Mónadas y Yoneda

Silvio Reggiani

Complementos de Matemática II (LCC)
Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura
Universidad Nacional de Rosario

10 de diciembre de 2020

Mónadas

A monad is just a monoid in the category of endofuntors.

Saunders Mac Lane

Categories for the working mathematician

Idea/Ejemplo

Dada una adjunción

$$\mathscr{C} \underset{G}{\overset{F}{\rightleftarrows}} \mathscr{D}$$

¿qué propiedades tiene el endofuntor

$$T = G \circ F : \mathscr{C} \to \mathscr{C}?$$

Tenemos asociadas dos transformaciones naturales:

- $\eta : \mathrm{id}_{\mathscr{C}} \to T$ (unidad de adjunción)
- $\mu : T^2 \to T$ que se define como sigue:
  - $\varepsilon : F \circ G \to \mathrm{id}_{\mathscr{D}}$
  - $\varepsilon_{F(X)} : F(G(F(X))) \to F(X)$
  - $\mu_X := G(\varepsilon_{F(X)}) : \underbrace{G(F(G(F(X))))}_{T^2(X)} \to \underbrace{G(F(X))}_{T(X)}$

Ejercicio

μ es una transformación natural.

Estas dos transformaciones naturales quedan caracterizadas por las siguientes propiedades.

Asociatividad

El siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} T^3 \arrow[r, "T\mu"] \arrow[d, "\mu_T"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\ T^2 \arrow[r, "\mu"] & T \end{tikzcd}$$

En donde

- $(T\mu)_X = T(\mu_X) : T^3(X) \to T^2(X)$
- $(\mu_T)_X = \mu_{T(X)} : T^3(X) \to T^2(X)$

Neutro

El siguiente diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\eta_T"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_T"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] & T \arrow[l, "T\eta"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}_T"] \\ & T & \end{tikzcd}$$

En donde

- $(T\eta)_X = T(\eta_X) : T(X) \to T^2(X)$
- $(\eta_T)_X = \eta_{T(X)} : T(X) \to T^2(X)$

Ejercicio

$T\mu$, μ_T, $T\eta$, η_T son transformaciones naturales. ¿Se puede generalizar?

Demostración.

Veamos la demostración de la asociatividad y dejemos la otra como ejercicio. Debemos ver que para cada X, conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} T(T(T(X))) \arrow[r, "T(\mu_X)"] \arrow[d, "\mu_{T(X)}"'] & T(T(X)) \arrow[d, "\mu_X"] \\ T(T(X)) \arrow[r, "\mu_X"] & T(X) \end{tikzcd}$$

$$\mu_X \circ \mu_{T(X)} \stackrel{?}{=} \mu_X \circ T(\mu_X)$$

O sea, hay que ver que

$$\boxed{G(\varepsilon_{F(X)}) \circ G(\varepsilon_{F(G(F(X)))}) = G(\varepsilon_{F(X)}) \circ G(F(G(\varepsilon_{F(X)})))}$$

Demostración (cont.)

Para ver esto se usa que $\varepsilon : F \circ G \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} \mathrm{id}_{\mathscr{D}}$ es una transformación natural: el diagrama

$$\begin{tikzcd}
F(G(F(G(F(X))))) \arrow[r, "\varepsilon_{F(G(F(X)))}"] \arrow[d, "F(G(\varepsilon_{F(X)}))"'] & F(G(F(X))) \arrow[d, "\varepsilon_{F(X)}"] \\
F(G(F(X))) \arrow[r, "\varepsilon_{F(X)}"] & F(X)
\end{tikzcd}$$

conmuta y luego aplicamos el funtor G. $\square$

Definición

Una **mónada** sobre una categoría $\mathscr{C}$ consiste de un endofuntor $T : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$ y dos transformaciones naturales

- $\eta : \mathrm{id}_{\mathscr{C}} \to T$ (unidad)
- $\mu : T^2 \to T$ (multiplicación)

tales que

$$\mu \circ \mu_T = \mu \circ T\mu, \qquad \mu \circ \eta_T = \mathrm{id}_T = \mu \circ T\eta$$

O sea, los siguientes diagramas son conmutativos.

