Lógica Borrosa

Introducción

IAA – LCC

bulacio@cifasis-conicet.gov.ar

Ejemplo- Supongamos que:

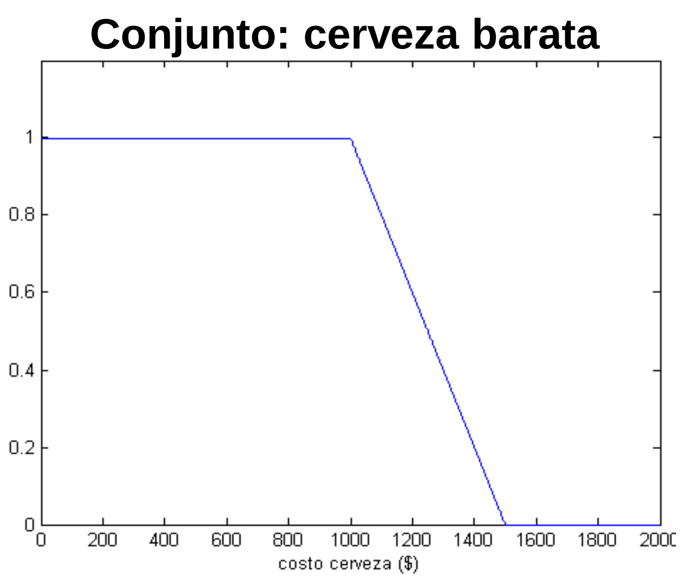
- Unas personas desean ir a tomar cerveza que sea **barata**, y
- en un local **tradicional**, y
- que el local quede **cerca** de su casa

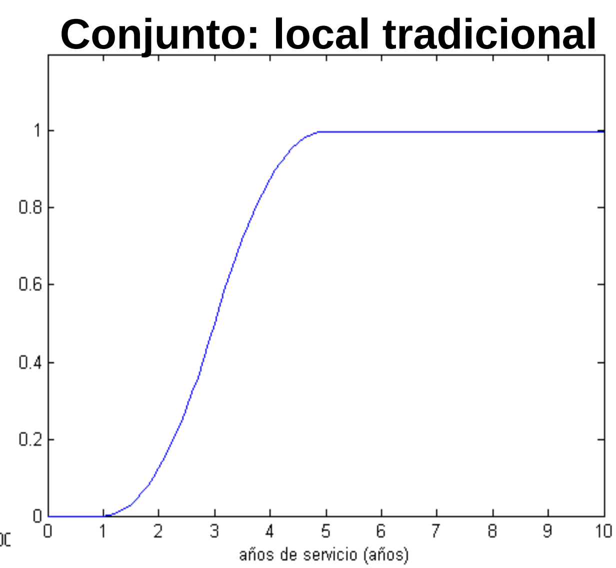
Se dispone de 4 lugares conocidos

Podemos distinguir tres conjuntos difusos

1) Cerveza barata
2) Local tradicional
3) Cercanía de su casa

- Una **cerveza barata** es una que cueste alrededor de $1000 o menos
- Un **local tradicional** es un local que al menos tenga 5 años funcionando.
- Que **quede cerca** de su casa es que no quede a más de 10 cuadras





Características de los locales

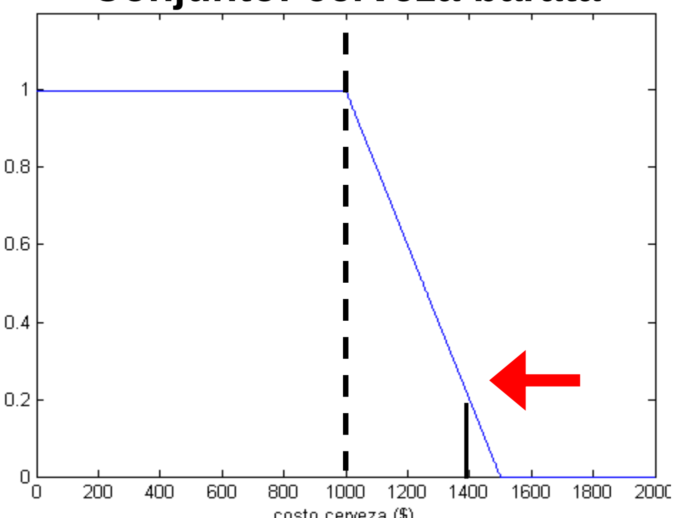
	Precio Cerveza ($)	Años de servicio (años)	Cuadras
Local 1	1400	3	3
Local 2	800	7	12
Local 3	1000	4	9
Local 4	1250	5	10

	Precio Cerveza ($)	**Años de servicio**	**Cuadras**	**Solución clásica**
Local 1	0	0	1	
Local 2				
Local 3				
Local 4				

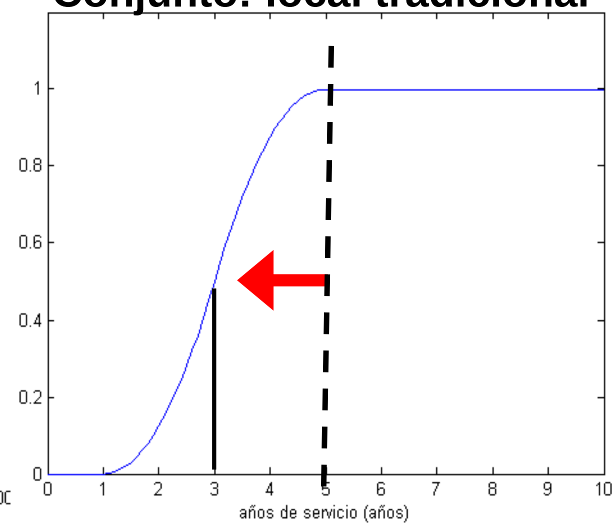
	Precio Cerveza ($)	**Años de servicio**	**Cuadras**	**Solución difusa**
Local 1	0,2	0,5	1	
Local 2				
Local 3				
Local 4				

T-norm

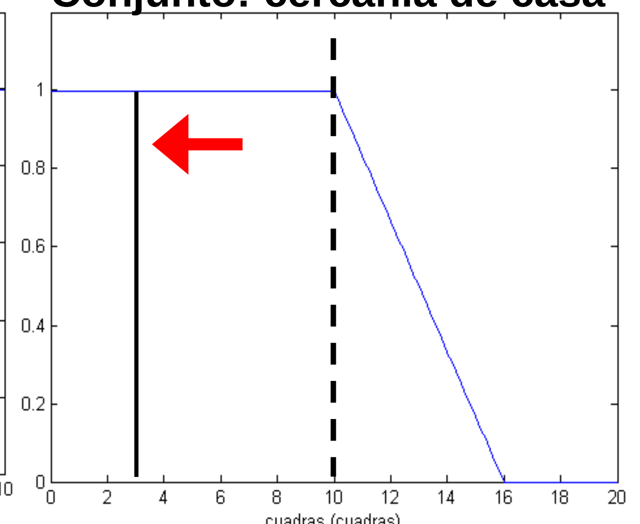
Conjunto: cerveza barata



Conjunto: local tradicional



Conjunto: cercanía de casa



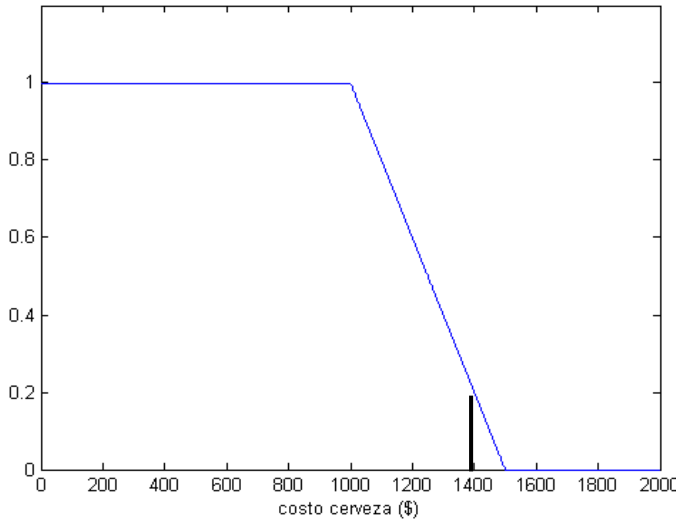
Características de los locales

	Precio Cerveza ($)	Años de servicio (años)	Cuadras
Local 1	1400	3	3
Local 2	800	7	12
Local 3	1000	4	9
Local 4	1250	5	10

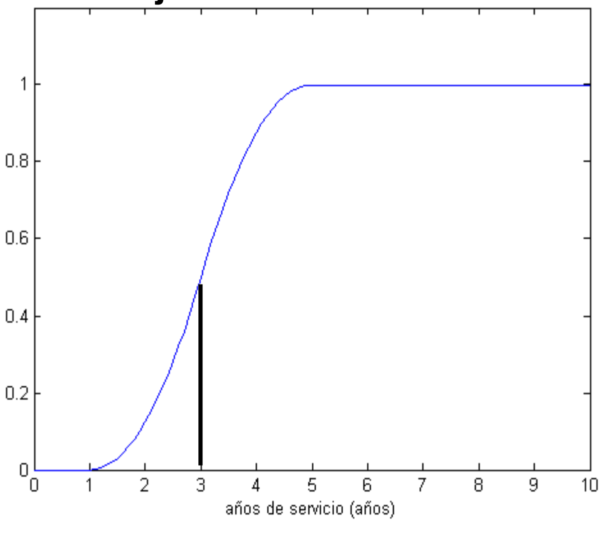
	Precio Cerveza ($)	**Años de servicio**	**Cuadras**	**Solución clásica**
Local 1	0	0	1	
Local 2	1	1	0	
Local 3	1	0	1	
Local 4	0	1	1	

	Precio Cerveza ($)	**Años de servicio**	**Cuadras**	**Solución difusa**
Local 1	0,2	0,5	1	
Local 2	1	1	0,6667	
Local 3	1	0,875	1	
Local 4	0,5	1	1	

