Lógica Borrosa

Introducción

IAA - LCC

Dra. Pilar E. Bulacio
bulacio@cifasis-conicet.gov.ar

Organización

- Biblio:
  - Zadeh (1965). "Fuzzy sets", Information and Control, 8 (3): 338–353.
  - Steven D. Kaehler. Fuzzy Logic Tutorial. http://www.seattlerobotics.org/encoder/mar98/fuz/flindex.html
  - Orestes Mas i Casals, *Sistemas difusos dinámicos para el tratamiento de información temporal imprecisa*, Ecola técnica superior d' enginyeria de telecomunicació de Barcelona (UPC), 1997.
  - G.J. Klir and T.A. Folger. Fuzzy Sets, Uncertainty and Information. Prentice Hall, New Jersey, 1988.
  - Enriq Trillas
  - David Lobos Palacios. Introducción a la lógica difusa y sus aplicaci
- FisPro http://www7.inra.fr/mia/M/fispro/fispro2013_sp.html
  - Starting with FisPro (html) (pdf)
  - Práctica FisPro
- Práctica
  - Práctica ejercicios tipo

Tipos de incertidumbre

- Imprecisión, vaguedad, margen de confianza, ambigüedad, inconsistencia, generalidad, anomalía, incongruencia, ignorancia, negación, irrelevancia.

(Paul Krause y Dominic Clark, Representing Uncertain Knowledge)

- Vaguedad y la ambigüedad. (George Klir, Uncertainty-Based Information)
  - La vaguedad surge como efecto de los límites imprecisos entre los elementos que pertenecen a un conjunto y los que no.
  - La **ambigüedad** refleja la multipicidad de elementos distintos de un conjunto que pueden cumplir con una definición.

Cómo caracterizo

Definición 1. *Una medida borrosa [100] (o medida no aditiva) o capacidad [16] g en X es una función de conjunto $g : 2^X \to [0, 1]$ que satisface los siguientes axiomas.*

1. $g(\emptyset) = 0$,
2. $g(X) = 1$,
3. $A \subset B \subset X \quad \Rightarrow \quad g(A) \leq g(B)$.

La aditividad de las probabilidades es cambiada por una propiedad más *débil (3)*, llamada *monotonía respecto a la inclusión*, lo que permite una mayor potencialidad descriptiva en las relaciones entre elementos de toma de decisión.

[100] M. Sugeno. *Theory of fuzzy integrals and its applications.* PhD thesis, Tokio Institute of Technology, 1974.

[16] G. Choquet. Theory of capacities. *Annales de l'Institut Fourier*, 5:131–295, 1953.

Cómo proceso

- Razonamiento Aproximado: Es una capacidad de obtener conclusiones a partir de conocimiento incompleto, impreciso o con cierto grado de incertidumbre.

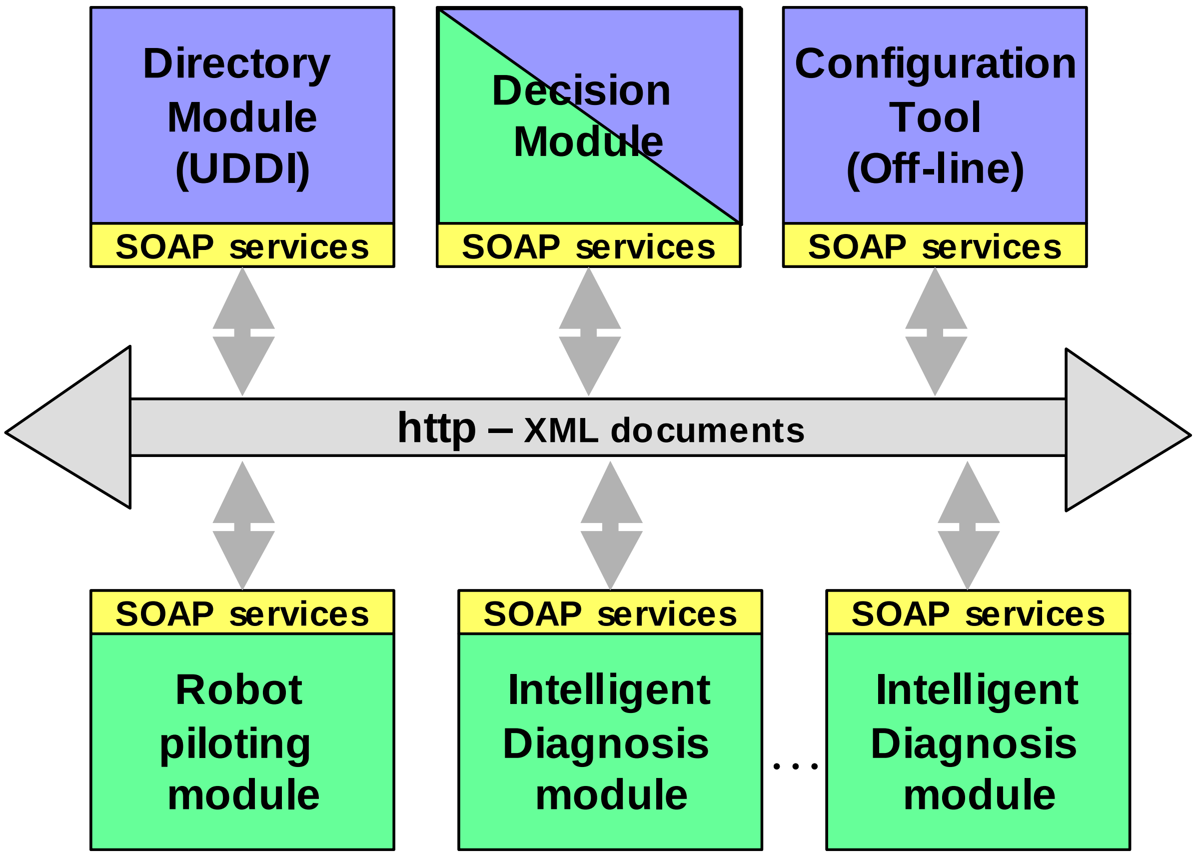
Motivación: Ejemplo

Handling Uncertainty in Advanced On-board Diagnosis and Control of autonomous Robots

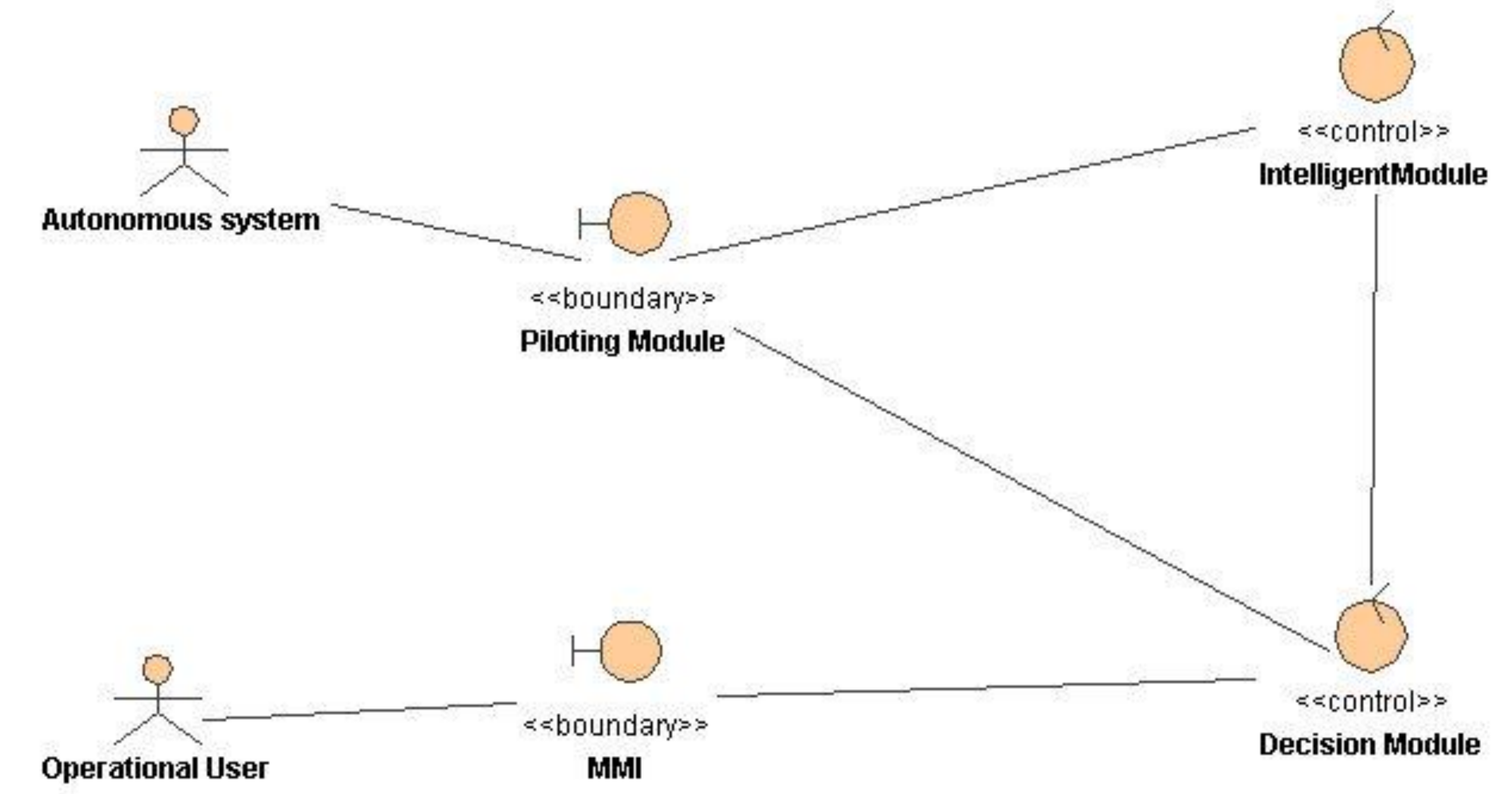
Main elements of a distributed architecture supporting **diagnosis** and **control** of **autonomous robots** are presented. The purpose of the architecture is to assist the operator (piloting system) in managing **fault detection, risk assessment, and recovery plans under uncertainty**.