$$\begin{tikzcd} T^3 \arrow[r, "T\mu"] \arrow[d, "\mu_T"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] \\ T^2 \arrow[r, "\mu"] & T \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} T \arrow[r, "\eta_T"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_T"'] & T^2 \arrow[d, "\mu"] & T \arrow[l, "T\eta"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}_T"] \\ & T & \end{tikzcd}$$

Ejemplo: power set

Consideremos el funtor

- $T : \mathbf{Set} \to \mathbf{Set}$
- $T(X) = \mathcal{P}(X)$
- $T(X \xrightarrow{f} Y) = \mathcal{P}(X) \xrightarrow{\mathcal{P}(f)} \mathcal{P}(Y)$ (aplicar f a cada subconjunto).

Entonces T es una mónada con unidad

$$\eta_A : A \to T(A), \qquad a \mapsto \{a\}$$

y multiplicación

$$\mu_A(\mathcal{P}(\mathcal{P}(A))) \to \mathcal{P}(A), \qquad \mathcal{X} \mapsto \bigcup \mathcal{X}$$

Por ejemplo, si $A = \{a, b, c\}$, $\mathcal{X} = \{\{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, entonces $\mu_A(\mathcal{X}) = \{a, b\}$.

Ejemplo (cont.)

$$
\begin{tikzcd}
T(A) \arrow[r, "\eta_{T(A)}"] \arrow[dr, "\mathrm{id}_{T(A)}"'] & T(T((A))) \arrow[d, "\mu_A"] & T(A) \arrow[l, "T(\eta_A)"'] \arrow[dl, "\mathrm{id}_{T(A)}"] \\
 & T(A) &
\end{tikzcd}
$$

- $T(\eta_A) : \{a, b, c, \ldots\} \mapsto \{\{a\}, \{b\}, \{c\}, \ldots\}$
- $\eta_{T(A)} : \{a, b, c, \ldots\} \mapsto \{\{a, b, c, \ldots\}\}$
- $\mu_A \circ T(\eta_A) : \{a, b, c, \ldots\} \mapsto \{a, b, c, \ldots\}$
- $\mu_A \circ \eta_{T(A)} : \{a, b, c, \ldots\} \mapsto \{a, b, c, \ldots\}$ ✓

Ejemplo (cont.)

Verificar como ejercicio que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd} T(T(T(A))) \arrow[r, "T(\mu_A)"] \arrow[d, "\mu_{T(A)}"'] & T(T(A)) \arrow[d, "\mu_A"] \\ T(T(A)) \arrow[r, "\mu_A"] & T(A) \end{tikzcd}$$

Pregunta

¿Proviene esta mónada de una adjunción?

Respuesta

Sí, pensar como ejercicio cuál sería una adjunción para esta mónada.

Comentario

Toda mónada proviene de adjunción. Más aún dada una mónada

$$(T, \eta, \mu), \qquad T : \mathscr{C} \to \mathscr{C}$$

Uno puede formar la categoría $\mathbf{Adj}(\mathscr{C}, T)$ de todas las adjunciones F, G tales que

$$(T, \eta, \mu) = (G \circ F, \eta, G\varepsilon F)$$

en donde η y ε son la unidad y co-unidad de la adjunción, respectivamente. La categoría $\mathbf{Adj}(\mathscr{C}, T)$ tiene

- objeto inicial: categoría de Kleisli
- objeto terminal: categoría de Eilenberg-Moore

Yoneda Lemma

Idea

La filosofía del lema de Yoneda proviene de una rama de la matemática que se llama “teoría de representaciones”. Rápidamente hablando, la teoría de representaciones propone que para estudiar objetos abstractos y complicados uno trate de “representarlos” como simetrías de un objeto “más sencillo”.

Ejemplo 1

Si G grupo, estudiamos los morfismos

$$G \to GL(n, \mathbb{R})$$

O sea, representamos a G con matrices (transformaciones lineales en $\mathbb{R}^n$).

Ejemplo 2: Teorema de Cayley

Si G es un grupo finito, existe n tal que

$$G \hookrightarrow S_n$$

O sea, representamos a G por permutaciones de n elementos.

