Mediciones generalizadas y discriminación de estados

Introducción a la Mecánica Cuántica

Agustín Fuentes Vidal

28 de julio de 2025

Medidas ideales de von Neumann

Observables como operadores hermíticos

$$\hat{A} = \sum_n \lambda_n |\lambda_n\rangle\langle\lambda_n|$$

- λ_n: Valores propios (Resultados de medición)
- $|\lambda_n\rangle$: Estados propios

Regla de probabilidad

$$P(\lambda_n) = |\langle\lambda_n|\psi\rangle|^2 = \mathrm{Tr}(|\psi\rangle\langle\psi|\lambda_n\rangle\langle\lambda_n|)$$
$$P(\lambda_n) = \langle\lambda_n|\rho|\lambda_n\rangle = \mathrm{Tr}(\rho|\lambda_n\rangle\langle\lambda_n|)$$

Propiedades clave de los proyectores

1. **Hermiticidad**: $\hat{P}_n^\dagger = \hat{P}_n$
2. **Positividad**: $\hat{P}_n \geq 0$
3. **Completitud**: $\sum_n \hat{P}_n = \hat{\mathbb{I}}$
4. **Ortogonalidad**: $\hat{P}_n \hat{P}_m = \delta_{nm} \hat{P}_n$

Importante: Las primeras 3 son físicamente necesarias.

Caso degenerado

Proyector:

$$\hat{P}_n = \sum_j |\lambda_n^j\rangle\langle\lambda_n^j|$$

Probabilidad:

$$P(\lambda_n) = \mathrm{Tr}(\hat{\rho}\hat{P}_n)$$

Post-medición:

$$\hat{\rho} \to \frac{\hat{P}_n\hat{\rho}\hat{P}_n}{\mathrm{Tr}(\hat{\rho}\hat{P}_n)}$$

Mediciones no ideales

- **Problema con mediciones ideales**:
  - Detectores perfectos (sin errores).
  - Proyectores ortogonales: $\hat{P}_0 = |0\rangle\langle 0|$, $\hat{P}_1 = |1\rangle\langle 1|$.
- **Realidad experimental**:
  - Eficiencia finita y errores (p).

Probabilidad con error

$$P(0) = (1-p)\mathrm{Tr}(\hat{\rho}\hat{P}_0) + p\mathrm{Tr}(\hat{\rho}\hat{P}_1)$$

$$P(1) = (1-p)\mathrm{Tr}(\hat{\rho}\hat{P}_1) + p\mathrm{Tr}(\hat{\rho}\hat{P}_0)$$

Forma de von Neumann

$$P(0) = \mathrm{Tr}(\hat{\rho}\hat{\pi}_0), \quad P(1) = \mathrm{Tr}(\hat{\rho}\hat{\pi}_1)$$

Mediciones no ideales

Operadores generalizados

$$\hat{\pi}_0 = (1-p)\hat{P}_0 + p\hat{P}_1, \quad \hat{\pi}_1 = (1-p)\hat{P}_1 + p\hat{P}_0$$

Propiedades

- Hermíticos, positivos, completos.
- **No ortogonales**: $\hat{\pi}_0\hat{\pi}_1 = p(1-p)\hat{1} \neq 0$.

Conclusión

Generalización para mediciones realistas .

$$P_m = \mathrm{Tr}(\hat{\rho}\hat{\pi}_m)$$

Medidas de Operadores de Probabilidad (POM/POVM)

Definición

Conjunto de operadores $\{\hat{\pi}_i\}$ que caracterizan una medición los llamaremos, Medidas de Operadores de Probabilidad (POM)

Propiedades Fundamentales

1. **Universalidad**:
   Todos los tipos de medición cuántica pueden describirse mediante POM
2. **Realizabilidad Física**:
   Cualquier POM puede implementarse experimentalmente (vía Teorema de Naimark: ancilla + medición proyectiva)

Implementación de POVM: Preparación del Sistema

Sistema Cuántico a Medir

- Sistema principal: $|\psi\rangle_s$
- Sistema ancilla: $|A\rangle_a$ (estado conocido)
- Estado combinado inicial:

$$|\Psi_{\text{inicial}}\rangle = |\psi\rangle_s \otimes |A\rangle_a$$

Interacción Unitaria

Aplicamos transformación $\hat{U}$ al sistema conjunto:

$$|\Psi_{\text{final}}\rangle = \hat{U}\left(|\psi\rangle_s \otimes |A\rangle_a\right)$$

- $\hat{U}$: Operador unitario que entrelaza s y a

Implementación de POVM: Medición y Resultados

Probabilidad de Resultados

Medición von Neumann en bases $\{|m\rangle_s\}$ y $\{|l\rangle_a\}$:

$$P(m,l) = \left| \left({}_s\langle m| \otimes_a \langle l| \right) \hat{U} \left(|\psi\rangle_s \otimes |A\rangle_a \right) \right|^2$$

Equivale a:

$$P(m,l) = {}_s\langle\psi|\hat{\pi}_{ml}|\psi\rangle_s$$

Definición del Operador POVM

$$\hat{\pi}_{ml} = {}_a\langle A|\hat{U}^\dagger \left(|m\rangle_s \otimes |l\rangle_a \right) \left({}_a\langle l| \otimes_s \langle m| \right) \hat{U}|A\rangle_a$$

- Actúa solo en s
- Hermitiano y positivo
- $\sum_{ml} \hat{\pi}_{ml} = \hat{I}_s$

Discriminación de Estados No Ortogonales

Problema

Dado un qubit en $|\psi_1\rangle$ o $|\psi_2\rangle$ con $\langle\psi_1|\psi_2\rangle \neq 0$, ¿existe un POVM $\{\hat{\pi}_1, \hat{\pi}_2\}$ que los distinga perfectamente?

