Soluciones Práctico 3

Ejercicio 1

a) $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2-4}$

$$dom f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2-4\geq 0\right\},$$

o sea

$$dom f=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y^2\geq 4\right\},$$

geométricamente, son todos los puntos del plano cuya distancia al origen es mayor o igual que 2, que es la circunferencia de radio 2 más todo el exterior del disco de radio 2.

b) $g(x,y,z)=\left(\frac{3x-y}{x^2+y^2+z^2},\ln(1-y\right)$

$$dom g=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x^2+y^2+z^2\neq 0 \text{ y } 1-y>0\right\},$$

o sea

$$dom g=\{(x,y,z)\neq 0 \text{ tales que } y<1\},$$

geométricamente, el *domg* es entonces el subespacio a la izquierda del plano vertical $y=1$, menos el origen.

c) $h(t)=\left(\frac{1}{\sqrt{t+2}},\frac{t-1}{t}\right)$

$$dom h=\{t\in\mathbb{R} : t+2>0 \text{ y } t\neq 0\},$$

o sea

$$dom h=\{t\in\mathbb{R} : t>-2 \text{ y } t\neq 0\}=(-2,0)\cup(0,\infty)$$

Observación: Aunque $\sqrt{t+2}$ está definida en $t=-2$, no podemos incluir $t=-2$ en domh porque estaríamos en presencia de un 0 en el denominador!!

Ejercicio 2 Esboce la gráfica de las siguientes funciones-
Recordemos que

$$G(f)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : (x,y)\in dom f \text{ y } z=f(x,y)\right\}$$

a) $f(x.y)=x-2y$ Vemos que $dom f=\mathbb{R}^2$ entonces

$$G(f)=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 :\ z=x-2y\right\}=\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x-2y-z=0\right\},$$

plano que pasa por el origen, perpendicular al vector $(1,-2,-1)$.

b) $f(x,y) = \sqrt{x^2+3y^2}$ En este caso también $dom f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+3y^2 \geq 0\right\} = \mathbb{R}^2$ entonces

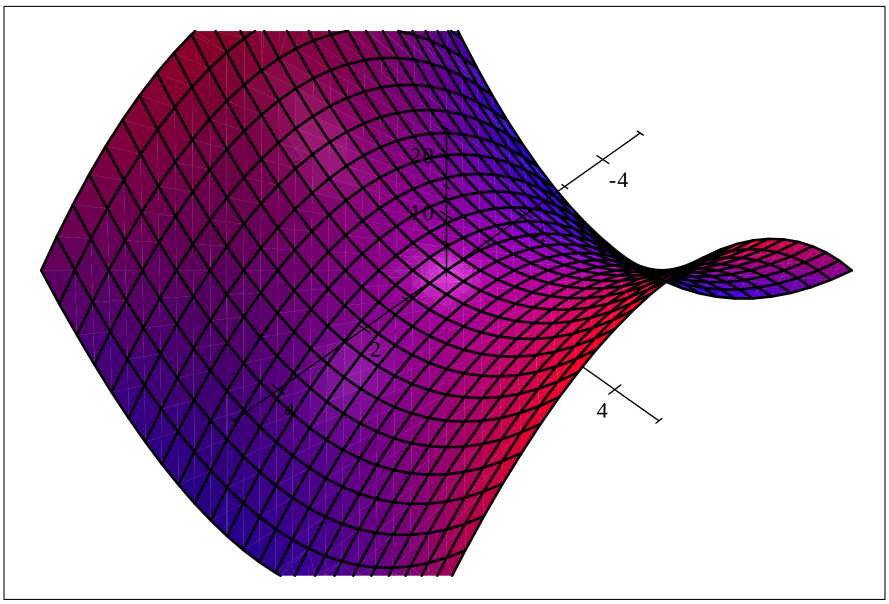
$$G(f) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = \sqrt{x^2+3y^2}\right\},$$

que es la parte superior del cono de secciones elípticas de ecuación $z^2 = x^2+3y^2$.

c) $f(x,y) = y^2 - x^2$ En este caso también $dom f = \mathbb{R}^2$ entonces

$$G(f) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z = y^2 - x^2\right\},$$

$z = y^2 - x^2$



que es un paraboloide hiperbólico.

d) $f(x,y) = \frac{1}{y}$

$$dom f = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\right\}$$

o sea $dom f$ es el plano menos el eje x. Entonces

$$G(f) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y \neq 0 \text{ y } z = \frac{1}{y}\right\},$$

