos más adelante)

- ▶ F se dice que es un **adjunto a izquierda** de G .
- ▶ G se dice que es un **adjunto a derecha** de F .
- ▶ η es la **unidad de adjunción**.

Observación

En el ejemplo anterior, el funtor $\text{free} : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Mon}$ también lo podemos realizar como

$$\text{List} : \mathbf{Set} \rightarrow \mathbf{Mon}$$

En este caso, el morfismo

$$\eta_{\Sigma} : \Sigma \rightarrow \text{fgt}(\text{List}(\Sigma))$$

está definido por $\eta_{\Sigma}(s) = [s]$, para cada $s \in \Sigma$. Siempre hay que verificar que η es una transformación natural: o sea si $f : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ es una función, entonces el siguiente diagrama conmuta.

$$\begin{array}{ccc} \Sigma_1 & \xrightarrow{\eta_{\Sigma_1}} & \text{fgt}(\text{List}(\Sigma_1)) \\ f \downarrow & & \downarrow \text{fgt}(\text{List}(f)) \\ \Sigma_2 & \xrightarrow{\eta_{\Sigma_2}} & \text{fgt}(\text{List}(\Sigma_2)) \end{array}$$

$$\forall s_1 \in \Sigma_1,$$

$$\begin{aligned}(\text{fgt}(\text{List}(f)) \circ i_1)(s_1) &= \text{fgt}(\text{List}(f))(i_1(s_1)) \\&= \text{fgt}(\text{List}(f))([s_1]) \\&= \text{List}(f)([s_1]) \\&= [f(s_1)] \\&= i_2(f(s_1)) \\&= (i_2 \circ f)(s_1).\end{aligned}$$

Luego

$$\text{fgt}(\text{List}(f)) \circ i_1 = i_2 \circ f.$$

Ejemplo

Consideremos el siguiente caso particular:

► $f : \Sigma \rightarrow \text{fgt}(\mathbb{N}_0),$

$$f \equiv 1 \quad (\text{función constante})$$

- El morfismo de monoides asociado $\tilde{f} : \text{List}(\Sigma) \rightarrow \mathbb{N}_0$ es la función longitud

$\tilde{f} = \text{len}$

$$\begin{array}{ccc} \Sigma & \xrightarrow{\eta_\Sigma} & \text{fgt}(\text{List}(\Sigma)) \\ & \searrow 1 & \swarrow \text{fgt}(\text{len}) \\ & \text{fgt}(\mathbb{N}_0) & \end{array}$$

Co-unidad de adjunción

► Unidad de una adjunción

$$\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{D} \quad \boxed{\eta : \text{id}_{\mathcal{C}} \dashrightarrow G \circ F}$$

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & G(F(X)) \\ & \searrow f & \swarrow (G(\tilde{f})) \\ & G(Y) & \end{array} \quad \exists! \tilde{f} : F(X) \rightarrow Y$$

► Co-unidad de una adjunción

$$\mathcal{C} \begin{array}{c} \xrightarrow{F} \\ \xleftarrow{G} \end{array} \mathcal{D} \quad \boxed{\varepsilon : F \circ G \dashrightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}}$$

$$\begin{array}{ccc} F(G(Y)) & \xrightarrow{\varepsilon_Y} & Y \\ & \nwarrow F(g^*) & \nearrow g \text{ (arbitraria)} \\ & F(X) & \end{array} \quad \exists! g^* : X \rightarrow G(Y)$$

¿Cómo se construyen estas cosas?

- ▶ Debemos definir ε_Y
- ▶ Verificar que es una transformación natural
- ▶ Definir g^*
- ▶ Probar la unicidad

Definición de ε_Y

$$\begin{array}{ccc} G(Y) & \xrightarrow{\eta_{G(Y)}} & G(F(G(Y))) \\ & \searrow \text{id}_{G(Y)} & \swarrow G(\varepsilon_Y) \\ & G(Y) & \end{array} \qquad \begin{array}{c} F(G(Y)) \\ \downarrow \exists! \varepsilon_Y \\ Y \end{array}$$

$\varepsilon : F \circ G \longrightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$ (naturalidad)

