Trabajo Práctico: Área Temática N°1

Universidad Nacional de San juan

Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales

Licenciatura en Ciencias de la Computación

Teoría de la información

2023

Docentes:

- Mag. Ing. Raul O. Klenzi
- Lic. Manuel Oscar Ortega
- Lic. Frabrizio Amaya

Integrantes:

- Capdevila, Juan Manuel Registro: 20.367
- Ratner, Agustin Registro: 20.285

Parte 1

1. Supóngase un dispositivo móvil de 256 colores que posee una resolución de 800x480. Indicar cuál es la cantidad de información que puede brindar el dispositivo mediante la emisión de una imagen. Si el dispositivo es sustituido por una versión mejorada donde ahora la imagen es de 1360x768 y además está codificada en true color, ¿Qué cantidad de información puede brindar?.
2. ¿Qué información genera un locutor de radio a través de 1000 palabras tomadas al azar de un vocabulario de 10000?.
3. ¿Qué relación existe entre las dos cantidades anteriores?.
4. Demostrar las siguientes igualdades:
$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} = \log_a b * log_b x$$
5. Sea una fuente F con cuatro elementos (s1, s2, s3, s4) donde p1=½; p2=¼; p3=p4=⅛; Encontrar los valores de la cantidad de información individual y de la entropía.
6. Comprobar que al tirar un dado, si las probabilidades individuales son iguales se logra el máximo valor de la información promedio. Contrastarlo con el siguiente juego de probabilidades: p1=1/3; p2=1/4; p3=1/6; p4=1/9; p5=1/12; p6=1/18.
7. Sean 12 monedas una de las cuales tiene peso diferente, indicar cuántas pesadas son necesarias para encontrarla, especifique la metodología de peso.
8. ¿Cuál es el contenido de información de una letra del abecedario de 27 letras? ¿Cuál es el de las letras tomadas de a dos y tres? Suponiendo a priori que no existe preferencia por ninguna de las letras.
9. ¿Cómo serán las cifras anteriores respecto de la forma castellana de escritura cotidiana? Si a su criterio existiera diferencia ¿a qué se debería?.
10. Detalle las propiedades de la cantidad de información.
11. Dada una variedad V = 1000 sucesos encontrar la base óptima de representación que hace mínima la siguiente relación número más corto, es decir que minimice I . b (cantidad de información por base).

Parte 2

1. Sea el siguiente canal
$$\begin{array}{ccc} & b_1 & b_2 \\ a_1 & 0.8 & 0.2 \\ a_2 & 0.4 & 0.6 \end{array}$$
   a. Calcular los valores de p(ai/bj) y las probabilidades de salida para el caso particular de p1=p2=½.
2. Dado un canal binario simétrico con las siguientes probabilidades: p(a1)=1/5, p(b1/a1)=7/8, p(b1/a2)=1/8.

   a. Calcular las probabilidades condicionales hacia atrás y las probabilidades conjuntas.
   b. Obtener la entropía del emisor, y las condicionales de la fuente para cualquier símbolo de salida.
   c. Calcule la información mutua y el valor de la capacidad de canal.
3. Sean F 1 ={1, 2, 3, 4} y F 2 ={2, 4, 6, 8} dos fuentes equiprobables e independientes. Sea F una fuente cuya salida es el mínimo común múltiplo entre las dos fuentes, es decir F={x/x=mcm(F1, F2)}. a) Calcule la entropía de la fuente F. b) Calcule la información mutua I(F, F1). c) Suponga que le proponen adivinar F, y como ayuda le dejan escoger entre conocer F1 o conocer F2 , ¿qué opción preferiría? Justifique su respuesta y calcule la probabilidad de adivinar F con la opción elegida anteriormente.
4. De un ejemplo de canal determinante y con probabilidades a elección obtenga la información mutua.
5. Dada la siguiente matriz de canal:

$$\begin{array}{cccc} & a & b & c \\ a & \frac{1}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} \\ b & \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ c & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array}$$

   a. p(a)=1/4, p(b)=1/8, p(c)=5/8 para los distintos elementos de salida obtenga las respectivas codificaciones de la fuente.

Parte 3

Los software se presentarán en la carpeta adjunta al documento, escritos en Python y C#.