Idea

Esta idea aplicada a teoría de categorías nos dice que para entender mejor una categoría $\mathscr{C}$ uno puede tratar de representarla en una categoría más sencilla. Una categoría ideal para representar a $\mathscr{C}$ es la categoría **Set**. O sea, lo que tendríamos que estudiar son los funtores de $\mathscr{C}$ en **Set**.

Ingredientes

- Los funtores de $\mathscr{C}$ en **Set** forman una categoría: $\mathbf{Set}^{\mathscr{C}}$ (los morfismos de esta categoría son las transformaciones naturales).
- Si $\mathscr{C}$ es una categoría localmente pequeña, para cada objeto A de $\mathscr{C}$ tenemos definido un funtor Hom covariante

$$h^A : \mathscr{C} \to \mathbf{Set}$$
$$h^A(X) = \mathrm{Hom}(A, X)$$
$$h^A(f : X \to X') = \mathrm{Hom}(A, f) \qquad \boxed{h^A(f)(g) = f \circ g}$$

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "g"'] \arrow[dr, "f\circ g"] & \\ X \arrow[rr, "f"'] & & X' \end{tikzcd} \qquad h^A(f) : \underbrace{\mathrm{Hom}(A, X)}_{\ni g} \to \underbrace{\mathrm{Hom}(A, X')}_{\ni f\circ g}$$

Hom contravariante

$h_A : \mathscr{C} \to \mathbf{Set}$ (funtor contravariante)

$h_A(X) = \mathrm{Hom}(X, A)$

$h_A(f : X \to X') = \mathrm{Hom}(f, A)$

$$\boxed{h_A(f)(g) = g \circ f}$$

$$\begin{tikzcd} & A & \\ X \arrow[ur, "g\circ f"] \arrow[rr, "f"'] & & X' \arrow[ul, "g"'] \end{tikzcd}$$

$$h_A(f) : \underbrace{\mathrm{Hom}(X', A)}_{\ni g} \to \underbrace{\mathrm{Hom}(X, A)}_{\ni g\circ f}$$

Lema (Yoneda)

Sean $\mathscr{C}$ una categoría localmente pequeña, A un objeto de $\mathscr{C}$ y $F : \mathscr{C} \to \mathbf{Set}$ un funtor (covariante) arbitrario. Entonces, las transformaciones naturales de h^A en F están en correspondencia biyectiva con los elementos de $F(A)$:

$$\mathrm{Nat}(h^A, F) \simeq F(A).$$

Más aún, este isomorfismo es natural en A y F si pensamos a $\mathrm{Nat}(h^A, F)$ y $F(A)$ como funtores de $\mathscr{C} \times \mathbf{Set}^{\mathscr{C}} \to \mathbf{Set}$.

Observación 1: el funtor $F(A)$

- $\mathbb{F} : \mathscr{C} \times \mathbf{Set}^{\mathscr{C}} \to \mathbf{Set}$
- $\mathbb{F}(A, F) := F(A)$
- Para $f : A \to A'$ y $\eta : F \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} F'$,

$$\mathbb{F}(f, \eta) : F(A) \to F'(A')$$

se define por

$$\mathbb{F}(f, \eta) = F'(f) \circ \eta_A = \eta_{A'} \circ F(f)$$

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "\eta_A"] \arrow[d, "F(f)"'] \arrow[dr, dashed, "\mathbb{F}(f,\eta)"] & F'(A) \arrow[d, "F'(f)"] \\
F(A') \arrow[r, "\eta_{A'}"'] & F'(A')
\end{tikzcd}$$

Observación 2: el funtor $\mathrm{Nat}(h^A, F)$

- $\mathbb{G} : \mathscr{C} \times \mathbf{Set}^{\mathscr{C}} \to \mathbf{Set}$
- $\mathbb{G}(A, F) = \mathrm{Nat}(h^A, F)$
- Para $f : A \to A'$ y $\eta : F \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} F'$,

$$\mathbb{G}(f, \eta) : \mathrm{Nat}(h^A, F) \to \mathrm{Nat}(h^{A'}, F')$$

se define en cada $\mu : h^A \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} F$, por

$$\mathbb{G}(f, \eta)(\mu) = \tilde{\mu} : h^{A'} \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} F'$$
$$\tilde{\mu}_X = \eta_X \circ \mu_X \circ h_X(f)$$

$$\begin{tikzcd}
h^A(X) \arrow[r, "\mu_X"] & F(X) \arrow[d, "\eta_X"] \\
h^{A'}(X) \arrow[u, "h_X(f)"] \arrow[r, dashed, "\tilde{\mu}_X"'] & F'(X)
\end{tikzcd}$$

Demostración del Lema de Yoneda.

