

UNIVERSIDADE FEDERAL DE GOIÁS  
INSTITUTO DE INFORMÁTICA

ROMMEL TEODORO DE OLIVEIRA

# **Sobre Conjuntos Dominantes Eficientes em Grafos**

Goiânia  
2009

ROMMEL TEODORO DE OLIVEIRA

# Sobre Conjuntos Dominantes Eficientes em Grafos

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação do Instituto de Informática da Universidade Federal de Goiás, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação.

**Área de concentração:** Algoritmos e Teoria dos Grafos.

**Orientador:** Prof. Rommel Melgaço Barbosa

Goiânia  
2009

ROMMEL TEODORO DE OLIVEIRA

# Sobre Conjuntos Dominantes Eficientes em Grafos

Dissertação defendida no Programa de Pós-Graduação do Instituto de Informática da Universidade Federal de Goiás como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ciência da Computação, aprovada em 12 de Março de 2009, pela Banca Examinadora constituída pelos professores:

---

**Prof. Rommel Melgaço Barbosa**  
Instituto de Informática – UFG  
Presidente da Banca

---

**Profa. Diane Castonguay**  
Instituto de Informática – UFG

---

**Profa. Maria do Socorro Rangel**  
Departamento de Ciências da Computação e Estatística – IBILCE/UNESP

Todos os direitos reservados. É proibida a reprodução total ou parcial do trabalho sem autorização da universidade, do autor e do orientador(a).

### **Rommel Teodoro de Oliveira**

Graduou-se em Licenciatura em Informática pela Universidade Federal de Mato Grosso no ano de 2006. Durante sua graduação, foi aluno de iniciação científica e atuou nas áreas de física computacional, otimização combinatória e inteligência artificial. Como aluno e bolsista do Mestrado em Ciência da Computação da Universidade Federal de Goiás, desenvolveu um trabalho em teoria dos grafos, tendo como tema os conjuntos dominantes eficientes.

Aos meus pais, José Ivo e Vera Lúcia (*in memoriam*), pelo amor, incentivo e apoio constante, fundamentais para meu crescimento pessoal e profissional. Obrigado por tudo que representam e me deram nesta vida.

---

## Agradecimentos

---

*Ao meu orientador, Professor Rommel Melgaço Barbosa,*

Exemplo de dedicação e competência profissional. Meus sinceros agradecimentos pelas oportunidades, aprendizados e desafios vivenciados nos últimos anos, que contribuíram intensamente para o meu crescimento acadêmico. Expresso aqui minha admiração, gratidão e respeito.

*À minha família,*

Pelo apoio e compreensão nas horas de ausência, bem como pelo incentivo e momentos de alegria e amizade.

*À minha noiva, Erica,*

Pelo intenso amor e companheirismo ao longo de nosso relacionamento. Pela compreensão, força e paciência nos momentos de ausência e apreensões. “Você surgiu e juntos conseguimos ir mais longe/ Você dividiu comigo a sua história/ E me ajudou a construir a minha”.

*Às Professoras Diane Castonguay e Maria do Socorro Rangel*

Por suas sugestões e contribuições na avaliação deste trabalho.

*Aos professores do Programa de Pós-graduação em Ciência da Computação da UFG,*

Pelos valiosos ensinamentos, profissionalismo e respeito com que conduzem suas atividades.

*Aos colegas do Mestrado,*

Pelo convívio durante esse período de aprendizado e troca de experiências e, em especial à Luciana e Elisângela, pela atenção e auxílio em todos os momentos.

*Aos funcionários do Instituto de Informática,*

Pela receptividade, atenção e dedicação com que desempenham o seu trabalho.

“Aquele que domina os outros é forte. Aquele que domina a si mesmo é poderoso.”

**Lao Zi (570-490 a.C.),**  
*Filósofo chinês, considerado o fundador do Taoísmo.*



---

## Resumo

---

Oliveira, Rommel Teodoro de. **Sobre Conjuntos Dominantes Eficientes em Grafos**. Goiânia, 2009. 130p. Dissertação de Mestrado. Instituto de Informática, Universidade Federal de Goiás.