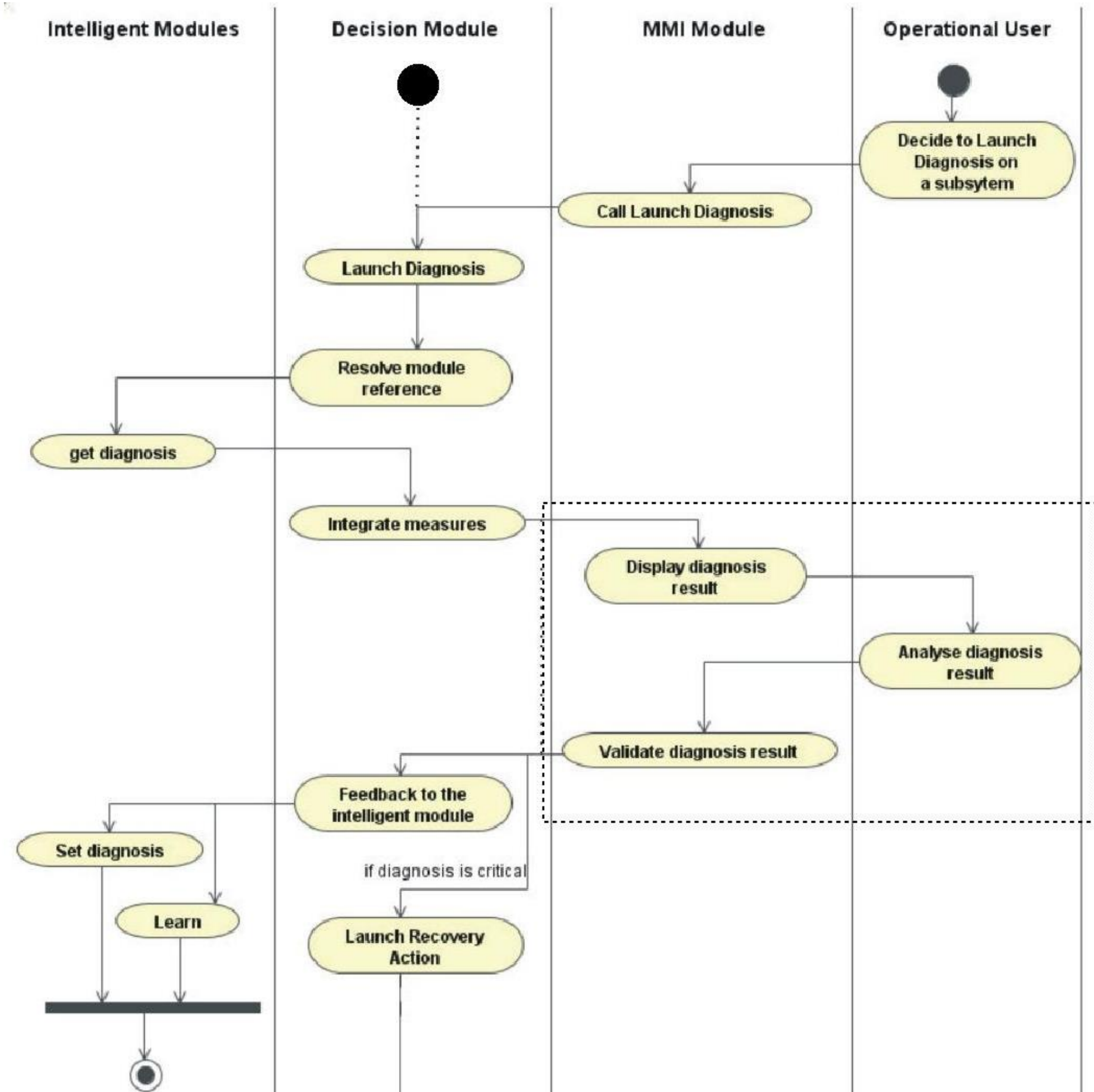
The architecture is open, and modular consisting of a set of interacting modules including a decision module and a set of intelligent modules. The decision module communicates with the intelligent ones to request and obtain **diagnosis** and **recovery action** proposals based on data obtained from the robot piloting module. **The architecture supports the use of multiple artificial intelligence techniques collaborating on the task of handling uncertainty:** Bayesian Belief Networks, Neuro-Symbolic Systems, and Fuzzy Logic…

Arquitectura



Arquitectura





Activity diagram for diagnosis and recovery action

AI techniques for IM

For solving diagnosis and recovery action problems

- Bayesian Belief Networks (BBNs),
- Fuzzy Logic (FL), and
- Neuro-Symbolic Systems (NSSs).

See Soft computing

FL module

Fuzzy inference system: knowledge base + inference engine

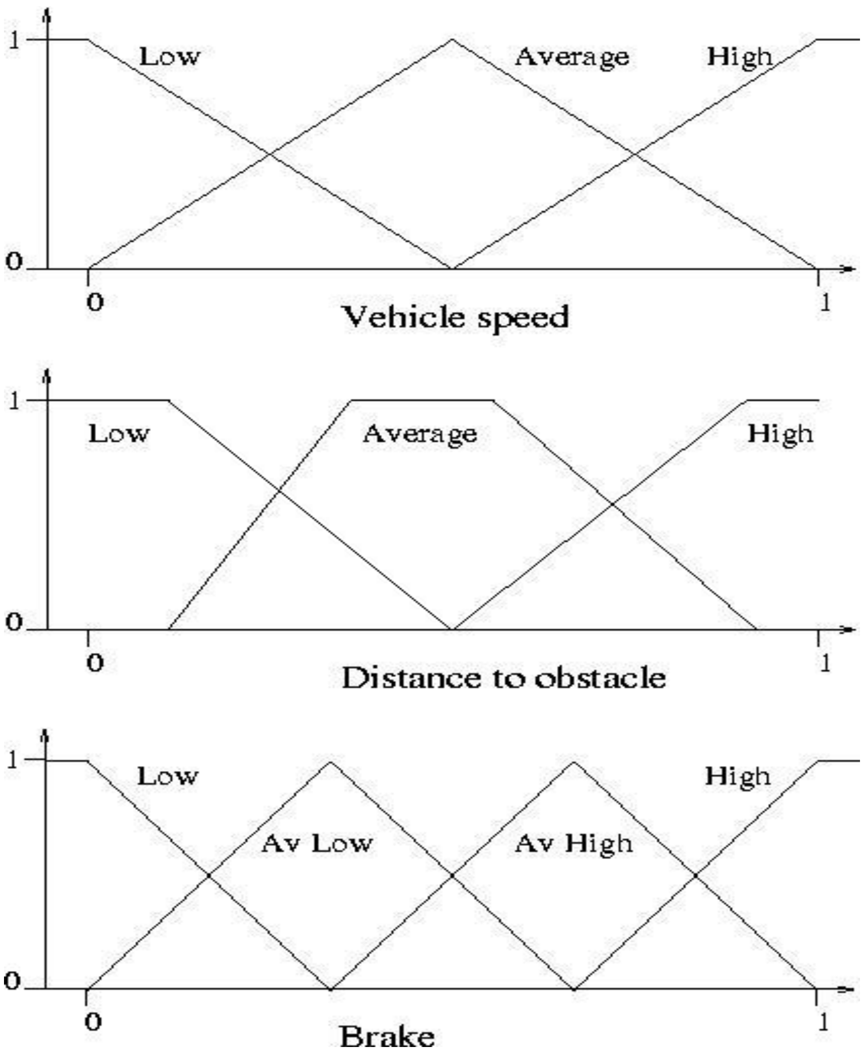
- **The knowledge representation: fuzzy sets and fuzzy logic,**
- **The knowledge processing: approximate reasoning.**