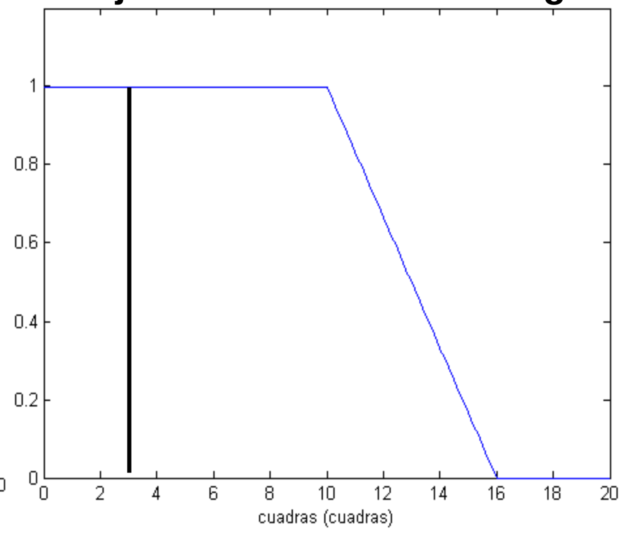
Conjunto: cerveza barata



Conjunto: local tradicional



Conjunto: cercanía de su hogar



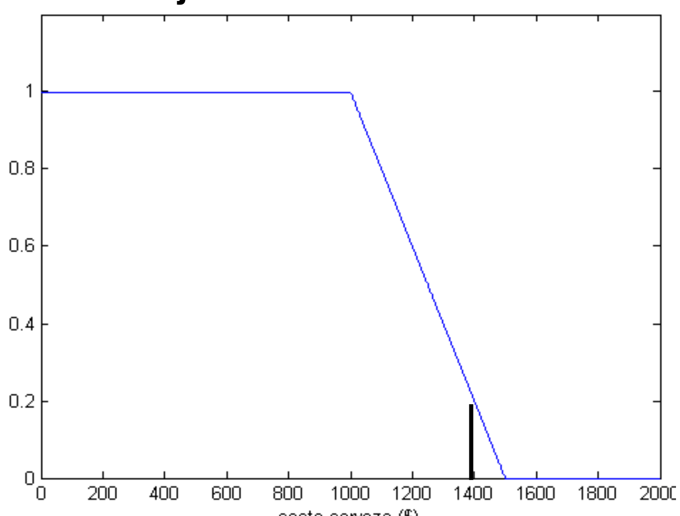
	Precio Cerveza ($)	Años de servicio (años)	Cuadras
Local 1	1400	3	3
Local 2	800	7	12
Local 3	1000	4	9
Local 4	1250	5	10

	Precio Cerveza ($)	**Años de servicio**	**Cuadras**	**Solución clásica**
Local 1	0	0	1	0
Local 2	1	1	0	0
Local 3	1	0	1	0
Local 4	0	1	1	0

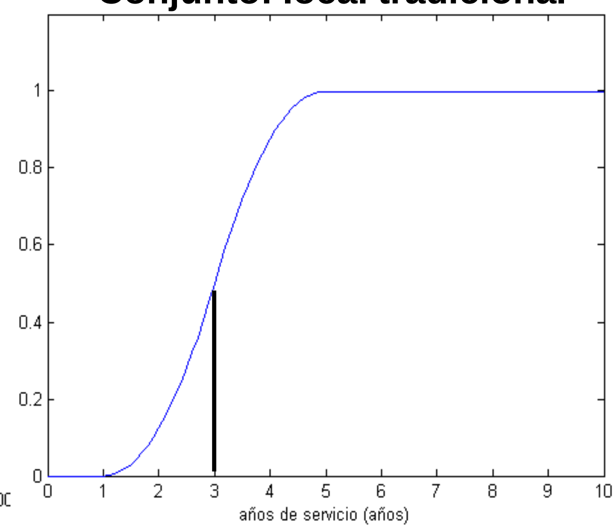
	Precio Cerveza ($)	**Años de servicio**	**Cuadras**	**Solución difusa**
Local 1	0,2	0,5	1	0,2
Local 2	1	1	0,6667	0,6667
Local 3	1	0,875	1	**0,875**
Local 4	0,5	1	1	0,5

T-norm

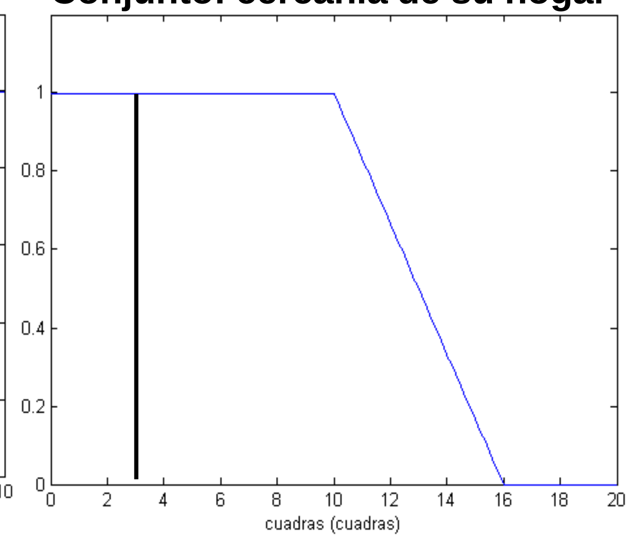
Conjunto: cerveza barata



Conjunto: local tradicional



Conjunto: cercanía de su hogar



Ejemplo

- Mediante la solución clásica los individuos no encuentra un local

- Mediante la solución difusa deducimos que posiblemente irán al Local 3.

Razonamiento borroso

Implicancia

Razonamiento

La lógica borrosa trata con proposiciones borrosas que asignan valores a variables lingüísticas.

P. Ej.:

1. Para la **variable lingüística "<u>estatura</u>", el valor "<u>estatura es alta</u>"** es un conjunto difuso A definido sobre el universo de discurso de la variable lingüística.
2. Para la **variable lingüística "<u>peso</u>", el valor "peso elevado",** se define en el universo de discurso de dicha variable lingüística.

Variable lingüística

- Una variable linguística es caracterizada por una quíntupla

$$\left(x, T(x), X, G, M\right)$$

- Donde

x: Variable base (nombre de la variable)

T(x): Conjunto de términos lingüísticos de *x* que refieren a la variable base

X: Conjunto universo

G: Es una regla sintáctica (gramática) para generar términos lingüísticos

M: Es una regla semántica que asigna a cada término un significado

Ej. De variable lingüística

- La **velocidad** puede ser interpretada como una variable lingüística
- T(velocidad) podría ser

T(velocidad)={lento, moderado, rápido, muy lento, mas o menos rápido, ...}

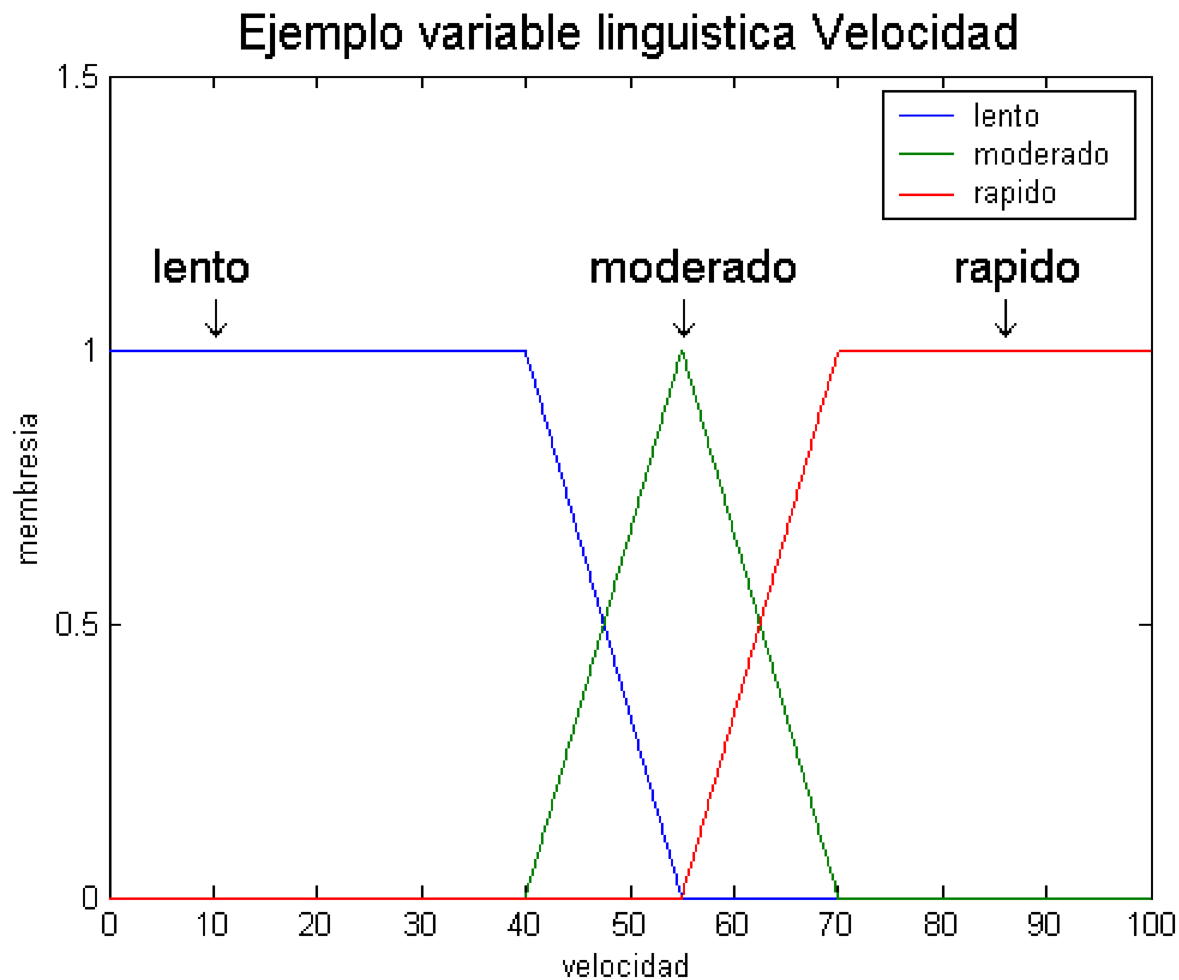
- Cada término es caracterizado por un número difuso definido sobre un conjunto universal X=[0,100]
- Podemos interpretar las etiquetas

Lento como "una velocidad menor a 40 Km/h"