Respuestas

Parte 1

1.
    a. Datos:

    Colores: 256

    Pantalla: 800x480

    $$I_{1px} = \log_2\left(\frac{1}{\frac{1}{256}}\right) = \log_2 256 = \log_2 2^8 = 8\, bits/símbolo$$

    $$I_{img} = I_{1px} * (800 * 480) = 8 * 800 * 480 = 3.072.000\, bits/símbolo$$

    b. Datos:

    True colors: 2^24

    Pantalla: 1360x768

    $$I_{1px} = \log_2\left(\frac{1}{\frac{1}{2^{24}}}\right) = \log_2 2^{24} = 24\, bits/símbolo$$

    $$I_{img} = I_{1px} * (1360 * 768) = 24 * 1360 * 768 = 25.067.520\, bits/símbolo$$

2. Datos:

    Palabras: 1000

    Vocabulario: 10000

    $$I_{1p} = \log_2\left(\frac{1}{\frac{1}{10000}}\right) = \log_2 10000 = 13,2877\, bits/palabra$$

    $$I_{1000p} = I_{1p} * 1000 = 13.2877 * 1000 = 13287,7\, bits/palabra$$

3. La relación que encontramos es la validación de la frase “Una imagen vale más que mil palabras”.
4. Dado que $log_a x = log_b x / log_b a$ y teniendo en cuenta la propiedad de logaritmo $1/log_b a = log_a b$

    $$log_b x / log_b a = 1/ log_b a * log_b x$$

    $$log_b x / log_b a = log_a b * log_b x$$

    Por lo tanto $log_a x = log_a b * log_b x$

5. Datos:

    p1=½ p2=¼ p3=p4=⅛;

$$I_{p1} = \log_2\left(\frac{1}{\frac{1}{2}}\right) = \log_2 2 = 1$$

$$I_{p2} = \log_2\left(\frac{1}{\frac{1}{4}}\right) = \log_2 4 = 2$$

$$I_{p3} = I_{p4} = \log_2\left(\frac{1}{\frac{1}{8}}\right) = \log_2 8 = 3$$

$$\sum_{i=1}^{q} p_i \cdot I_i = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{4}\cdot 2 + 2\left(\frac{1}{8}\cdot 3\right) = 1,75$$

6. Datos:
   a. p1 = p2 = p3 = p5 = p6 = 1/6

   $$\sum_{i=1}^{q} p_i \cdot \log_2\left(\frac{1}{p_i}\right) = 6\left[\frac{1}{6}\cdot \log_2\left(\frac{1}{\frac{1}{6}}\right)\right] = 2,58496$$

   b.

p1 = 1/3	p4=1/9
p2 = 1/4	p5=1/12
p3 = 1/6	p6=1/18

$$\sum_{i=1}^{q} p_i \cdot \log_2\left(\frac{1}{p_i}\right)$$

$$\frac{1}{3}\cdot\log_2\left(\frac{1}{\frac{1}{3}}\right) + \frac{1}{4}\cdot\log_2\left(\frac{1}{\frac{1}{4}}\right) + \frac{1}{6}\cdot\log_2\left(\frac{1}{\frac{1}{6}}\right) +$$

$$\frac{1}{9}\cdot\log_2\left(\frac{1}{\frac{1}{9}}\right) + \frac{1}{12}\cdot\log_2\left(\frac{1}{\frac{1}{12}}\right) + \frac{1}{18}\cdot\log_2\left(\frac{1}{\frac{1}{18}}\right) = 2,34177$$

7. Suponiendo que la moneda de peso distinto pese menos que las demás.

   Podemos dividir en 2 grupos de 6 monedas y pesarlas para ver cuál es el grupo de monedas que pese menos, luego seguir con el mismo procedimiento con el grupo de monedas de menor peso hasta encontrar la menos pesada.
   La cantidad de pesadas es 3.

   Por otro lado, se puede elegir una cantidad mínima (por ejemplo 4) de monedas para formar 2 grupos y ver si sus pesos difieren, si ese es el caso, la moneda que buscamos estará en el grupo con menor peso, si el peso entre ambos grupos es igual, entonces la moneda que buscamos está en el grupo de monedas que no analizamos, por lo que repetimos el proceso sabiendo que las monedas previamente analizadas ninguna es la que buscamos.
8. Datos:

   Letras: 27

   $$I_{letra} = \log_2\left(\frac{1}{\frac{1}{27}}\right) = \log_2(27) = 4,75788$$

Luego si tomamos las letras de a:

Dos: $I_{letra} * 2 = 9,50977$

Tres: $I_{letra} * 3 = 14,26466$

9. Será diferente la cantidad de información aportada debido a las probabilidades desiguales entre las letras, siendo la ‘a’ aquella con la probabilidad más alta y por ejemplo si aparece una ‘q’ inmediatamente después siempre aparece una ‘u’ lo cual no aporta nada de información.
10. Las propiedades de la cantidad de información asociada a un evento i son:
    I. Siempre es mayor o igual a cero $I_i \geq 0$
    II. Directamente proporcional a la improbabilidad de ocurrencia del evento i
    III. Aumenta con la cantidad de posibles mensajes i
    IV. $I(A \cap B \cap C) = I_A + I_B + I_C$ Donde A, B y C son eventos independientes
    V. Entropía H (información promedio) se maximiza ante eventos equiprobables
11. $log_b 1000 * b =$

$= \frac{log_{10} 1000}{log_{10} b} * b$ por propiedad $log_b x = \frac{log_{10} x}{log_{10} b}$

$= \frac{3b}{log_{10} b}$

Aplicando derivada primera respecto de la base b para encontrar el mínimo

$$\frac{d}{db}\left(\frac{3b}{log_{10} b}\right) = 0$$

$$\frac{3 log_{10} b - 3b \frac{1}{b\, ln(10)}}{(log_{10} b)^2} = 0$$

$3 log_{10} b - \frac{3}{ln(10)} = 0$ Multiplicando el denominador en ambos lados

$$3 log_{10} b = \frac{3}{ln(10)}$$

$$log_{10} b = \frac{1}{ln(10)}$$

$10^{log_{10} b} = 10^{\frac{1}{ln(10)}}$ Aplicando 10^x en ambos lados de la ecuación

$$b = e$$

La base óptima de representación que hace mínima I.b es la base e

Parte 2

1.

$p(b_1)=p(a_1)*p(b_1/a_1)+p(a_2)*p(b_1/a_2) = ½ * 0,8 +½ * 0.2 = 0.5$
$p(b_2)=p(a_1)*p(b_2/a_1)+p(a_2)*p(b_2/a_2)= ½ * 0,4 +½ * 0.6 = 0.5$

$p(a_1/b_1) = p(a_1)*p(b_1/a_1) / p(b_1) = ½ *0.8 /0.5 = 0.8$
$p(a_2/b_1) = p(a_2)*p(b_1/a_2) / p(b_1) = ½ *0.2 /0.5 =0.2$
$p(a_1/b_2) = p(a_1)*p(b_2/a_1) / p(b_2) = ½ *0.4 /0.5 =0.4$
$p(a_2/b_2) = p(a_1)*p(b_2/a_2) / p(b_2) = ½ *0.6 /0.5 =0.6$

2. $p(a_1)=⅕$ $p(b_1/a_1)=⅞$ $p(b_1/a_2)=⅛$

	b_1	b_2
a_1	⅞	⅛
a_2	⅛	⅞

$p(b_1)=p(a_1)*p(b_1/a_1)+p(a_2)*p(b_1/a_2)$

$p(b_2)=p(a_1)*p(b_2/a_1)+p(a_2)*p(b_2/a_2)$

$p(b_1)=⅕*⅞*+⅘*⅛=0.275$

$p(b_2)=⅕*⅞*+⅘*⅛=0.725$

Probabilidades conjuntas:

$P(a_1,b_1)= ⅕ * 0.275 = 0.055$
$P(a_1,b_2)= ⅕ * 0.725 = 0.145$
$P(a_2,b_1)= ⅘ * 0.275 = 0.22$
$P(a_2,b_2)= ⅘ * 0.725 = 0.58$

Probabilidades condicionadas:

$$P(a_1/b_1) = \frac{P(a_i)\cdot P(b_j/a_i)}{P(b_j)} = \frac{1/5\cdot 7/8}{0.275} = 0.63636363\ldots$$
$$P(a_1/b_2) = \frac{P(a_i)\cdot P(b_j/a_i)}{P(b_j)} = \frac{1/5\cdot 7/8}{0.725} = 0.03448$$
$$P(a_2/b_1) = \frac{P(a_i)\cdot P(b_j/a_i)}{P(b_j)} = \frac{4/5\cdot 1/8}{0.275} = 0.36363636\ldots$$
$$P(a_2/b_2) = \frac{P(a_i)\cdot P(b_j/a_i)}{P(b_j)} = \frac{4/5\cdot 7/8}{0.725} = 0.96551$$

3.

