Métodos Numéricos - LCC 2020

Docentes: Alejandro G. Marchetti, Juan Manuel Rabasedas, Lucas Venturato,
Agustín Gurvich

Práctica 5: Resolución de sistemas de ecuaciones lineales. Métodos iterativos

1. Considerar los siguientes sistemas de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} \phantom{x_1 - {}} 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0.375 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ -x_2 + 1.1x_3 = 0 \end{cases}$$

   a) Si se aplicara el método iterativo de Jacobi para resolver cada uno de los sistemas anteriores, podría asegurarse la convergencia?

   b) Ídem *a*) para el método de Gauss-Seidel.

   c) Resolver los sistemas anteriores con una tolerancia de 10^{-2} a partir de $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$.

2. Considerar el sistema lineal

$$\begin{pmatrix} 10 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 9 & -1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 7 & 3 & -5 \\ 3 & 2 & 3 & 12 & -1 \\ 4 & -3 & -5 & -1 & 15 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -27 \\ 14 \\ -17 \\ 12 \end{pmatrix}$$

   Partiendo de $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$, aproximar su solución mediante los métodos de Jacobi y de Gauss-Seidel, utilizando como criterio de terminación $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\| \leq 10^{-6}$. Indicar el número de iteraciones que requiere cada método. Notar que la matriz de coeficientes es simétrica y definida positiva, pero no de diagonal estrictamente dominante.

3. Encontrar la forma explícita para la matriz de iteración del método de Gauss-Seidel para un sistema $\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ cuya matriz es

$$\mathsf{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & \cdots & \cdots & & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Crear en Scilab la siguiente matrix A de $N \times N$ y el vector $\mathbf{b}$:

```
A = 8*eye(N,N) + 2*diag(ones(N-1,1),1) 2*diag(ones(N-1,1),-1)
      + diag(ones(N-3,1),3) + diag(ones(N-3,1),-3)
b = ones(N,1)
```

   Resolver el sistema $\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ con $N = 500$ y con $N = 1000$, empleando los métodos de Eliminación de Gauss con pivoteo parcial y de Gauss-Seidel. Para el método de Gauss-Seidel partir de $\mathbf{x}^{(0)} = \mathbf{0}$ utilizando como tolerancia $\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^{(k-1)}\| \leq \epsilon$ con $\epsilon = 10^{-6}$ y con $\epsilon = 10^{-12}$. En cada caso, determinar el tiempo que le lleva a Scilab resolver el sistema, para lo cual se puede usar la secuencia de comandos `tic(); algoritmo; t=toc()`.

5. Método de sobrerrelajación (SOR). Sea $\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ un sistema $n \times n$ de ecuaciones lineales y sea $w \in \mathbb{R}^+$. Considerar la siguiente modificación del esquema de Gauss-Seidel, conocida como el método de sobrerrelajación:

$$x_i^{(k+1)} = \frac{w}{a_{ii}} \left(\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} \right) + (1-w) x_i^{(k)}$$

Si A es una matriz definida positiva y tridiagonal se demuestra que la elección óptima para el parámetro w del método SOR viene dada por

$$w = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \rho(\mathsf{T}_j)^2}}$$

siendo T_j la matriz del método de Jacobi correspondiente al sistema $\mathsf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$.

Resolver el siguiente sistema lineal usando el algoritmo SOR con una tolerancia de 10^{-2}

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & 3x_2 & & & = & 24 \\ 3x_1 & + & 4x_2 & - & x_3 & = & 30 \\ & - & x_2 & + & 4x_3 & = & -24 \end{array} \right.$$

cuya solución es $\mathbf{x} = (3, 4, -5)^{\mathsf{T}}$. Partiendo de un mismo vector inicial calcular cuántas iteraciones se necesitan para aproximar la solución con una precisión de siete lugares decimales empleando:

a) el método de Gauss-Seidel

b) el método de SOR con el parámetro de relajación óptimo.