Dado um grafo  $G = (V, E)$  e um subconjunto de vértices  $D \subseteq V$ , define-se  $D$  como um *conjunto dominante* de  $G$  se todo vértice  $v \in V$  que não estiver incluído no conjunto  $D$  for adjacente a pelo menos um vértice de  $D$ . Na situação em que, para todo  $v \in V$ ,  $|N[v] \cap D| = 1$ , diz-se que o grafo  $G$  é *eficientemente dominado*. Uma generalização desse conceito consiste na *múltipla dominação eficiente*, em que é requerido que todo vértice do grafo seja dominado exatamente  $k$  vezes. O objetivo deste trabalho é realizar um estudo exploratório sobre esses temas, de modo a reunir o conhecimento teórico requerido para pesquisas avançadas. Para isso, buscou-se a apresentação e o detalhamento das demonstrações dos teoremas estudados. Além disso, foram fornecidos alguns resultados sobre a múltipla dominação eficiente no que se refere aos limites para o tamanho de um conjunto  $k$ -dominante eficiente, à relação da  $k$ -dominação eficiente entre grafos regulares, seu complemento e seus grafos linha iterados, bem como à caracterização da  $\mathcal{NP}$ -completude para o problema da múltipla dominação eficiente em grafos arbitrários. Espera-se que esta dissertação forneça subsídios teóricos para estudos futuros voltados à dominação eficiente, bem como à resolução de algumas questões em aberto.

### Palavras-chave

Conjuntos dominantes, Conjuntos dominantes eficientes, Problemas  $\mathcal{NP}$ -completos.

---

## Abstract

---

Oliveira, Rommel Teodoro de. **On the Efficient Dominating Sets in Graphs.** Goiânia, 2009. 130p. MSc. Dissertation. Instituto de Informática, Universidade Federal de Goiás.

Given a graph  $G = (V, E)$  and a set of vertices  $D \subseteq V$ , a vertex  $v \in V$  is *dominated* by  $D$  if  $|N[v] \cap D| \geq 1$ . When  $|N(v) \cap D| = 1$  for all  $v \in V$ ,  $G$  is *efficiently dominable*. A generalization of this concept is called *efficient multiple domination*, which requires all vertices must be dominated by a set  $D \subseteq V$  exactly  $k$  times. The aim of this dissertation is to study these topics, describing the theoretical knowledge needed for advanced researches. For this reason, many of the theorems and its proofs are detailed. Furthermore, some results on the efficient multiple domination are presented, including bounds for the size of efficient  $k$ -dominating sets, the complement and iterated line graphs of efficiently  $(r + 1)$ -dominable  $r$ -regular graphs and a  $\mathcal{NP}$ -completeness proof for the efficient multiple domination problem in arbitrary graphs. It is expected that this work contribute to the development of future researches on the efficient domination and in the resolution of some open problems.

### Keywords

Dominating sets, Efficient dominating sets,  $\mathcal{NP}$ -complete problems.

---

# Sumário

---

Lista de Figuras	12
Lista de Tabelas	15
Lista de Algoritmos	16
1 Introdução	20
2 Conceitos Preliminares	22
2.1 Apresentação	22
2.2 Definições Básicas	22
3 Conjuntos Dominantes em Grafos	37
3.1 Apresentação	37
3.2 Contextualização Histórica	37
3.3 Tipos de Dominação	39
3.3.1 Dominação Conexa	39
3.3.2 Dominação Total	40
3.3.3 Múltipla Dominação	41
3.3.4 $H$ -Dominação	42
3.3.5 Dominação a Distância	42
3.4 Aplicações de Conjuntos Dominantes	43
3.4.1 Conjuntos Dominantes em Redes Sem Fio	43
3.4.2 Detecção Precoce e Vacinação Dirigida em Surtos de Doenças Infecciosas	45
3.5 Propriedades de Conjuntos Dominantes	46
3.6 Limites Sobre o Número de Dominação	49
3.6.1 Limites em Termos da Ordem	49
3.6.2 Limites em Termos da Ordem e Tamanho	64
3.6.3 Limites em Termos da Ordem e Grau	73
3.7 Aspectos Algorítmicos e de Complexidade	77
4 Conjuntos Dominantes Eficientes em Grafos	83
4.1 Apresentação	83
4.2 Contextualização Histórica	83
4.3 Tipos de Dominação Eficiente	85
4.3.1 Dominação Eficiente Ponderada	85
4.3.2 Dominação Eficiente de Arestas	85
4.3.3 $(j, k)$ -Dominação Eficiente	86
4.4 Aplicações de Conjuntos Dominantes Eficientes	87

