Física II: Clase 17

## Aplicaciones de la Ley de Gauss

La ley de Gauss es válida para cualquier distribución de cargas y cualquier superficie cerrada. Si se conoce la distribución de cargas y ésta tiene alguna simetría que permita evaluar la integral en la ley de Gauss, entonces es posible obtener el campo eléctrico a partir de dicha ley.

- Casos con simetría esférica

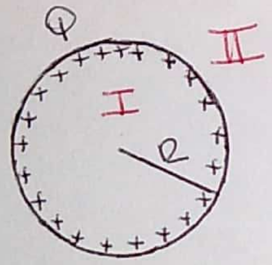
Decir que una distribución de carga tiene simetría esferica significa que si se hace girar con cualquier ángulo, alrededor de cualquier eje que pase por su centro, después de la rotación, el sistema es indistinguible del original antes del giro.

En consecuencia, el campo electrico debe tener una dirección radial, y su magnitud solo puede depender de la distancia r al centro de simetría: $\boxed{\vec{E} = E(r)\,\hat{r}}$

## Ejemplos:

1) Se coloca una carga positiva $Q$ en una esfera conductora de radio $R$. Determinar el campo electrico en cualquier punto del espacio.

### Solución




Sabemos que, por ser conductora, la carga se deposita en la superficie, y en el interior no hay carga neta.

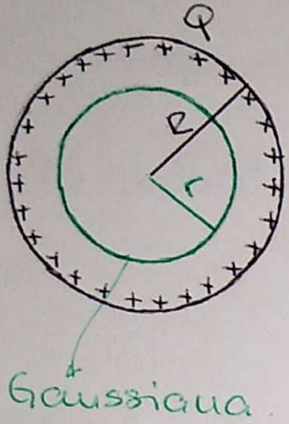
Aprovechando la simetría, tomamos superficies gaussianas esfericas, concéntricas con el conductor. Para calcular el campo en un punto a una distancia $r$ del centro, tomamos una gaussiana que pase por ese punto (es decir, una gaussiana esferica de radio $r$)

Distinguimos dos regiones:

I) Dentro del conductor $(r<R)$

II) Fuera del conductor $(r>R)$

## Region I: $r < R$

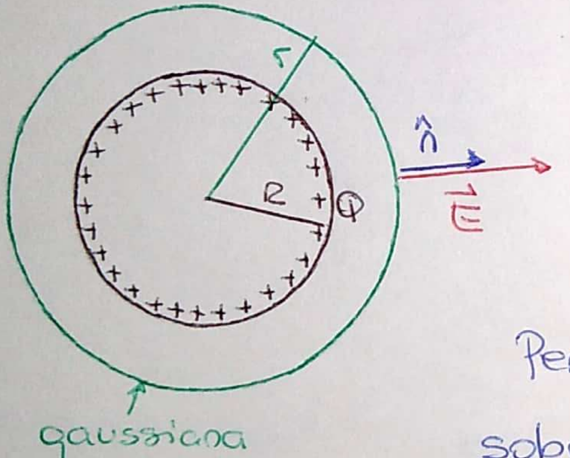



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}.$$

Pero $q_{enc} = 0 \Rightarrow \boxed{\vec{E} = 0}$

## Región II: $r > R$

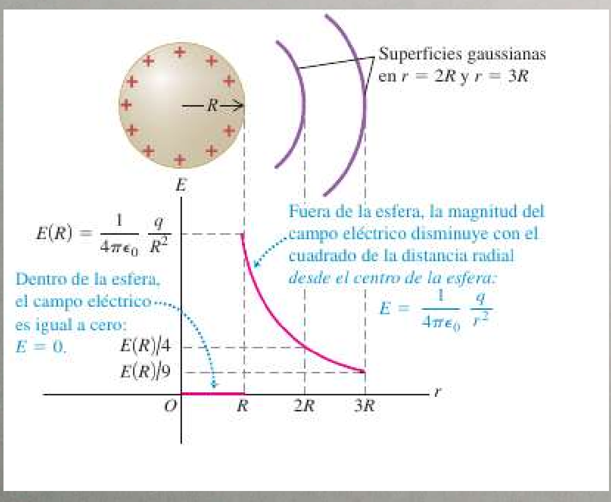
$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} \qquad q_{enc} = Q$$




$$\oint E \cos 0 \, dA = \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Pero como E sólo depende de r, sobre la gaussiana $E = cte$