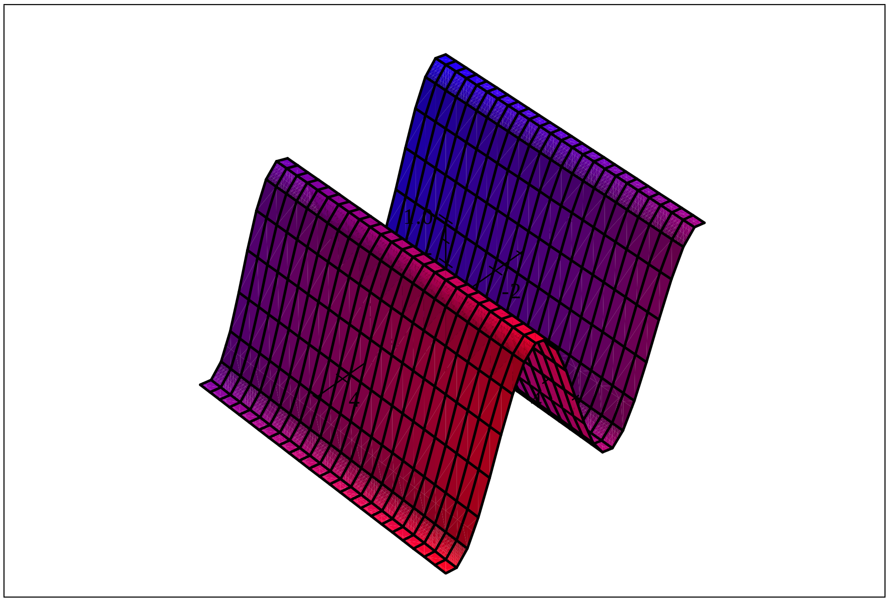
que es el cilindro hiperbólico que consiste en trasladar la hipérbola (en el plano yz) $z = \frac{1}{y}$, a lo largo del eje x.

d) $f(x,y) = \sin x$ Vemos que $dom f = \mathbb{R}^2$ entonces

$$G(f) = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \; z = \sin x\right\},$$

cilindro que consiste en trasladar la sinusoide (en el plano xz) $z = \sin x$, a lo largo del eje y.