4.4.1	Distribuição de Recursos em Computadores Paralelos	87
4.4.2	Deteção e Correção de Mensagens Binárias com Erros Simples	88
4.5	Propriedades de Conjuntos Dominantes Eficientes	89
4.6	Limites Sobre o Número de Dominação Eficiente	90
4.7	Algumas Caracterizações	93
4.8	Aspectos Algorítmicos e de Complexidade	99
5	Múltipla Dominação Eficiente em Grafos	<b>102</b>
5.1	Apresentação	102
5.2	Conjuntos $k$ -Dominantes Eficientes em Grafos	102
6	Conclusões e Considerações Finais	<b>116</b>
	Referências Bibliográficas	<b>118</b>
	Índice Remissivo	<b>128</b>

---

## Lista de Figuras

---

2.1	Exemplo de um grafo planar.	23
2.2	Dois grafos isomorfos.	23
2.3	Exemplo de um grafo cujos vértices $v_3$ , $v_4$ e $v_6$ são enclaves de $N[v_5]$ .	24
2.4	Grafo de Petersen.	24
2.5	Um grafo e seu complemento.	25
2.6	Grafo $K_{2,3}$ com partições $V_1$ e $V_2$ .	25
2.7	(a) Um grafo $G$ e (b) seu subgrafo induzido pelos vértices $v_1$ , $v_2$ , $v_5$ , $v_6$ e $v_7$ .	26
2.8	Grafo no qual $\omega(G) = 5$ .	26
2.9	Um grafo de raio 4.	27
2.10	(a) Grafo 2-conexo e (b) grafo com uma ponte $e$ .	28
2.11	Uma árvore enraizada em $v_1$ .	28
2.12	Um hipercubo $Q_3$ .	29
2.13	(a) Um caminho $P_1$ e um ciclo $C_3$ ; e (b) a coroa $G = C_3 \circ P_1$ .	29
2.14	$G = P_2 \times C_4$ .	30
2.15	(a) Um grafo $G$ ; (b) seu grafo linha $L(G)$ e (c) $L^2(G)$ , o segundo grafo linha de $G$ .	30
2.16	(a) Seis círculos dispostos em uma superfície plana e (b) seu respectivo grafo de disco unitário.	31
2.17	Grafo com $\alpha(G) = 4$ .	31
2.18	(a) um emparelhamento maximal e (b) um emparelhamento máximo e perfeito.	32
2.19	(a) Um grafo com seu emparelhamento perfeito $M$ e (b) Grafo $G_M$ de um emparelhamento $M$ .	32
2.20	Grafo que possui conjuntos dominantes.	33
2.21	Grafo que possui diversos conjuntos dominantes minimais, sendo que $\gamma(G) = 3$ e $\Gamma(G) = 5$ . O conjunto $D = \{v_3, v_5, v_6\}$ é um conjunto dominante minimal que também é independente.	33
2.22	Grafo $G$ para o qual $C = \{v_2, v_4\}$ é um conjunto de cobertura que também domina todos os outros vértices do grafo. Por outro lado, o conjunto dominante $D = \{v_2\}$ não define uma cobertura de vértices.	34
2.23	Grafo em que $D' = \{v_1, v_3, v_7, v_8\}$ é um 1-pacote e $D'' = \{v_1, v_4, v_8\}$ um 2-pacote.	34
2.24	Grafo que possui um conjunto dominante eficiente.	34
2.25	Grafo em que $F(G) = 8$ .	35
2.26	Uma árvore $A$ com $F(A) = 4$ para dois conjuntos que dominam suas vizinhanças uma única vez.	35
2.27	Uma árvore $A$ tal que $\gamma(A) = 4$ , $F(A) = 12$ e $R(A) = 16$ .	36