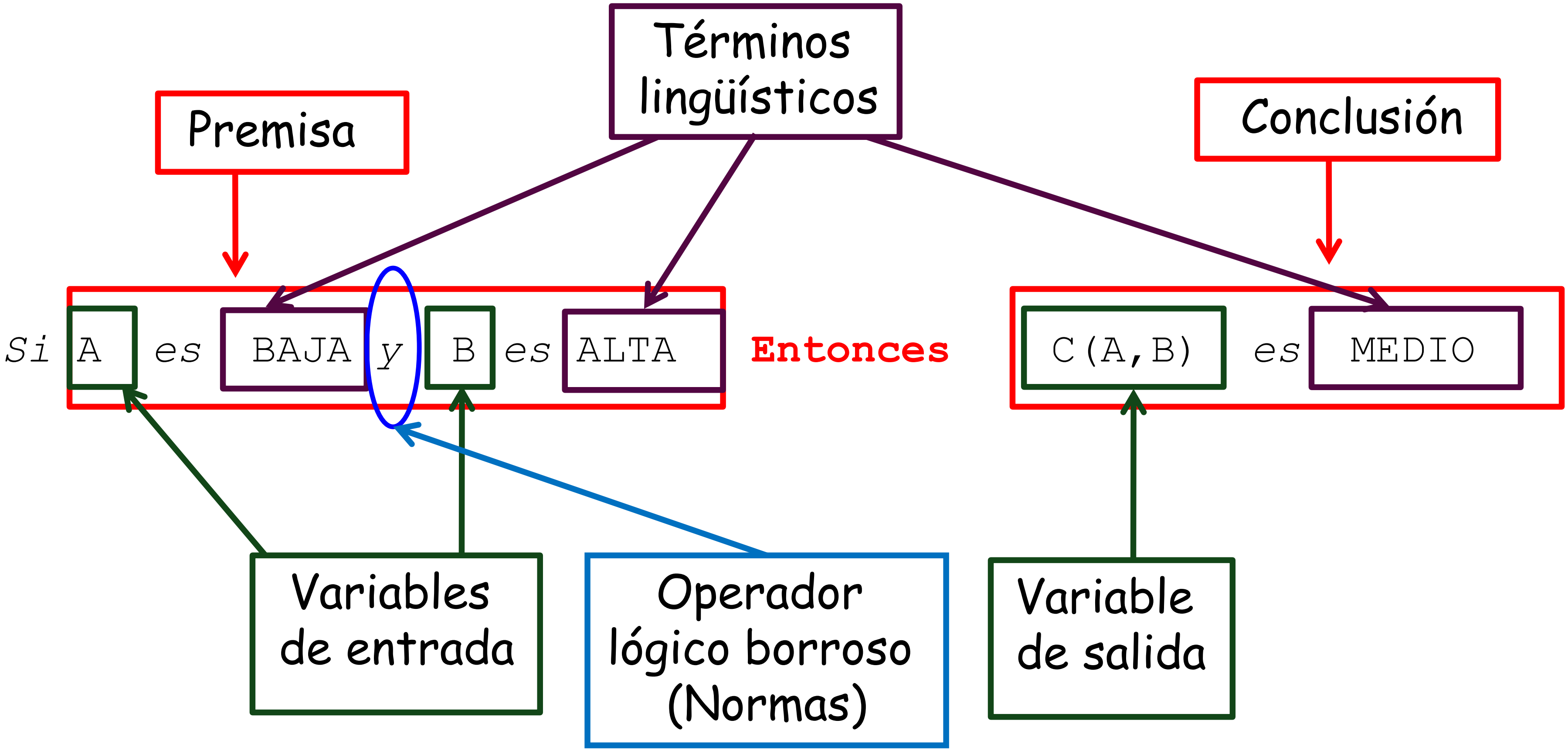
Moderado como "una velocidad cercana a 55 Km/h"

Rápido como "una velocidad alrededor de 70 Km/h"

Ej. De variable lingüística



Conocimiento: representación en reglas borrosas



Implicaciones

- Definir una implicación es asignar una **función de pertenencia** a una agrupación antecedente-consecuente del tipo **P→Q**

- Nos permite **razonar** con afirmaciones tales como:

SI "la velocidad es *normal*" ENTONCES "la fuerza de frenado debe ser *moderada*"

Implicaciones

- Modus Ponens Clásico

Premisa	Si P entonces Q
Hecho	P
Consecuencia	Q

- Modus Ponens Generalizado (GMP)

Premisa	Si P entonces Q
Hecho	P*
Consecuencia	Q*

Implicaciones

Opciones para definir:

- Teórica: Darle el mismo significado de **lógica clásica**.

$$P \rightarrow Q \equiv \neg P \vee Q \qquad \mu_{p\rightarrow q}(u,v) = \max(1-\mu_p(u), \mu_q(v))$$

$$P \rightarrow Q \equiv \neg(P \wedge (\neg Q)) \qquad \mu_{p\rightarrow q}(u,v) = 1 - \min[\mu_p(u), 1-\mu_q(v)]$$

- Práctica: Darle un significado **causa-efecto.**

Implicación de Mamdani

$$P \rightarrow Q \equiv P \wedge Q \Rightarrow \mu_{p\rightarrow q}(u,v) = \min(\mu_p(u), \mu_q(v))$$

Implicaciones

- Implicaciones usuales:

Nombre	Fórmula
Zadeh	Max(1-p, Min(p,q))
Min (de Mamdani)	Min(p,q)
Luckasiewicz	Min(1, 1-p+q)
Larsen	p x q

- Luckasiewicz, que se deduce de la regla:
  - $P \rightarrow Q = \neg P \vee Q$
  - $\mu_{(P \rightarrow Q)}(x,y) = \mu_{(\neg P \vee Q)}(x,y) = \mathrm{Min}(1, \mu_{\neg P}(x) + \mu_Q(y)) = \mathrm{Min}(1, 1-\mu_P(x) + \mu_Q(y))$
- Luckasiewicz y Zadeh son compatibles con la lógica clásica. Los de Mamdani y de Larse no son compatibles con la lógica clásica:

p	q	Zadeh	Mamdani	Luckas.	Larsen
1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	1	0
0	0	1	0	1	0

Implicaciones

- Mamdani y de Larsen **no** son compatibles con la lógica clásica. ¿Por qué se usan?
  - Para modelos causales donde las *consecuencias* **sólo** se dan por la aparición de las *causas* => es falsa la implicación **antecedente es falso** y el **consecuente verdadero**.
  - Para **hacer un modelo «implicador» como relación de causa-efecto:**

en ingeniería es falso que "falso→ verdadero",
es falso $P \rightarrow Q = \neg P \vee Q$

Razonamiento aproximado

- Con lo visto podemos determinar las distribuciones de posibilidad de la regla según el hecho:
  - Regla: $\mu_{(P \rightarrow Q)}(x,y)$
  - Hecho: $\mu_{P*}(x)$

- Pero todavía no podemos definir la conclusión, $\mu_{Q*}(x)$, ya que para ello necesitamos componer Regla y Hecho.

- La inferencia difusa de la implicación está basada en la regla composicional de inferencia

Regla composicional de inferencia

Premisa:	Si ***u*** está en **P** **entonces** ***v*** está en **Q**
Hecho:	*u'* está P*
Consecuencia:	*v'* está Q*

Donde Q* está determinado por la composición

$$Q^* = P^* \circ \underbrace{(P \rightarrow Q)}_{\textit{matriz asociativa}\ \mathrm{M}}$$

Composición M

- Con $M_{[nxq]}$ obtenida de $P \rightarrow Q$, la inferencia difusa permite a partir de P* (subconjunto de P), inducir un subconjunto Q* de Q.

- Siendo $P=(p_1, \ldots, p_n)$ y $Q=(q_1,\ldots,q_q)$

$$M = \mu_{PxQ} = \begin{vmatrix} p_1 \rightarrow q_1 & \ldots & p_1 \rightarrow q_q \\ & & \\ p_i \rightarrow q_1 & & \\ p_n \rightarrow q_1 & \ldots & p_n \rightarrow q_q \end{vmatrix}$$

con $\mathbf{p_i \rightarrow q_j = m_{ij} = min(p_i ,q_j)}$

Regla composicional

- En casos prácticos se utiliza la composición max-T-norma

$$Q^* = P^* \circ (P \rightarrow Q)$$

- Sean dos conjuntos P y Q definidos en U y V resp.

$$Q^*(v) = \max_{u \in U} \{T[P^*(u), (P \rightarrow Q)(u,v)]\}, v \in V$$

T: si existe un solo camino de conexión entre Pi* y (P→Q)ij, tomamos "el menor", tramo más débil.
max: si existe más de un camino de conexión, es análogo a "si existe al menos un camino" de relaciones binarias.

$$Q^*(v) = \max_{u \in U} \{T[P^*(u), (P \to Q)(u,v)]\}, v \in V$$

- Teniendo a $P^*=(p_{1^*}, \ldots, p_{n^*})$ y $M = \mu_{P \times Q}$

$$Q^* = P^* \circ (P \to Q) = \left.\left|\begin{array}{c} \overbrace{\begin{array}{ll} T(p_{1^*;}\, p_1 \to q_1) \ldots & \ldots T(p_{1^*;}\, p_1 \to q_q) \end{array}}^{Q} \\ \begin{array}{ll} T(p_{i^*;}\, p_i \to q_1) \ \ldots & \ldots \end{array} \\ \begin{array}{ll} T(p_{n^*;}\, p_n \to q_1 \ \ldots & \ldots T(p_{n^*;}\, p_n \to q_q) \end{array} \end{array}\right|\right\} P$$

$$\max$$

$$Q^* = q_{1^*;\ldots} \quad \ldots q_{q^*}$$

Inferencia borrosa: Mamdani max-min

1. Entrada: valores crisp; una regla
2. Entrada: valores crisp, varias reglas
3. Entrada: una lectura borrosa

1. Inferencia max-min
(valores crisp; una regla; forma gráfica)

- **REGLA: IF A THEN B**
- **Cuando A* tiene un solo valor de pertenencia distinto de 0, p. ej., x_k se puede utilizar solo $\mu_A(x_k)$ directamente con la representación de B, $\mu_B(y)$ para inducir B* como**
  - **$B^* = \mu_A(x_k) \wedge \mu_B(y)$**

