BASES ORTOGONALES Y ORTONORMALES

Definición. Un conjunto de vectores en un espacio con producto interior se denomina ***conjunto ortogonal*** si todas las parejas de vectores distintos en el conjunto son ortogonales. Un conjunto ortogonal en el que cada vector tiene norma 1 se denomina ***conjunto ortonormal***.

Ejemplo 1 Sean

$$\mathbf{u}_1 = (0, 1, 0), \qquad \mathbf{u}_2 = (1, 0, 1), \qquad \mathbf{u}_3 = (1, 0, -1)$$

y supóngase que R^3 tiene el producto interior euclidiano. Se concluye que el conjunto de vectores $S = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ es ortogonal, ya que $\langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2 \rangle = \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{u}_3 \rangle = \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3 \rangle = 0$. Δ

NOTA: $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \bar{u} \bullet \bar{v}$

Es decir, un conjunto $S = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n\}$ es **ortogonal** si :

$$\bar{u}_i \bullet \bar{u}_j = 0 \quad \text{si} \quad i \neq j$$

$$\bar{u}_i \bullet \bar{u}_j = \|\bar{u}\|^2 \quad \text{si} \quad i = j$$

Si es **ortonormal**, se cumple además que $\bar{u}_i \bullet \bar{u}_j = \|\bar{u}\|^2 = 1$ si $i = j$

Si $\mathbf{v}$ es un vector no nulo en un espacio con producto interior, entonces por el inciso *c*) del teorema 6.2.2 el vector

$$\frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v}$$

tiene norma 1, ya que

$$\left\| \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\mathbf{v} \right\| = \left| \frac{1}{\|\mathbf{v}\|} \right| \|\mathbf{v}\| = \frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\|\mathbf{v}\| = 1$$

El proceso de multiplicar un vector $\mathbf{v}$ diferente de cero por el recíproco de su longitud para obtener un vector de norma 1 se denomina ***normalización*** de $\mathbf{v}$. Un conjunto ortogonal de vectores *no nulos* siempre se puede convertir en un conjunto ortonormal al normalizar cada uno de sus vectores.

Si $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_n\}$ es una base *ortogonal* para un espacio vectorial V, entonces al normalizar cada uno de sus vectores se obtiene la base ortonormal

$$S' = \left\{ \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|}, \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|}, \ldots, \frac{\mathbf{v}_n}{\|\mathbf{v}_n\|} \right\}$$

Ejemplo 2 Las normas euclidianas de los vectores en el ejemplo 1 son

$$\|\mathbf{u}_1\| = 1, \qquad \|\mathbf{u}_2\| = \sqrt{2}, \qquad \|\mathbf{u}_3\| = \sqrt{2}$$

En consecuencia, al normalizar $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ y $\mathbf{u}_3$ se obtiene

$$\mathbf{v}_1 = \frac{\mathbf{u}_1}{\|\mathbf{u}_1\|} = (0,\ 1,\ 0), \qquad \mathbf{v}_2 = \frac{\mathbf{u}_2}{\|\mathbf{u}_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

$$\mathbf{v}_3 = \frac{\mathbf{u}_3}{\|\mathbf{u}_3\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 0,\ -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

COORDENADAS DE UN VECTOR EN UNA BASE ORTOGONAL

Si $S = \{\bar{v}_1; \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$ es una **base ortogonal** en un espacio vectorial V, entonces todo vector $\bar{u}$ en V se puede expresar como

$$\boxed{\mathbf{u} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 + \cdots + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle}{\|\mathbf{v}_n\|^2}\mathbf{v}_n}$$

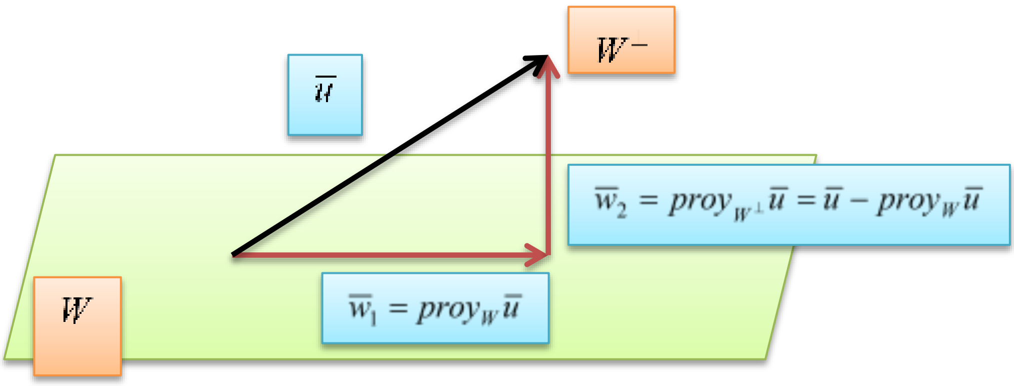
NOTA: $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \bar{u} \bullet \bar{v}$

