Clase 3. Funciones - curvas

Muchas cantidades dependen de más de una variable. Por ejemplo, el volumen de un cilindro circular recto depende del radio r de la base y de su altura h. $V(r,h) = \pi r^2 h$. El dominio, en este caso, es el conjunto de pares $\{(r,h) : r > 0,\ h > 0\}$, Similarmente la relación $w(x,y,z) = x + 3y - 5z$ define a w como función de x, y, z con dominio todo $\mathbb{R}^3$. También podemos tener funciones que llevan vectores en algún $\mathbb{R}^n$ a vectores en otro $\mathbb{R}^m$,

$$f(x_1,...,x_n) = (f_1(x_1,...,x_n), ..., f_m(x_1,...,x_n)).$$

Cada una de las f_i $1 \leq i \leq m$ se llama función componente o función coordenada de la f. Si no se especifica nada, se sobreentiende que el **dominio de** f, denotado $Domf$, es el mayor subconjunto de $\mathbb{R}^n$ donde **todas** las funciones componentes están bien definidas. Por ejemplo

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} x - 2y \\ \sqrt{x^2 + y^2 - 1} \\ \frac{1}{x^2 - y^2} \end{pmatrix}$$

va de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$. La primer función componente es $f_1(x,y) = x - 2y$ está definida en todo $\mathbb{R}^2$, la segunda $f_2(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$ está bien definida cuando $x^2 + y^2 - 1 \geq 0$, o sea $x^2 + y^2 \geq 1$ que son los puntos de afuera del disco unitario abierto $x^2 + y^2 < 1$ y por último, $f_3(x,y) = \frac{1}{x^2 - y^2}$ está bien definida si el denominador es distinto de cero, o sea $x^2 \neq y^2$, o sea $x \neq y$ y $x \neq -y$. En definitiva,

$$Domf = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 1,\ x \neq y,\ x \neq -y\right\}.$$

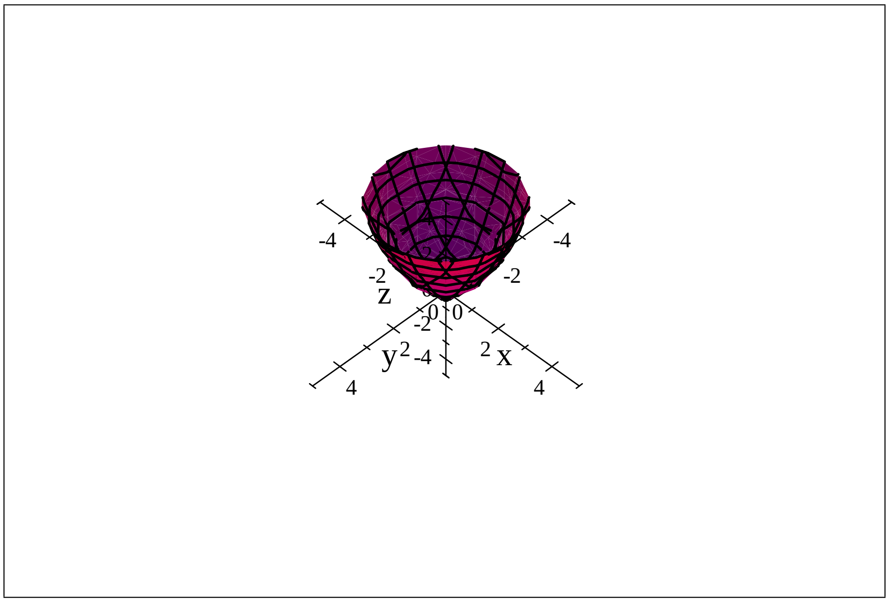
También definimos el **gráfico** de f como

$$Grf = \left\{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathbb{R}^{n+m} : \mathbf{x} \in Domf \text{ y } \mathbf{y} = f(\mathbf{x})\right\}.$$

Por ejemplo si $f(x,y) = x^2 + y^2$ el

$$Grf = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y) \in \mathbb{R}^2 \text{ y } z = x^2 + y^2\right\}$$

que es el paraboloide $z = x^2 + y^2$



Para poder dibujar el gráfico de una función debe ser $n+m \leq 3$, el caso más común es el del ejemplo de arriba donde $n = 2$ y $m = 1$.

Funciones de una variable

Si un punto se mueve en un espacio vectorial $\mathbb{R}^m$, su posición en el instante t puede ser descripta como una función de t cuyo valor es $f(t) \in \mathbb{R}^m$. Por ejemplo $f(t) = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{x}_1$ nos dá, en cada instante t, un punto sobre la recta que pasa por $\mathbf{x}_0$ y es paralela a $\mathbf{x}_1$. Más generalmente escribimos $f(t) = (f_1(t), ..., f_m(t))$.