Condiciones ideales

$$\begin{cases} \langle\psi_1|\hat{\pi}_1|\psi_1\rangle = 1 & \text{(Detecta } |\psi_1\rangle \text{ siempre)} \\ \langle\psi_2|\hat{\pi}_1|\psi_2\rangle = 0 & \text{(Nunca confunde } |\psi_2\rangle \text{ con } |\psi_1\rangle) \\ \hat{\pi}_1 + \hat{\pi}_2 = \hat{I} & \text{(Completitud POVM)} \end{cases}$$

Discriminación de Estados No Ortogonales

Imposibilidad de discriminación perfecta

Para cualquier $\hat{\pi}_1 = |\psi_1\rangle\langle\psi_1| + \hat{A}$ (con $\hat{A} \geq 0$ y $\hat{A}|\psi_1\rangle = 0$):

$$\langle\psi_2|\hat{\pi}_1|\psi_2\rangle = \underbrace{|\langle\psi_2|\psi_1\rangle|^2}_{>0} + \underbrace{\langle\psi_2|\hat{A}|\psi_2\rangle}_{\geq 0} > 0.$$

¡No se puede satisfacer $\langle\psi_2|\hat{\pi}_1|\psi_2\rangle = 0$!

Discriminación de estados cuánticos con mínima probabilidad de error

Problema

Dado un sistema en uno de los estados $\{\hat{\rho}_j\}$ con probabilidades $\{p_j\}$, encontrar un POVM $\{\hat{\pi}_j\}$ que minimice:

$$P_{\text{error}} = 1 - \sum_j p_j \operatorname{Tr}(\hat{\rho}_j \hat{\pi}_j).$$

Condiciones de optimalidad

$$\hat{\pi}_j (p_j \hat{\rho}_j - p_k \hat{\rho}_k) \hat{\pi}_k = 0 \quad \forall j \neq k$$

$$\sum_i p_i \hat{\rho}_i \hat{\pi}_i - p_j \hat{\rho}_j \geq 0 \quad \forall j$$

Discriminación óptima de dos estados: Caso Helstrom

Objetivo

Distinguir entre dos estados cuánticos $\hat{\rho}_1$ y $\hat{\rho}_2$ con probabilidades a priori p_1 y p_2, **minimizando la probabilidad de error**.

1. **Operador diferencia**:

$$\hat{D} = p_1\hat{\rho}_1 - p_2\hat{\rho}_2.$$

2. **POM óptimo** (medida proyectiva):
   - $\hat{\pi}_1$: Proyector sobre valores propios **positivos** de $\hat{D}$.
   - $\hat{\pi}_2$: Proyector sobre valores propios **negativos** de $\hat{D}$.

3. **Error mínimo (Cota de Helstrom)**:

$$P_{\text{error}}^{\text{min}} = \frac{1}{2}\left(1 - \text{Tr}|\hat{D}|\right).$$

Discriminación Inequívoca

Objetivo

Distinguir entre estados no ortogonales $|\psi_1\rangle$ y $|\psi_2\rangle$:

- **Sin errores**: Identificación segura cuando es posible.
- **Con resultados inconclusos**: Permite ambigüedad.

Ejemplo Simple

Medición von Neumann con proyectores:

$$\hat{P}_1 = |\psi_1\rangle\langle\psi_1|, \quad \hat{P}_{\bar{1}} = |\psi_1^{\perp}\rangle\langle\psi_1^{\perp}|$$

- $\hat{P}_{\bar{1}}$: Detecta $|\psi_2\rangle$ sin error.
- $\hat{P}_1$: Resultado ambiguo.

Discriminación Inequívoca

Estrategia óptima

$$\hat{\pi}_1 = |\psi_2^{\perp}\rangle\langle\psi_2^{\perp}|$$

$$\hat{\pi}_2 = |\psi_1^{\perp}\rangle\langle\psi_1^{\perp}|$$

$$\hat{\pi}_3 = \hat{1} - \hat{\pi}_1 - \hat{\pi}_2$$

Probabilidades Clave

$$P_{\text{éxito}} = 1 - |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|, \quad P_{?} = |\langle\psi_1|\psi_2\rangle|$$

Estados Post-Medición

Limitaciones de von Neumann

- Mediciones proyectivas dejan el estado en un autoestado (idealizado).
- No describen:
  - Mediciones **destructivas** (ej.: detección de fotones).
  - Estados post-medición para POMs **no proyectivos**.

Operadores de Kraus

Transformación del estado $\hat{\rho}$:

$$\hat{\rho} \to \hat{\rho}' = \sum_i \hat{A}_i \hat{\rho} \hat{A}_i^\dagger$$

Condiciones:

- $\sum_i \hat{A}_i^\dagger \hat{A}_i = \hat{\mathbb{I}}$ (conservación de probabilidad).
- $\hat{A}_i^\dagger \hat{A}_i$ es positivo y hermítico.

POMs y Evolución del Estado

Operadores de Probabilidad (POM)

Definidos a partir de Kraus:

$$\hat{\pi}_i = \hat{A}_i^\dagger \hat{A}_i$$

Estado Post-Medición

- **Sin conocer el resultado**:

$$\hat{\rho}' = \sum_i \hat{A}_i \hat{\rho} \hat{A}_i^\dagger$$

- **Conociendo el resultado** i:

$$\hat{\rho}' = \frac{\hat{A}_i \hat{\rho} \hat{A}_i^\dagger}{\mathrm{Tr}(\hat{\pi}_i \hat{\rho})}$$