Métodos numéricos para mecánica celeste entre Júpiter, la Tierra y la Luna

Pablo Agustín Nava Vieyra

Objetivo

Este proyecto busca visualizar, mediante métodos numéricos, el comportamiento en la órbita de tres cuerpos celestes partiendo de una posición iniciales y viendo su evolución en el tiempo.

Motivación

El problema de la mecánica de los tres cuerpos es famoso por carecer de una solución analítica. Cómo lo descubrió Pointcaré tras el reto impuesto por el Rey Oscar II de Suiza, que quería saber sí la Tierra mantendría su trayectoria elíptica indefinidamente. La solución de Pointcaré afirmaba que sistemas como la Tierra, la Luna y el Sol eran estables, considerando que pequeños cambios en las condiciones iniciales no producirían un cambio considerable. Sin embrago, Pointcaré se dio cuenta que esta suposición era errada y ràpidamente retracto sus resultaods. De esa manera surge el estudio de los sistemas dinámicos y la teoría del caos.

Pese a que ha habido algunos avances en la teoría de sistemas dinámicos (cómo los hechos por Stephen Smale), el problema de los tres cuerpos sigue siendo un ejercicio perfecto para ser implementado mediante métodos numéricos.

Definición y procedimiento

El sistema planetario que se explorará pretende contestar la longeva y trascendental pregunta: ¿qué sucedería si todos los 79 satélites conocidos de Júpiter desaparecieran, y en su lugar apareciera la Tierra con la luna orbitando a su alrededor?

Unidades

Pare ello tendremos que formar un sistema de unidades manejable para trabajar con la escala planetaria de forma más cómoda. De esta forma las unidades de longitud y masa se usarán en relación al diámetro (d_T) y masa (m_T) de nuestro planeta. En cuanto a las unidades de tiempo seguiremos empleando segundos.

De manera que el valor de la constante gravitacional queda redefinida en términos de nuestras nuevas unidades:

$$G = 6.674 \times 10^{-11} \frac{m^3}{kg \cdot s^2} \left(\frac{1 d_T}{12713600 m} \right)^3 \left(\frac{5.9736 \times 10^{24} kg}{1 m_T} \right) = 1.940 \times 10^-7 \frac{{d_T}^3}{m_T \cdot s^2}$$

También tendremos nuevas unidades de fuerza que se le denominarán en este trabajo como Leibniz, correspondiendo a:

$$[L] = \frac{5.9736 \times 10^{24} kg \times 12713600 m}{1 s^2} = 7.594596 \times 10^{31} [N]$$

Valores iniciales

El sistema a considerar tomará a Júpiter en el centro de nuestro sistema de referencia en su posición inicial. La Tierra estará orbitando alrededor de Júpiter a la velocidad tangencial relativa con la que se desplazan alrededor del sol. La posición inicial que ocupará en este escenario será la distancia que habitualmente le corresponde a Europa (el satélite natural, no el continente, obviamente). Y la luna estará desplazándose alrededor de la Tierra con la velocidad y distancia inicial que acostumbra (velocidad y distancia media).

Por simplicidad y sin pérdida de generalidad, se considerarán a los tres cuerpos celestes en el mismo plano, por lo que no hay necesidad de considerar fuerzas normales a las mismas, sino se considerarán las componentes bidimensionales del plano cartesiano.

Ecuación diferencial

Durante la evolución de nuestro sistema, la variable más importante para describir la trayectoria de los planetas es la aceleración. Para conocer proporcionalmente la aceleración, se utilizó la ecuación diferencial correspondiente a la ley universal de gravitación de Newton donde:

$$a_i = \sum_j \frac{m_j}{|r_j - r_i|^3}(r_i - r_j)$$

Una vez obtenida la aceleración se obtienen fácilmente la evolución de la velocidad a partir de la ecuación:

$$v_{t+\Delta t} = v_t + G \cdot \Delta t \cdot a_t$$

Y así obtenemos la posición:

$$r_{t+\Delta t} = r_t + \Delta t \cdot v_t$$

Implementación del código en Matlab

```
%<Constantes y valores iniciales del programa>

G=6.67*10^-11;

      %Jupiter

m_J=317.827;

r_J0=[0,0];

r_J=r_J0;

                  %r_J=[r_J0;[1,2]]

v_J0=[0,0];

v_J=v_J0;

a_J=[0,0];

      %Tierra

m_T=1;
```

```
r_T0=[52.78,0];

r_T=[r_T0];

v_T0=[0.0013151,0];

v_T=[v_T0];

a_T=[0,0];

      %Luna

m_L=0.0123;

r_L0=[82.51,0];

r_L=[r_L0];

v_L0=[0,8.04*10^-5];

v_L=[v_L0];

a_L=[0,0];

      %Diferencial del tiempo para la simulación

 dt=60;

 n=1000;

 %<\Constantes y valores iniciales del programa>


%LAS ECUACIONES DE MOVIMIENTO

for i=2:n

      %JUPITER

 a_J=[a_J;[m_T/((r_J(i-1,1)-r_T(i-1,1))^2+(r_J(i-1,2)-r_T(i-1,2))^2)^(3/2)*(r_T(i-1,1)-r_J(i-1,1)) + m_L/((r_J(i-1,1)-r_L(i-1,1))^2+(r_J(i-1,2)-r_L(i-1,2))^2)^(3/2)*(r_L(i-1,1)-r_J(i-1,1)) , m_T/((r_J(i-1,1)-r_T(i-1,1))^2+(r_J(i-1,2)-r_T(i-1,2))^2)^(3/2)*(r_T(i-1,2)-r_J(i-1,2)) + m_L/((r_J(i-1,1)-r_L(i-1,1))^2+(r_J(i-1,2)-r_L(i-1,2))^2)^(3/2)*(r_L(i-1,2)-r_J(i-1,2))]];

    v_J=[v_J;[v_J(i-1,1)+dt*G*a_J(i,1),v_J(i-1,2)+dt*G*a_J(i,2)]];

    r_J=[r_J;[r_J(i-1,1)+v_J(i,1)*dt,r_J(i-1,2)+v_J(i,2)*dt]];


      %TIERRA
```

```
    a_T=[a_T;[m_J/((r_T(i-1,1)-r_J(i-1,1))^2+(r_T(i-1,2)-r_J(i-1,2))^2)^(3/2)*(r_J(i-1,1)-r_T(i-1,1)) + m_L/((r_T(i-1,1)-r_L(i-1,1))^2+(r_T(i-1,2)-r_L(i-1,2))^2)^(3/2)*(r_L(i-1,1)-r_T(i-1,1)) , m_J/((r_T(i-1,1)-r_J(i-1,1))^2+(r_T(i-1,2)-r_J(i-1,2))^2)^(3/2)*(r_J(i-1,2)-r_T(i-1,2)) + m_L/((r_T(i-1,1)-r_L(i-1,1))^2+(r_T(i-1,2)-r_L(i-1,2))^2)^(3/2)*(r_L(i-1,2)-r_T(i-1,2))]];

    v_T=[v_T;[v_T(i-1,1)+dt*G*a_T(i,1),v_T(i-1,2)+dt*G*a_T(i,2)]];

    r_T=[r_T;[r_T(i-1,1)+v_T(i,1)*dt,r_T(i-1,2)+v_T(i,2)*dt]];



      %LUNA

    a_L=[a_L;[m_J/((r_L(i-1,1)-r_J(i-1,1))^2+(r_L(i-1,2)-r_J(i-1,2))^2)^(3/2)*(r_J(i-1,1)-r_L(i-1,1)) + m_T/((r_L(i-1,1)-r_T(i-1,1))^2+(r_L(i-1,2)-r_T(i-1,2))^2)^(3/2)*(r_T(i-1,1)-r_L(i-1,1)) , m_J/((r_L(i-1,1)-r_J(i-1,1))^2+(r_L(i-1,2)-r_J(i-1,2))^2)^(3/2)*(r_J(i-1,2)-r_L(i-1,2)) + m_T/((r_L(i-1,1)-r_T(i-1,1))^2+(r_L(i-1,2)-r_T(i-1,2))^2)^(3/2)*(r_T(i-1,2)-r_L(i-1,2))]];

    v_L=[v_L;[v_L(i-1,1)+dt*G*a_L(i,1),v_L(i-1,2)+dt*G*a_L(i,2)]];

    r_L=[r_L;[r_L(i-1,1)+v_L(i,1)*dt,r_L(i-1,2)+v_L(i,2)*dt]];

end



%Posiciones a graficar

r_Jx=r_J(:,1);

r_Jy=r_J(:,2);

r_Tx=r_T(:,1);

r_Ty=r_T(:,2);

r_Lx=r_L(:,1);

r_Ly=r_L(:,2);



'Plot ready'

%plot(r_Jx,r_Jy,"m")

plot(r_Tx,r_Ty,"g")

%plot(r_Lx,r_Ly,"b")
```