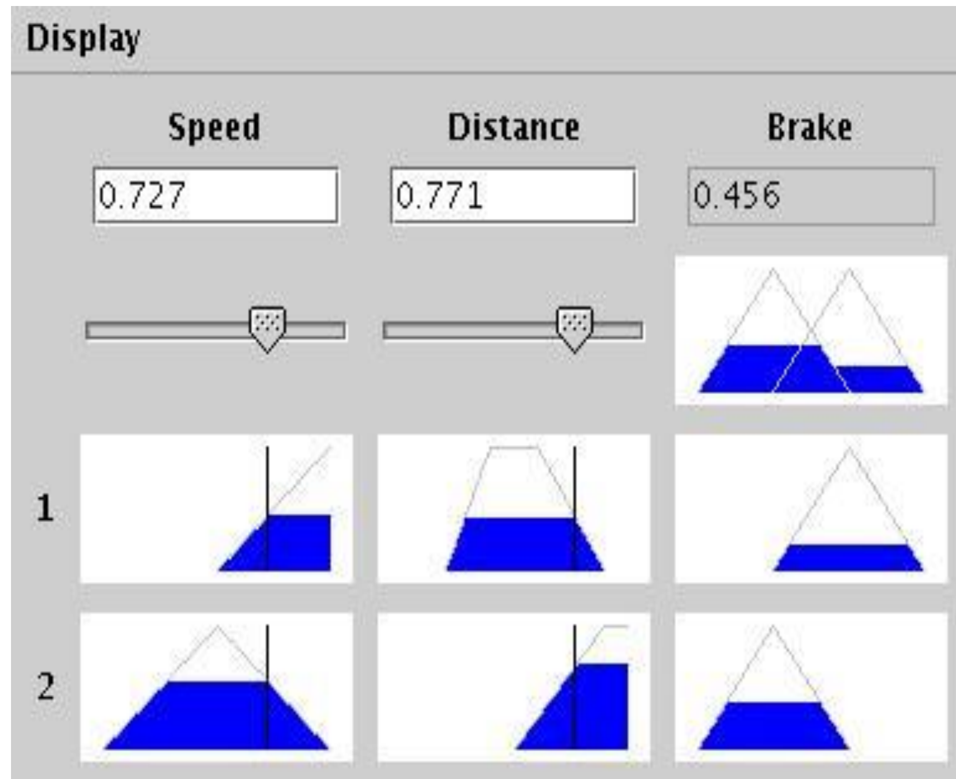
Contrary to classical sets whose boundaries are **well defined**, an item **does not simply belong or not** to a **set**: each value belongs "in degrees" to a **fuzzy set**.

Fuzzy logic, based on fuzzy sets, is well known for its linguistic concept handling ability.

If **Speed** is *High* and **Distance** is *Average* then **Brake** is *Average High*

If **Speed** is *Average* and **Distance** is *High* then **Brake** is *Average Low*

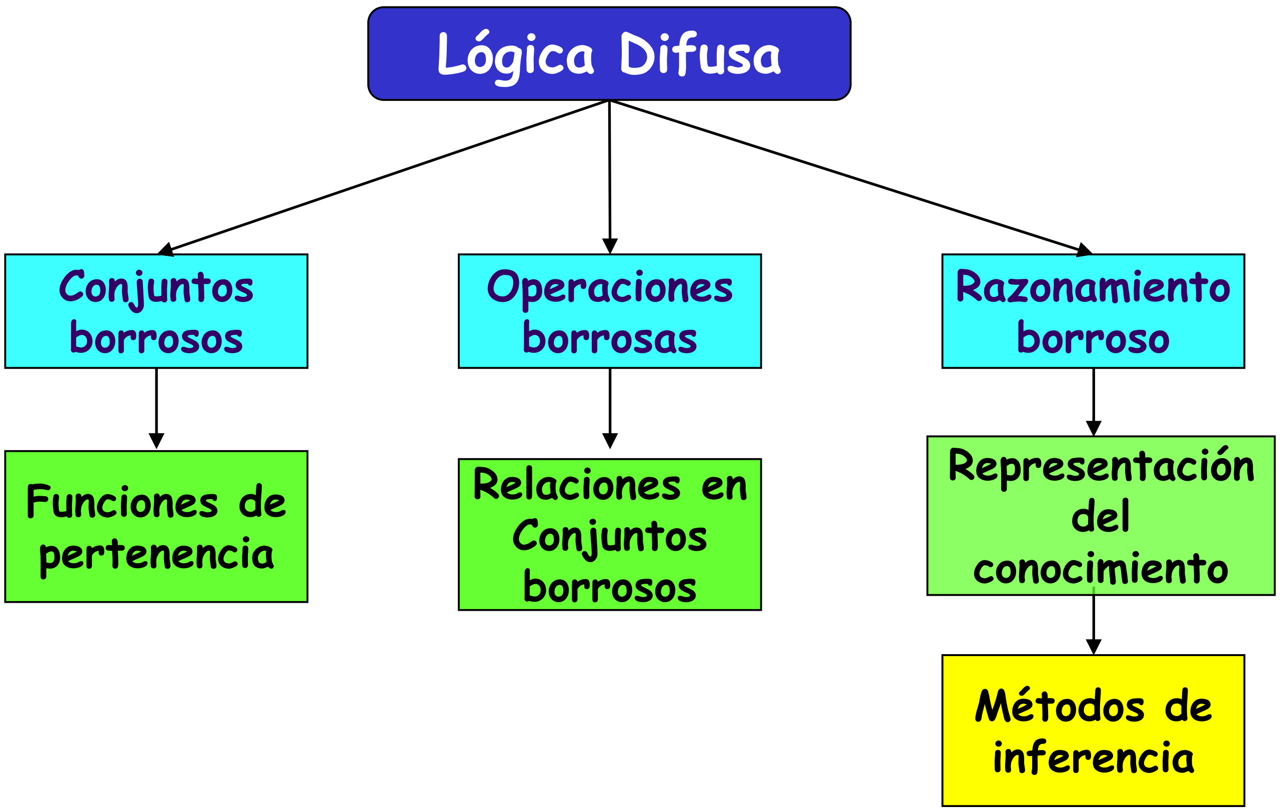




Contenido

- Orígenes
- Conjuntos borrosos
- Operaciones con conjuntos borrosos
- Razonamiento borroso
  - Representación del conocimiento
  - Métodos de inferencia
  - Fuzzificadores-Defuzzificadores

Lógica Difusa: elementos



Reseña Histórica de FL

Sus orígenes se remontan a Platón (427-347 a.C) Aristóteles (384-322 a.C.)

