به نام خدا

پروژه درس تحقیق در عملیات 2

مدل‌سازی و حل مسئله کاشی‌های نافرمان

نام و نام خانوادگی: اهورا نقی‌پور

استاد مربوطه: دکتر یاسر ملکیان

تیر 1405

1. تعریف مسئله

در این پروژه مسئله‌ای با عنوان خاموش‌سازی صفحه مورد بررسی قرار گرفته است. در این مسئله ماتریس دودویی با ابعاد $n \times m$ به‌عنوان ورودی دریافت می‌شود که هر درایه آن تنها می‌تواند یکی از مقادیر صفر یا یک را اختیار کند. مقدار یک نشان‌دهنده روشن بودن خانه و مقدار صفر نشان‌دهنده خاموش بودن آن است.

در هر مرحله می‌توان یکی از خانه‌های ماتریس را انتخاب (کلیک) نمود. با کلیک روی یک‌خانه، علاوه بر وضعیت همان خانه، وضعیت چهارخانه مجاور آن شامل خانه‌های بالا، پایین، چپ و راست نیز تغییر می‌کند. تغییر وضعیت به این معناست که اگر مقدار خانه برابر یک باشد به صفر و اگر مقدار آن برابر صفر باشد به یک تبدیل می‌شود.

هدف اصلی مسئله تعیین مجموعه‌ای از کلیک‌ها است به‌گونه‌ای که پس از اعمال تمامی کلیک‌ها، تمامی خانه‌های ماتریس خاموش شوند. همچنین تعداد کلیک‌های انجام شده باید حداقل باشد؛ بنابراین مسئله حاضر به‌صورت یک مسئله بهینه‌سازی عدد صحیح دودویی مدل‌سازی می‌شود.

2. مدل ریاضی

در این بخش ابتدا مجموعه‌ها، اندیس‌ها، پارامترها و متغیرهای تصمیم معرفی شده و سپس مدل ریاضی مسئله ارائه می‌شود.

جدول 1. مجموعه‌ها

نماد	تعریف
I	مجموعه سطرهای ماتریس $I=\{1, \dots, n\}$
J	مجموعه سطرهای ماتریس $J=\{1, \dots, m\}$
$N(i,j)$	مجموعه خانه‌های مؤثر بر خانه (i,j)

جدول 2 . اندیس‌ها

اندیس	تعریف
i	اندیس سطر
j	اندیس ستون

جدول 3 . پارامترها

پارامتر	تعریف
i	اندیس سطر
j	اندیس ستون

جدول 4 . متغیرهای تصمیم

متغیر	تعریف
x_{ij}	متغیر دودویی؛ اگر خانه (i,j) انتخاب شود برابر 1 و در غیر این صورت برابر 0
y_{ij}	متغیر صحیح نامنفی کمکی برای مدل‌سازی شرط زوج بودن

مدل ریاضی مسئله به‌صورت زیر است:

$$N(i,j) = \{(i,j)\} \cup \{(i-1,j): i > 1\} \cup \{(i+1,j): i < n\} \& \cup \{(i,j-1): j > 1\} \cup \{(i,j+1): j < m\} \quad (1)$$

$$\min Z = \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} x_{ij} \quad (2)$$

$s.t.$

$$c_{ij} + \sum_{(a,b) \in N(i,j)} x_{ab} = 2y_{ij}, \quad \forall i \in I,\ j \in J \quad (3)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall i \in I,\ j \in J \quad (4)$$

$$0 \le y_{ij} \le 5, \quad y_{ij} \in \mathbb{Z} \quad \forall i \in I,\ j \in J \quad (5)$$

3. تشریح روابط مدل

رابطه (1) مجموعه همسایگی هر خانه را تعریف می‌کند. این مجموعه شامل خود خانه و چهار همسایه مستقیم آن است. بدیهی است در خانه‌های مرزی و گوشه‌ای، برخی از همسایه‌ها وجود نخواهند داشت.

رابطه (2) تابع هدف مدل را نشان می‌دهد. هدف، کمینه‌سازی تعداد کل کلیک‌های انجام شده روی صفحه است. از آنجا که هر متغیر x_{ij} بیانگر انجام یا عدم انجام یک کلیک است، مجموع این متغیرها برابر با تعداد کل کلیک‌ها خواهد بود.

رابطه (3) مهم‌ترین محدودیت مدل است. هر بار که خانه‌ای انتخاب می‌شود، وضعیت آن خانه و همسایه‌های مستقیم آن معکوس می‌گردد. بنابراین تعداد دفعاتی که هر خانه تحت تأثیر کلیک قرار می‌گیرد برابر مجموع متغیرهای x متناظر با اعضای مجموعه N(i,j) خواهد بود.

برای‌آنکه خانه نهایی خاموش شود، مجموع مقدار اولیه خانه و تعداد دفعات تغییر وضعیت آن باید عددی زوج باشد. متغیر کمکی y_{ij} برای مدل‌سازی این شرط زوجیت استفاده شده است. به‌عبارت‌دیگر، رابطه (3) تضمین می‌کند که وضعیت نهایی تمامی خانه‌ها برابر صفر شود.

رابطه (4) بیان می‌کند که متغیرهای تصمیم x_{ij} از نوع دودویی هستند. بنابراین هر خانه یا انتخاب می‌شود و یا انتخاب نمی‌شود.

رابطه (5) دامنه متغیرهای کمکی y_{ij} را مشخص می‌کند. از آنجا که حداکثر پنج خانه می‌توانند بر هر خانه اثر بگذارند، کران بالای این متغیر برابر 5 در نظر گرفته شده است.

4. نتایج حل مدل

مدل ارائه‌شده در Python/Pyomo کدنویسی شده و با حل‌کننده GLPK حل گردیده است. ماتریس ورودی مورداستفاده برای ارزیابی مدل در رابطه (6) نشان داده شده است.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

پس از حل مدل، خروجی برنامه به‌صورت یک ماتریس دودویی از متغیرهای تصمیم x_{ij}استخراج گردید. در این ماتریس، مقدار یک نشان‌دهنده انتخاب خانه متناظر و مقدار صفر نشان‌دهنده عدم انتخاب آن خانه است. ماتریس جواب بهینه در رابطه (7) ارائه شده است.

$$X^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{7}$$

مطابق رابطه (8)، مقدار بهینه تابع هدف برابر با 10 به دست آمد. این مقدار بیانگر حداقل تعداد کلیک‌های موردنیاز برای خاموش کردن کامل صفحه است. بنابراین هیچ جواب شدنی با تعداد کلیک کمتر از 10 وجود ندارد.

$$Z^* = 10 \tag{8}$$

به‌منظور اعتبارسنجی جواب به‌دست‌آمده، کلیک‌های متناظر با ماتریس تصمیم X^* بر روی ماتریس اولیه اعمال شدند. ماتریس نهایی حاصل در رابطه (9) نشان داده شده است.

$$A' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{9}$$

مطابق رابطه (9)، پس از اعمال کلیک‌های بهینه، تمامی درایه‌های ماتریس نهایی برابر صفر شده‌اند. در نتیجه، شرط موردنظر مسئله مبنی بر خاموش شدن کامل صفحه برقرار است.