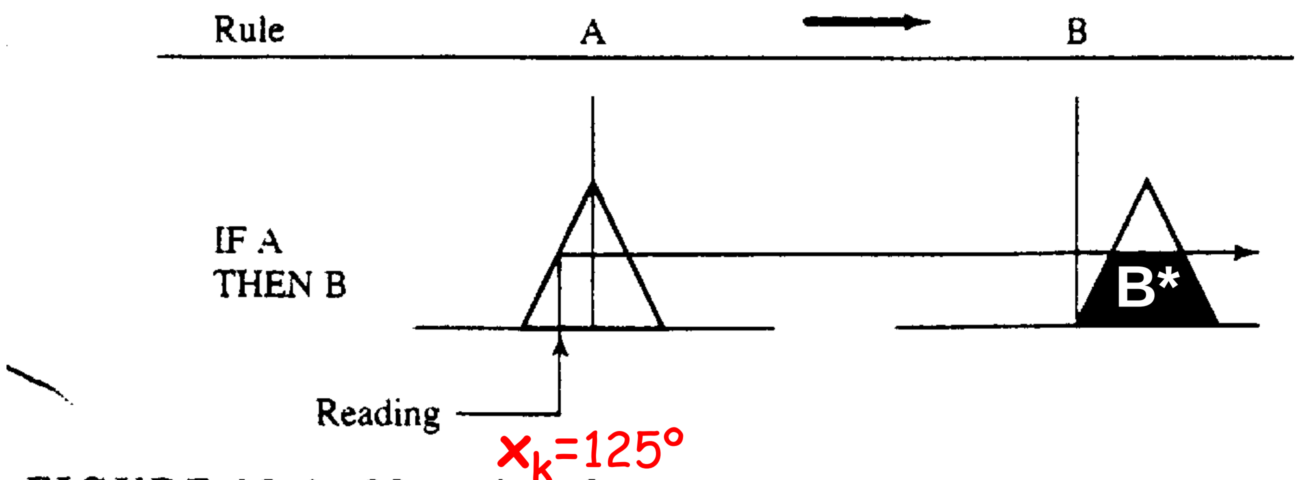


FIGURE 13.4 Max-min inference.

1. Ejemplo: Inferencia max-T
(valores crisp; una regla, forma analítica)

IF Temperature is normal THEN Velocity is medium

IF A THEN B

Normal temperature = (0/100, .5/125, 1/150, .5/175, 0/200)

Medium velocity = (0/10, .6/20, 1/30, .6/40, 0/50)

Obtener el resultado con la regla composicional

Normal temperature = (0/100, .5/125, 1/150, .5/175, 0/200)

Medium velocity = (0/10, .6/20, 1/30, .6/40, 0/50)

$$M = m_{ij} = \min(a_i, b_j)$$

$$M \quad \begin{array}{c} 100 \\ 125 \\ 150 \\ 175 \\ 200 \end{array} \left| \begin{array}{ccccc} \min(0., 0.) & \min(0., .6) & \min(0., 1.) & \min(0., .6) & \min(0., 0.) \\ \min(.5, 0.) & \min(.5, .6) & \min(.5, 1.) & \min(.5, .6) & \min(.5, 0.) \\ \min(1., 0.) & \min(1., .6) & \min(1., 1.) & \min(1., .6) & \min(1., 0.) \\ \min(.5, 0.) & \min(.5, .6) & \min(.5, 1.) & \min(.5, .6) & \min(.5, 0.) \\ \min(0., 0.) & \min(0., .6) & \min(0., 1.) & \min(0., .6) & \min(0., 0.) \end{array} \right|$$

$$= \left| \begin{array}{ccccc} 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0. \\ 0. & 0.6 & 1. & 0.6 & 0. \\ 0. & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \end{array} \right|$$

$$A' = (0/100, .5/125, 0/150, 0/175, 0/200)$$

$$M = \begin{vmatrix} 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \\ 0. & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0. \\ 0. & 0.6 & 1. & 0.6 & 0. \\ 0. & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0. \\ 0. & 0. & 0. & 0. & 0. \end{vmatrix}$$

$$A' = (0/100,\ .5/125,\ 0/150,\ 0/175,\ 0/200)$$

$$b'_j = \max_{1 \le i \le n}\{\min(a'_i, m_{ij})\}$$

$$b_1 = \max[\min(0., 0.), \min(.5, 0.), \min(0., 0.), \min(0., 0.), \min(0., 0.)]$$

$$b_2 = \max[\min(0., 0.), \min(.5, .5), \min(0., .6), \min(0., .5), \min(0., 0.)]$$

$$b_3 = \max[\min(0., 0.), \min(.5, .5), \min(0., 1.), \min(0., .5), \min(0., 0.)]$$

$$b_4 = \max[\min(0., 0.), \min(.5, .5), \min(0., .6), \min(0., .5), \min(0., 0.)]$$

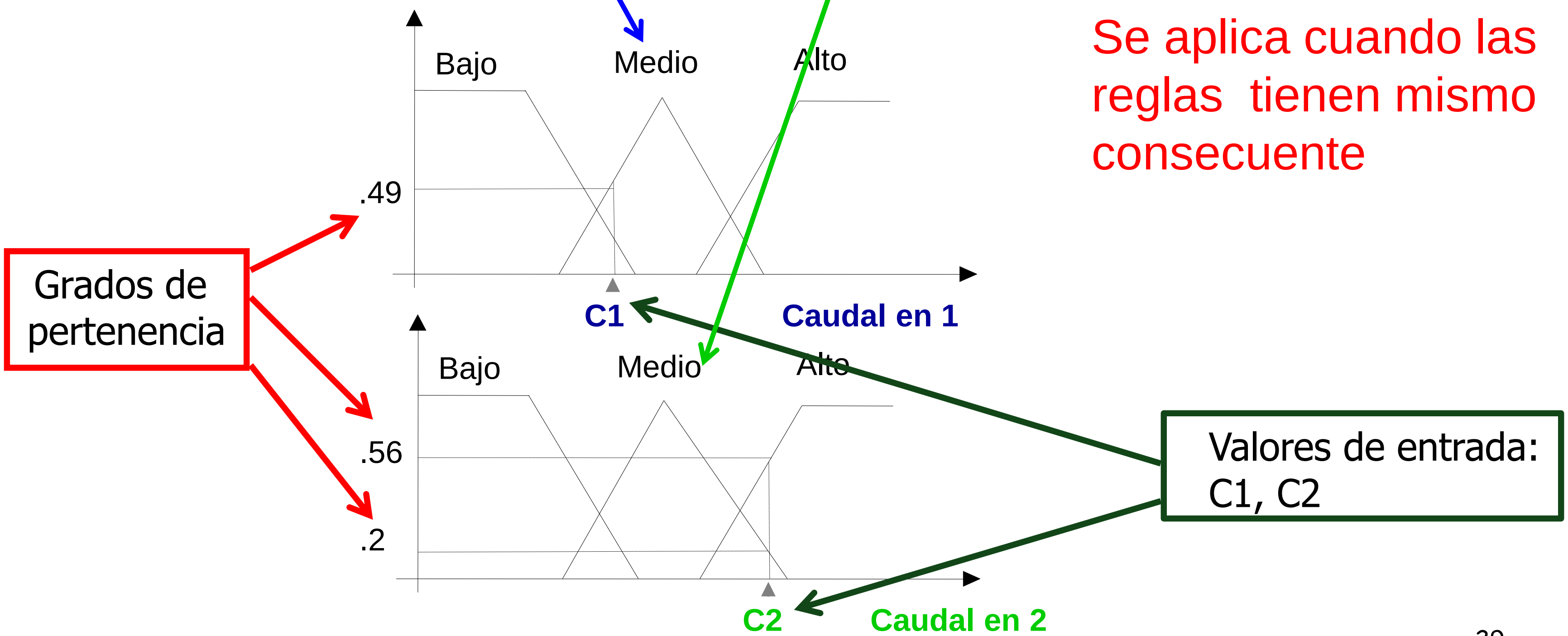
$$b_5 = \max[\min(0., 0.), \min(.5, 0.), \min(0., 0.), \min(0., 0.), \min(0., 0.)]$$

$$B' = (0/10,\ .5/20,\ .5/30,\ .5/40,\ 0/50)$$

2. Inferencia max-min: valores crisp, varias reglas

Regla 1: *Si* caudal 1 *es* medio *y* caudal 2 *es* medio *entonces* **nivel 3** *es* medio

Regla 2: *Si* caudal 1 *es* medio *y* caudal 2 *es* alto *entonces* **nivel 3** *es* alto



Se aplica cuando las reglas tienen mismo consecuente

2. Inferencia max-min: valores crisp, varias reglas

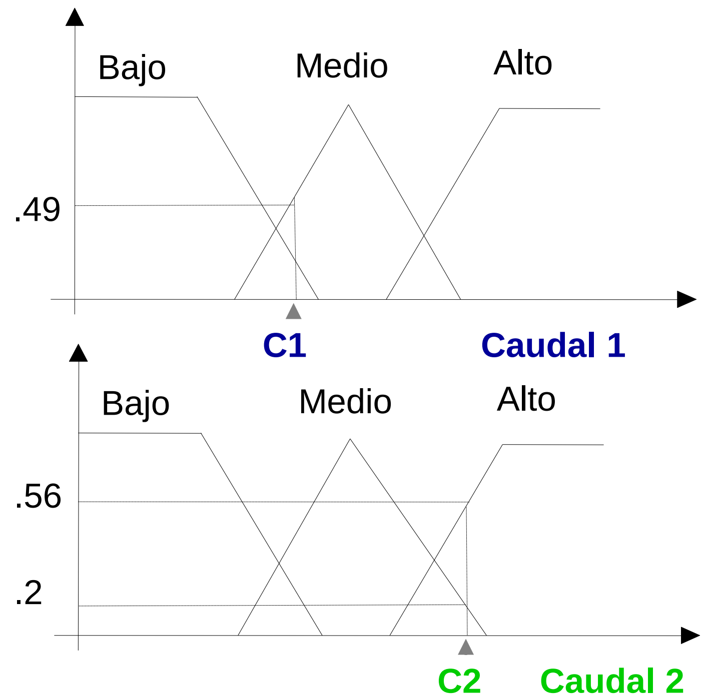
A1 A2

Regla 1: *Si* caudal 1 *es* medio *y* caudal 2 *es* medio ***entonces*** nivel en 3 *es* medio