Plantean que las cosas no tienen que ser de un cierto tipo o dejar de serlo: **consideran la existencia de *grados* de verdad y falsedad**

Reseña Histórica de FL

- Inicio del XX, el filósofo y matemático británico **Bertrand Russell** divulgó la idea "la lógica produce contradicciones". Estudia **vaguedades del lenguaje**, concluyendo con precisión que la vaguedad es un grado.
- En ese tiempo **Ludwing Wittgenstein**, estudió **acepciones de palabras**. Concluyó que una misma palabra puede expresar modos y maneras diferentes.
- En 1920 **Jan Lukasiewicz**, desarrolló la primera **lógica de vaguedades**: conjuntos con grado de pertenencia entre 0 y 1.

Fundamentos de FL

A mediados de los 70s el **ingeniero eléctrico** iraní **Lofty A. Zadeh** de la Universidad de Berkeley postuló por primera vez la lógica difusa publicando “Fuzzy Sets” en la revista *Information and Control*.

Introdujo el concepto de ***conjunto difuso*** (fuzzy set) para **representar el pensamiento humano no con números sino con etiquetas lingüísticas**.

Zadeh quería crear un formalismo para manejar la imprecisión del razonamiento humano.

Born: February 4, 1921, Baku, Azerbaijan
Died: September 6, 2017, Berkeley, California, United States

FL

Es una rama de AI que permite trabajar con modos de **razonamiento imprecisos** partiendo de **conjuntos borrosos**.

Conjuntos borrosos

Conjuntos borrosos

By Zadeh 1965,

"*A fuzzy set is a class of objects with a continuum of grades of membership. Such a set is characterized by a membership function which assigns to each object a grade of membership ranging between zero and one.*"

Fuzzy Sets = Elements + Membership Functions

Conjuntos borrosos

Definición Formal: Sea X un espacio de puntos (objetos), con un elemento genérico denotado por x. Así, $X = \{x\}$.
Un ***conjunto borroso*** A en X se caracteriza por una *función de pertenencia* $f_A(x)$ que asocia a cada elemento de X un número real en $[0; 1]$, donde el valor $f_A(x)$ representa el "grado de pertenencia de x en A".

$$A=\{x, f_A(x)\}$$

Ej: A = (a_1 / x_1, a_2/x_2.....a_n/ x_n) considerando el conjunto difuso _alta_ asociado a la variable lingüística _estatura_*:*

ALTA = (0/1.65, 0.8/1.75, 0.9/1.85, 1/1.95)

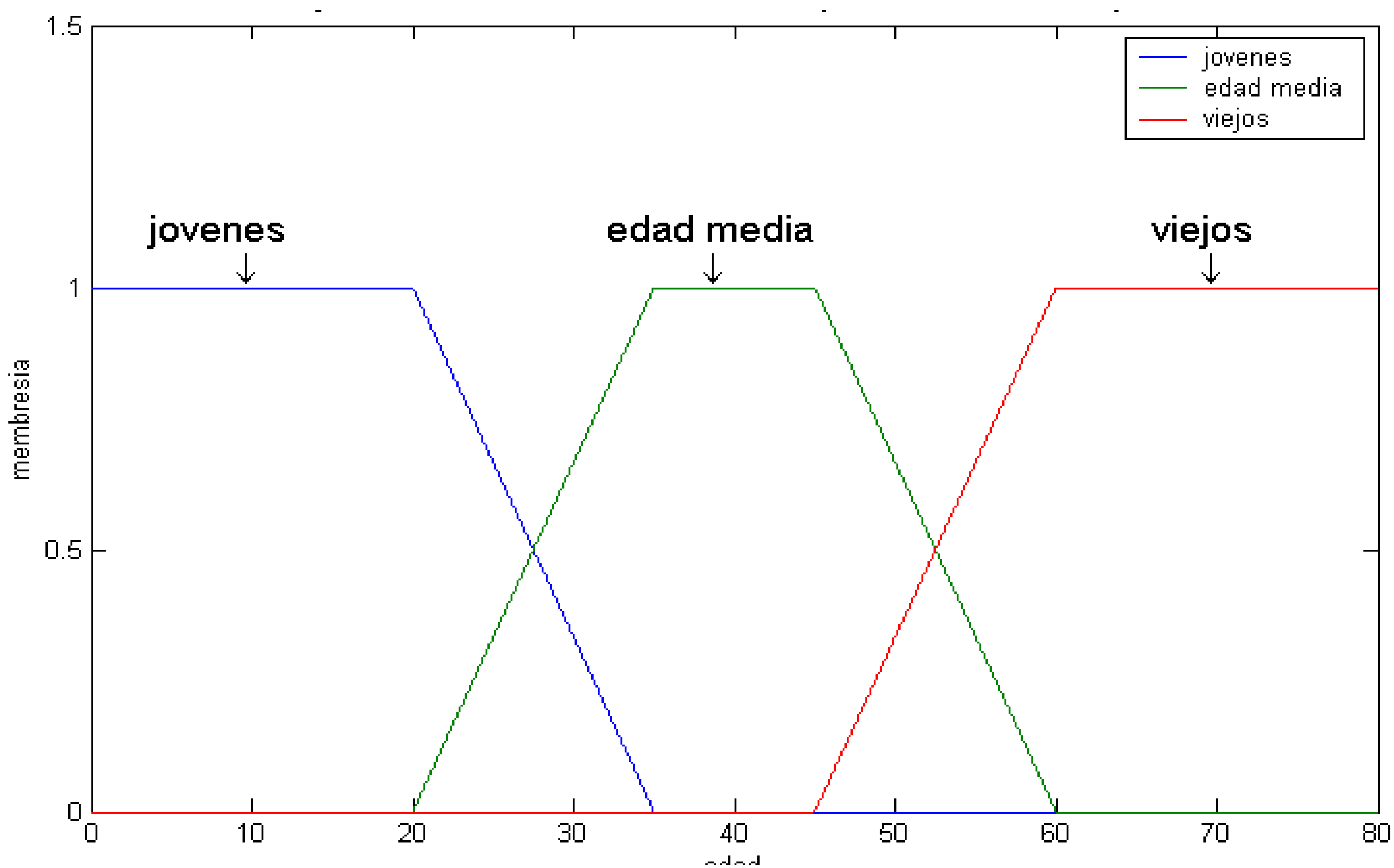
Ej. de conjuntos borrosos

- Conjunto de hombres jóvenes
- Conjunto de hombres de edad media
- Conjunto de hombres viejos

Cómo se definen los conjuntos?
Cuáles son los límites?