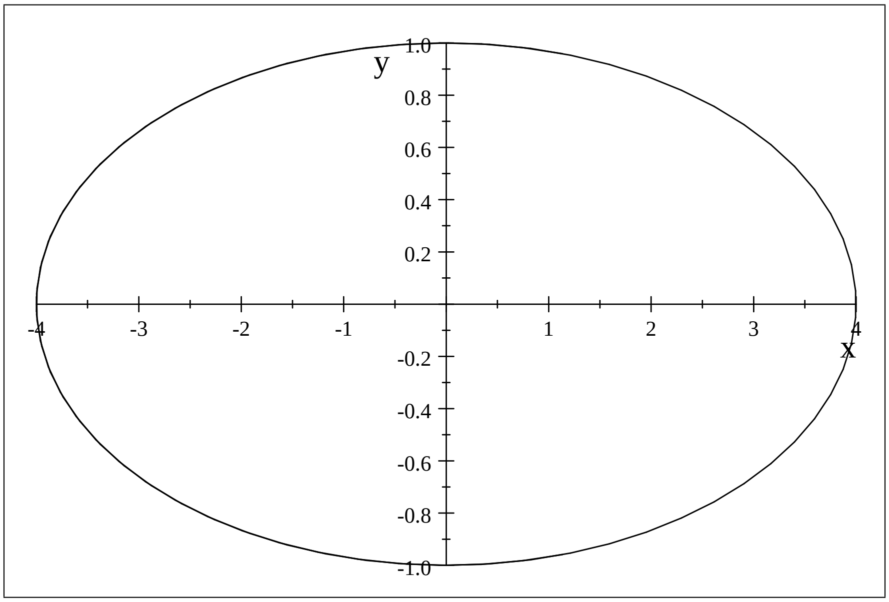
$z = \sin x$



Ejercicio 3

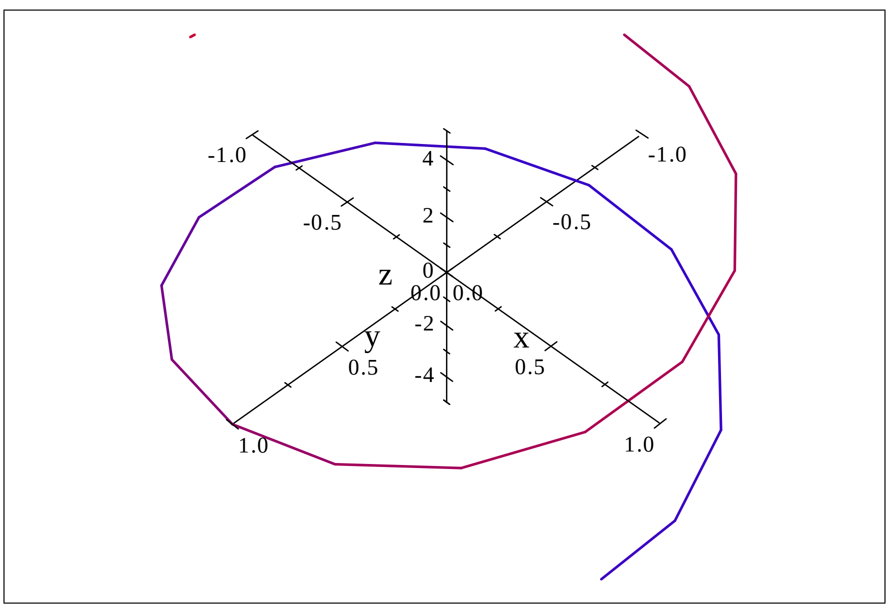
a) $\mathbf{r}(t) = (4\cos t, \sin t)$ Observamos que si llamamos $x = 4cost$ e $y = \sin t$, se satisface que $\frac{x^2}{16} + y^2 = 1$ por lo tanto esta curva es la elipse

$(4\cos t, \sin t)$



b) $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ la primer coordenada y la segunda describen la circunferencia unitaria, pero la tercera crece como t, por lo tanto obtenemos una espiral que se va enrollando en el cilindro circular unitario.

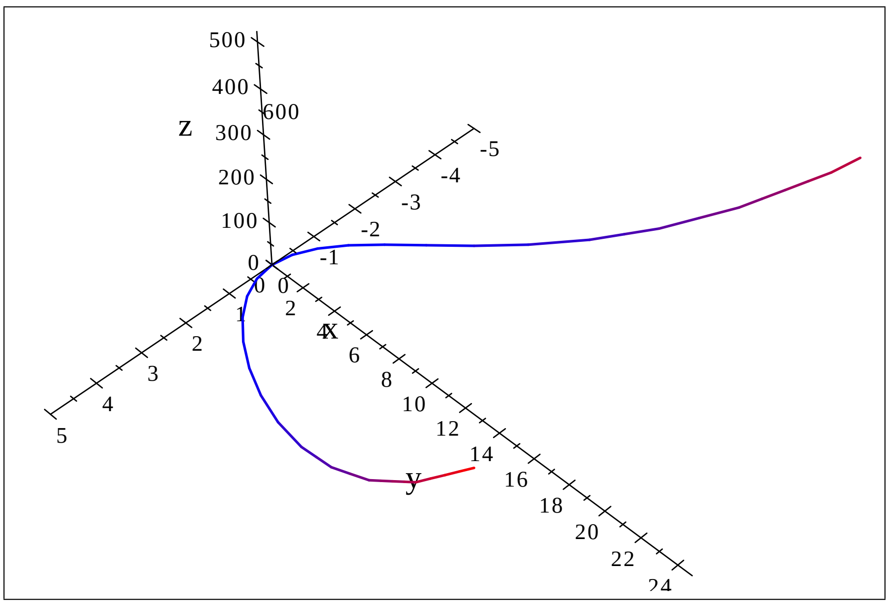
$(\cos t, \sin t, t)$



c)
$$\mathbf{r}(t) = (3t+2, t-1, 2t) = (2,-1,0) + t\,(3,1,2)\,,$$
que es la recta que pasa por $(2,-1,0)$ en la dirección del vector $(3,1,2)$.

Ejercicio 4 $\mathbf{r}(t) = \left(t, t^2, t^2+t^4\right)$ Si llamamos $x = t$, $y = t^2$ y $z = t^2 + t^4$ se satisface $x^2 + y^2 = t^2 + t^4 = z$, por lo tanto la curva está contenida en el paraboloide $z = x^2 + y^2$. Cuando $t = 0$ estamos en el origen, y dcuando$t$ crece con valores positivos, debemos subir la parábola $\left(t, t^2\right)$ (observar que $y = x^2$) hasta el paraboloide. Se obtiene algo así

$\left(t, t^2, t^2+t^4\right)$



Ejercicio 5 Recordemos que la ecuación de la recta tangente a la curva dada por $\mathbf{r}(t)$ en el punto $\mathbf{p} = \mathbf{r}(t_0)$ es
$$\mathbf{x} = \mathbf{p} + t\mathbf{r}'(t_0)$$

a) $\mathbf{r}(t) = \left(t, t^3\right)$ $\qquad \mathbf{p} = (-1,1)$. Observamos que $\mathbf{p} = \mathbf{r}(1)$ y $\mathbf{r\prime}(t) = (1, 3t^2)$ por lo tanto la ecuación de la recta tangente es
$$\mathbf{x} = (1,1) + t\,(1,3)\,.$$

b) $\mathbf{r}(t) = (\sin t, \sin(2t), 3)$ $\qquad \mathbf{p} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 3\right)$. Observamos que $\mathbf{p} = \mathbf{r}(\frac{\pi}{6})$ y $\mathbf{r\prime}(t) = (\cos t, 2\cos(2t), 0)$ por lo tanto la ecuación de la recta tangente es
$$\mathbf{x} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}, 3\right) + t\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}, 0\right).$$

