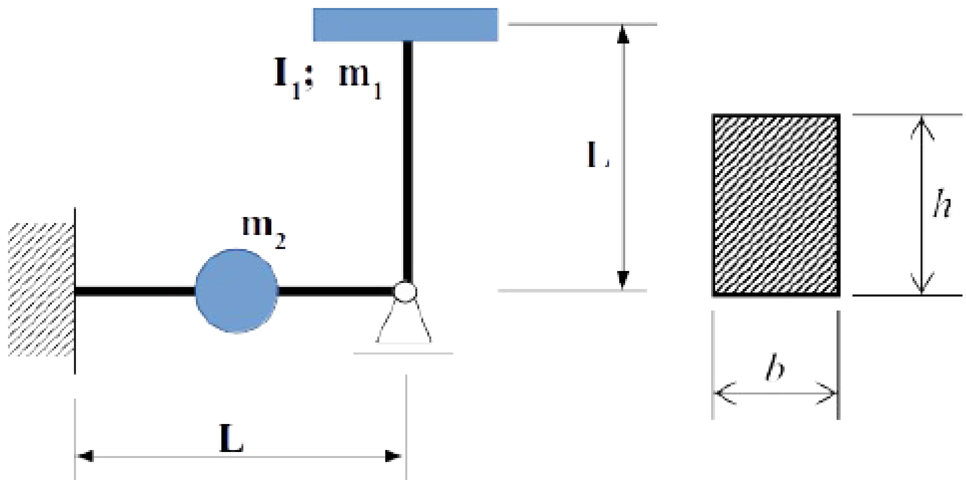
Cálculo Estructural I – 2do Cuatrimestre 2017

Trabajo Práctico Número 9: 12/10/17

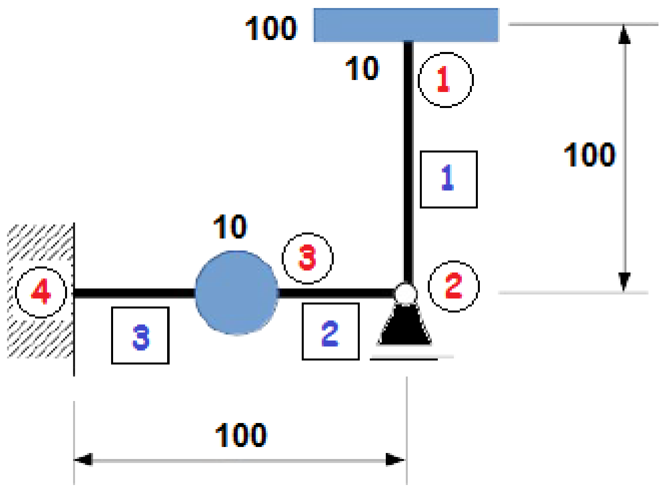
(Fecha de entrega: 19/10/17)



Donde: m1 = m2 = 10 ; I2 = 100 ; b = 5 ; h = 10. Unidades consistentes.

1. Calcular la matriz K.
2. Calcular la matriz F.
3. Comparar resultados
4. Calcular frecuencias y modos, utilizando un método analítico, un procedimiento numérico (stodola), y algún software.
5. Comparar resultados.

Designación de nudos y barras:



1. Cálculo de la matriz de rigidez condensada

Matriz de rigidez barra 1 (Nudos 1-2):

$$\begin{Bmatrix} u_1^x \neq 0 \\ u_1^y = 0 \\ \theta_1 \neq 0 \\ \cdots \\ u_2^x \neq 0 \\ u_2^y = 0 \\ \theta_2 \neq 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} K_1 & 0 & K_2 & & -K_1 & 0 & K_2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ K_2 & 0 & K_3 & & -K_2 & 0 & K_3/2 \\ -K_1 & 0 & -K_2 & & K_1 & 0 & -K_2 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ K_2 & 0 & K_3/2 & & -K_2 & 0 & K_3 \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez barra 2 (Nudo 2-3):

$$\begin{Bmatrix} u_2^x \neq 0 \\ u_2^y = 0 \\ \theta_2 \neq 0 \\ \cdots \\ u_3^x = 0 \\ u_3^y \neq 0 \\ \theta_3 \neq 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} K & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 & & 0 & K_2 & K_3/2 \\ & \cdots & & & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_2 & \vdots & 0 & K_1 & K_2 \\ 0 & 0 & K_3/2 & & 0 & K_2 & K_3 \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez barra 3 (Nudo 3-4):

$$\begin{Bmatrix} u_3^x = 0 \\ u_3^y \neq 0 \\ \theta_3 \neq 0 \\ \cdots \\ u_4^x = 0 \\ u_4^y = 0 \\ \theta_4 = 0 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_1 & -K_2 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -K_2 & K_3 & & 0 & 0 & 0 \\ & \cdots & & & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Matriz de rigidez general</u>:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & 0 & K_{13} & K_{14} & 0 & K_{16} & 0 & K_{18} & K_{19} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{31} & 0 & K_{33} & K_{34} & 0 & K_{36} & 0 & K_{38} & K_{39} \\ K_{41} & 0 & K_{43} & K_{44} & 0 & K_{46} & 0 & K_{48} & K_{49} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{61} & 0 & K_{63} & K_{64} & 0 & K_{66} & 0 & K_{68} & K_{69} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{81} & 0 & K_{83} & K_{84} & 0 & K_{86} & 0 & K_{88} & K_{89} \\ K_{91} & 0 & K_{93} & K_{94} & 0 & K_{96} & 0 & K_{98} & K_{99} \end{bmatrix}$$