TEOREMA DE LAS PROYECCIONES ORTOGONALES

Teorema 6.3.4. (***Teorema de proyección***). *Si W es un subespacio de dimensión finita en un espacio V con producto interior, entonces todo vector $\mathbf{u}$ en V se puede expresar de manera única como*

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 \tag{3}$$

donde $\mathbf{w}_1$ está en W y $\mathbf{w}_2$ está en $W^{\perp}$.



El vector $\mathbf{w}_1$ en el teorema precedente se denomina ***proyección ortogonal de u sobre W*** y se denota por $\text{proy}_W\, \mathbf{u}$. El vector $\mathbf{w}_2$ se denomina ***componente de u ortogonal a W*** y se denota por $\text{proy}_{W^{\perp}}\, \mathbf{u}$. Así, la fórmula (3) en el teorema de proyección se puede expresar como

$$\mathbf{u} = \text{proy}_W\, \mathbf{u} + \text{proy}_{W^{\perp}}\, \mathbf{u} \tag{4}$$

Como $\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1$, se concluye que

$$\text{proy}_{W^{\perp}}\, \mathbf{u} = \mathbf{u} - \text{proy}_W\, \mathbf{u}$$

TEOREMA

Si $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ es una base ortogonal para W y $\mathbf{u}$ es cualquier vector en V, entonces

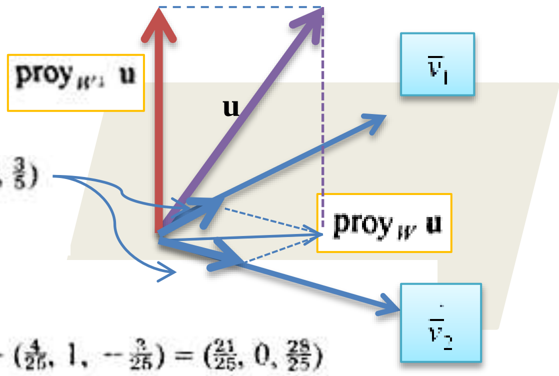
$$\boxed{\operatorname{proy}_W \mathbf{u} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 + \cdots + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_r \rangle}{\|\mathbf{v}_r\|^2}\mathbf{v}_r} \qquad (7)$$

Ejemplo 6 Sea R^3 con el producto interior euclidiano, y sea W el subespacio generado por los vectores ortonormales $\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0)$ y $\mathbf{v}_2 = (-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5})$. la proyección ortogonal de $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$ sobre W es

$$\operatorname{proy}_W \mathbf{u} = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 + \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2$$

$$= (1)(0, 1, 0) + (-\tfrac{1}{5})(-\tfrac{4}{5}, 0, \tfrac{3}{5})$$

$$= (\tfrac{4}{25}, 1, -\tfrac{3}{25})$$



La componente de $\mathbf{u}$ ortogonal a W es

$$\operatorname{proy}_{W^\perp} \mathbf{u} = \mathbf{u} - \operatorname{proy}_W \mathbf{u} = (1, 1, 1) - (\tfrac{4}{25}, 1, -\tfrac{3}{25}) = (\tfrac{21}{25}, 0, \tfrac{28}{25})$$

Obsérvese que $\operatorname{proy}_{W^\perp} \mathbf{u}$ es ortogonal tanto a $\mathbf{v}_1$ como a $\mathbf{v}_2$, de modo que este vector es ortogonal a todo vector en el espacio W generado por $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$, como debe ser. Δ

DETERMINACIÓN DE UNA BASE ORTOGONAL PARA UN ESPACIO VECTORIAL V: PROCESO DE GRAM-SCHMIDT

Sea $S = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_n\}$ una **base cualquiera** en un espacio vectorial V. Determinar a partir de S una **base ortogonal** $S' = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \ldots, \bar{v}_n\}$.