Ejemplo 1. La función $g(t) = \left(t, t^2\right)$ describe la parábola en $\mathbb{R}^2$.

Para este tipo de funciones de una variable las nociones de límite y derivada se definen coordenada a coordenada. Concretamente, si

$$f(t) = (f_1(t), ..., f_m(t))$$

está definida en $a < t < b$ y $t_0 \in (a, b)$ definimos

$$\lim_{t \to t_0} f(t) = \left(\lim_{t \to t_0} f_1(t), ..., \lim_{t \to t_0} f_m(t) \right)$$

si todos los límites $\lim\limits_{t \to t_0} f_i(t)$ existen para $1 \leq i \leq m$.

También, una función de este tipo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$ se dice **continua** en un punto t_0 si sus funciones coordenadas lo son.

Recordemos que $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ es continua en $t_0\in(a,b)$ si

$$\lim_{t\to t_0} f(t)=f(t_0).$$

Consideramos ahora $g:(a,b)\to\mathbb{R}^m$, decimos que g tiene derivada en un punto $t\in(a,b)$ si existe el límite (vectorial) de los cocientes incrementales

$$g\prime(t)=\lim_{h\to 0}\frac{g(t+h)-g(t)}{h}.$$

Si $g(t)=(g_1(t),...,g_m(t))$ y si $g_i'(t)$ existe para todo $1\le i\le m$ entonces

$$g'(t)=\left(g_1'(t),...,g_m'(t)\right).$$

Ejemplo 2. Si $g(t)=\left(t^2,t^3\right)$ entonces $g'(t)=\left(2t,3t^2\right)$.

La interpretación geométrica de $g'(t)$ es la siguiente: Los puntos $g(t+h)$ y $g(t)$ son dos puntos sobre la curva dada por g. El vector $g(t+h)-g(t)$ tiene la dirección secante paralela a la recta que pasa por ambos puntos. A medida que h se acerca a cero, los dos puntos están muy próximos y la dirección secante se aproxima a la dirección tangente. Por este motivo, si $g'(t_0)$ existe y es no nulo, decimos que $g'(t_0)$ es el **vector tangente** a la curva dada por $g(t)$, en el punto $g(t_0)$ y la recta tangente a dicha curva es

$$\mathbf{x}=g(t_0)+sg'(t_0),\ \ s\in\mathbb{R}.$$

Ejemplo 3. La circunferencia unitaria en $\mathbb{R}^2$ está dada por $g(t)=(\cos t,\sin t)$, $g'(t)=(-\sin t,\cos t)$ entonces la recta tangente a la circunferencia en el punto $g(\frac{\pi}{4})$ es

$$\mathbf{x}=g(\frac{\pi}{4})+sg'(\frac{\pi}{4}),\ \ s\in\mathbb{R},$$

o sea

$$(x,y)=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+s\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2}\right),\ \ s\in\mathbb{R}.$$

Ejemplo 4. Describa la curva dada por $\mathbf{r}(t)=(1+t,2+3t,-2+t)$. Observamos que

$$\mathbf{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))=(1,2,-2)+t\,(1,3,1),$$

entonces la curva dada es la recta que pasa por $(1,2,-2)$, en la dirección de $(1,3,1)$.

Ejemplo 5. Describa la curva dada por $\mathbf{r}(t)=(4\cos t,\sin t,t)$, $0\le t\le 4\pi$.