Regla 2: *Si* caudal 1 *es* medio *y* caudal 2 *es* alto ***entonces*** nivel en 3 *es* alto

Completar tabla

Regla	Antecedente 1	Antecedente 2	(A_1∩A_2)
Regla 1			
Regla 2			



2. Inferencia max-min: valores crisp, varias reglas

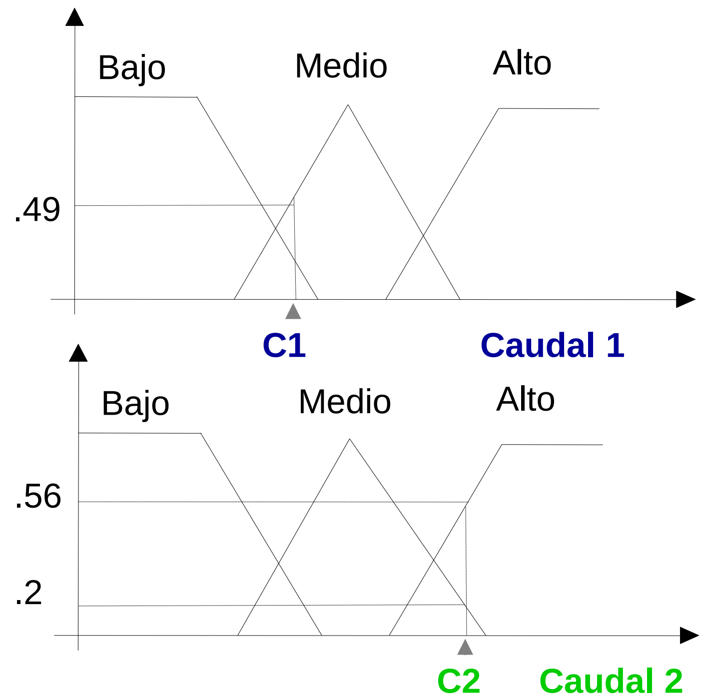
Regla 1: *Si* caudal 1 *es* medio *y* caudal 2 *es* medio ***entonces*** nivel en 3 *es* medio

Regla 2: *Si* caudal 1 *es* medio *y* caudal 2 *es* alto ***entonces*** nivel en 3 *es* alto

Borrosificador → *Norma T*: MIN

Regla	Antecedente 1	Antecedente 2	(A_1∩A_2)
Regla 1	0.49	0.2	
Regla 2	0.49	0.56	

Grado de veracidad de la regla



2. Inferencia max-min: valores crisp, varias reglas

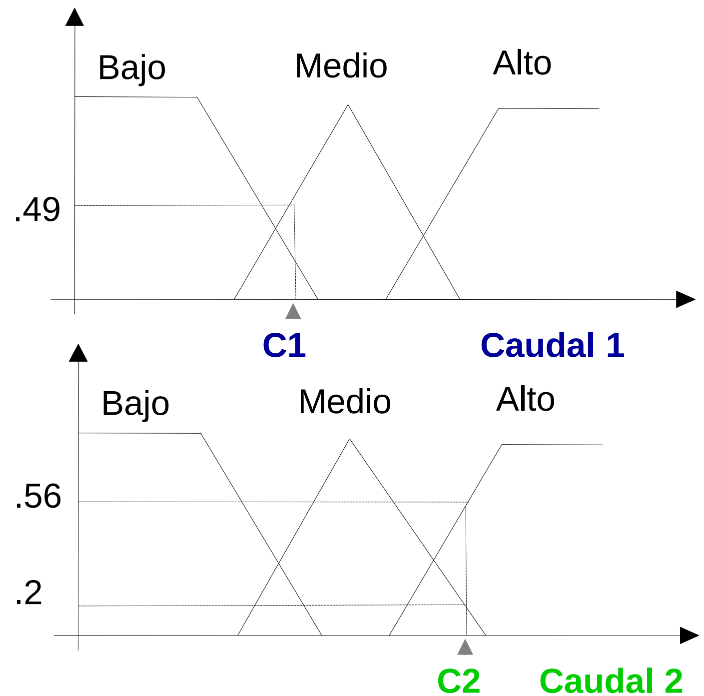
Regla 1: *Si* caudal 1 *es* medio *y* caudal 2 *es* medio ***entonces*** nivel en 3 *es* medio

Regla 2: *Si* caudal 1 *es* medio *y* caudal 2 *es* alto ***entonces*** nivel en 3 *es* alto

Borrosificador → *Norma T*: MIN

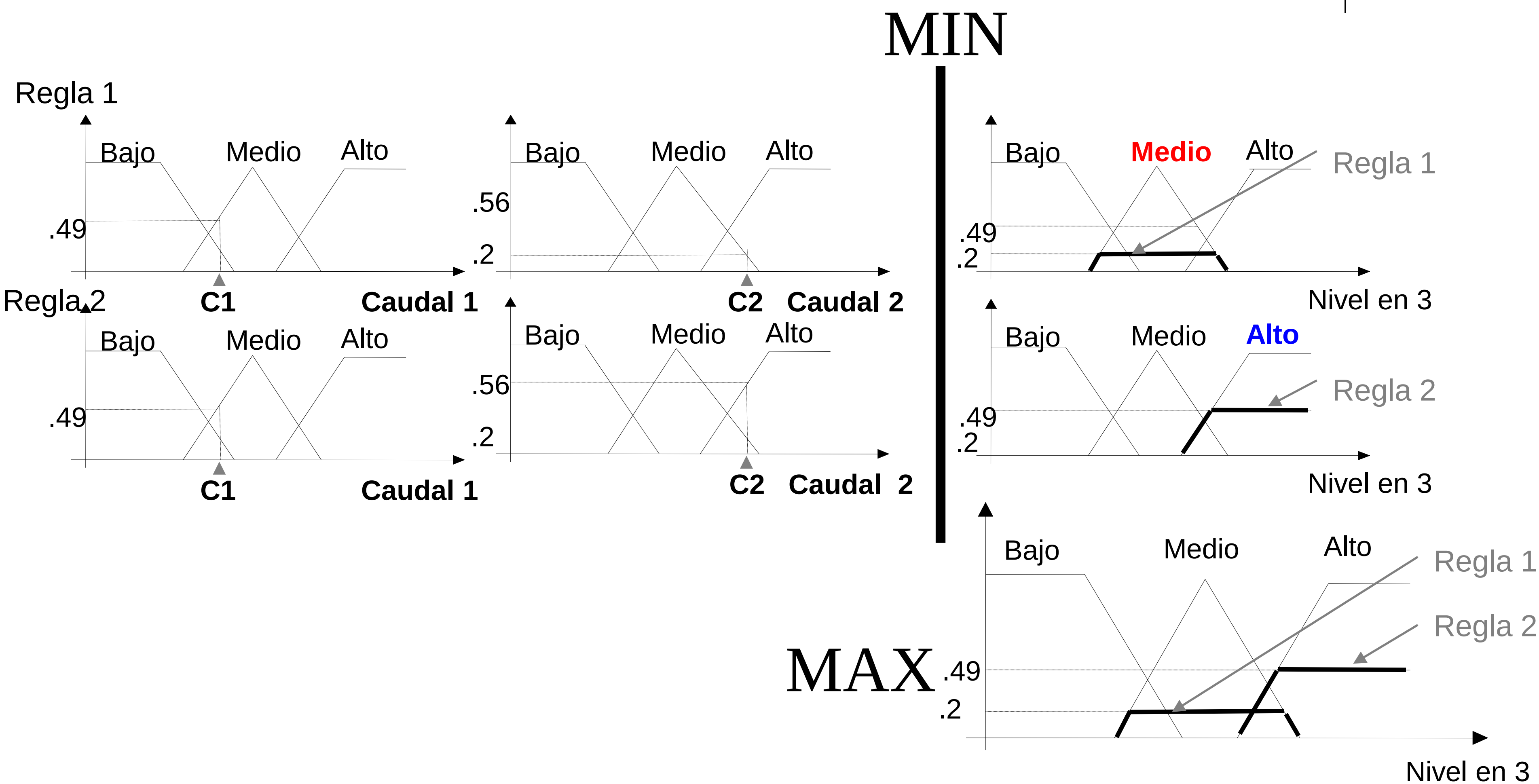
Regla	Antecedente 1	Antecedente 2	(A_1∩A_2)
Regla 1	0.49	0.2	0.2
Regla 2	0.49	0.56	0.49

Grado de veracidad de la regla



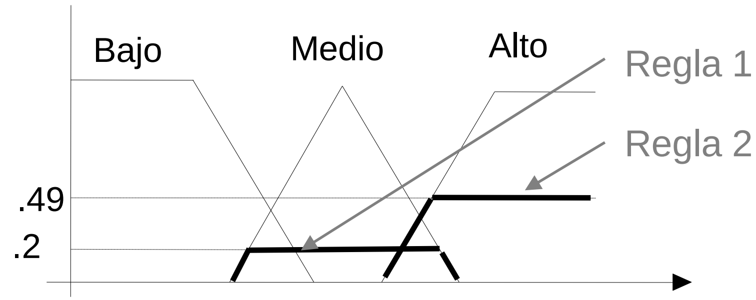
Regla 1: *Si* caudal en 1 *es* medio *y* caudal en 2 *es* medio *entonces* nivel en 3 *es* medio

Regla 2: *Si* caudal en 1 *es* medio *y* caudal en 2 *es* alto *entonces* nivel en 3 *es* alto



2. Inferencia max-min: valores crisp, varias reglas

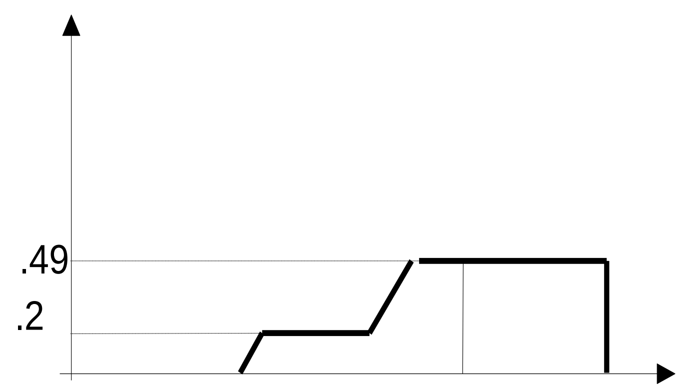
Regla	**Grado de veracidad de la regla**
Regla 1	0.2
Regla 2	0.49