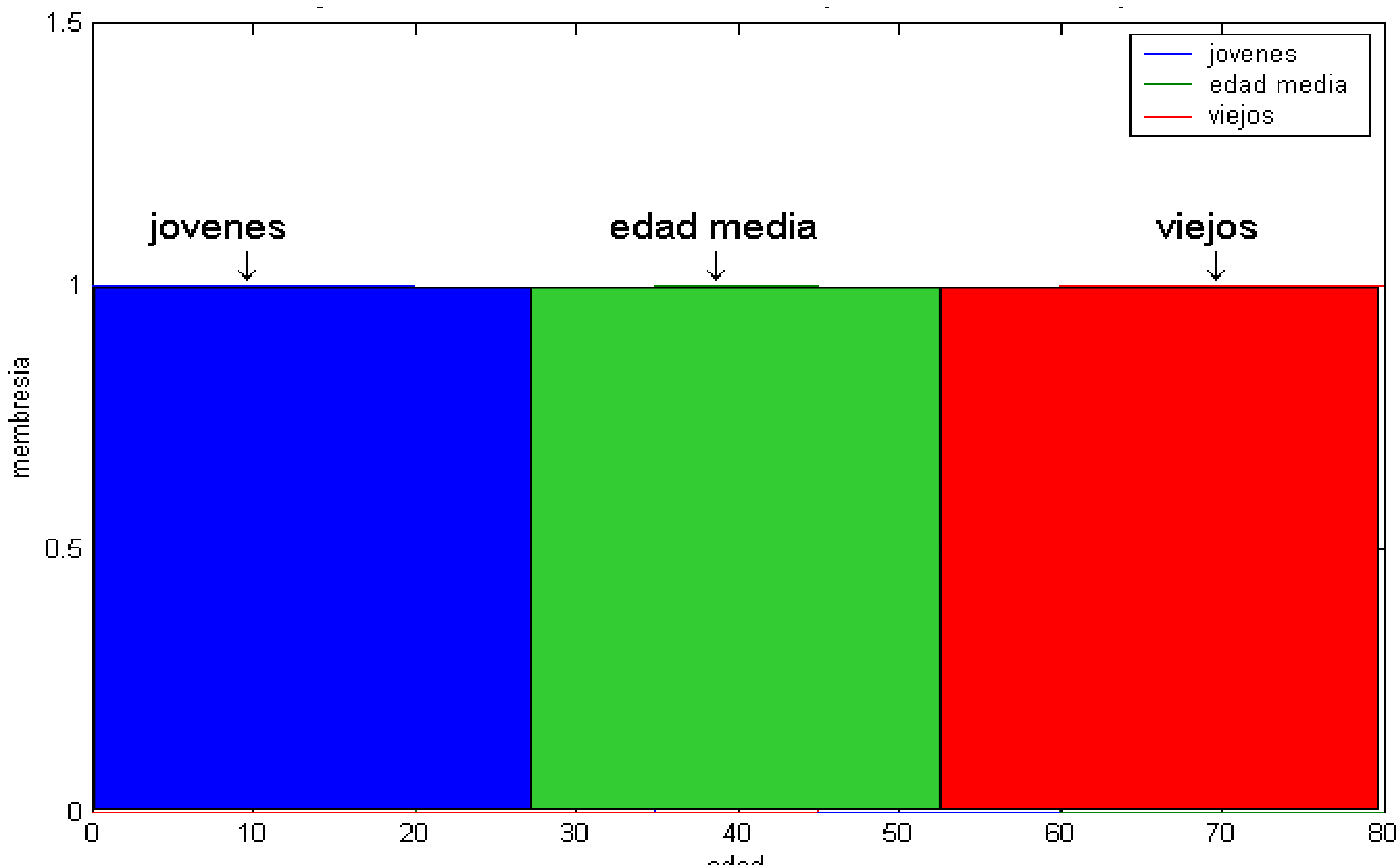
Ej. de conjuntos borrosos

Definición de las funciones de pertenencia



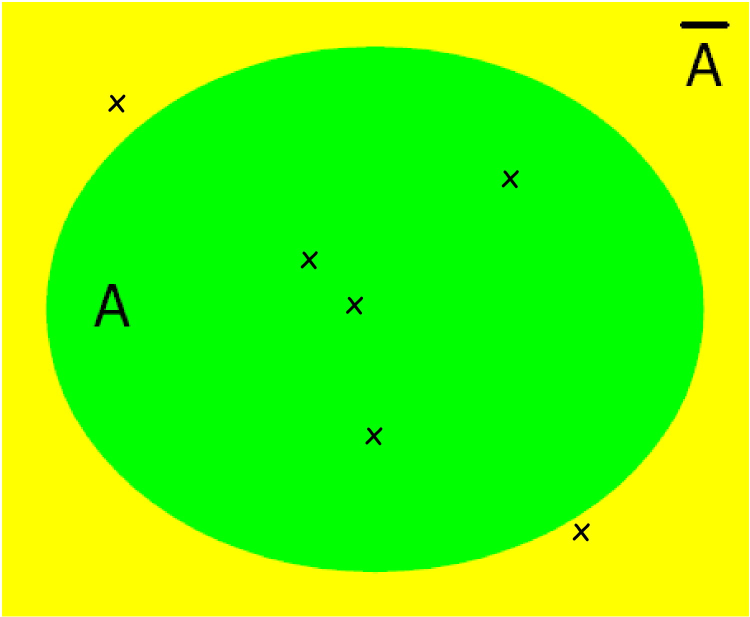
Ej. de conjuntos borrosos

Conjuntos clásicos

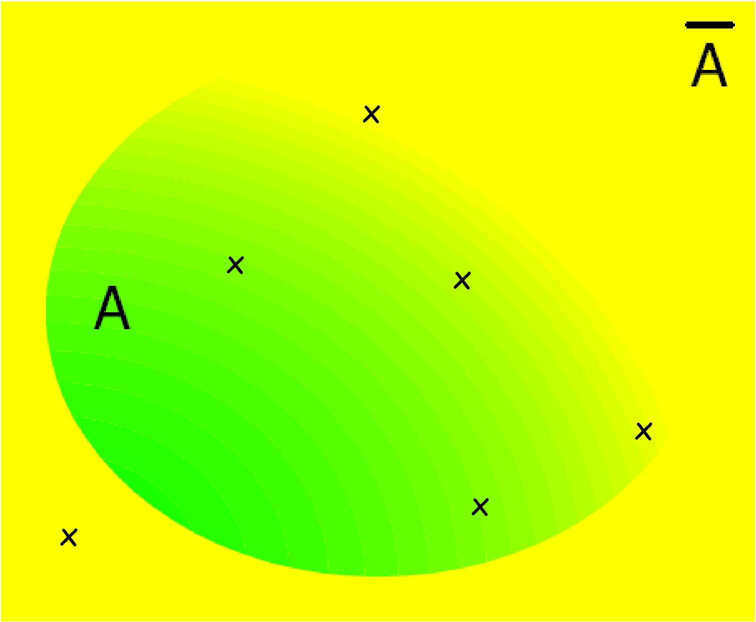


Tipos de conjuntos

Clásico



Borrosos

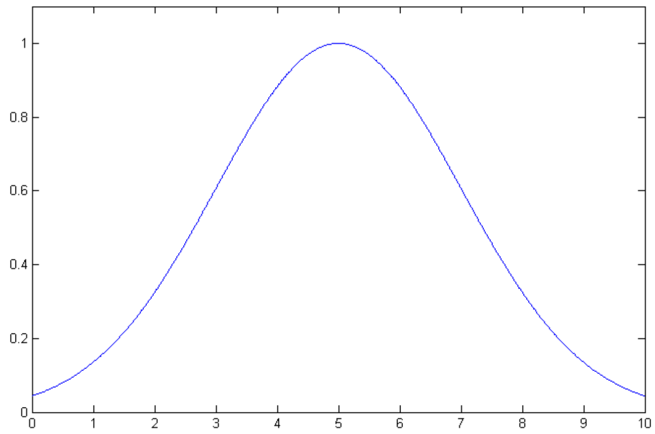


Funciones de Pertenencia

- La “membership function“ mapea cada elemento x del conjunto borroso a un **valor de pertenencia/grado**

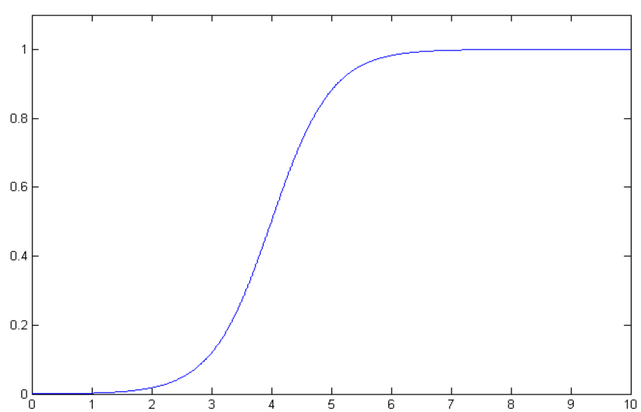
  f_A: X -> [0,1]; X es el espacio de entrada o universo del discurso

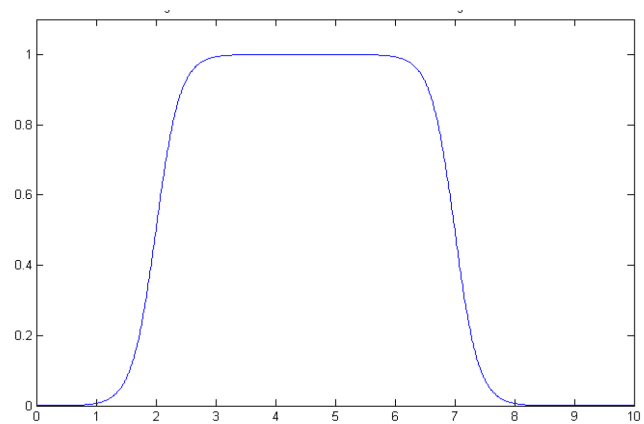
Tipos de fs de pertenencia



Gaussiana

Sigmoides





Fs de pertenencia: obtención

1. Evaluación subjetiva: asignación por expertos
2. Probabilidades: frecuencias de respuestas de pertenencia de un elemento al conjunto.
3. Funciones *ad-hoc:* en sistemas de control se usan funciones sencillas para reducir la cantidad de parámetros.