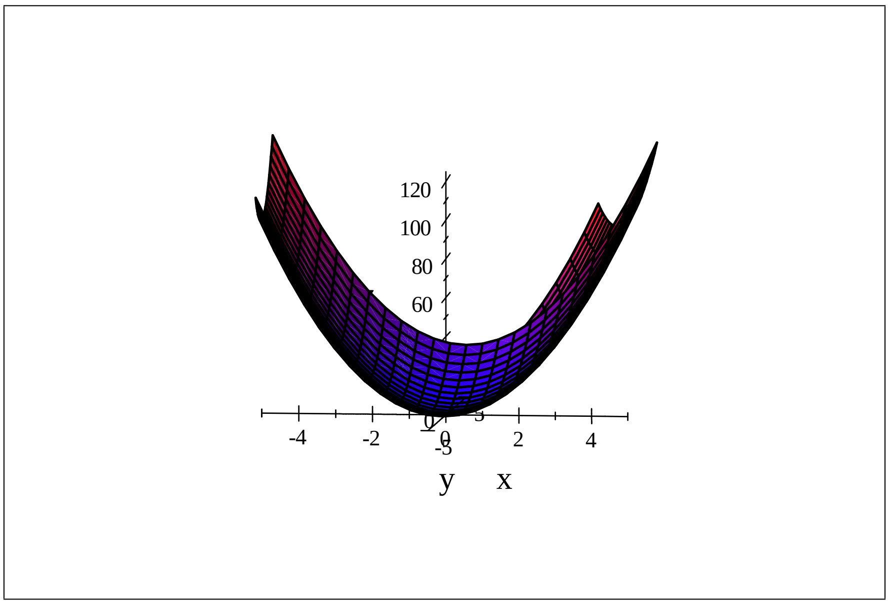
Si un punto (x,y,z) está en la curva, $(x,y,z)=(4\cos t,\sin t,t)$ para algún $0\le t\le 4\pi$, entonces $\frac{x^2}{16}+y^2=\frac{16\cos^2 t}{16}+\sin^2 t=1$, o sea la proyección al piso es una elipse y además z crece con t, desde $z = 0$ hasta $z = 4\pi$, es una helicoidal contenida en el cilindro elíptico $\frac{x^2}{16} + y^2 = 1$, que gira desde el punto $(4, 0, 0)$ hasta el $(4, 0, 4\pi)$.

Curvas y superficies de de nivel

Dada $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ recordamos que

$$Grf = \{(x, y, z) : (x, y) \in Domf \text{ y } z = f(x, y)\}$$

Ejemplo 1.
a) El gráfico de $f(x, y) = x - 3y$ es el plano de ecuación $z = x - 3y$.
b) El gráfico de $f(x, y) = x^2 + 4y^2$ es el paraboloide elíptico $z = x^2 + 4y^2$



c)

$$f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$$

el gráfico de f es la parte superior de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

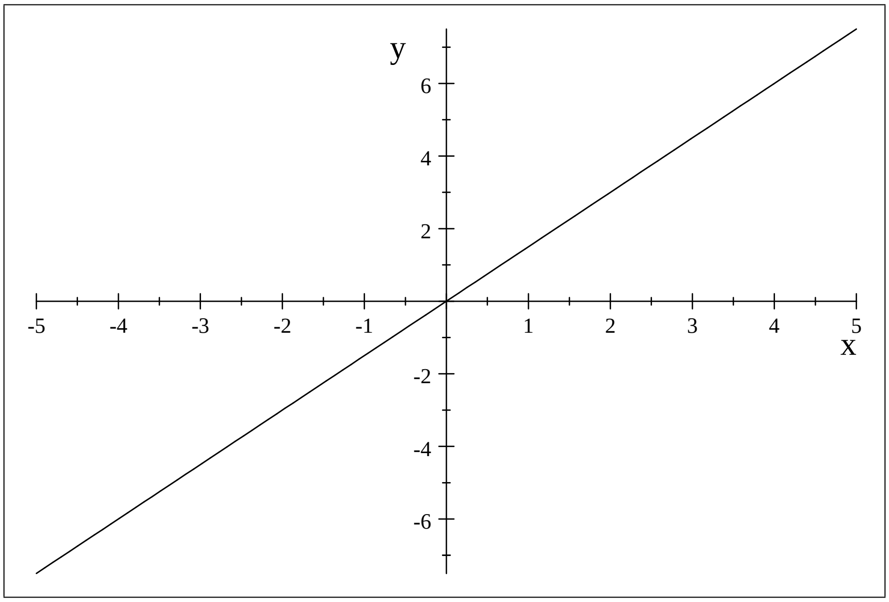
Otra manera de representar la función $f(x, y)$ es producir un mapa topográfico bidimensional de la superficie $z = f(x, y)$. Para distintos valores de c, dibujamos en el plano x, y las curvas dadas por