Resultados

Una vez ejecutado el código, se graficaron las posiciones de los planetas. Obteniendo así las siguientes gráficas de cada planeta.

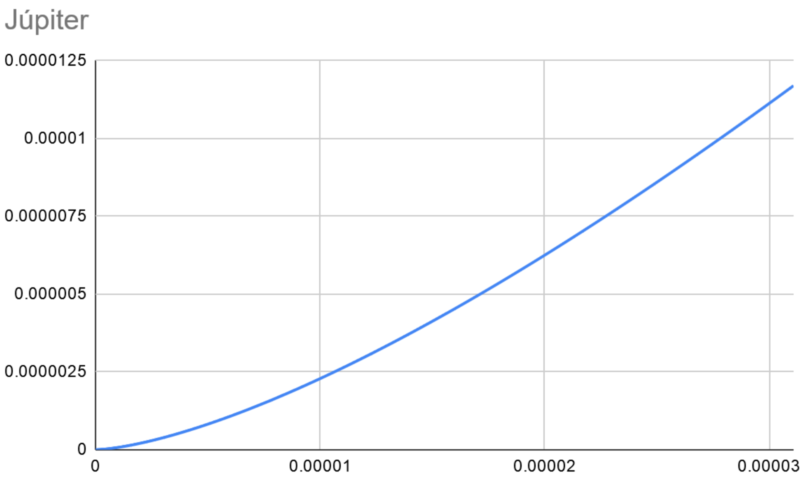

Figura 1. Movimiento de Júpiter en unidades de radios terrestres.

Se aprecia como Júpiter casi no se mueve (en comparación) a consecuencia de su enorme inercia.

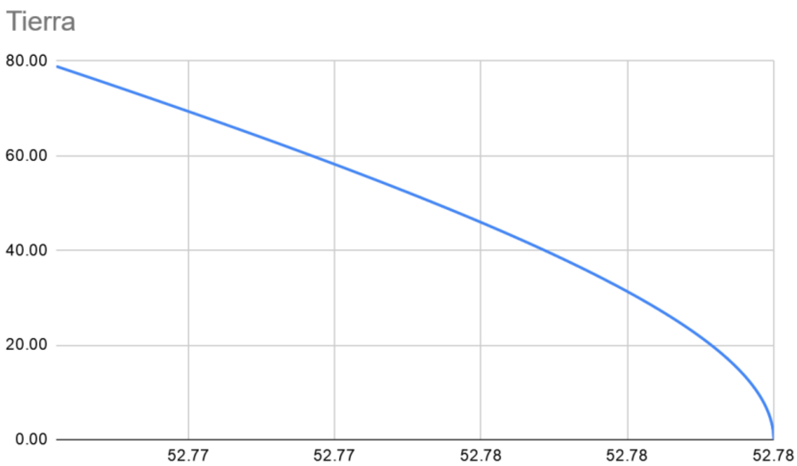

Figura 2. Movimiento de la Tierra en unidades de radios terrestres.