Desacoplando los grados de libertad geométricos que no están ligados a desplazamientos permitidos a la estructura, y luego hacemos operaciones elementales con matrices para reordenar el vector desplazamientos de la siguiente manera:

$$\left\{\begin{matrix} u_1^x \\ u_1^y \\ \theta_1 \\ \cdots \\ u_2^x \\ u_2^y \\ \theta_2 \\ \cdots \\ u_3^x \\ u_3^y \\ \theta_3 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} u_1^x \\ \theta_1 \\ \cdots \\ u_2^x \\ \theta_2 \\ \cdots \\ u_3^y \\ \theta_3 \end{matrix}\right\}$$

$$\left\{\begin{matrix} u_1^x \\ \theta_1 \\ \cdots \\ u_2^x \\ \theta_2 \\ \cdots \\ u_3^y \\ \theta_3 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} u_1^x \\ \theta_1 \\ u_3^y \\ \cdots \\ \theta_2 \\ u_2^x \\ \theta_3 \end{matrix}\right\}$$

La nueva matriz de rigidez es:

$$\begin{bmatrix} \begin{matrix} K_1^1 & K_2^1 & 0 \\ K_2^1 & K_3^1 & 0 \\ 0 & 0 & K_1^2+K_1^3 \end{matrix} & \vdots & \begin{matrix} K_2^1 & -K_1^2 & 0 \\ K_3^1/2 & -K_2^1 & 0 \\ K_2^2 & 0 & K_2^2-K_2^3 \end{matrix} \\ \cdots & & \cdots \\ \begin{matrix} K_2^1 & -K_3^1/2 & K_2^2 \\ -K_1^1 & -K_2^1 & 0 \\ 0 & 0 & K_2^2-K_2^3 \end{matrix} & \vdots & \begin{matrix} K_3^1+K_3^2 & -K_2^1 & \dfrac{K_3^2}{2} \\ -K_2^1 & K_1^1+K^2 & 0 \\ \dfrac{K_3^2}{2} & 0 & K_3^2+K_3^3 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

Tomando en consideración que la barra 2 y la barra 3 son dimensionalmente idénticas podemos hacer la siguiente simplificación:

$$\begin{bmatrix} \begin{matrix} K_1^1 & K_2^1 & 0 \\ K_2^1 & K_3^1 & 0 \\ 0 & 0 & 2K_1^2 \end{matrix} & \vdots & \begin{matrix} K_2^1 & -K_1^2 & 0 \\ K_3^1/2 & -K_2^1 & 0 \\ K_2^2 & 0 & 0 \end{matrix} \\ \cdots & & \cdots \\ \begin{matrix} K_2^1 & -K_3^1/2 & K_2^2 \\ -K_1^1 & -K_2^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} & \vdots & \begin{matrix} K_3^1+K_3^2 & -K_2^1 & \dfrac{K_3^2}{2} \\ -K_2^1 & K_1^1+K^2 & 0 \\ \dfrac{K_3^2}{2} & 0 & 2K_3^2 \end{matrix} \end{bmatrix}$$

Luego la matriz de rigidez condensada resulta:

$$[\boldsymbol{K_c}] = \begin{bmatrix} K_1^1 & K_2^1 & 0 \\ K_2^1 & K_3^1 & 0 \\ 0 & 0 & 2K_1^2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} K_2^1 & -K_1^2 & 0 \\ K_3^1/2 & -K_2^1 & 0 \\ K_2^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} K_3^1+K_3^2 & -K_2^1 & \dfrac{K_3^2}{2} \\ -K_2^1 & K_1^1+K^2 & 0 \\ \dfrac{K_3^2}{2} & 0 & 2K_3^2 \end{bmatrix}^{\boldsymbol{-1}} * \begin{bmatrix} K_2^1 & -K_3^1/2 & K_2^2 \\ -K_1^1 & -K_2^1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$K_1^1 = \frac{3EI}{250000}$; $K_2^1 = \frac{3EI}{5000}$; $K_3^1 = \frac{EI}{25}$; $K^2 = E$; $K_1^2 = \frac{3EI}{31250}$; $K_2^2 = \frac{3EI}{1250}$; $K_3^2 = \frac{2EI}{25}$