- Cada $\mu \in \mathrm{Nat}(h^A, F)$ queda completamente determinada por el elemento $\mu_A(\mathrm{id}_A) \in F(A)$.
- En efecto, dada $f \in h^A(X) = \mathrm{Hom}(A, X)$, calculamos

$$\mu_X(f) = \mu_X(f \circ \mathrm{id}_A) = \mu_X(h^A(f)(\mathrm{id}_A)) = F(f)(\mu_A(\mathrm{id}_A))$$

$$\begin{tikzcd}
h^A(A) \arrow[r, "\mu_A"] \arrow[d, "h^A(f)"'] & F(A) \arrow[d, "F(f)"] \\
h^A(X) \arrow[r, "\mu_X"] & F(X)
\end{tikzcd}$$

- Recíprocamente, cada elemento en $F(A)$ determina una transformación natural $\mu : h^A \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} F$ de esta misma forma. $\square$

Ejercicio: Lema de Yoneda contravariante

Probar que para cada funtor contravariante $G : \mathscr{C} \to \mathbf{Set}$ existe una correspondencia biyectiva

$$\mathrm{Nat}(h_A, G) \simeq G(A).$$

Más aún, este isomorfismo es natural en A y G.

Yoneda embedding

- Si aplicamos el Lema de Yoneda para el caso en que $F = h^B$ es otro funtor Hom nos queda un isomorfismo

$$\mathrm{Nat}(h^A, h^B) \simeq h^B(A) = \mathrm{Hom}(B, A)$$

que es natural en A y B.

- Dicho de otro modo, lo que tenemos es un funtor covariante

$$h^- : \mathscr{C}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Set}^{\mathscr{C}}$$

de la categoría opuesta de $\mathscr{C}$ en la categoría de funtores de $\mathscr{C}$ en **Set** que es *fully faithful* (biyectivo en morfismos).

- La versión contravariante del Lema de Yoneda nos da el llamado **embedding de Yoneda**

$$h_- : \mathscr{C} \to \mathbf{Set}^{\mathscr{C}^{\mathrm{op}}}$$

Otra vez el teorema de Cayley

- Un grupo G se puede presentar como una categoría $\mathscr{G}$:
  - $\operatorname{ob}\mathscr{G} = \{\bullet\}$
  - $\operatorname{mor}\mathscr{G} = \operatorname{Hom}(\bullet, \bullet) = h^\bullet(\bullet) = G$
- El lema de Yoneda dice que $\operatorname{Nat}(h^\bullet, h^\bullet) \simeq h^\bullet(\bullet) = G$.
- Un elemento $\eta \in \operatorname{Nat}(h^\bullet, h^\bullet)$, o sea una transformación natural $\eta : h^\bullet \stackrel{\cdot}{\longrightarrow} h^\bullet$ es esencialmente una **función equivariante** de G en G.

$$\begin{tikzcd}
h^\bullet(\bullet) = G \arrow[r, "\eta_\bullet"] \arrow[d, "h^\bullet(g) = g\times -"'] & G = h^\bullet(\bullet) \arrow[d, "h^\bullet(g) = g\times -"] \\
h^\bullet(\bullet) = G \arrow[r, "\eta_\bullet"'] & G = h^\bullet(\bullet)
\end{tikzcd}
\qquad
\boxed{\eta_\bullet(gx) = g\eta_\bullet(x)}$$

- **Ejercicio:** las funciones equivariantes son biyectivas.
- Luego, G es isomorfo a un subgrupo de permutaciones (funciones biyectivas) de G.