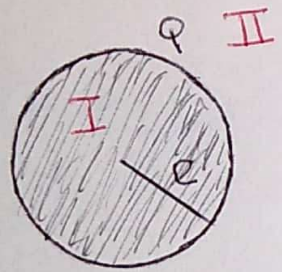
$$\Rightarrow E \underbrace{\oint dA}_{A = 4\pi r^2} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}} \leftarrow \text{radial saliente.}$$




Notar que el campo es discontinuo en R (en la superficie del conductor)

2) Una esfera no conductora tiene una carga positiva Q distribuida uniformemente en todo su volumen. Calcular el campo eléctrico (magnitud y dirección) en todo el espacio.

Solución:




Como Q está distribuida uniformemente ⇒

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

Región I: $r < R$


$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$q_{enc}$ = carga dentro de la región verde

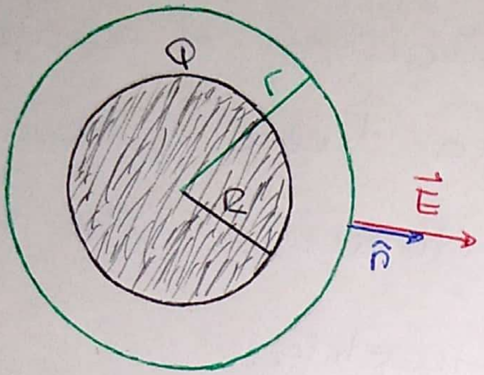
$$\oint E\cos\theta \, dA = \frac{\rho V_{enc}}{\varepsilon_0}$$

$$E\oint dA = \frac{\frac{3Q}{\cancel{4\pi} R^3}\,\frac{\cancel{4\pi} r^3}{\cancel{3}}}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E\, 4\pi \cancel{r^2} = \frac{Q\, r^{\cancel{3}}}{R^3 \varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Qr}{R^3}}$$

← radial saliente

## Región II: $r > R$

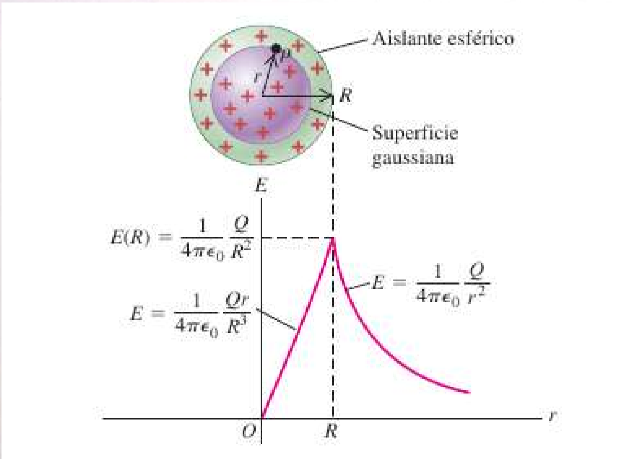



$$\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} \qquad q_{enc} = Q$$

$$\oint E \, dA = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$E \oint dA = \frac{Q}{\varepsilon_0} \Rightarrow E\, 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}}$$ ← radial saliente.