Defuzificación

<u>*Centro de área o Centro promedio*</u>

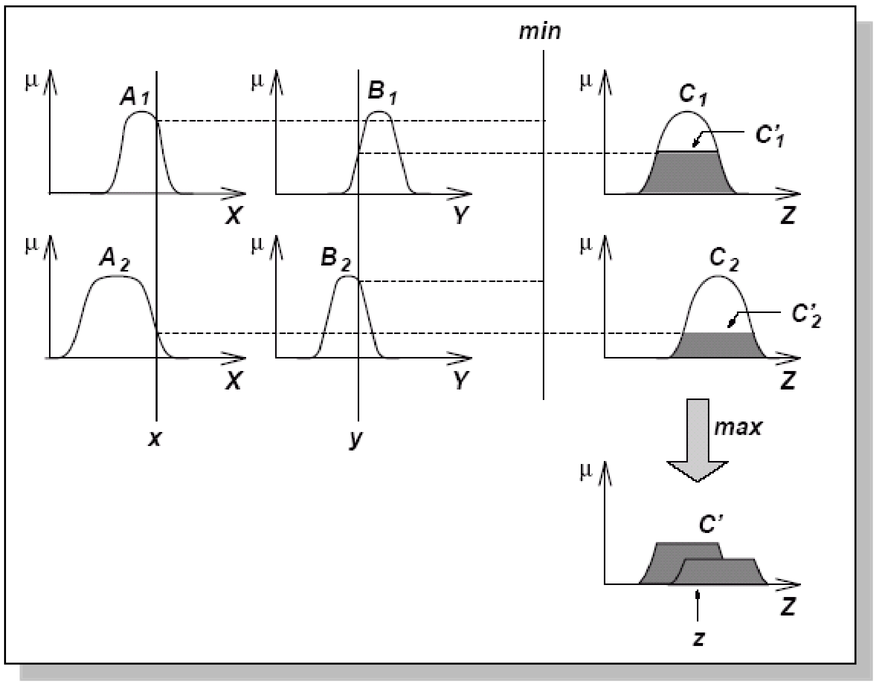
$$C3 = u^* = \frac{\sum_{i=1}^{l} u_i \mu_U(u_i)}{\sum_{i=1}^{l} \mu_U(u_i)}$$

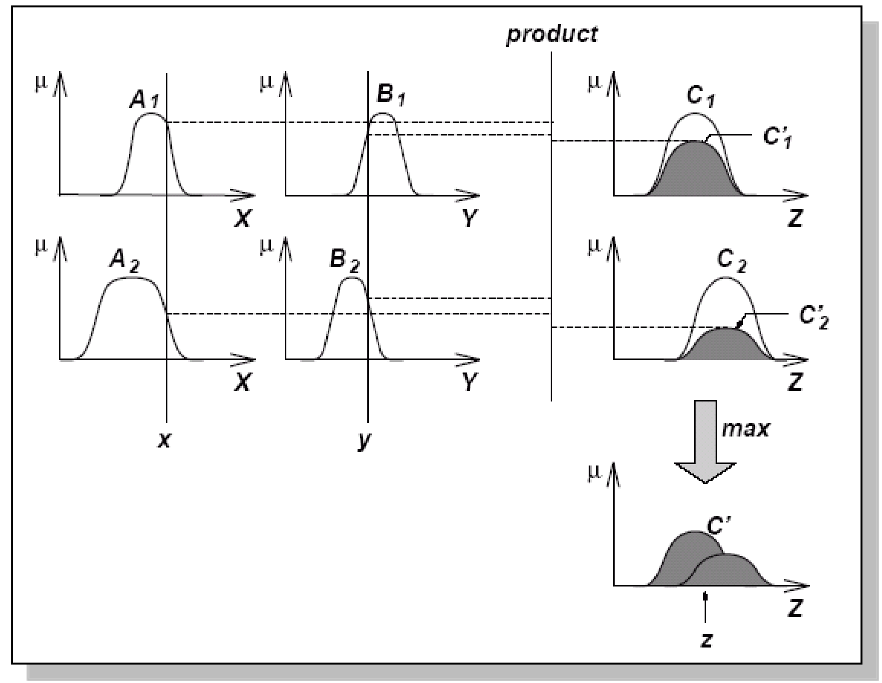


C3 Caudal en el punto 3

2. Inferencia max-T: valores crisp, varias reglas

Resumiendo…

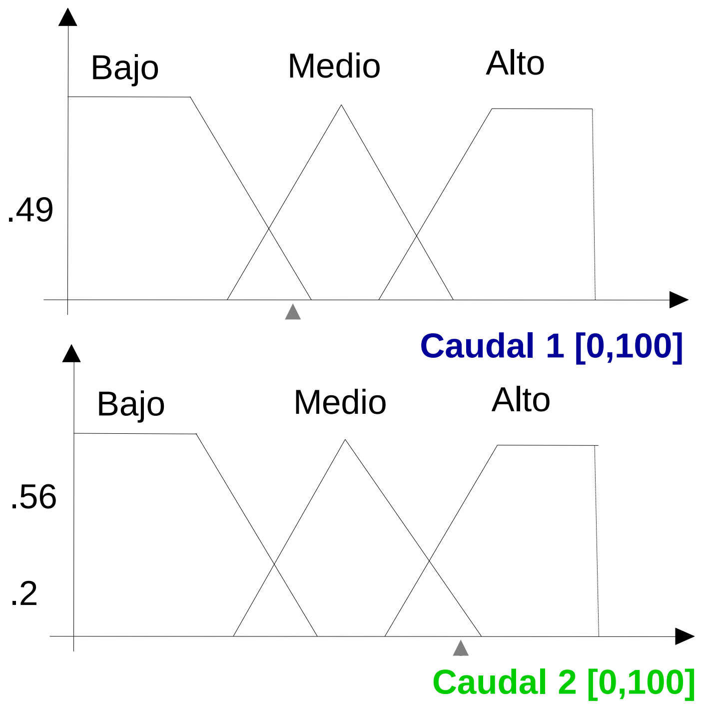


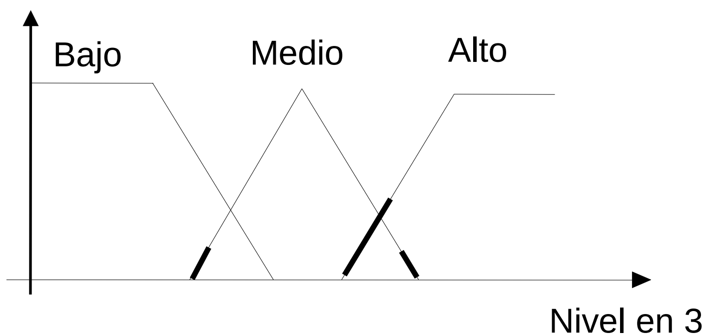


2. Ejemplo max-min: valores crisp, varias reglas

Regla 1: *Si* caudal 1 *es* medio *y* caudal 2 *es* medio ***entonces*** nivel en 3 *es* medio

Regla 2: *Si* caudal 1 *es* medio *y* caudal 2 *es* alto ***entonces*** nivel en 3 *es* alto





C1 = 45; C2=75

3. Inferencia borrosa: max-T
(entrada borrosa)

En el caso que la entrada a la regla sea una lectura difusa, nosotros podemos considerar la intersección de A y A*, es decir:

