(3) $J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \cdot \sin(t))\, dt$

Sabemos que el error de interpolar J_0 por un pol. P_n de grado n en $x_0, \dots, x_n \in [0;1]$ es:

$$|E_n(x)| = |J_0(x) - P_n(x)| = \frac{|\Phi_n(x)|}{(n+1)!} \cdot |J_0^{(n+1)}(\xi(x))| \quad \text{donde}$$

$\Phi_n(x) = (x - x_0) \cdots (x - x_n)$ y $\xi(x) \in (0;1)$.

Como debemos analizar las interpolacion lineal y cuadratica, debemos calcular J_0'' y J_0''' y acotarlas.

Para esto definimos $g(x;t) = \cos(x \cdot \operatorname{sen} t)$. Como vemos, g es continua, con derivadas continuas $\Rightarrow$ podemos derivar J_0.

$$J_0'(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x \cdot \operatorname{sen} t) \cdot \operatorname{sen}(t)\, dt$$

Al igual que antes, J_0' es continua y sus derivadas tambien. Luego:

$$J_0''(x) = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \cdot \operatorname{sen} t) \cdot \operatorname{sen}(t)^2\, dt$$

$$J_0'''(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x \cdot \operatorname{sen} t) \cdot \operatorname{sen}(t)^3$$

Como las funciones $\cos(x) \leq 1$ y $\operatorname{sen}(x) \leq 1$

$$|J_0''(x)| = \left| -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(x \cdot \operatorname{sen} t) \cdot \operatorname{sen}(t)^2\, dt \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |\cos(x \cdot \operatorname{sen} t)| \cdot |\operatorname{sen}(t)|^2\, dt$$

$$\leq \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} 1\, dt = 1$$

$$|J_0'''(x)| = \left| \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{\pi} \operatorname{sen}(x \cdot \operatorname{sen} t) \cdot (\operatorname{sen} t)^3\, dt \right| \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} |\operatorname{sen}(x \cdot \operatorname{sen} t)| |\operatorname{sen} t^3|\, dt \leq 1$$

Ahora tenemos que $|E_2(x)| \leq \frac{|\Phi_2(x)|}{2!} = \frac{|x - x_i| \, |x - x_{i+1}|}{2!}$

$$|E_3(x)| \leq \frac{|\Phi_3(x)|}{3!} = \frac{|x - x_i| \, |x - x_{i+1}| \, |x - x_{i+2}|}{3!}$$