Por su parte, la Tierra si tomo una trayectoria al inicio un tanto curva como elipse, pero luego mantiene una trayectoria recta, escapando a la atracción gravitacional de Júpiter.

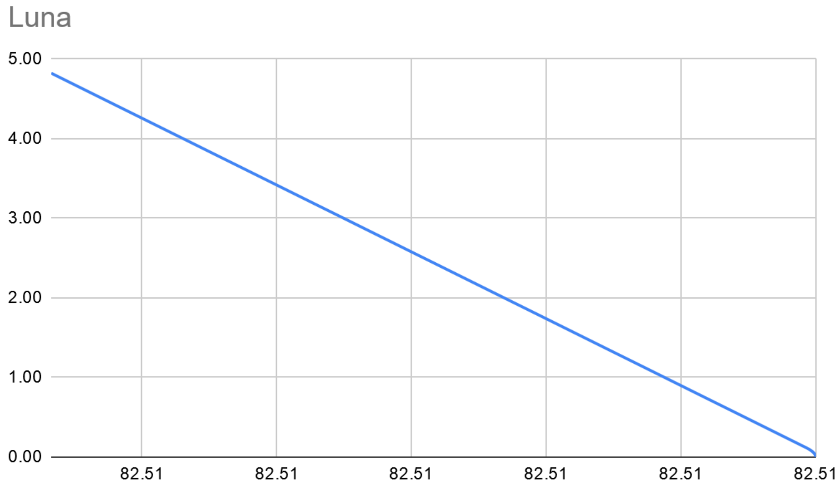

Figura 1. Movimiento de la Luna en unidades de radios terrestres.

Algo similar ocurrió con la trayectoria de la luna, solo que escapando de forma aún más veloz.

Conclusiones

Cómo pudimos observar, pese a que las condiciones del la Luna y la Tierra se mantuvieron iguales a nuestra realidad, el cambio del Sol por Júpiter, estando a una distancia también diferente, afecto la estabilidad orbital de la Tierra y la Luna. Hubiera sido interesante el también correr la simulación con el sistema que conocemos para saber que se efectuaron correctamente los cálculos, o sí hace falta hacer algo de *debugging*.

Como una continuación del proyecto, sería interesante ver si hay una distancia desde la que pueda ponerse la Tierra para estar en un campo gravitacional análogo al del Sol, de manera que estos tres cuerpos celestes puedan estar en una estabilidad que les permita tener más de una revolución. También cómo un segundo avance, resultaría aún más interesante que comprobado este punto de aparente estabilidad, se hiciera el análisis no considerando a los planetas como un punto único, sino cómo una esfera de densidad constante para ver sí hay alguna diferencia perceptible en el comportamiento de estos cuerpos.

Anexo de valores numéricos

Júpiter:

$r_J(0)=(0,0)$
$v_J(0)=(0,0)$
$m_J= 317.827\ m_T$

Tierra:

$r_T(0)=(52.78\ d_T,0)$
$v_T(0)=(0,29.78-13.06\ km/s)=(0,1.3151 \times 10^{-3}\ d_T/s)$
$m_T= 1$

Luna:

$r_{1,L}(0)=(82.51,0)$
$r_{2,L}(0)= 38=(52.78\ d_T, 29.73\ d_T)$
$v_{1,L}(0)=(0,8.039 \times 10^{-5}\ d_T/s)$
$v_{3,L}(0)=(-8.039 \times 10^{-5}\ d_T/s,0)$
$m_L= .01230\ m_T$

Referencias:

Williams, D. *Jupiter Fact Sheet*. Obtenido de: https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/jupiterfact.html

Williams, D. *Jovian Satellite Fact Sheet*. Obtenido de: https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/joviansatfact.html

Williams, D. Moon Fact Sheet. Obtenido de: https://nssdc.gsfc.nasa.gov/planetary/factsheet/moonfact.html