min (a_i, a^*_i) para inducir el B*

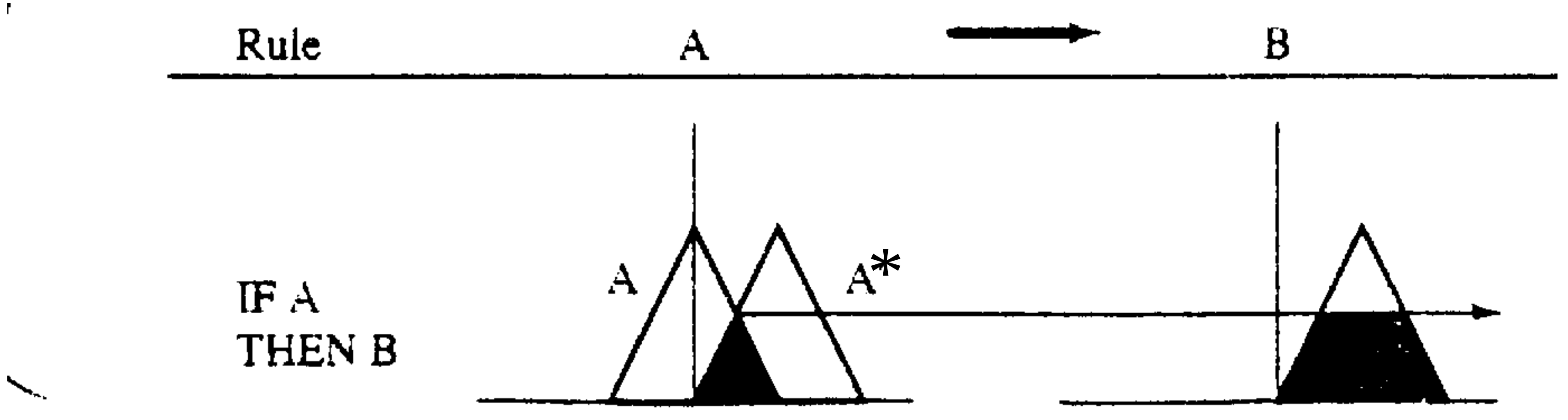


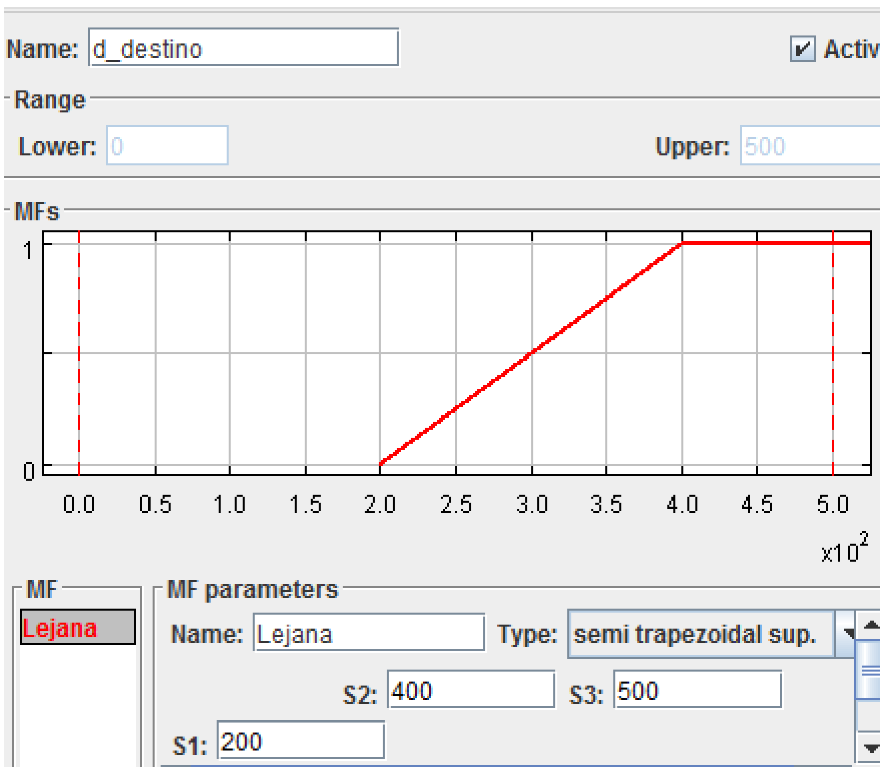
FIGURE 13.5 Max-min inference for fuzzy input.

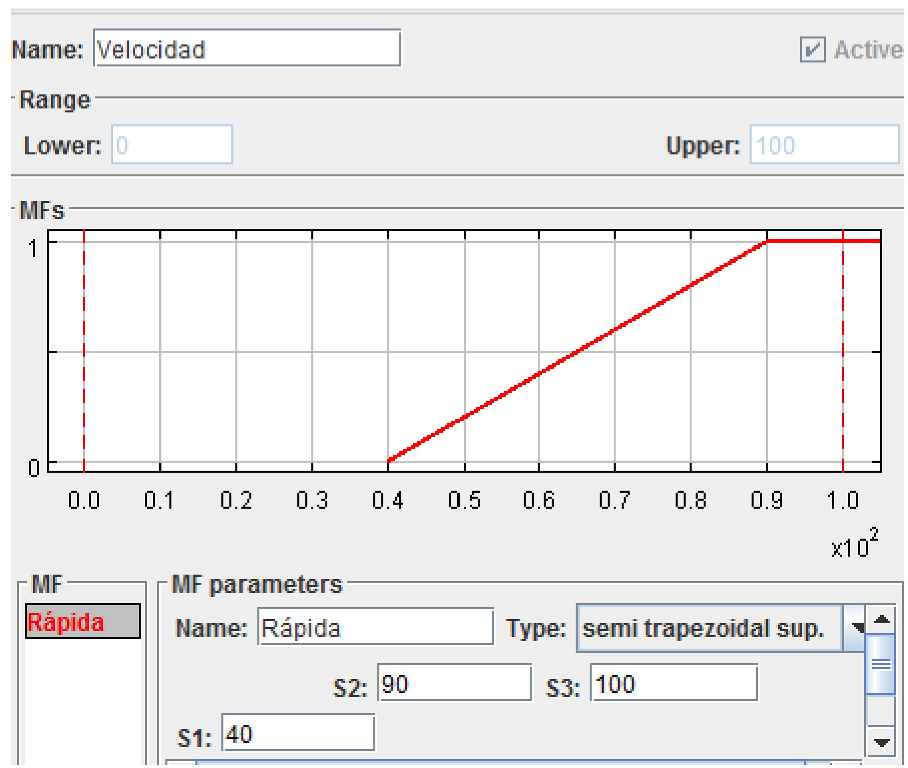
3. Inferencia borrosa: max-T (entrada borrosa)

REGLA: Si d_{dest} es *lejana* entonces *v* debe ser *rápida*

f_{lejana}= [0,25/250 0,5/300 0,75/350 1/400 1/450] (P)

f_{rapida}= [0/40 0,2/50 0,6/70 1/90] (Q)





3. Inferencia borrosa: max-T (entrada borrosa)

REGLA: **Si d_{dest} es *lejana* entonces *v* debe ser *rápida***

Tengo d_{dest}^* = [0,75/250 1/300 0,75/350 0/400 0/450] y la matriz *M*, V*???

$$f_{lejana} = \begin{array}{c} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 0,25 & 0,5 & 0,75 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} 250 & 300 & 350 & 400 & 450 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 40 & 50 & 70 & 90 \end{array}$$
$$f_{rapida} = [\; 0 \quad 0,2 \quad 0,6 \quad 1 \;]$$

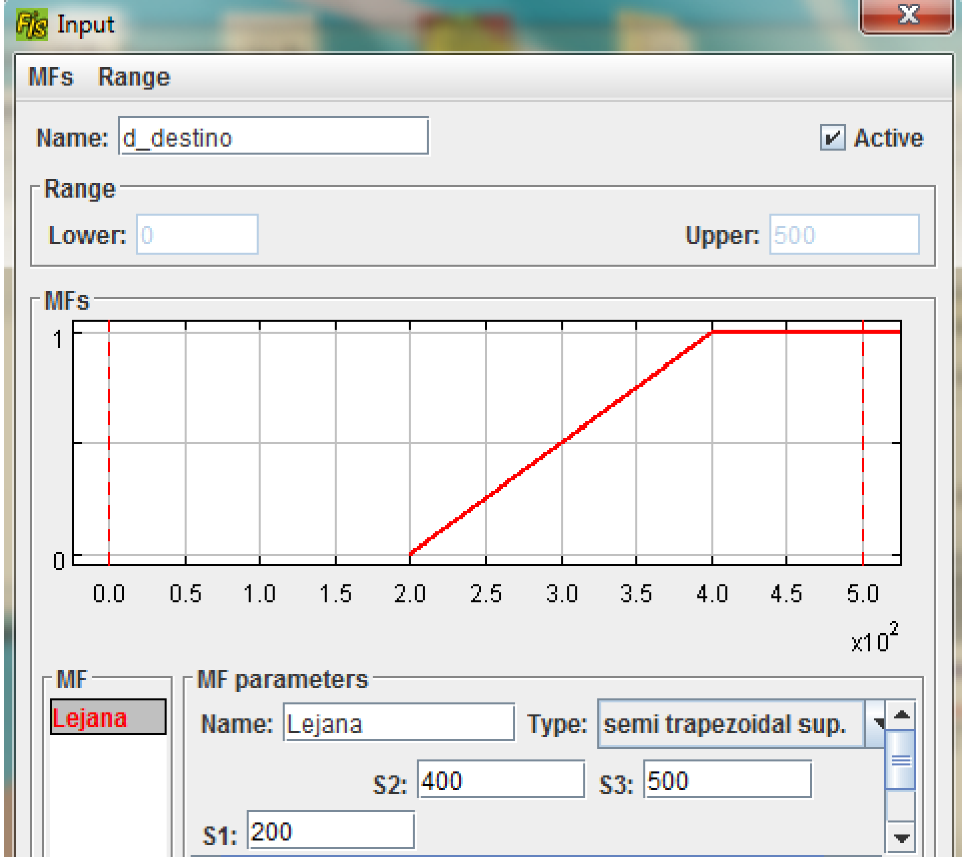
MAX-min

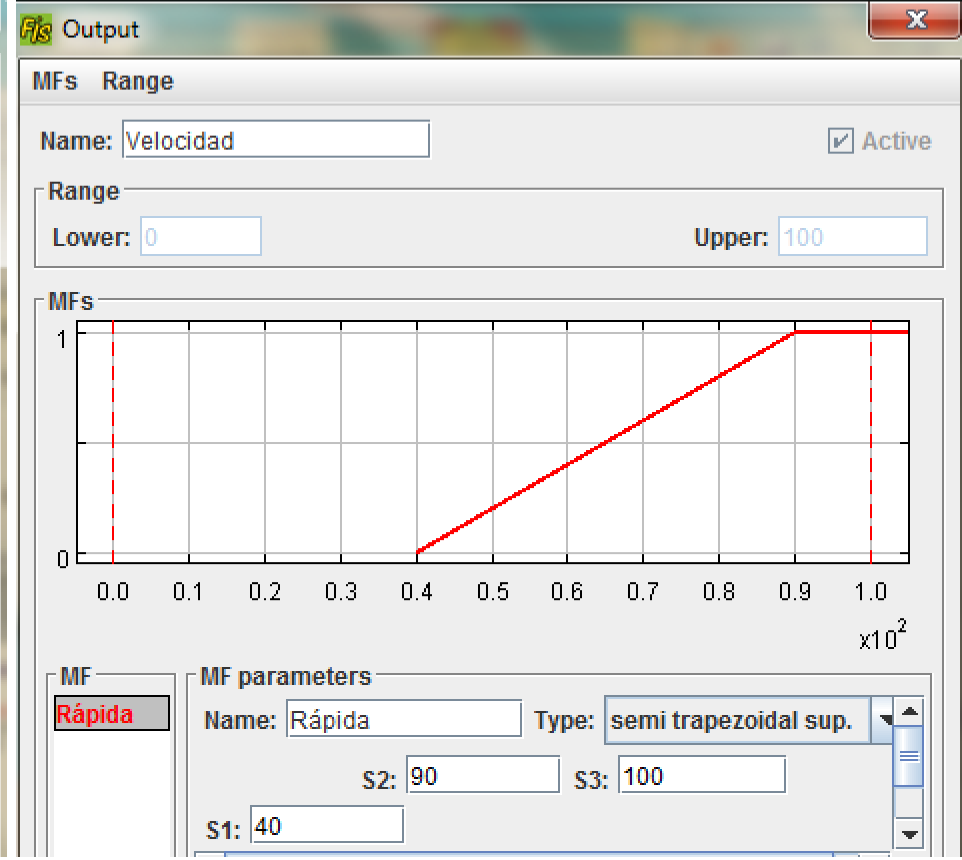
$$\begin{array}{ccccc} 250 & 300 & 350 & 400 & 450 \\ \end{array}$$
$$[\; 0,75 \quad 1 \quad 0,75 \quad 0 \quad 0 \;] \circ \begin{array}{ccccc} 40 & 50 & 70 & 90 & \\ 0 & 0,2 & 0,25 & 0.25 & 250 \\ 0 & 0,2 & 0,5 & 0,5 & 300 \\ 0 & 0,2 & 0,6 & 0,75 & 350 \\ 0 & 0,2 & 0,6 & 1 & 400 \\ 0 & 0,2 & 0,6 & 1 & 450 \end{array}$$