Hay que ver que para cada $g : Y \rightarrow Y'$, conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc} F(G(Y)) & \xrightarrow{\varepsilon_Y} & Y \\ F(G(g)) \downarrow & & \downarrow g \\ F(G(Y')) & \xrightarrow{\varepsilon_{Y'}} & Y' \end{array}$$

$$g \circ \varepsilon_Y \stackrel{?}{=} \varepsilon_{Y'} \circ F(G(g))$$

$$\varepsilon : F \circ G \longrightarrow \text{id}_{\mathcal{D}} \text{ (cont.)}$$

Primero notamos que en el siguiente diagrama conmuta

$$\begin{array}{ccccc}
 G(Y) & \xrightarrow{G(g)} & G(Y') & & \\
 \downarrow \text{id}_{G(Y)} & \searrow \eta_{G(Y)} & \downarrow & \searrow \eta_{G(Y')} & \\
 & G(F(G(Y))) & \xrightarrow{G(F(G(g)))} & G(F(G(Y'))) & \\
 \swarrow G(\varepsilon_Y) & \downarrow \text{id}_{G(Y')} & \swarrow G(\varepsilon_{Y'}) & & \\
 G(Y) & \xrightarrow{G(g)} & G(Y') & &
 \end{array}$$

conmutan los triángulos laterales, el rectángulo de atrás y el paralelogramo superior (pues η es una transformación natural). Con lo cual tenemos que,

$$G(\varepsilon_{Y'}) \circ G(F(G(g))) \circ \eta_{G(Y)} = G(g) = G(g) \circ G(\varepsilon_Y) \circ \eta_{G(Y)}$$

$\varepsilon : F \circ G \longrightarrow \text{id}_{\mathcal{D}}$ (cont.)

Así, obtenemos que tanto $G(\varepsilon_{Y'} \circ F(G(g)))$ como $G(g \circ \varepsilon_Y)$ hacen que conmute el diagrama

$$\begin{array}{ccc} G(Y) & \xrightarrow{\eta_{G(Y)}} & G(F(G(Y))) \\ & \searrow G(g) & \swarrow \text{---} \\ & G(Y') & \end{array}$$

y por propiedades de la adjunción sigue que

$$\boxed{\varepsilon_{Y'} \circ F(G(g)) = g \circ \varepsilon_Y}$$

como queríamos probar.

Existencia y unicidad de g^*

Buscamos $g^* : X \rightarrow G(Y)$ tal que conmuta el diagrama

$$\begin{array}{ccc} F(G(Y)) & \xrightarrow{\varepsilon_Y} & Y \\ & \nwarrow F(g^*) \quad \nearrow g & \\ & F(X) & \end{array}$$

Si existe tal g^* , entonces usando la definición de ε_Y y que η es transformación natural, tenemos

$$\begin{aligned} g^* &= \text{id}_{G(Y)} \circ g^* \\ &= G(\varepsilon_Y) \circ \eta_{G(Y)} \circ g^* \\ &= G(\varepsilon_Y) \circ G(F(g^*)) \circ \eta_X \\ &= G(\varepsilon_Y \circ F(g^*)) \circ \eta_X \\ &= G(g) \circ \eta_X \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccc} & X & \\ & \downarrow \eta_X & \\ g^* \swarrow & G(F(X)) & \searrow G(g) \\ & G(Y) & \end{array}$$

Lo cual muestra la existencia y la unicidad.

Ejercicio

Construir la unidad de adjunción a partir de la co-unidad de adjunción (esto ayudará a entender mejor lo que acabamos de hacer).

Observación/Ejercicio (importante)

Una adjunción $\mathcal{C} \xrightleftharpoons[G]{F} \mathcal{D}$ determina un isomorfismo (biyección) de Hom-sets

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(F(X), Y) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, G(Y))$$

que es natural en X e Y . Esto explica la terminología de adjunto a izquierda para F y adjunto a derecha para G .

Notación

$$\frac{X \rightarrow G(Y)}{F(X) \rightarrow Y}$$

A cada $f : X \rightarrow G(Y)$ le corresponde $\tilde{f} : F(X) \rightarrow Y$ y a cada $g : F(X) \rightarrow Y$ le corresponde $g^* : X \rightarrow G(Y)$.

Ejemplo

Consideremos el funtor $G : \mathcal{D} \rightarrow \mathbf{1}$. ¿Tiene G un adjunto a izquierda?