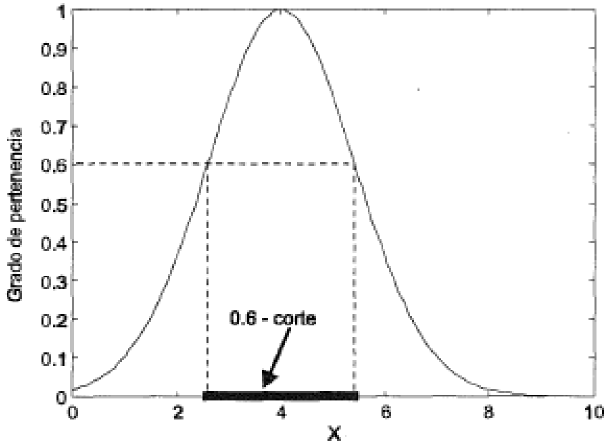
Propiedades en conjuntos borrosos

- **Normality,** ***A*** is called normal if its supreme is one:

$$Sup\ f_A(x) = 1, \text{ for every } x \text{ in } X$$

- **α-cut,** elements that belong to ***A*** at least to the degree **α** is called the **α**-level set:

$$A\alpha = \{x \in X \mid f_A(x) \geq \alpha\} \quad \alpha\text{–cut}$$



- Igualdad, $A = B \Leftrightarrow f_A(x) = f_B(x); \forall x \in X$

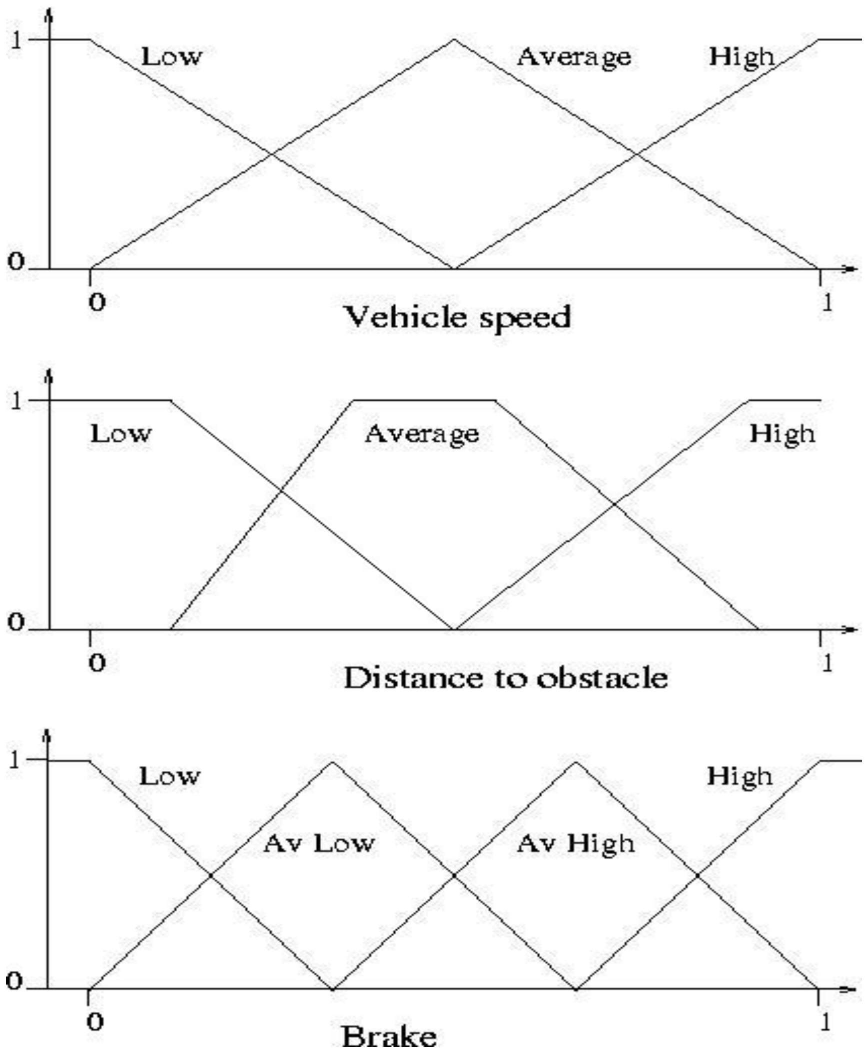
- Inclusión, $A \subseteq B \Leftrightarrow f_A(x) \leq f_B(x); \forall x \in X$

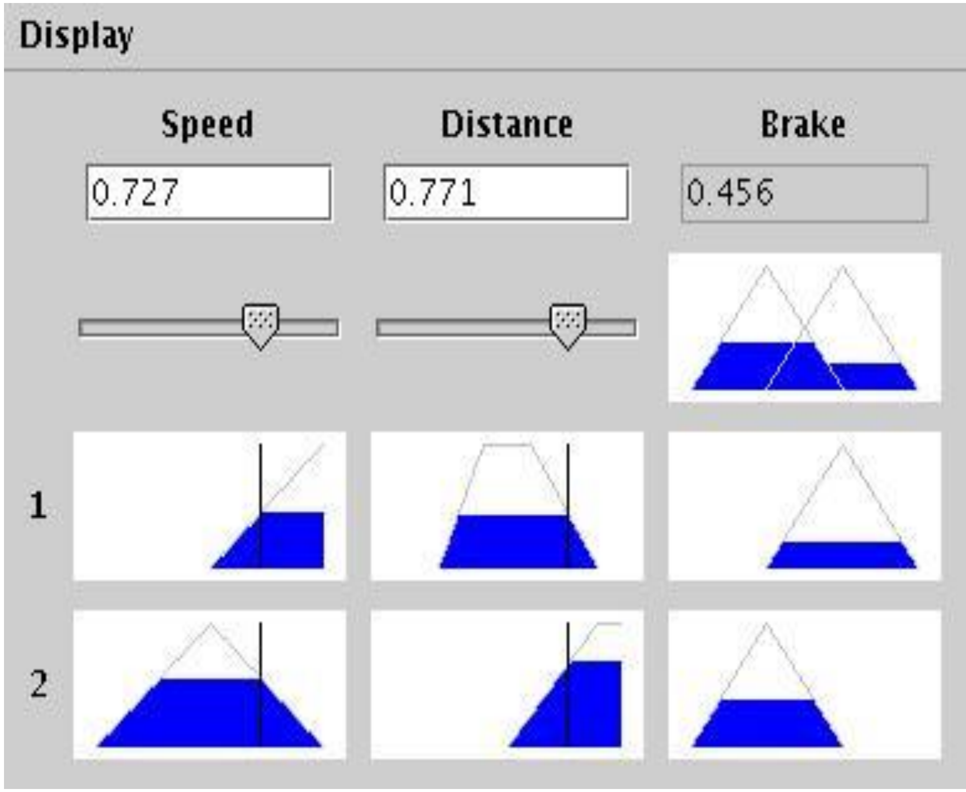
Operaciones en conjuntos borrosos

- `and`
- `or`
- `complement`

If **Speed** is *High* and **Distance** is *Average* then **Brake** is *Average High*

If **Speed** is *Average* and **Distance** is *High* then **Brake** is *Average Low*





Complementos, T-normas y T-conormas

- Las operaciones básicas no son únicas.
- Hay distintas formas de
  - complementos (C),
  - intersecciones (T-normas) y
  - uniones (T-conormas) borrosas