Unidades consistentes. Luego $E = 2{,}1 * 10^6\ y\ I = \frac{1250}{3}$

$K_1^1 = 10500$; $K_2^1 = 525000$; $K_3^1 = 35 * 10^6$; $K^2 = 2{,}1 * 10^6$; $K_1^2 = 84000$; $K_2^2 = 2{,}1 * 10^6$; $K_3^2 = 70 * 10^6$

Reemplazando obtenemos la siguiente ecuación:

$$[\boldsymbol{K_c}] =$$

$$\begin{bmatrix} 10500 & 525000 & 0 \\ 525000 & 35*10^6 & 0 \\ 0 & 0 & 168000 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 525000 & -10500 & 0 \\ 35*10^6 & -525000 & 0 \\ 2{,}1*10^6 & 0 & 0 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 1{,}0404*10^{-8} & 2{,}5880*10^{-9} & -2{,}6009*10^{-9} \\ 2{,}5880*10^{-9} & 4{,}7446*10^{-7} & -6{,}470*10^{-10} \\ -2{,}6009*10^{-9} & -6{,}470*10^{-10} & 7{,}7931*10^{-9} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 525000 & 35*10^6 & 2{,}1*10^6 \\ -10500 & -525000 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Llevando los valores a Matlab obtenemos:

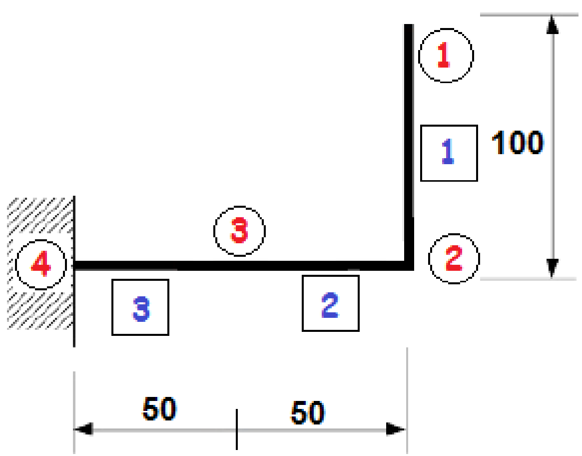
$$[\boldsymbol{Kc}] = \begin{bmatrix} 7.608{,}7 & 427.989{,}1 & -11.413{,}0 \\ 427.989{,}1 & 31.730.638{,}6 & -379.483{,}7 \\ -11.413{,}0 & -379.483{,}7 & 122.119{,}6 \end{bmatrix}$$

La matriz de flexibilidad resulta:

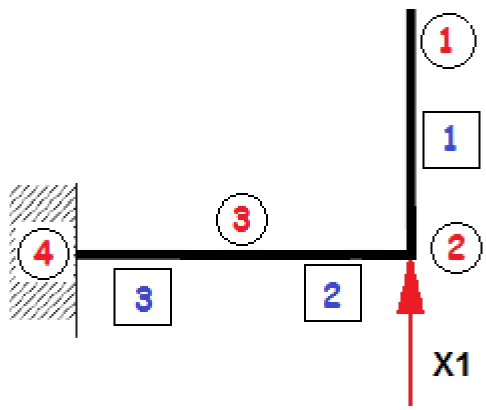
$$[\boldsymbol{F}] = \begin{bmatrix} 6{,}671*10^{-4} & -8{,}571*10^{-6} & 3{,}571*10^{-5} \\ -8{,}571*10^{-6} & 1{,}428*10^{-7} & -3{,}571*10^{-7} \\ 3{,}571*10^{-5} & -3{,}571*10^{-7} & 1{,}042*10^{-5} \end{bmatrix}$$

2. Determinación de la matriz de flexibilidad

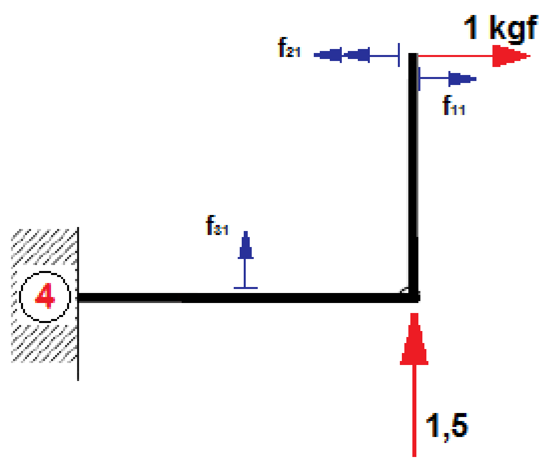
Por flexibilidad aplicando método de las fuerzas resulta lo siguiente:
Estructura isostática fundamental:



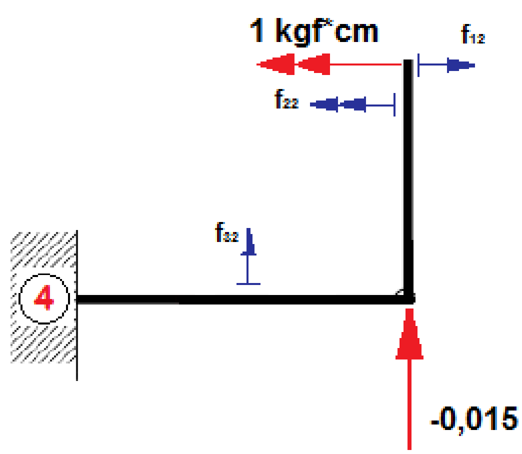
Estructura isostática equivalente:



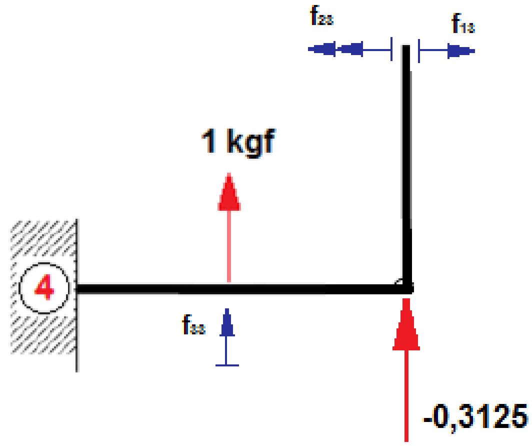
Hipótesis de carga 1:



Hipótesis de carga 2:



Hipótesis de carga 3:



Calculando los desplazamientos correspondientes para cada hipótesis de carga, resulta:

$$[\boldsymbol{F}] = \begin{bmatrix} 6{,}671 * 10^{-4} & -8{,}571 * 10^{-6} & 3{,}571 * 10^{-5} \\ -8{,}571 * 10^{-6} & 1{,}428 * 10^{-7} & -3{,}571 * 10^{-7} \\ 3{,}571 * 10^{-5} & -3{,}571 * 10^{-7} & 1{,}042 * 10^{-5} \end{bmatrix}$$

Cuya inversa es:

$$[\boldsymbol{Kc}] = \begin{bmatrix} 7.608{,}7 & 427.989{,}1 & -11.413{,}0 \\ 427.989{,}1 & 31.730.638{,}6 & -379.483{,}7 \\ -11.413{,}0 & -379.483{,}7 & 122.119{,}6 \end{bmatrix}$$

3. Comparación de los resultados

Agarramos la estructura y la cargamos en PORTI, los valores son aproximados debido al orden de magnitud con el arroja los resultados, obtuvimos lo siguiente:

TP 09 - MATRIZ DE FLEXIBILIDAD - CALCULO ESTRUCTURAL I

4 NUDOS 3 BARRAS 2 APOYOS 0 INCLIN 1 SECC 1 MAT 3 HIPOT

BARRA	NUDO I	NUDO J	SECCIÓN	MATERIAL	EXTREMOS
1	1	2	1	1	0
2	2	3	1	1	0
3	3	4	1	1	0

NUDO	COOR X	COOR Y
1	0.0000	0.0000
2	50.0000	0.0000
3	100.0000	0.0000
4	100.0000	100.0000

SECC	AREA	INERCIA	Acorte	Hsuper	Hinfer
1	50.000	416.670	**1041.670**	5.000	5.000

(ponemos área de corte grande para que desprecie los efectos del corte)

MATERIAL	E	G	alfa	peso
1	2100000.0	81000.0	0.0000100	0.0000

HIPOTESIS DE CARGA NUMERO 1

NUDO	FUERZA X	FUERZA Y	MOMENTO
4	1.000	0.000	0.000

HIPOTESIS DE CARGA NUMERO 2

NUDO	FUERZA X	FUERZA Y	MOMENTO
4	0.000	0.000	1.000

HIPOTESIS DE CARGA NUMERO 3

NUDO	FUERZA X	FUERZA Y	MOMENTO
2	0.000	1.000	0.000

APOYOS

NUDO	cod X	cod Y	cod Z	DATO X	DATO Y	DATO Z
1	1	1	1	0.00000	0.00000	0.00000
3	0	1	0	0.00000	0.00000	0.00000

RESULTADOS HIPÓTESIS NÚMERO 1

BARRA	NUDO	AXIAL	CORTE	FLECTOR	TENSION
1	1	-1.000	-1.495	-49.53	0.6
	2	1.000	1.495	-25.23	0.3
2	2	-1.000	-1.495	25.23	0.3
	3	1.000	1.495	-100.00	1.2
3	3	0.000	1.000	100.00	1.2
	4	0.000	-1.000	0.00	0.0