- Casos con simetría cilíndrica

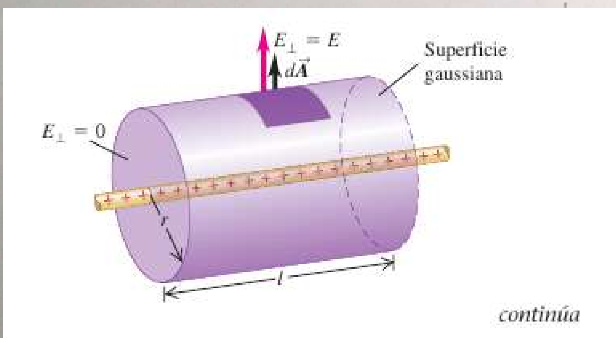
La simetría cilíndrica significa que el sistema puede girar cualquier ángulo alrededor de su eje y/o desplazarse cualquier distancia a lo largo de dicho eje, y en cada caso el sistema resultante es indistinguible del original.

En estos casos, la gaussiana que vamos a tomar es un cilindro coaxial con el eje de simetría, de esta manera, el campo electrico sobre la gaussiana tiene magnitud constante, mientras que su dirección debe ser radial respecto al eje de simetría.

Ejemplos:

1) Un alambre recto e infinito tiene una densidad lineal de carga $\lambda$ (positiva). Calcular el campo electrico a una distancia r del alambre

Solución:




$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0} \qquad q_{enc} = \lambda l$$

En las tapas: $\vec{E} \perp \hat{n} \Rightarrow \vec{E} \cdot d\vec{A} = 0$

En la cara curva: $\vec{E} \parallel \hat{n} \Rightarrow \theta = 0$

$$\Rightarrow \oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_{\substack{cara \\ curva}} E \, dA = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

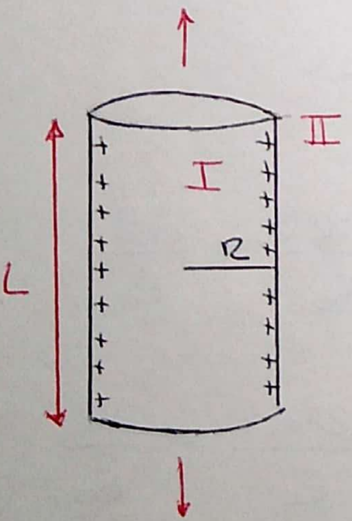
$$E \int_{\substack{\text{cara} \\ \text{curva}}} dA = \frac{\lambda \ell}{\varepsilon_0} \Rightarrow E\, 2\pi r \cancel{\ell} = \frac{\lambda \cancel{\ell}}{\varepsilon_0}$$

$A = 2\pi r \ell$

$$\Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r}}$$ ← radial saliente

2) Un cilindro conductor de radio R y longitud infinita tiene una densidad superficial de carga $\sigma$. Determinar el campo eléctrico en todo el espacio.

Solución:




Si tomamos una porción L del cilindro, éste tiene una carga $Q_L$ dada por:

$$Q_L = \sigma A_L = \sigma 2\pi R L$$

podríamos definir la densidad lineal de carga:

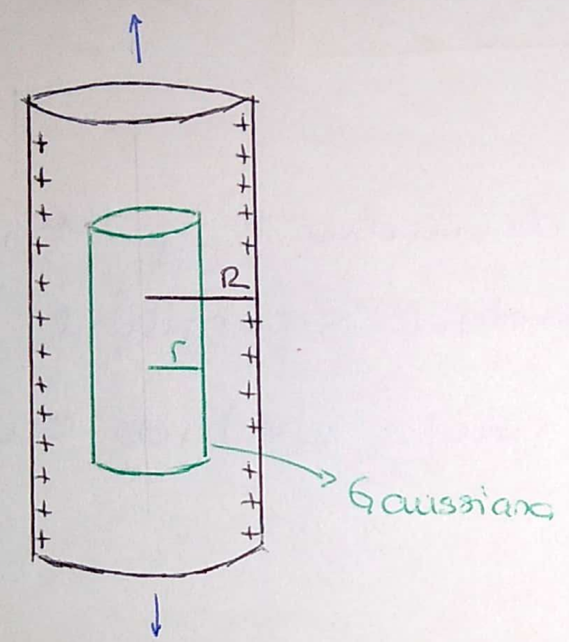
$$\boxed{\lambda = \frac{Q_L}{L} = \sigma 2\pi R}$$

Muchas veces, en lugar de dar $\sigma$, aunque el cuerpo tenga la carga distribuida en una superficie, se dá $\lambda$, que está relacionada con

$\sigma$ por la relación: $\lambda = \sigma 2\pi R$.