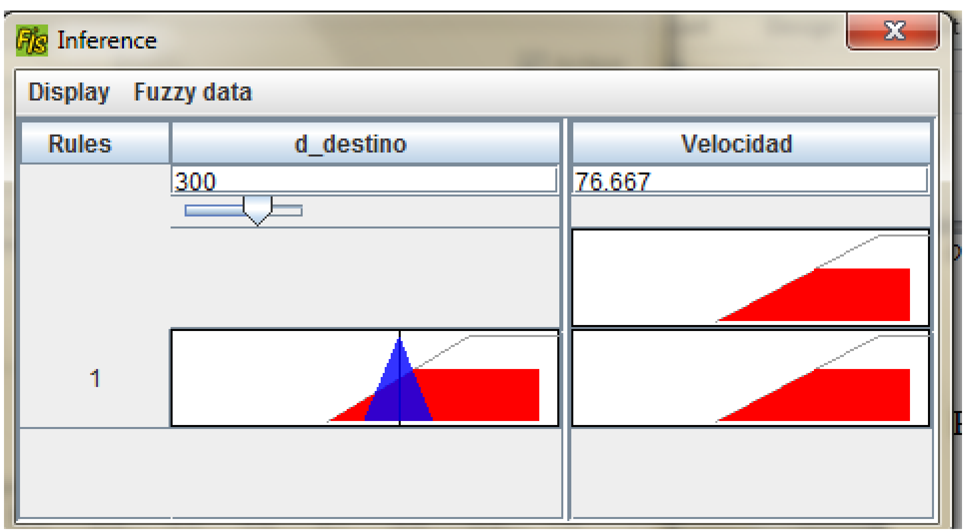
$v_{1(40)}$= max(min(0,75;0); min(1;0); min(0,75;0); min(0;0); min(0;0))

$$\begin{array}{cccc} 40 & 50 & 70 & 90 \end{array}$$
v*= [0 0,2 0,6 0,75]= v*

Siendo un hecho que está entre las distancias MEDIAS y LEJANAS; es de esperar que v* esté entre las velocidades MEDIA y RÁPIDA



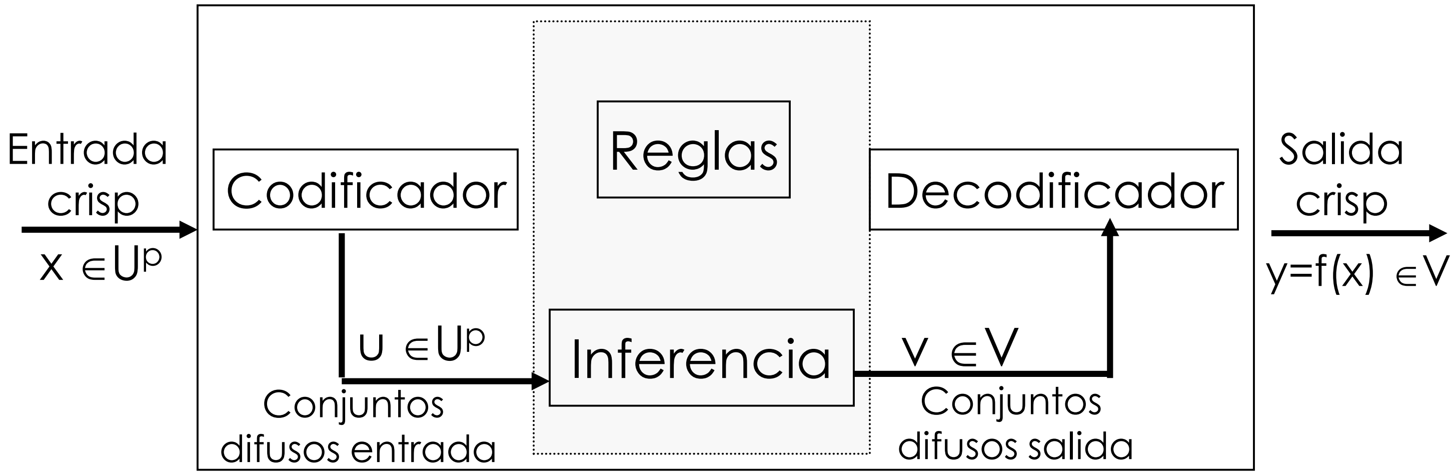




$$\begin{array}{cccccc} & 40 & 50 & 70 & 90 & \\ v^* = [& 0 & 0{,}2 & 0{,}6 & 0{,}75 &] = v^* \end{array}$$

Métodos de Defuzificación

- La salida de un proceso de inferencia es un conjunto difuso, en procesos en línea se requieren valores crisp



Métodos de Defuzificación

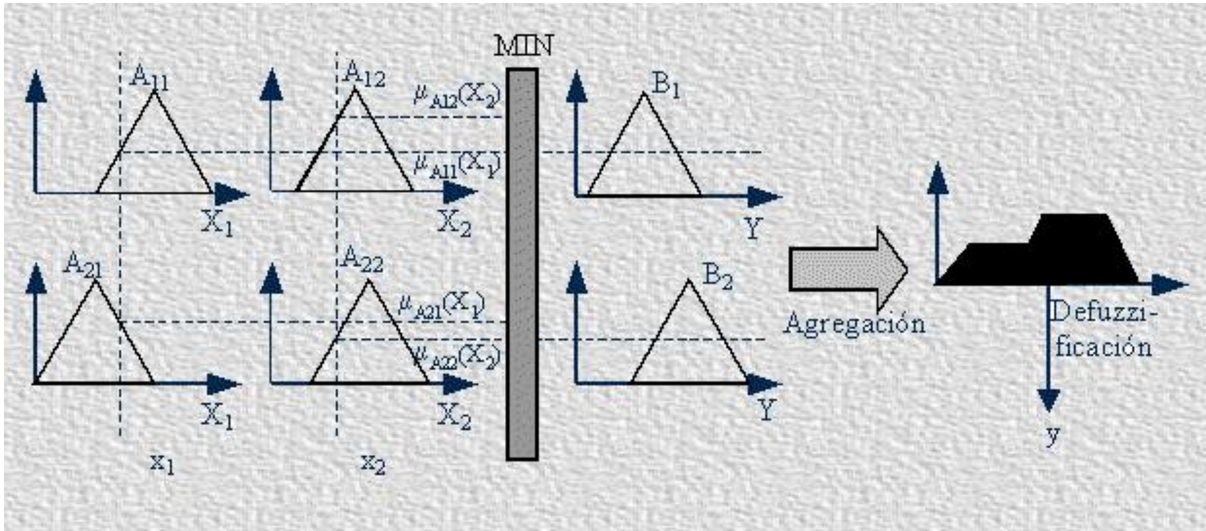
- Por ej.:

Centro de Gravedad

$$y = \frac{\sum_i b_i \int \mu(i)}{\sum_i \int \mu(i)}$$

Centros Promediados

$$y = \frac{\sum_i b_i \mu_{premisa}(i)}{\sum_i \mu_{premisa}(i)}$$



Sistema Difuso Mamdani, Procesamiento Detallado

Resumen de tareas: FIS

- Definir las variables de entradas y salidas
- Definir el universo de discurso
- Determinar el número de funciones de pertenencia
- Distribuir las funciones de pertenencia
- Definir el método de borrosificación
- Definir el método de inferencia
- Definir el método de desborrosificación
- Examinar la conducta del modelo y la superficie de salida: Redefinir reglas Ejemplo

En resumen: Cuándo usar lógica borrosa

- En procesos **complejos**, si no existe un modelo de solución sencillo
- En procesos **no lineales**
- Cuando haya que introducir la experiencia de un operador "**experto**" que se base en conceptos imprecisos obtenidos de su experiencia
- Cuando ciertas partes del sistema a controlar son **desconocidas** y **no** pueden medirse de forma **fiable**
- Cuando el ajuste de una variable puede producir el desajuste de otras
- En general cuando se desea representar y operar con conceptos que tengan **imprecisión** o **incertidumbre**

En resumen: Desventajas

- Estabilidad: No hay garantía teórica que un sistema difuso no tenga un comportamiento caótico y no siga siendo estable, aunque tal posibilidad parece ser baja debido a los resultados obtenidos hasta ahora
- La determinación de las funciones de pertenencia y las reglas no siempre son sencillas
- La verificación de los modelos y sistemas borrosos expertos requiere de gran cantidad de pruebas

Implicaciones borrosas: I

Caso *crisp*: $x \rightarrow y := \neg x \vee y$

Una función I: $[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ es llamada "fuzzy implication" si satisface las siguientes propiedades (Fundamentals of fuzzy sets, D. Dubois, H. Prade)

I1. $I(0,0) = I(0,1) = I(1,1) = 1$; $I(1,0) = 0$

I2. If $x \leq z$ then $I(x,y) \geq I(z,y)$ for all $y \in [0,1]$

I3. If $y \leq t$ then $I(x,y) \leq I(x,t)$ for all $x \in [0,1]$

I4. $I(0, x) = 1$;

I5. $I(x, 1) = 1$;

I6. $I(1, x) = x$ for all $x \in [0,1]$

I7. $I(x, I(y, z)) = I(y, I(x, z))$

I8. $x \leq y$ if and only if $I(x,y) = 1$

I9. $N(x) := I(x,0)$ is a strong negation

I10. $I(x,y) \geq y$

I11. $I(x,x) = 1$

I12. $I(x,y) = I(N(y), N(x))$

I13. I is a continuous function

Def: An S-implication associated with a t-conorm S and a strong negation N is defined by

$I_{S,N}(x,y) := S(N(x),y) \qquad (x,y \in [0,1])$.

FISPRO: Trabajando a partir de datos

- Generación de particiones
  - Regular
  - K-means
  - HFP
- Generación de reglas
  - FPA
  - Wang & Mendel
  - Árbol de decisión