EJEMPLO 2 Clasifique la superficie cuadrática $x^2 + 2z^2 - 6x - y + 10 = 0$.

SOLUCIÓN Al completar el cuadrado, volvemos a expresar la ecuación como

$$y - 1 = (x-3)^2 + 2z^2$$

Si se compara esta ecuación con la ecuación 5, vemos que representa un paraboloide elíptico. Sin embargo, aquí el eje del paraboloide es paralelo al eje y, y su vértice es el punto (3, 1, 0). Las trazas en el plano $y = k$ ($k > 1$) son las elipses $(x-3)^2 + 2z^2 = k - 1$, $y = k$. Las trazas en el plano xy es la parábola con la ecuación $y = 1 + (x-3)^2$, $z = 0$. El paraboloide se dibuja en la figura 10. ▫

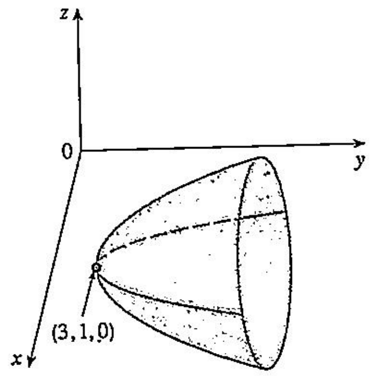


FIGURA 10
$x^2 + 2z^2 - 6x - y + 10 = 0$

EJEMPLO 3 Identifique y dibuje las superficies:

(a) $x^2 + y^2 = 1$ (b) $x^2 + z^2 = 1$

SOLUCIÓN
(a) Puesto que falta z y las ecuaciones $x^2 + y^2 = 1$, $z = k$, representan un círculo con radio 1 en el plano $z = k$, la superficie $x^2 + y^2 = 1$ es un cilindro circular cuyo eje es el eje z (véase la figura 11).

(b) En este caso, falta y y la superficie es un cilindro circular cuyo eje es el eje y (véase la figura 12). Se obtiene tomando el círculo $x^2 + z^2 = 1$, $y = 0$, en el plano xz y de moverlo de manera paralela al eje y.

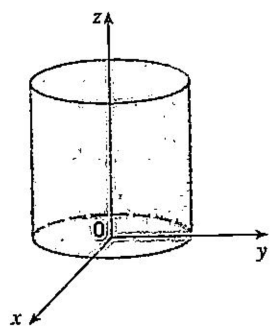


FIGURA 11
$x^2 + y^2 = 1$

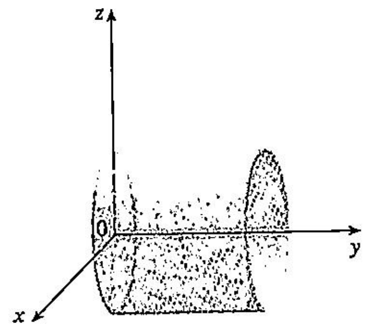


FIGURA 12
$x^2 + z^2 = 1$

NOTA: Cuando esté trabajando con superficies, es importante reconocer que una ecuación como $x^2 + y^2 = 1$ representa un cilindro y no un círculo. La traza de un cilindro $x^2 + y^2 = 1$ en el plano xy es el círculo con ecuaciones $x^2 + y^2 = 1$, $z = 0$.

EJERCICIOS 11.6

1-16 ▫ Encuentre las trazas de la superficie dada en los planos $x = k$, $y = k$, $z = k$. Luego identifique la superficie y dibújela.

1. $x^2 - y^2 + z^2 = 1$
2. $x = y^2 + z^2$
3. $4x^2 + 9y^2 + 36z^2 = 36$
4. $2x^2 + z^2 = 4$
5. $4z^2 - x^2 - y^2 = 1$
6. $z = x^2 - y^2$
7. $z = y^2$
8. $25y^2 + z^2 = 100 + 4x^2$
9. $y^2 = x^2 + z^2$
10. $9x^2 - y^2 - z^2 = 9$
11. $x^2 + 4z^2 - y = 0$
12. $x^2 - y^2 = 1$
13. $y^2 + 9z^2 = 9$
14. $x^2 + 4y^2 + z^2 = 4$
15. $y = z^2 - x^2$
16. $16x^2 = y^2 + 4z^2$

17-24 ▫ Relacione la ecuación con su gráfica (etiquetadas del I al VIII). Dé argumentos para su elección.