Ejercicio 6 La curva de nivel k de f tiene ecuación $f(x,y)=k$.

a) $f(x,y)=2x+6y \qquad k=-2,-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$

Si $k=-1 \qquad 2x+6y=-1$ es la recta $y=-\frac{1}{3}x-\frac{1}{6}$,
si $k=0 \qquad 2x+6y=0$ es la recta $y=-\frac{1}{3}x$,
si $k=1 \qquad 2x+6y=1$ es la recta $y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{6}$,
si $k=2 \qquad 2x+6y=2$ es la recta $y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$,
si $k=3 \qquad 2x+6y=3$ es la recta $y=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}$,
en general la curva de nivel k de f es una recta de pendiente $-\frac{1}{3}$, con ordenada al origen $\frac{k}{6}$.

b) $f(x,y)=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9} \qquad k=-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$

Si $k=-1$ la ecuación $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=-1$ no tiene solución por lo tanto decimos que la curva de nivel -1 es el conjunto vacío.

Si $k=0$, la única solución de $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=0$ es el punto $(x,y)=(0,0)$ y, en este caso, la curva de nivel consiste de un único punto.

Si $k=1$, la ecuación $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ representa una elipse de ejes 2 y 3.
Si $k=2$, la ecuación $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=2$ representa una elipse de ejes $2\sqrt{2}$ y $3\sqrt{2}$.
Si $k=3$, la ecuación $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=3$ representa una elipse de ejes $2\sqrt{3}$ y $3\sqrt{3}$,

en general si $k>0$, la curva de nivel k de f es una elipse de ejes $2\sqrt{k}$ y $3\sqrt{k}$.

Ejercicio 7 superficies de nivel k

a) $f(x,y,z)=2x+6y-3z \qquad k=-2,-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$

Si $k=-2 \qquad 2x+6y-3z=-2$ es el plano perpendicular al vector $(2,6,-3)$, que pasa por $(-1,0,0)$.
Si $k=-1 \qquad 2x+6y-3z=-1$ es el plano perpendicular al vector $(2,6,-3)$, que pasa por $\left(-\frac{1}{2},0,0\right)$.
Si $k=0 \qquad 2x+6y-3z=0$ es el plano perpendicular al vector $(2,6,-3)$, que pasa por $(0,0,0)$.
Si $k=1 \qquad 2x+6y-3z=1$ es el plano perpendicular al vector $(2,6,-3)$, que pasa por $\left(\frac{1}{2},0,0\right)$.
Si $k=2 \qquad 2x+6y-3z=2$ es el plano perpendicular al vector $(2,6,-3)$, que pasa por $(1,0,0)$.
Si $k=3 \qquad 2x+6y-3z=3$ es el plano perpendicular al vector $(2,6,-3)$, que pasa por $\left(\frac{3}{2},0,0\right)$.
b) $f(x,y,z)=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2 \qquad k=-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$

Si $k = -1$ la ecuación $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = -1$ no tiene solución por lo tanto decimos que la superficie de nivel -1 es el conjunto vacío.

Si $k = 0$, la única solución de $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 0$ es el punto $(x, y, z) = (0, 0)$ y, en este caso, la superficie de nivel consiste de un único punto.

Si $k = 1$, la ecuación $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$ representa un elipsoide de ejes 2, 3 y 1.

Si $k = 2$, la ecuación $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 2$ representa una elipse de ejes $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$ y $\sqrt{2}$.

Si $k = 3$, la ecuación $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 3$ representa una elipse de ejes $2\sqrt{3}$, $3\sqrt{3}$ y $\sqrt{3}$,

en general si $k > 0$, la superficie de nivel k de f es un elipsoide de ejes $2\sqrt{k}$, $3\sqrt{k}$ y $\sqrt{k}$.

c) $f(x, y, z) = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + z^2 \qquad k = -1,\ 0,\ 1.$

Si $k = -1$ la ecuación $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + z^2 = -1$ equivale a $-\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - z^2 = 1$, que es un hiperboloide de dos hojas centrado en el origen, a lo largo del eje y.

Si $k = 0$, la ecuación $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + z^2 = 0$ es un cono elíptico centrado en el origen, a lo largo del eje y.

Si $k = 1$, la ecuación $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} + z^2 = 1$ representa un hiperboloide de una hoja centrado en el origen, a lo largo del eje y.