- ▶ $\mathbf{1} : \bullet \rightrightarrows \text{id}_\bullet$
- ▶ $F : \mathbf{1} \rightarrow \mathcal{D} \iff F(\bullet) \in \text{ob } \mathcal{D}$
- ▶ F adjunto a izquierda de G :

$$\begin{array}{ccc} \bullet & \xrightarrow{\quad ! \quad} & G(F(\bullet)) \\ & \searrow \quad ! \quad & \swarrow G(F(\bullet) \rightarrow Y) \\ & G(Y) & \end{array}$$

- ▶ $\exists ! F(\bullet) \rightarrow Y$
- ▶ F es un adjunto a izquierda de $G \iff F(\bullet)$ es un objeto inicial en la categoría \mathcal{D} .

Ejemplo

Consideremos el funtor diagonal $\text{diag} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C} \times \mathcal{C}$

$$\text{diag}(X) = (X, X)$$

$$\text{diag}(f) = (f, f)$$

¿Tiene diag un adjunto a derecha? Debería ser un funtor $G : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ tal que

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X = ???} & G(X, X) & (X, X) \\ & \searrow f & \swarrow G(\tilde{f}) & \downarrow \exists! \tilde{f} \\ & & G(Y_1, Y_2) & (Y_1, Y_2) \end{array}$$

Si $G(Y_1, Y_2) = Y_1 \times Y_2$ puedo definir

$$\tilde{f} = (\pi_1 \circ f) \times (\pi_2 \circ f)$$

$$\eta_X = \langle \text{id}_X, \text{id}_X \rangle : X \rightarrow X \times X$$

Ejemplo (cont.)

- Si \mathcal{C} tiene productos binarios, entonces el funtor producto

$$- \times - : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$$

es un adjunto a izquierda para el funtor diagonal.

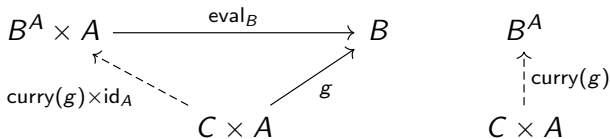
- Co-unit = ???

$$\varepsilon_{(Y_1, Y_2)} : \text{diag}(- \times -(Y_1, Y_2)) \rightarrow (Y_1, Y_2)$$

$$\varepsilon_{(Y_1, Y_2)} : (Y_1 \times Y_2, Y_1 \times Y_2) \rightarrow (Y_1, Y_2)$$

Ejercicio: $\varepsilon_{(Y_1, Y_2)} = (\pi_1, \pi_2)$.

Ejemplo: exponenciales



- Hay una biyección $\text{Hom}(C \times A, B) \rightarrow \text{Hom}(C, B^A)$

$$g \mapsto \text{curry}(g)$$

Ejercicio: esta función es 1-1 y sobre.

- Informal: esto nos da una adjunción

$$\frac{C \rightarrow B^A}{C \times A \rightarrow B}$$

Ejemplo (cont.)

- Formal: fijando un conjunto A , el funtor

$$- \times A : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$$

tiene adjunto a derecha

$$(\)^A : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$$

- Co-unidad de adjunción: $\varepsilon_B = \text{eval}_B$

$$\begin{array}{ccc} B^A \times A & \xrightarrow{\varepsilon_B = \text{eval}_B} & B \\ & \nwarrow \text{curry}(g) \times \text{id}_A & \nearrow g \\ & C \times A & \end{array}$$

$\underbrace{\text{curry}(g)}_{g^*} \times \text{id}_A$

- ¿Unidad de adjunción?

Ejercicio

Una categoría \mathcal{C} con productos binarios tiene exponenciales \iff para cada $A \in \text{ob } \mathcal{C}$ el funtor $- \times A : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ tiene un adjunto a derecha.

Ejemplo

Consideremos las categorías (posets)

► $Int = (\mathbb{Z}, \leq)$

► $Real = (\mathbb{R}, \leq)$

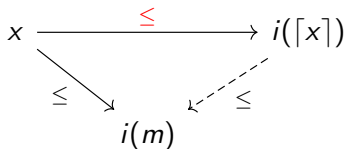
y los funtores

► $i : Int \hookrightarrow Real$

► $\lceil \rceil : Real \rightarrow Int$ (función techo)

$$x \leq y \implies \lceil x \rceil \leq \lceil y \rceil$$

$$x \rightarrow y \implies \lceil x \rceil \rightarrow \lceil y \rceil$$



► $\forall x, x \leq i(\lceil x \rceil)$

► Esto mismo vale para cualquier conexión de Galois (ejercicio).