EJEMPLO 10 En el ejemplo 3 demostramos que las rectas

$$L_1: \quad x = 1 + t \qquad y = -2 + 3t \qquad z = 4 - t$$

$$L_2: \quad x = 2s \qquad y = 3 + s \qquad z = -3 + 4s$$

son oblicuas. Calcule la distancia entre ellas.

SOLUCIÓN Puesto que las dos rectas L_1 y L_2 son oblicuas, puede pensarse que están en los planos paralelos P_1 y P_2. La distancia entre L_1 y L_2 es la misma que la distancia entre P_1 y P_2, la cual puede calcularse como en el ejemplo 9. El vector normal común para ambos planos debe ser ortogonal a $\mathbf{v}_1 = \langle 1, 3, -1\rangle$ (la dirección de L_1) y $\mathbf{v}_2 = \langle 0, 1, 4\rangle$ (la dirección de L_2). Así que un vector normal es

$$\mathbf{n} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 13\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

Si hacemos que $s = 0$ en las ecuaciones de L_2, obtenemos el punto $(0, 3, -3)$ sobre L_2, y por consiguiente una ecuación para P_2 es

$$13(x - 0) - 4(y - 3) + 1(z + 3) = 0 \quad \text{o} \quad 13x - 4y + z + 15 = 0$$

Si ahora hacemos $t = 0$ en la ecuación para L_1, encontramos el punto $(1, -2, 4)$ sobre P_1. Por lo que la distancia entre L_1 y L_2 es la misma que la distancia entre $(1, -2, 4)$ a $13x - 4y + z + 15 = 0$. Por la fórmula 8, esta distancia es

$$D = \frac{|13(1) - 4(-2) + 1(4) + 15|}{\sqrt{13^2 + (-4)^2 + 1^2}} = \frac{40}{\sqrt{186}} \approx 2.9$$

EJERCICIOS 11.5

1-4 ▪ Calcule la ecuación vectorial y las ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por el punto dado y es paralela al vector a.

1. $(3, -1, 8)$, $\mathbf{a} = \langle 2, 3, 5\rangle$
2. $(-2, 4, 5)$, $\mathbf{a} = \langle 3, -1, 6\rangle$
3. $(0, 1, 2)$, $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
4. $(1, -1, -2)$, $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 7\mathbf{k}$

5-10 ▪ Determine las ecuaciones paramétricas y las simétricas para la recta que pasa por los puntos dados.

5. $(2, 1, 8)$, $(6, 0, 3)$
6. $(-1, 0, 5)$, $(4, -3, 3)$
7. $(3, 1, -1)$, $(3, 2, -6)$
8. $(3, 1, \frac{1}{2})$, $(-1, 4, 1)$
9. $(-\frac{1}{3}, 1, 1)$, $(0, 5, -8)$
10. $(2, -7, 5)$, $(-4, 2, 5)$

11. Muestre que la recta que pasa por los puntos $(2, -1, -5)$ y $(8, 8, 7)$ es paralela a la recta que pasa por los puntos $(4, 2, -6)$ y $(8, 8, 2)$.

12. Demuestre que la recta que pasa por los puntos $(0, 1, 1)$ y $(1, -1, 6)$ es perpendicular a la que pasa por los puntos $(-4, 2, 1)$ y $(-1, 6, 2)$.

13. (a) Encuentre las ecuaciones simétricas para la línea que pasa por el punto $(0, 2, -1)$ y es paralela a la recta con las ecuaciones paramétricas $x = 1 + 2t$, $y = 3t$, y $z = 5 - 7t$.
    (b) Determine los puntos en los que la recta requerida en el inciso (a) se cruza con los planos coordenados.

14. (a) Encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por $(5, 1, 0)$ y que es perpendicular al plano $2x - y + z = 1$.
    (b) ¿En qué puntos esta recta cruza a los planos coordenados?

15-18 ▪ Determine si las rectas L_1 y L_2 son paralelas, oblicuas, o se cruzan. Si se cruzan, encuentre el punto de intersección.

15. L_1: $\dfrac{x - 4}{2} = \dfrac{y + 5}{4} = \dfrac{z - 1}{-3}$, L_2: $\dfrac{x - 2}{1} = \dfrac{y + 1}{3} = \dfrac{z}{2}$

16. L_1: $\dfrac{x - 1}{2} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z - 1}{4}$, L_2: $\dfrac{x}{1} = \dfrac{y + 2}{2} = \dfrac{z + 2}{3}$

17. L_1: $x = -6t$, $y = 1 + 9t$, $z = -3t$
    L_2: $x = 1 + 2s$, $y = 4 - 3s$, $z = s$

18. L_1: $x = 1 + t,\ y = 2 - t,\ z = 3t$
L_2: $x = 2 - s,\ y = 1 + 2s,\ z = 4 + s$

19-22 ▪ Encuentre la ecuación del plano que pasa por el punto dado y con el vector normal que se especifica.

19. $([illegible], 4, 5)$, $\mathbf{n} = \langle 7, 1, 4 \rangle$

20. $(-5, 1, 2)$, $\mathbf{n} = \langle 3, -5, 2 \rangle$

21. $([illegible], 2, 3)$, $\mathbf{n} = 15\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 12\mathbf{k}$

22. $(-1, -6, -4)$, $\mathbf{n} = -5\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

23-26 ▪ Determine la ecuación del plano que pasa por el punto dado y es paralelo al plano que se indica.