D E S P L A Z A M I E N T O S				---- R E A C C I O N E S -----		
NUDO	DespX	DespY	Rotación	FuerzaX	FuerzaY	MOMENTO
1	0.00000	0.00000	0.0000000	-1.00	-1.50	-49.5
2	0.00000	**0.00004**	0.0000007	0.00	0.00	0.0
3	0.00000	0.00000	-0.0000029	0.00	1.50	0.0
4	**0.00067**	0.00000	**-0.0000086**	0.00	0.00	0.0

$$\begin{Bmatrix} f_{11} \\ f_{21} \\ f_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0{,}00067 \\ -8{,}6 * 10^{-6} \\ 4 * 10^{-5} \end{Bmatrix}$$

RESULTADOS HIPÓTESIS NÚMERO 2

BARRA	NUDO	AXIAL	CORTE	FLECTOR	TENSION
1	1	0.000	0.015	0.50	0.0
	2	0.000	-0.015	0.25	0.0
2	2	0.000	0.015	-0.25	0.0
	3	0.000	-0.015	1.00	0.0
3	3	0.000	0.000	-1.00	0.0

4	0.000	0.000	1.00	0.0

DESPLAZAMIENTOS ---- REACCIONES -----

NUDO	DespX	DespY	Rotación	FuerzaX	FuerzaY	MOMENTO
1	0.00000	0.00000	0.0000000	0.00	0.01	0.5
2	0.00000	**0.00000**	0.0000000	0.00	0.00	0.0
3	0.00000	0.00000	0.0000000	0.00	-0.01	0.0
4	**-0.00001**	0.00000	**0.0000001**	0.00	0.00	0.0

$$\begin{Bmatrix} f_{12} \\ f_{22} \\ f_{32} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -0{,}00001 \\ 1 * 10^{-7} \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Acá se ve el error asociado al orden de magnitud con el que trabaja PORTI f32 = -3e-7

RESULTADOS HIPÓTESIS NÚMERO 3

BARRA	NUDO	AXIAL	CORTE	FLECTOR	TENSION
1	1	0.000	-0.687	-18.69	0.2
	2	0.000	0.687	-15.65	0.2
2	2	0.000	0.313	15.65	0.2
	3	0.000	-0.313	0.00	0.0
3	3	0.000	0.000	0.00	0.0
	4	0.000	0.000	0.00	0.0

DESPLAZAMIENTOS ---- REACCIONES -----

NUDO	DespX	DespY	Rotación	FuerzaX	FuerzaY	MOMENTO
1	0.00000	0.00000	0.0000000	0.00	-0.69	-18.7
2	0.00000	**0.00001**	0.0000001	0.00	0.00	0.0
3	0.00000	0.00000	-0.0000004	0.00	-0.31	0.0
4	**0.00004**	0.00000	**-0.0000004**	0.00	0.00	0.0

$$\begin{Bmatrix} f_{13} \\ f_{23} \\ f_{33} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 4 * 10^{-5} \\ -4 * 10^{-7} \\ 1 * 10^{-5} \end{Bmatrix}$$

Valores que aproximadamente se acercan al de los puntos 1 y 2.

4. Calcular frecuencias y modos, utilizando cálculo analítico, método de Stodola, y verificación vía software

Aplicando un método analítico:

$$([Kc] - \lambda * [M]) * U = 0$$
$$\left|[Kc] - \lambda * |M|\right| = 0$$

Lo que resulta:

$$\left\| \begin{bmatrix} 7.608,7 - 10\lambda & 427.989,1 & -11.413,0 \\ 427.989,1 & 31.730.638,6 - 100\lambda & -379.483,7 \\ -11.413,0 & -379.483,7 & 122.119,6 - 10\lambda \end{bmatrix} \right\| = 0$$

Desarrollando el determinante:

$$(f_{11} - 10\lambda) * (f_{22} - 100\lambda) * (f_{33} - 10\lambda) + f_{13}f_{32}f_{21} * 2 - f_{13}^2 * (f_{22} - 100\lambda) - f_{12}^2 * (f_{33} - 10\lambda) - f_{32}^2 * (f_{11} - 10\lambda) = 0$$

Separando en términos:

$\lambda^0: f_{11}f_{22}f_{33} + 2f_{13}f_{32}f_{21} - f_{12}^2 f_{33} - f_{13}^2 f_{22} - f_{32}^2 f_{11} = 5,592 * 10^{15}$

$\lambda^1: -10f_{22}f_{33} - 100f_{11}f_{33} - 10f_{11}f_{22} + 100f_{13}^2 + 10f_{12}^2 + 10f_{32}^2 = -3,797 * 10^{13}$

$\lambda^2: 1000f_{11} + 100f_{22} + 1000f_{33} = 3,303 * 10^9$

$\lambda^3: -10000$

La ecuación característica resulta:

$$-10000\lambda^3 + 3,303 * 10^9\lambda^2 - 3,797 * 10^{13}\lambda + 5,592 * 10^{15} = 0$$

Obtenemos las siguientes raíces:

$$\begin{cases} \lambda_1 = 149,2147 \\ \lambda_2 = 11.772,6450 \\ \lambda_3 = 318.357,3560 \end{cases}$$