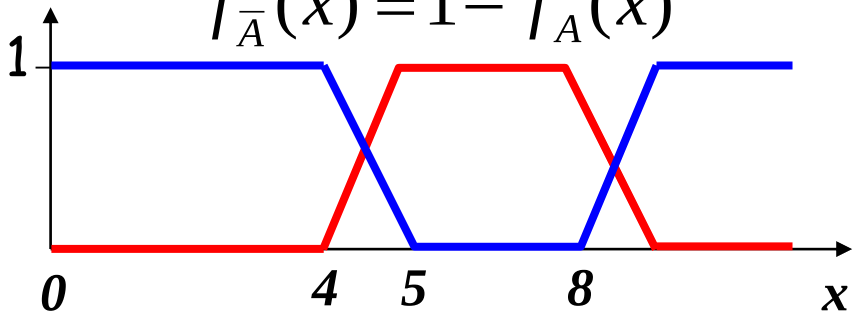
Operadores genéricos: Complemento

- Dado un conjunto borroso $A=\{x, f_A(x)\}$, el $N(A)$ se interpreta como el **grado** en que x no pertenece a A

$$\mathbf{Comp} = N : [0,1] \rightarrow [0,1]$$

- **Frontera** $N(0)=1$ y $N(1)=0$
- **Monotonía** $N(a) \geq N(b)$ if $a \leq b$
- **Involución** $N[N(a)] = a$

$$f_{\overline{A}}(x) = 1 - f_A(x)$$

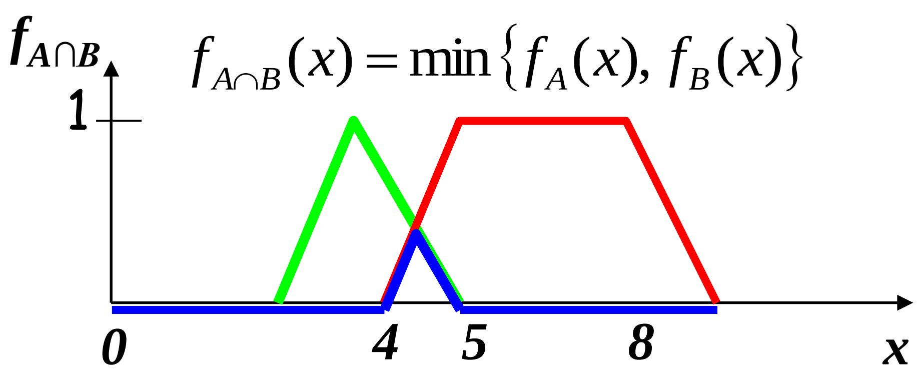


Operadores genéricos: T-norma

Intersection of fuzzy sets $\boldsymbol{A}$ and $\boldsymbol{B}$:

$$f_{A\cap B}(x) = T(f_A(x), f_B(x))$$

- **Commutativity:** $T(a, b) = T(b, a)$
- **Associativity:** $T(a, T(b, c)) = T(T(a, b), c)$
- **Boundary:** $\boldsymbol{T(a, 0) = 0, T(a, 1) = a}$
- **Monotonicity:** $T(a, b) \le T(a, c)$ if $b \le c$



Ej. T-norm

- **Intersección estándar:** $\text{Min}(a,b) = \min(a,b)$
- **Producto algebraico:** $\text{Prod}(a,b) = a \cdot b$
- **Diferencia acotada:** $W(a,b) = \max(0, a+b-1)$
  Lukasiewicz
- **Intersección drástica:**

$$Z(a,b) \begin{cases} a, \text{ si } b=1; \\ b, \text{ si } a=1; \\ 0 \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

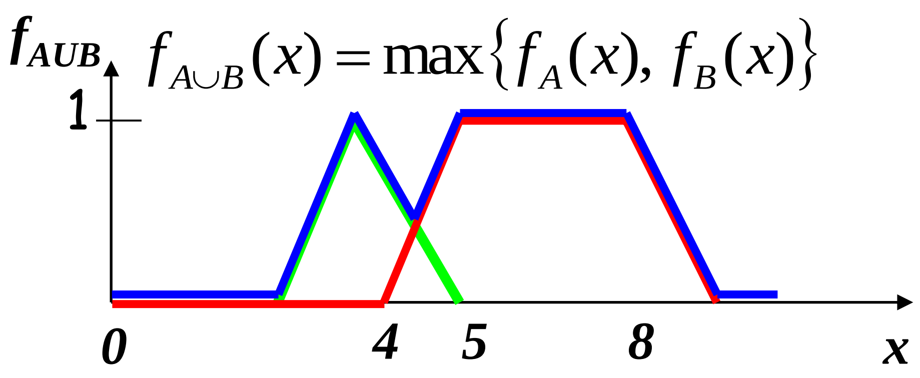
$$Z \leq W \leq Prod \leq Min$$

Operadores genéricos: T-conorma

Union of fuzzy sets ***A*** and ***B***

$$f_{AUB}(x) = S(f_A(x), f_B(x));\ T\text{-conorm or S-norm}$$

- **Commutativity:** $S(a, b) = S(b, a)$
- **Associativity:** $S(a, S(b, c)) = S(S(a, b), c)$
- **Boundary:** $\mathbf{S(a, 1) = 1, S(a, 0) = a}$
- **Monotonicity:** $S(a, b) \leq S(a, c)$ if $b \leq c$



Ej. T-conorm

- **Unión estándar:** $\mathrm{Max}(a; b) = \max(a; b)$
- **Suma algebraica:** $\mathrm{Prod}^*(a; b) = a + b - a.b$
- **Suma acotada:** $W^*(a; b) = \min(1; a + b)$

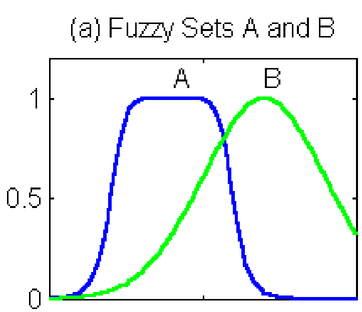
  dual de Lukasiewicz
- **Unión drástica:**

$$Z^*(a,b) = \begin{cases} a, \text{ si } b=0; \\ b, \text{ si } a=0; \\ 1 \text{ en otro caso.} \end{cases}$$

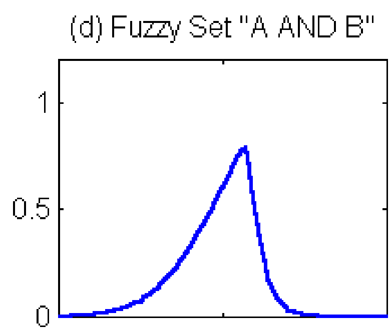
$$\mathrm{Max} \leq \mathrm{Prod}^* \leq W^* \leq Z^*$$

Operaciones básicas con conjuntos borrosos

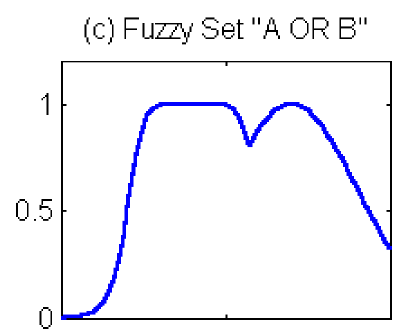
- Unión, $f_{A\cup B}(x) = \max\{f_A(x), f_B(x)\}$
- Intersección, $f_{A\cap B}(x) = \min\{f_A(x), f_B(x)\}$
- Complemento, $f_{\bar{A}}(x) = 1 - f_A(x)$



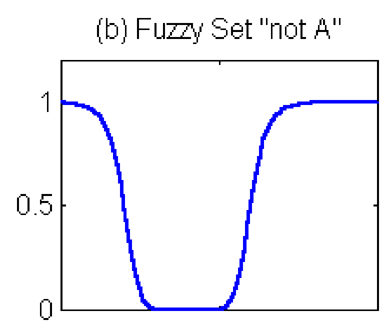
$A \cap B$



$A \cup B$



$\bar{A}$



Prop. de operaciones borrosas

- Prop. en gral inválidas por abandonar el concepto de pertenencia: un elemento puede pertenecer a un conjunto y a su complemento.
  - Ley de la contradicción

$$A \cap \bar{A} = \varnothing \qquad \times$$

  - Ley de exclusión media

$$A \cup \bar{A} = U \qquad \times$$

Medidas Borrosas: Sugeno 1974

Una ***medida borrosa*** *g en X es una función g:$2^X \to [0,1]$ que satisface las sgtes propiedades:*

1. $g(\emptyset) = 0$; $g(X) = 1$;
2. $A \subset B \subset X \;\rightarrow\; g(A) \leq g(B)$

Medida de Posibilidad

3. $g(\bigcup A_i) = Sup\{g(A_i)\}$ *dado un conjunto de índices i.*

Ejemplo- Supongamos que:

Juan desea ir a tomar cerveza que sea **barata**, **y** en un local **tradicional**, **y** que el local quede **cerca** de su casa.