3.1	(a) Uma rainha domina posições na horizontal, vertical ou diagonal e (b) Possível solução de um tabuleiro $8 \times 8$ utilizando cinco rainhas.	38
3.2	(a) Tabuleiro $3 \times 3$ com todas as posições dominadas e (b) seu respectivo grafo $Q_{3,3}$ , dominado por $D = \{v_5\}$ .	38
3.3	Exemplo de grafo para o qual $\gamma_c(G) = 3$ . As arestas em negrito definem uma árvore geradora de $G$ em que o número de folhas é maximizado.	40
3.4	Exemplo de grafo para o qual $\gamma_t(G) = 4$ .	41
3.5	Exemplo de grafo para o qual $\gamma_{\times 3}(G) = 4$ .	41
3.6	Exemplo de grafo para o qual $\gamma_{K_{1,3}}(G) = 8$ .	42
3.7	Grade $P_4 \times P_6$ para o qual $\gamma_{\leq 3}(P_4 \times P_6) = 3$ .	43
3.8	Exemplos de topologias para uma determinada rede <i>ad hoc</i> móvel em momentos $t_1$ e $t_2$ distintos. (a) Topologia em um tempo $t_1$ e (b) Topologia em um tempo $t_2$ , após a movimentação do dispositivo $d_7$ .	44
3.9	Exemplo de um grafo $G$ com conjunto dominante minimal.	47
3.10	Os vértices $v_1$ e $v_5$ definem um conjunto dominante mínimo do grafo.	47
3.11	O complemento de um conjunto dominante minimal define um conjunto dominante.	48
3.12	Grafo $G$ que possui um vértice isolado e está dominado pelo conjunto $D = \{v_1, v_3\}$ . Entretanto, observe que tal grafo não pode ser dominado pelo conjunto $V - D = \{v_2, v_4\}$ .	48
3.13	Grafo $G$ que contém um subgrafo gerador $G'$ isomorfo a um $P_5 \cup \frac{n-6}{2}K_2$ . Observe que as arestas tracejadas definem um $P_5$ e as arestas pontilhadas definem os subgrafos $K_2$ . Nesse caso, $\gamma(G) = \gamma(G') = 4$ . Se $w_2$ não fosse adjacente a $w_5$ , então o valor de $\gamma(G)$ seria $\frac{10}{2} = 5$ .	50
3.14	Coleção $\mathcal{A}$ de grafos.	51
3.15	Família de grafos com $\delta(G) \geq 2$ e $\gamma(G) \leq \frac{2n}{5}$ .	51
3.16	Coleção $\mathcal{B}$ de grafos.	51
3.17	Exemplos de grafos pertencentes à classe $\bigcup_{i=1}^6 \mathcal{G}_i$	54
3.18	Estrutura de um grafo do Lema 3.11.	55
3.19	Estrutura de um grafo do Lema 3.12. As arestas tracejadas entre $t$ e $r_1, \dots, r_n$ ilustram que $t$ tem no mínimo dois vizinhos em $R$ .	56
3.20	Estrutura de um grafo do Lema 3.13.	57
3.21	Estrutura de um grafo do Lema 3.14.	59
3.22	Grafo 3-regular para o qual $\gamma(G) = 3$ .	61
3.23	Exemplos de grafos da família $G_{n,\gamma}$ de Vizing.	66
3.24	(a) $v_1 \approx v_5$ e (b) Quando $v_1 \sim v_5$ , $v_1$ e $v_5 \in W_1$ .	70
3.25	Grafos do caso 4.	70
3.26	Estruturas do caso 5.	71
3.27	Estruturas que não ocorrem nos casos de 1 a 5.	71
3.28	Exemplo de aplicação do Algoritmo 3.1. (a) Árvore $A$ utilizada como entrada; (b) Passo inicial do laço de iteração: análise de $v_1 \sim v_2$ ; (c) Segundo passo: análise de $v_2 \sim v_6$ ; e, (d) Após a remoção do vértice $v_1$ e inserção de $v_2$ no conjunto $D$ , o vértice $v_3 \sim v_6$ é analisado.	79
3.29	Exemplo de aplicação do Algoritmo 3.1 (continuação). (a) Quinto passo; (b) Sexto passo; (c) Décimo sétimo e último passo do processo iterativo: análise de $v_{17}$ ; e, (d) Inserção de $v_{18}$ em $D$ , após a execução da linha 14.	80