$se\ cumple\ que\ \lambda_i = \omega_i^2$

Las frecuencias asociadas a cada uno de los autovalores son:

$$\begin{cases} \omega_1 = 12,22\ Hz \\ \omega_2 = 108,50\ Hz \\ \omega_3 = 564,23\ Hz \end{cases}$$

Para calcular los modos suponemos la primera componente del modo numéricamente igual 1 y reemplazando el valor de λ_i en:

$([Kc] - \lambda * [M]) * U = 0$

Donde $U_1 = \begin{cases} 1 \\ U_1^2 \\ U_1^3 \end{cases} (para\ \lambda_1 = 149,2147)$;

Donde $U_2 = \begin{cases} 1 \\ U_2^2 \\ U_2^3 \end{cases} (para\ \lambda_2 = 11.772,6450)$;

Donde $U_3 = \begin{cases} 1 \\ U_3^2 \ (para\ 318.357{,}3560) \\ U_3^3 \end{cases}$

Resolvemos los 3 sistemas de ecuaciones de (3x3), luego normalizamos el vector que obtenemos, y finalmente conseguimos los modos de la estructura:

$$\underline{\widehat{\emptyset}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}01285 \\ 0{,}05419 \end{bmatrix} ;\ \underline{\widehat{\emptyset}}_2 = \begin{bmatrix} -0{,}0524 \\ 0{,}0133 \\ 1 \end{bmatrix} ;\ \underline{\widehat{\emptyset}}_3 = \begin{bmatrix} 0{,}1353 \\ 1 \\ -0{,}1260 \end{bmatrix}$$

<u>Aplicando el método de Stodola</u> (hoja de cálculos adjunta en tp)

Primero hacemos el producto matricial de la matriz de flexibilidad condensada y de masa:

$$[FM] = \begin{bmatrix} 6{,}671 * 10^{-3} & -8{,}571 * 10^{-4} & 3{,}571 * 10^{-4} \\ -8{,}571 * 10^{-5} & 1{,}428 * 10^{-5} & -3{,}571 * 10^{-6} \\ 3{,}571 * 10^{-4} & -3{,}571 * 10^{-5} & 1{,}042 * 10^{-4} \end{bmatrix}$$

Para el MODO 1: tomamos como vector de prueba a $(U_1)_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Sin necesidad de andar filtrando, al cabo de 5 iteraciones obtenemos los siguientes valores:

$$\widehat{U}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}01284618 \\ 0{,}05419888 \end{bmatrix}$$

$$U_1 = \begin{bmatrix} 0{,}00670136 \\ -0{,}00008608 \\ 0{,}00036321 \end{bmatrix}$$

$$\omega_1^2 = \frac{1}{0{,}00670136} \rightarrow \omega_1^2 = 149{,}222 \rightarrow \omega_1 = 12{,}22\ Hz$$

$$\therefore\ \underline{\widehat{\emptyset}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}01284618 \\ 0{,}05419888 \end{bmatrix}$$

<u>MODO 2</u>:

Cálculos previos para hacer el filtrado en el vector de prueba para determinar el modo 2:

Proponemos $(U_2)_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Luego

$$q_1 = \frac{\left[\underline{\widehat{\emptyset}}_1\right]^T * [M] * [(U_2)_0]}{\left[\underline{\widehat{\emptyset}}_1\right]^T * [M] * \left[\underline{\widehat{\emptyset}}_1\right]} \rightarrow q_1 = \frac{9{,}25737010}{10{,}0458776} \rightarrow q_1 = 0{,}9215$$

$$(U_2)_1 = (U_2)_0 - q_1 * \widehat{U}_1 \ \rightarrow (U_2)_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 0{,}9215 * \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}01284618 \\ 0{,}05419888 \end{bmatrix}$$

$$(U_2)_1 = \begin{bmatrix} 0{,}07849 \\ 1{,}011837 \\ 0{,}95005 \end{bmatrix}$$

Por último normalizamos el vector para obtener:

$$\left(\widehat{U}_2\right)_1 = \begin{bmatrix} 0{,}07757 \\ 1 \\ 0{,}9389 \end{bmatrix}$$

Vector que finalmente usaremos para comenzar a aplicar el método iterativo de Stodola. Al cabo de 3 iteraciones obtenemos el vector normalizado:

$$\left(\widehat{U}_2\right)_3 = \begin{bmatrix} -0{,}05255 \\ 0{,}01442 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Repetimos la filtración utilizando los siguientes parámetros:

$$q_1 = \frac{\left[\underline{\widehat{\emptyset}}_1\right]^T * [M] * [\left(\widehat{U}_2\right)_3]}{\left[\underline{\widehat{\emptyset}}_1\right]^T * [M] * \left[\underline{\widehat{\emptyset}}_1\right]}$$

$$\left(\widehat{U}_2\right)_4 = \left(\widehat{U}_2\right)_3 - q_1 * \underline{\widehat{\emptyset}}_1$$