Una **cerveza barata** es una que cueste alrededor de $10 o menos; un **local tradicional** es un local que al menos tenga 5 años funcionando; que **quede cerca** de su casa es que no quede a más de 10 cuadras.

Se dispone de 4 locales: Local 1, cerveza a 14.00$, antigüedad 3 años, 3 cuadras; Local 2 , cerveza a 8.00$, antigüedad 7 años, 12 cuadras; Local 3, cerveza a 10.00$, antigüedad 4 años, 9 cuadras; Local 4, cerveza a 12.50$, antigüedad 5 años, 10 cuadras

Defina: conjuntos borrosos, verifique por lógica clásica y por lógica difusa si alguno de los locales cumple con el requerimiento de Juan.

Ejemplo- Supongamos que:

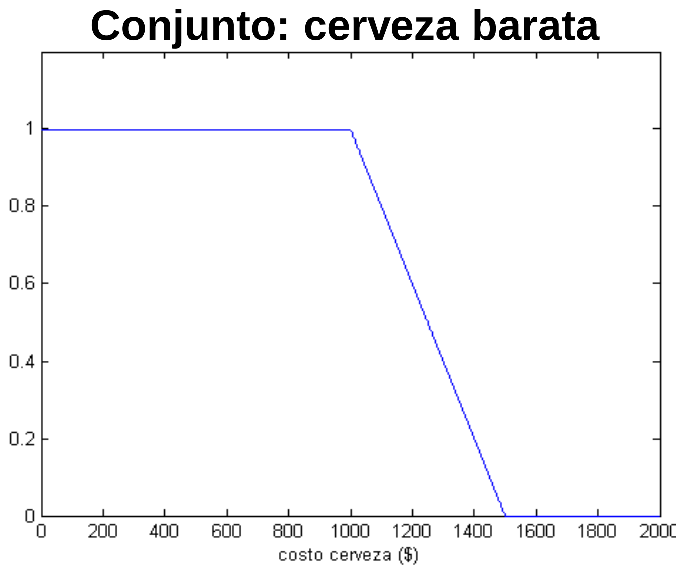
- Unas personas desean ir a tomar cerveza que sea **barata**, y
- en un local **tradicional**, y
- que el local quede **cerca** de su casa

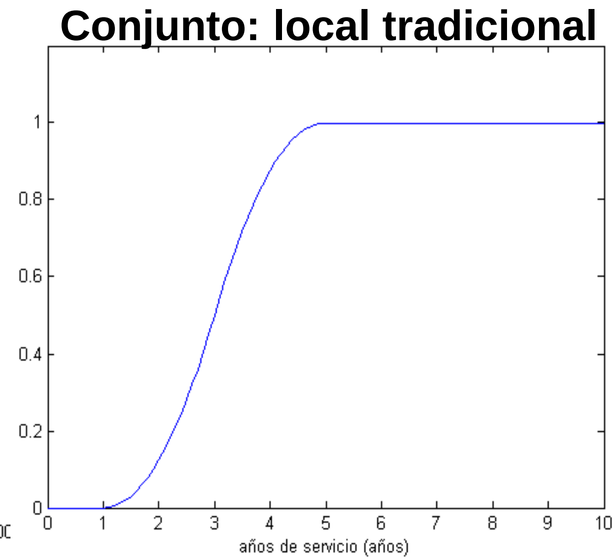
Se dispone de 4 lugares conocidos

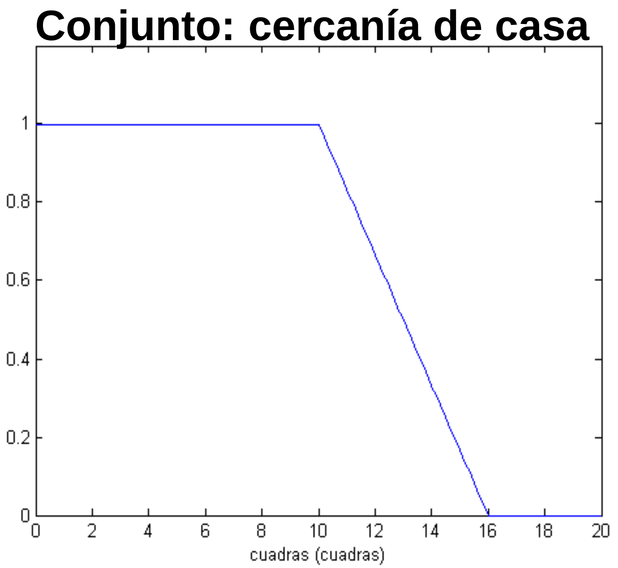
Podemos distinguir tres conjuntos difusos

1) Cerveza barata
2) Local tradicional
3) Cercanía de su casa

- Una **cerveza barata** es una que cueste alrededor de $1000 o menos
- Un **local tradicional** es un local que al menos tenga 5 años funcionando.
- Que **quede cerca** de su casa es que no quede a más de 10 cuadras







Características de los locales

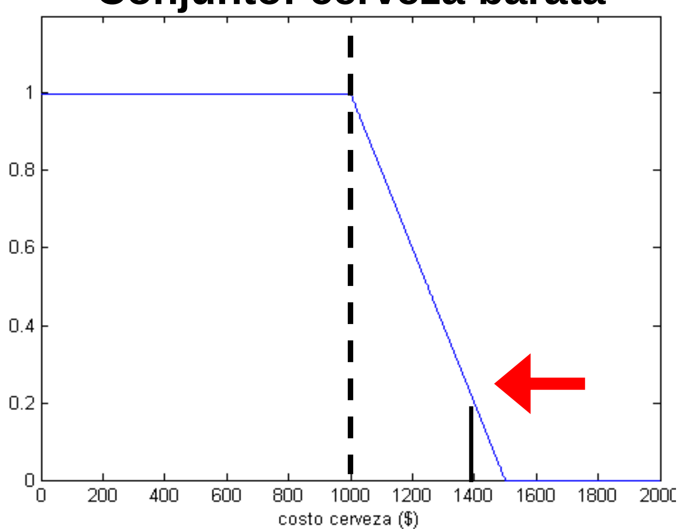
	Precio Cerveza ($)	Años de servicio (años)	Cuadras
Local 1	1400	3	3
Local 2	800	7	12
Local 3	1000	4	9
Local 4	1250	5	10

	Precio Cerveza ($)	**Años de servicio**	**Cuadras**	**Solución clásica**
Local 1	0	0	1	
Local 2				
Local 3				
Local 4				

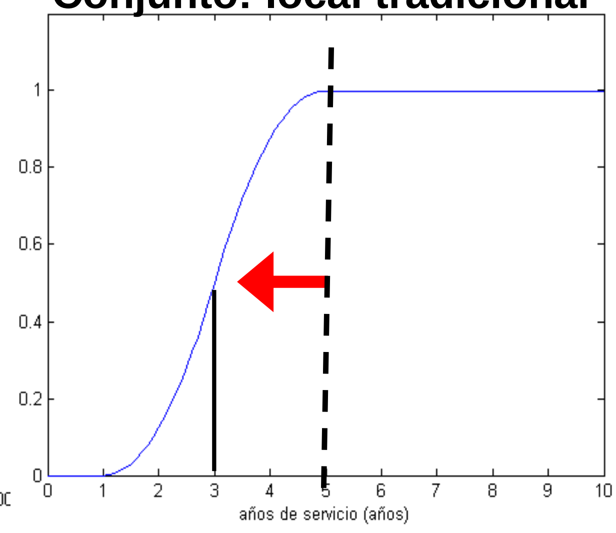
	Precio Cerveza ($)	**Años de servicio**	**Cuadras**	**Solución difusa**
Local 1	0,2	0,5	1	
Local 2				
Local 3				
Local 4				

T-norm

Conjunto: cerveza barata



Conjunto: local tradicional



Conjunto: cercanía de casa