23. $(5, 5, -2)$, $x + y - z + 1 = 0$

24. $(3, 0, 8)$, $2x + 5y + 8z = 17$

25. $(-1, 3, -8)$, $3x - 4y - 6z = 9$

26. $(2, -4, 5)$, $z = 2x + 3y$

27-30 ▪ Encuentre una ecuación para el plano que pasa a través de los puntos dados.

27. $(3, 0, 0)$, $(1, 1, 1)$, $(1, 2, 3)$

28. $(-1, 1, -1)$, $(1, -1, 2)$, $(4, 0, 3)$

29. $(1, 0, -3)$, $(0, -2, -4)$, $(4, 1, 6)$

30. $(2, 1, -3)$, $(5, -1, 4)$, $(2, -2, 4)$

31-34 ▪ Determine una ecuación para el plano que pasa a través del punto dado y que contiene a la recta especificada.

31. $(1, 6, -4)$; $x = 1 + 2t,\ y = 2 - 3t,\ z = 3 - t$

32. $(-1, -3, 2)$; $x = -1 - 2t,\ y = 4t,\ z = 2 + t$

33. $(0, 1, 2)$; $x = y = z$

34. $(-1, 0, 1)$; $x = 5t,\ y = 1 + t,\ z = -t$

35-38 ▪ Encuentre el punto en el que la recta dada intersecta al plano especificado.

35. $x = 1 + t,\ y = 2t,\ z = 3t$; $x + y + z = 1$

36. $x = 5,\ y = 4 - t,\ z = 2t$; $2x - y + z = 5$

37. $x = 1 + 2t,\ y = -1,\ z = t$; $2x + y - z + 5 = 0$

38. $x = 1 - t,\ y = t,\ z = 1 + t$; $z = 1 - 2x + y$

39. Determine los números directores para la recta de intersección de los planos $x + y + z = 1$ y $x + z = 0$.

40. Calcule el coseno del ángulo entre los planos $x + y + z = 0$ y $x + 2y + 3z = 1$.

41-46 ▪ Determine si los planos son paralelos, perpendiculares o ninguna de las dos cosas. Si no son ninguna de las dos cosas, encuentre el ángulo entre ellos.

43. $x + 4y - 3z = 1$, $-3x + 6y + 7z = 0$

44. $2x + 2y - z = 4$, $6x - 3y + 2z = 5$

45. $2x + 4y - 2z = 1$, $-3x - 6y + 3z = 10$

46. $2x - 5y + z = 3$, $4x + 2y + 2z = 1$

47-48 ▪ (a) Determine las ecuaciones simétricas para la recta de intersección de los planos, y (b) calcule el ángulo entre los planos.

47. $x + y - z = 2$, $3x - 4y + 5z = 6$

48. $x - 2y + z = 1$, $2x + y + z = 1$

49-50 ▪ Dé las ecuaciones paramétricas para la recta de intersección de los planos.

49. $z = x + y$, $2x - 5y - z = 1$

50. $2x + 5z + 3 = 0$, $x - 3y + z + 2 = 0$

51. Encuentre una ecuación para el plano que consiste de todos los puntos que están equidistantes de los puntos $(1, 1, 0)$ y $(0, 1, 1)$.

52. Determine una ecuación para el plano que consiste de todos los puntos que están equidistantes de los puntos $(-4, 2, 1)$ y $(2, -4, 3)$.

53. Encuentre una ecuación para el plano que pasa por la recta de intersección de los planos $x + y - z = 2$ y $2x - y + 3z = 1$ y pasa por el punto $(-1, 2, 1)$.

54. Encuentre la ecuación del plano que pasa por la recta de intersección de los planos $x - z = 1$, y $y + 2z = 3$, y que es perpendicular al plano $x + y - 2z = 1$.

55. Determine la ecuación del plano cuya intersección con el eje x es a, con el eje y es b, y con el eje z es c.

56. (a) Encuentre el punto en el que las rectas
$\mathbf{r} = \langle 1, 1, 0 \rangle + t\langle 1, -1, 2 \rangle$ y $\mathbf{r} = \langle 2, 0, 2 \rangle + s\langle -1, 1, 0 \rangle$
se cruzan.

(b) Determine una ecuación del plano que contiene esas rectas.

57. Dé las ecuaciones paramétricas para la recta que pasa por el punto $(0, 1, 2)$ y que es paralela al plano $x + y + z = 2$, y perpendicular a las rectas $x = 1 + t,\ y = 1 - t,\ z = 2t$.

58. Calcule las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $(0, 1, 2)$, que es perpendicular a la recta $x = 1 + t,\ y = 1 - t,\ z = 2t$, y que cruza a esa recta.

59. ¿Cuáles de estos cuatro planos son paralelos? ¿Hay algunos que sean idénticos?

P_1: $4x - 2y + 6z = 3$ P_2: $4x - 2y - 2z = 6$

P_3: $-6x + 3y - 9z = 5$ P_4: $z = 2x - y - 3$

60. ¿Cuáles de estas cuatro rectas son paralelas? ¿Hay algunas que sean idénticas?

L_1: $x = 1 + t,\quad y = t,\quad z = 2 - 5t$

L_2: $x + 1 = y - 2 = 1 - z$