Y luego de dos iteraciones más llegamos al resultado siguiente:

$$\omega_2^2 = \frac{1}{0{,}00008419} \rightarrow \omega_2^2 = 11877{,}75 \rightarrow \omega_2 = 108{,}9\ Hz$$

$$\therefore \underline{\widehat{\emptyset}}_2 = \begin{bmatrix} -0{,}0686 \\ 0{,}0134 \\ 1 \end{bmatrix}$$

<u>MODO 3</u>:

Por último, proponemos el vector $(U_3)_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y dado que conocemos $\underline{\widehat{\emptyset}}_1$ ^ $\underline{\widehat{\emptyset}}_2$, determinamos los coeficientes de participación modal “q” para cada modo:

$$q_1 = \frac{\left[\underline{\widehat{\emptyset}}_1\right]^T * [M] * [(U_3)_0]}{\left[\underline{\widehat{\emptyset}}_1\right]^T * [M] * \left[\underline{\widehat{\emptyset}}_1\right]} = 0{,}92156\ ;\ q_2 = \frac{\left[\underline{\widehat{\emptyset}}_2\right]^T * [M] * [(U_3)_0]}{\left[\underline{\widehat{\emptyset}}_2\right]^T * [M] * \left[\underline{\widehat{\emptyset}}_2\right]} = 1{,}08711$$

Hacemos la filtración para obtener el vector asociado al modo:

$$\widehat{U}_3 = (U_3)_0 - q_1 * \left[\underline{\widehat{\emptyset}}_1\right] - q_2 * \left[\underline{\widehat{\emptyset}}_2\right]$$

$$\widehat{U}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - 0{,}92156 * \begin{bmatrix} 1 \\ -0{,}01284618 \\ 0{,}05419888 \end{bmatrix} - 1{,}08711 * \begin{bmatrix} -0{,}0686 \\ 0{,}0134 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\widehat{U}_3 = \begin{bmatrix} 0{,}12269 \\ 0{,}99753 \\ -0{,}1370 \end{bmatrix}$$

Finalmente nos queda normalizar el vector $\widehat{U}_3$ para obtener el valor del modo, y calcular la frecuencia propia del mismo, entonces:

$$\underline{\widehat{\emptyset}}_3 = \begin{bmatrix} 0{,}123 \\ 1 \\ -0{,}1378 \end{bmatrix}$$

$$[FM] * \underline{\widehat{\emptyset}}_3 = \begin{bmatrix} 2{,}980 * 10^{-7} \\ 3{,}134 * 10^{-6} \\ -5{,}303 * 10^{-7} \end{bmatrix}$$

$$\omega_3^2 = \frac{1}{3{,}134 * 10^{-6}} \;\rightarrow\; \omega_3^2 = 319081{,}0 \;\rightarrow\; \omega_3 = 564{,}8\, Hz$$