$$f(x, y) = c$$

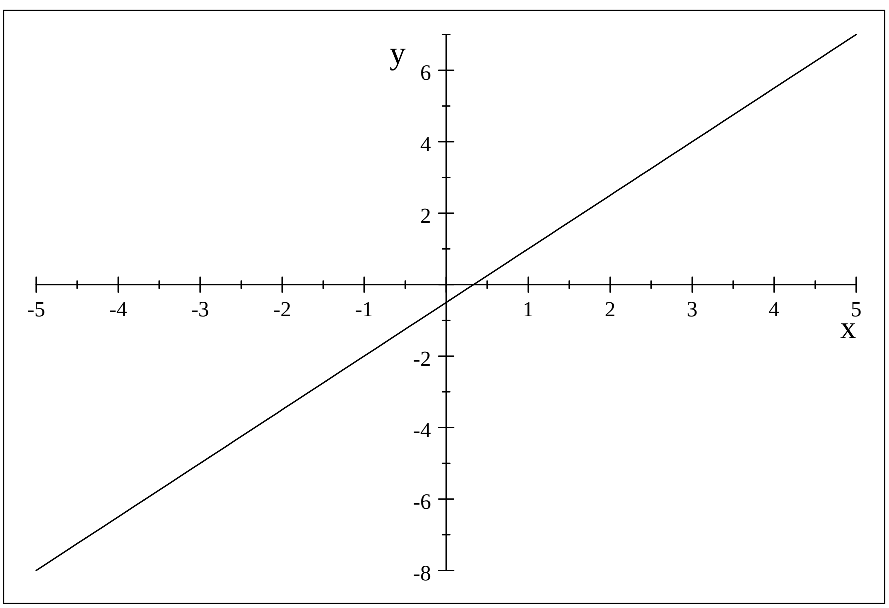
llamada *curva de nivel* c de f, o sea proyectamos al piso la intersección del gráfico de f con el plano $z = c$. Si tomamos $c = -2$, -1, 0, 1, 2, etc. el gráfico de f será más empinado si las curvas están más juntas y será más aplanado cuanto más espaciadas están las curvas.

Ejemplo 2. a) Las curvas de nivel de $z = 3x - 2y$ son las rectas $3x - 2y = c$ o sea $y = \frac{3}{2}x - \frac{c}{2}$ rectas paralelas de pendiente $\frac{3}{2}$, que pasa por $(0, -\frac{c}{2})$.

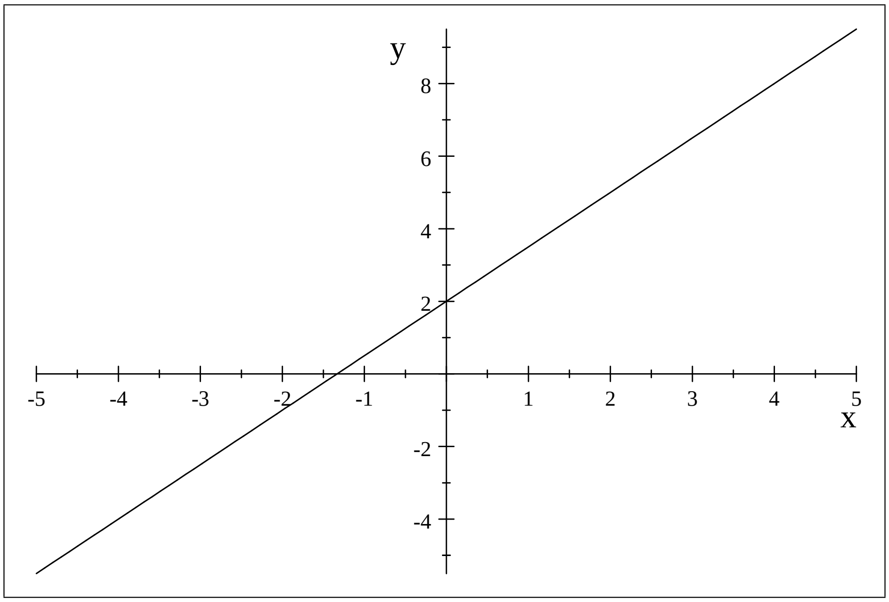
Para $c = 0$, obtenemos $y = \frac{3}{2}x$



para $c = 1$, obtenemos $y = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$



Para $c = -4$ obtenemos $y = \frac{3}{2}x + 2$



etc.

b) Las curvas de nivel de $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$ son las elipses centradas en el origen $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = c$ si $c > 0$. Si $c < 0$, obtenemos el conjunto vacío y si $c = 0$, obtenemos el origen como único punto.

Si f es de tres variables, la ecuación $f(x, y, z) = c$ representan superficies en $\mathbb{R}^3$. Se llama *superficie de nivel* c de f.

Ejemplo 3. *a*) Si $f(x, y, z) = x^2 + 4y^2 + 9z^2$ las superficies de nivel de f son los elipsoides $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = c$, si $c > 0$. Si $c = 0$ obtenemos el origen como único punto y si $c < 0$ obtenemos el conjunto vacío.

b) Si $f(x, y, z) = x^2 - 4y^2 + 9z^2$ las superficies de nivel de f,

$$x^2 - 4y^2 + 9z^2 = c$$

son hiperboloides de una hoja si $c > 0$, es un cono si $c = 0$ y son hiperboloides de dos hojas, si $c < 0$.