Calculemos el campo:

Región I: $r < R$

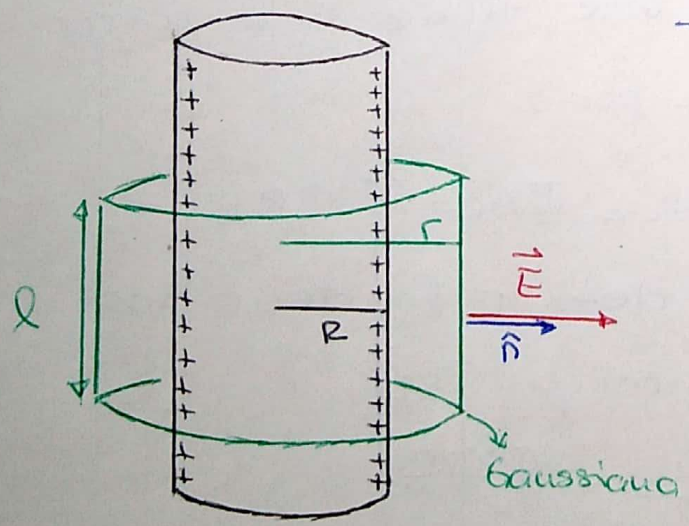



$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$$

pero $q_{enc} = 0$

$$\Rightarrow \boxed{E = 0}$$

Región II: $r > R$




$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}.$$

$$\int E\, dA = \frac{\sigma 2\pi R l}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}$$

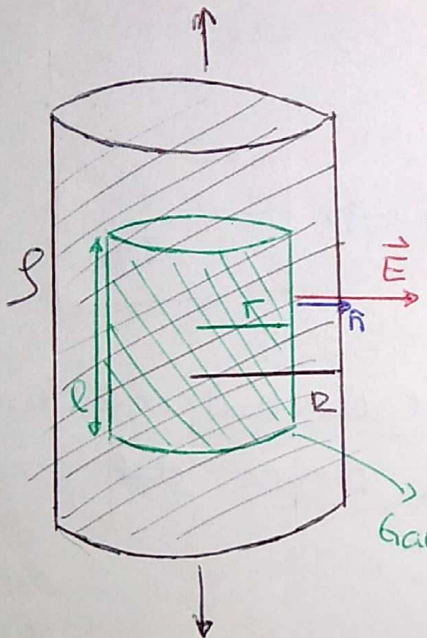
$$E\, 2\pi r l = \frac{\sigma 2\pi R l}{\varepsilon_0} = \frac{\lambda l}{\varepsilon_0}.$$

$$\Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{\sigma R}{\varepsilon_0 r}} \quad \text{o} \quad \boxed{E(r) = \frac{\lambda}{2\pi \varepsilon_0 r}}$$

3) Un cilindro no conductor de radio $R$ y longitud infinita tiene una densidad volumétrica de carga $\rho$ constante. Calcular el campo eléctrico en todo el espacio.

Solución:

Región I: $r < R$




$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}.$$

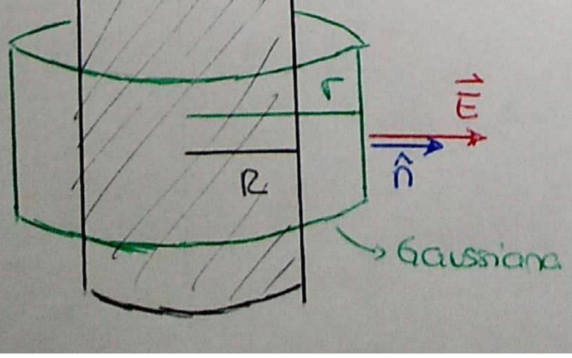
$$y \quad q_{enc} = \rho \pi r^2 l \quad , \quad \vec{E} \parallel \hat{n}$$

$$\Rightarrow \int E \, dA = \frac{\rho \pi r^2 l}{\varepsilon_0}$$

$$E \int dA = \frac{\rho \pi r^2 l}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E \, 2\cancel{\pi} \cancel{r} \cancel{l} = \frac{\rho \cancel{\pi} r^{\cancel{2}} \cancel{l}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E(r) = \frac{\rho}{2\varepsilon_0} r}$$ radial saliente