5. Comparamos resultados por medio de un algoritmo programado en Phyton

IMPORTANTE: LA VERSION QUEDÓ FUNCIONANDO EN UN MODO BETA, TIENE LAS MATRICES CARGADAS MANUALMENTE PERO CUENTA CON UNA FUNCION PARA QUE SE INGRESEN POR PANTALLA CADA UNA DE LAS MATRICES. DURANTE EL TESTEO DEL ALGORITMO LLEVABA MUCHO TIEMPO CARGAS LAS MATRICES CADA VEZ QUE SE CORRIA EL PROGRAMA. ADEMAS FALTA DEPURAR EL FORMATO PARA INGRESAR DATOS POR PANTALLA.
EL ALGORITMO ES EL SIGUIENTE (CRUDO):

```
### PROGRAMA PARA CALCULAR LOS MODOS Y FRECUENCIAS MEDIANTE EL METODO DE STODOLA
#
# 1. ESPACIO RESERVADO PARA EL MENU


# 2. CARGAR FUNCIONES
def COPIAR_MATRIZ_(M):
  X = []
  for i in range(len(M)):
    for j in range(len(M[0])):
      a = M[i][j]
      X.append([a])
  return X

def NORMALIZACION_(M):
  X = COPIAR_MATRIZ_(M)
  aux = []
  for i in range (len(M)-1):
    if abs(M[i][0]) > abs(M[i+1][0]):
      aux = (M[i][0])
      M[i][0]= M[i+1][0]
      M[i+1][0]=aux
  A = M[-1][0]
  for i in range (len(M)):
    X[i][0]/=A
  return X

def MATRIZ_TRANSPUESTA_(A):
  X = []
  Y = []
  for i in range (len(A)):
    Y.append(A[i][0])
  X.append(Y)
```

```
  return X

def COEFICIENTE_MODAL_(V, A, U):
  X = MATRIZ_TRANSPUESTA_(V)
  F1_ = PRODUCTO_MATRIZ_(X,A)
  F2_ = PRODUCTO_MATRIZ_(F1_,U)
  F3_ = PRODUCTO_MATRIZ_(F1_,V)
  a = F2_[0][0]/F3_[0][0]
  return a

def FILTRADO_ (A,B,q):
  X = VECTOR_(len(A))
  for i in range(len(A)):
    X[i][0]= A[i][0] - q * B[i][0]
  return X

def MATRIZ_(d):
  X=[]
  for i in range(d):
    X.append([0]*d)
  return X

def MATRIZ_2_(m,n):
  X=[]
  for i in range(m):
    X.append([0]*n)
  return X

def VECTOR_(d):
  X = []
  for i in range (d):
    X.append([1])
  return X

def MATRIZ_COMPLETA_(M): ## CORREJIR FORMATO DE IMPRESION
  for i in range (len(M)):
    for j in range (len(M[0])):
      print '--- [F] ---\nElemento ', [i+1], [j+1]
      M[i][j]= float(raw_input('>> '))
  return M

def MATRIZ_DIAGONAL_(M):
  for i in range (len(M)):
    for j in range (len(M[0])):
      if i==j:
        print '--- [M] ---\nElemento ', [i+1], [j+1]
        M[i][j]= float(raw_input('>> '))
  return M

def PRODUCTO_MATRIZ_(A,B):  ## OBS: A[i][k]*B[k][l] = R [i][l]
  R=[]
  R = MATRIZ_2_(len(A),len(B[0]))
  sum = 0.0
  for i in range (len(A)):
    for l in range (len(B[0])):
      for k in range (len(A[0])):
        sum += A[i][k]*B[k][l]
      R[i][l] = sum
      sum = 0.0
  return R
```

```
# 3. PROGRAMA PRINCIPAL:
##ADVERTENCIA!! [F] Y [M] ESTAN CARGADOS A MANO

d = int(raw_input('dimension de la matriz de flexibilidad: '))
#F = MATRIZ_(d)
#M = MATRIZ_(d)
#F = MATRIZ_COMPLETA_(F)
#M = MATRIZ_DIAGONAL_(M)
############################## CARGA MANUAL DE F Y M - TEMPORAL
F = [[6.671e-4 , -8.571e-6 , 3.581e-5] , [-8.571e-6 , 1.428e-7 , -3.571e-7] , [3.571e-5 , -3.571e-7 , 1.042e-5]]
M = [[10 , 0 , 0] , [0 , 100 , 0] , [0 , 0 , 10]]
FM = PRODUCTO_MATRIZ_(F,M)
U_0 = VECTOR_(d)

# 3.1 APLICACION DEL METODO DE STODOLA

# 3.1.1 PRIMER MODO
U_1 = PRODUCTO_MATRIZ_(FM,U_0)
for i in range (5): #numero arbitrario de iteraciones: 5
  U_1 = NORMALIZACION_(U_1)
  aux = U_1[0][0]
  U_1 = PRODUCTO_MATRIZ_(FM,U_1)
  w_1 = aux/U_1[0][0]
phi_1 = NORMALIZACION_(U_1)

print '\ncolumna phi_1: \n',phi_1[0],'\n', phi_1[1],'\n', phi_1[2], '\n\nfrecuencia asoiada\nw1^2 = ', w_1 ,'\nFIN MODO 1'

# 3.1.2 SEGUNDO MODO
q_1 = COEFICIENTE_MODAL_(phi_1, M, U_0)
U_2 = FILTRADO_(U_0,phi_1,q_1)
U_2 = NORMALIZACION_(U_2)
for i in range(6):
  U_2 = PRODUCTO_MATRIZ_(FM,U_2)
  U_2 = NORMALIZACION_(U_2)
  q_2 = COEFICIENTE_MODAL_(phi_1, M, U_2)
  U_2 = FILTRADO_(U_2, phi_1, q_2)
  U_2 = NORMALIZACION_(U_2)
phi_2 = COPIAR_MATRIZ_(U_2)
U_2 = PRODUCTO_MATRIZ_(FM,U_2)
aux = U_2[2][0]
w_2 = phi_2[2][0]/aux

print '\ncolumna phi_2: \n',phi_2[0],'\n', phi_2[1],'\n', phi_2[2], '\n\nfrecuencia asociada\nw2^2 = ', w_2 ,'\nFIN MODO 2'

# 3.1.3 TERCER MODO
q_2 = COEFICIENTE_MODAL_(phi_2, M, U_0)
U_3 = FILTRADO_(U_0, phi_1, q_1)
U_3 = FILTRADO_(U_3, phi_2, q_2)
U_3 = NORMALIZACION_(U_3)
##print '\n U_3 = ', U_3, '\n'
phi_3 = COPIAR_MATRIZ_(U_3)
aux = U_3[1][0]
U_3 = PRODUCTO_MATRIZ_(FM,U_3)
w_3 = aux/U_3[1][0]


print '\ncolumna phi_3: \n',phi_3[0],'\n', phi_3[1],'\n', phi_3[2], '\n\nfrecuencia asociada\nw3^2 = ', w_3 ,'\nFIN MODO 3'
```