17. $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$
18. $9x^2 + 4y^2 + z^2 = 1$
19. $x^2 - y^2 + z^2 = 1$
20. $-x^2 + y^2 - z^2 = 1$

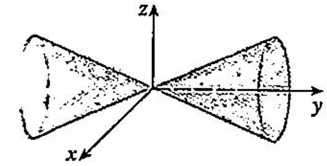
21. $y = 2x^2 + z^2$

22. $y^2 = x^2 + 2z^2$

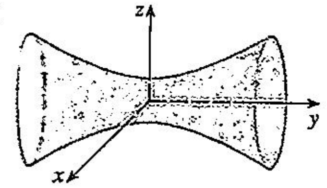
23. $x^2 + 2z^2 = 1$

24. $y = x^2 - z^2$

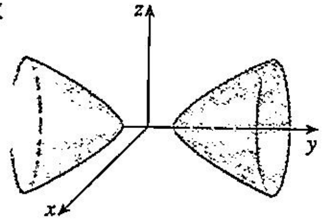
I



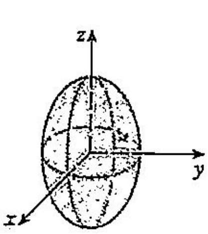
II



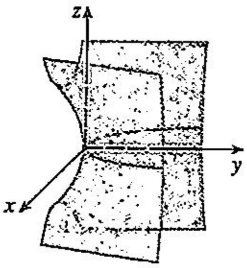
III



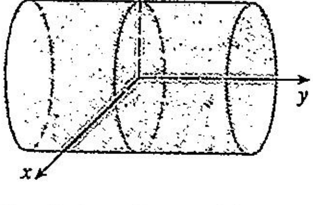
IV



V

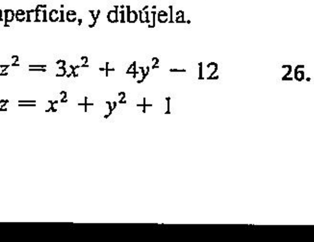


VI



VII

VIII



25-34 ▪ Reduzca la ecuación a una de las formas estándar, clasifique la superficie, y dibújela.

25. $z^2 = 3x^2 + 4y^2 - 12$

26. $4x^2 - 9y^2 + z^2 + 36 = 0$

27. $z = x^2 + y^2 + 1$

28. $x^2 + 4y^2 + z^2 - 2x = 0$

29. $x^2 + y^2 - 4z^2 + 4x - 6y - 8z = 13$

30. $4x = y^2 - 2z^2$

31. $x^2 + 4y^2 = 100$

32. $9x^2 + y^2 - z^2 - 2y + 2z = 0$

33. $x^2 - y^2 + 4y + z = 4$

34. $4x^2 - y^2 + z^2 + 8x + 8z + 24 = 0$

35-38 ▪ Use una computadora que tenga *software* para gráficas tridimensionales para dibujar la superficie.

35. $z = 3x^2 - 5y^2$

36. $8x^2 + 15y^2 + 5z^2 = 100$

37. $z^2 = x^2 + 4y^2$

38. $z = y^2 + xy$

39. Dibuje la región acotada por las superficies $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $x^2 + y^2 = 1$ para $1 \le z \le 2$.

40. Dibuje la región acotada por los paraboloides $z = x^2 + y^2$ y $z = 2 - x^2 - y^2$.

41. Encuentre una ecuación para la superficie obtenida al rotar la parábola $y = x^2$ sobre el eje y.

42. Determine una ecuación para la superficie obtenida al rotar la recta $x = 3y$, sobre el eje x.

43. Encuentre una ecuación para la superficie que consiste de todos los puntos que equidistan del punto $(-1, 0, 0)$ y del plano $x = 1$. Identifique la superficie.

44. Calcule una ecuación para la superficie que consiste de todos los puntos P para los que la distancia desde P hasta el eje x es el doble de la distancia desde P hasta el plano yz. Identifique la superficie.

45. Muestre que si el punto (a, b, c) está en el paraboloide hiperbólico $z = y^2 - x^2$, entonces las rectas con ecuación paramétrica $x = a + t$, $y = b + t$, $z = c + 2(b - a)t$ y $x = a + t$, $y = b - t$, $z = c - 2(b + a)t$ están en el paraboloide. (Esto demuestra que el paraboloide hiperbólico es lo que se llama una superficie reglada; es decir, que puede generarse mediante el movimiento de una recta. De hecho, este ejercicio muestra que en todo punto del paraboloide hiperbólico existen dos rectas generatrices. Las otras superficies cuadráticas que son superficies regladas son los cilindros, los conos y los hiperboloides de una hoja.)

46. Muestre que la curva de intersección de las superficies $x^2 + 2y^2 - z^2 + 3x = 1$ y $2x^2 + 4y^2 - 2z^2 - 5y = 0$ está en un plano.

47. Grafique las superficies $z = x^2 + y^2$ y $z = 1 - y^2$ sobre una pantalla común utilizando el dominio $|x| \le 1.2$, $|y| \le 1.2$, y observe la curva de intersección de esas superficies. Muestre que la proyección de esta curva sobre el plano xy es una elipse.

48. Investigue la familia de superficies $z = x^2 + y^2 + cxy$. En particular, deberá determinar el valor de transición de c para el que la superficie cambia de un tipo de superficie cuadrática a otro.