NOTA: $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \bar{u} \bullet \bar{v}$

PROCESO

1. Sea $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$.

2. Como se ilustra en la figura 3, se puede obtener un vector $\mathbf{v}_2$ que sea ortogonal a $\mathbf{v}_1$ calculando la componente de $\mathbf{u}_2$ que sea ortogonal al espacio W_1 generado por $\mathbf{v}_1$.

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \operatorname{proy}_{W_1} \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1$$

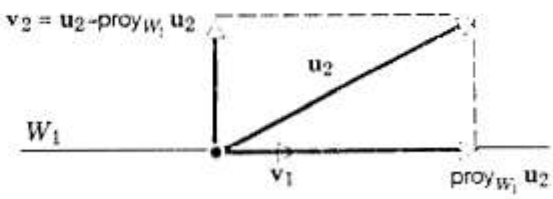


Figura 3

3. Para obtener un vector $\mathbf{v}_3$ que sea ortogonal tanto a $\mathbf{v}_1$ como a $\mathbf{v}_2$, se calcula la componente de $\mathbf{u}_3$ ortogonal al espacio W_2 generado por $\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{v}_2$ (figura 4). Por (7),

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \text{proy}_{W_2}\,\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2$$

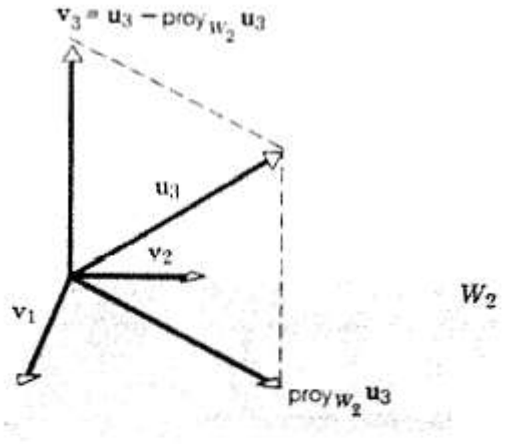


Figura 4

4. Para determinar un vector $\mathbf{v}_4$ que sea ortogonal a $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$, se calcula la componente de $\mathbf{u}_4$ ortogonal al espacio W_3 generado por $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ y $\mathbf{v}_3$.

$$\mathbf{v}_4 = \mathbf{u}_4 - \text{proy}_{W_3}\,\mathbf{u}_4 = \mathbf{u}_4 - \frac{\langle \mathbf{u}_4, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_4, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_4, \mathbf{v}_3 \rangle}{\|\mathbf{v}_3\|^2}\mathbf{v}_3$$

Continuando así hasta obtener el enésimo vector de S´.

Ejemplo 7 Considérese el espacio vectorial R^3 con el producto interior euclidiano. Aplicar el proceso de Gram-Schmidt para transformar los vectores básicos $\mathbf{u}_1 = (1, 1, 1)$, $\mathbf{u}_2 = (0, 1, 1)$ y $\mathbf{u}_3 = (0, 0, 1)$ en una base ortogonal $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$; luego, normalizar los vectores básicos ortogonales para obtener una base ortonormal $\{\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q}_3\}$.

Solución.

Paso 1. $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 = (1, 1, 1)$

Paso 2. $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \text{proy}_{W_1}\,\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2 - \dfrac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1$

$$= (0, 1, 1) - \frac{2}{3}(1, 1, 1) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

Paso 3. $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \text{proy}_{W_2}\,\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1\rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2}\mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2\rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2}\mathbf{v}_2$

$$= (0, 0, 1) - \frac{1}{3}(1, 1, 1) = \frac{1/3}{2/3}\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

$$= \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

Así,

$$\mathbf{v}_1 = (1, 1, 1), \qquad \mathbf{v}_2 = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right), \qquad \mathbf{v}_3 = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$$

forma una base ortogonal para R^3. Las normas de estos vectores son

$$\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{3}, \qquad \|\mathbf{v}_2\| = \frac{\sqrt{6}}{3}, \qquad \|\mathbf{v}_3\| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

de modo que una base ortonormal para R^3 es

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), \qquad \mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right),$$

$$\mathbf{q}_3 = \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|} = \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \ \Delta$$

PRÁCTICA

Secc. 6.3 : 1, 2, 3, 4, 9, 16, 17, 18.