Región II: $r > R$




$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}.$$

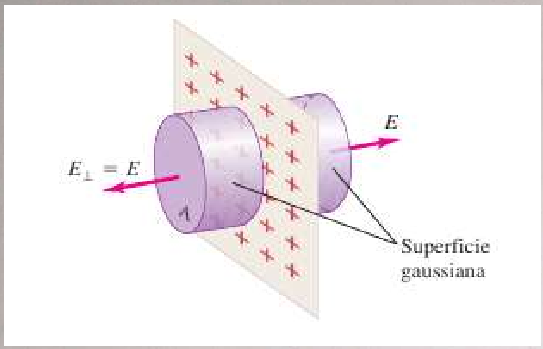
$$q_{enc} = \rho \pi R^2 l$$

$$E \, 2\cancel{\pi} r \cancel{l} = \frac{\rho \cancel{\pi} R^2 \cancel{l}}{\varepsilon_0}$$

$$\boxed{E(r) = \frac{\rho R^2}{2 \varepsilon_0 r}}$$ radial saliente

- Otros casos:

1) Campo de una lámina plana infinita cargada.




Por simetría, el campo eléctrico debe ser perpendicular a la placa.

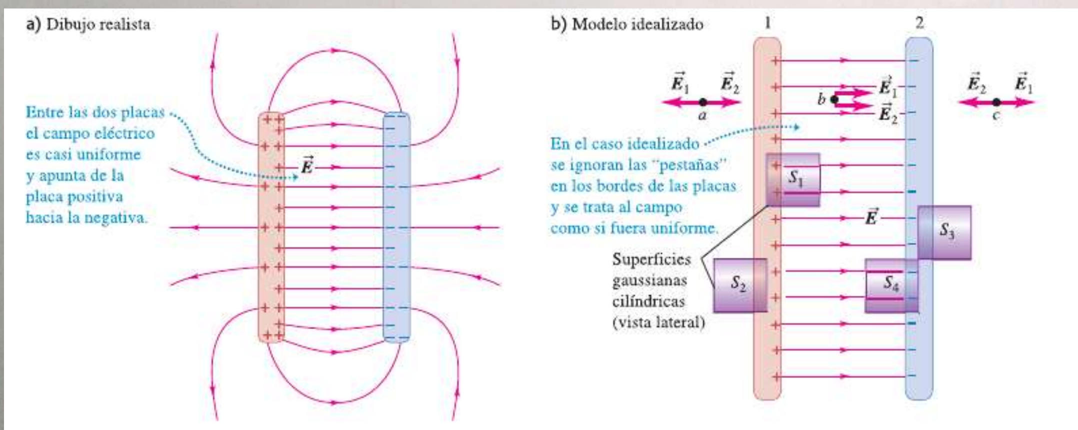
Por Gauss: $\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{q_{enc}}{\varepsilon_0}$

pero $q_{enc} = \sigma A$ y en las tapas $\vec{E} \parallel \hat{n}$

$$\Rightarrow \, 2\oint_{tapas} E \, dA = \frac{\sigma A}{\varepsilon_0} \Rightarrow E \, 2\cancel{A} = \frac{\sigma \cancel{A}}{\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}}$$

Notar que hubiéramos obtenido el mismo resultado si hubiéramos tomado límite para $R \to \infty$ del campo de un disco.

2) Campo entre placas paralelas con cargas opuestas




Entre las placas:

$$\boxed{E = \frac{2\sigma}{2\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}}$$