	2	4	6	8	12	24
2	½	¼	¼			
4		¾			¼	
6			¾		¼	
8				¾		¼

$$I(F,F_1) = H(F) - H(F/F_1)$$
$$H(F) = 2(2/16\ \cdot \log_2 16/2) + 2(4/16 \cdot \log_2 16/4) + 3/16 \cdot \log_2 16/3 + 1/16 \cdot \log_2 16$$
$$\begin{aligned} H(F/F_1) &= \sum_{i=1}^{q} p(a_i) \cdot \sum_{j=1}^{q} p(b_j/a_j) \cdot \log_2\ \cdot \frac{1}{p(b_j/a_i)} \\ &= p(1) \cdot \left[p(2/1) \cdot \log_2 \frac{1}{p(2/1)} + p(4/1) \cdot \log_2 \frac{1}{p(4/1)} + \ldots . \right] \\ &= 1/4 \cdot [1/4 \cdot \log_2\ 4 + 1/4 \cdot \log_2\ 4 + 1/4 \cdot \log_2\ 4 + 1/4 \cdot \log_2\ 4] \\ &= 1/4 \cdot [2/4 \cdot \log_2 4/2 + 1/4 \cdot \log_2\ 4 + 1/4 \cdot \log_2\ 4] \\ &= 2 \cdot [1/4[\log_2 4]] + 2 \cdot 1/4[1/2 \log_2\ 2 + 1/2 \cdot \log_2\ 4] \\ &= 1/2 \cdot 2 + 1/2[1/2 \cdot 1 + 1/2 \cdot 2] \\ &= 1 + 3/4 = 1.75 \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} H(F/F_2) &= 1/4 \cdot [1/2 \cdot \log_2 2 + 2 \cdot 1/4 \cdot \log_2 4] \\ &= +3 \cdot 1/4[3/4 \cdot \log_2 4/3 + 1/2 \cdot \log_2 4] \\ &= 1/4[1/2 + 1] + 3/4[3/4 \cdot \log_2 4/3 + 1/2] \\ &= 0.98345 \end{aligned}$$

4. Aclaración: Tanto las probabilidades de las entradas como las probabilidades de las salidas son equiprobables.

	b1	b2	b3
a1	1.00	0.00	0.00
a2	0.00	1.00	0.00
a3	0.00	0.00	1.00

Para calcular la I(a,b) = H(B) - H(B/A)
H(B) = p(bj)*log2(1/p(bj))
H(B/A) = sum(p(bj)*sum(p(bj/ai)*log2(p(bj/ai)))

H(B) = 1.58346745

H(B/A) = 0

I(A,B) = H(B) - H(B/A)

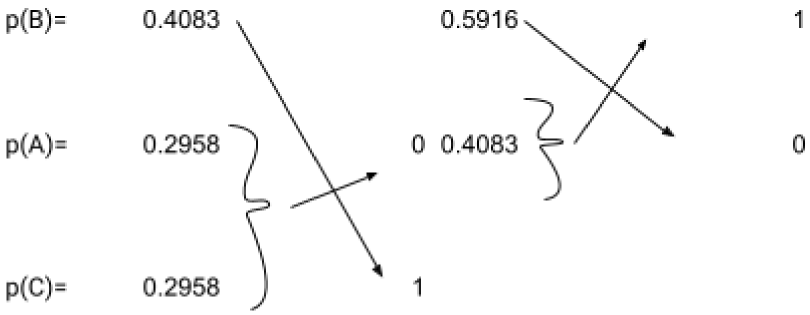
I(A,B) = H(B)

Esto se produce porque no hay error en el canal de transmisión
Como el canal es determinante la información es máxima

5. Para codificar primero debemos calcular las probabilidades de salida:

   $P(A)=a_a*p(a)+a_b*p(b)+a_c*p(c)=0.25*0.25+0.2*0.125+0.33*0.625=0.29583$
   $P(B)=b_a*p(a)+b_b*p(b)+b_c*p(c)=0.4083$
   $P(C)=c_a*p(a)+c_b*p(b)+c_c*p(c)=0.2958$

   Ya tenemos las probabilidades de cada símbolo, procedemos a generar la codificación. Para ello utilizaremos Huffman:



La codificación nos queda de la siguiente forma:

B= 0
A= 10
C= 11