4.1	Diagrama de um processo de comunicação.	84
4.2	Ciclo $C_9$ e seu conjunto dominante eficiente cuja soma dos pesos é mínima.	85
4.3	(a) Grafo para o qual $\gamma'_e(G) = 1$ e (b) Árvore que não possui um conjunto dominante eficiente de arestas.	86
4.4	(a) $\gamma_{1,3}(G) = 5$ ; (b) $\gamma_{2,3}(G) = 4$ ; e (c) $\gamma_{3,3}(G) = 3$ .	87
4.5	Grafo eficientemente $(1, 2)$ -dominável.	87
4.6	Hipercubo $Q_3$ .	89
4.7	Árvore $A$ de diâmetro 4.	92
4.8	Árvore $A_2$ para a afirmação (i).	94
4.9	Árvore $A_2$ para a afirmação (ii).	94
4.10	Árvore $A_2$ para a afirmação (iii).	94
4.11	Forma geral de uma subárvore de altura 3 enraizada em $r$ .	95
4.12	Um toro $C_5 \times C_5$ .	96
4.13	Grades eficientemente domináveis. (a) Grade $4 \times 4$ e (b) Grade $2 \times 7$ .	97
4.14	Para $3 \leq i \leq j$ , $KN_{i,j}$ é eficientemente dominável se, e somente se, $i = 3$ e $k = 4$ .	97
4.15	Árvore eficientemente dominada, onde cada vértice $v$ está acompanhado por uma tripla $(f_1(v), f_2(v), f_3(v))$ .	100
5.1	Grafo com um conjunto 3-dominante eficiente.	102
5.2	Grafo com um conjunto 4-dominante eficiente de cardinalidade 8.	103
5.3	Esquema que relaciona os vértices $x$ e $y$ com as suas respectivas quantidades de vizinhos nos conjuntos $S - D$ , $S \cap D$ e $D - S$ .	104
5.4	(a) Um grafo $G$ de ordem 8, 2-regular e eficientemente 3-dominável (b) $\bar{G}$ eficientemente 6-dominável.	106
5.5	$F_1(G) \neq n$ e $F_2(G) = n$	107
5.6	Grafos $k$ eficientemente domináveis, para $1 \leq k \leq 2$ . (a) $F_1(G) = n$ e (b) $F_2(G) = n$ .	107
5.7	Um grafo $G$ e seu conjunto duplo dominante eficiente $D = \{v_4, v_8, v_9, v_{13}\}$ . Observe que $V - D$ é um conjunto 6-dominante eficiente.	108
5.8	Primeiro passo da redução.	112
5.9	Segundo passo da redução.	112
5.10	Terceiro e último passo da redução.	114

---

## Lista de Tabelas

---

3.1	<i>Classes de Grafos <math>\mathcal{G}_i</math> com <math>1 \leq i \leq 6</math></i>	53
3.2	<i>Limites superiores para <math>\gamma(G)</math> conforme <math>\delta(G)</math></i>	61
3.3	<i>Limites em termos da ordem estudados neste trabalho</i>	63
3.4	<i>Limites em termos da ordem e tamanho estudados neste trabalho</i>	72
3.5	<i>Limites em termos da ordem e grau estudados neste trabalho</i>	76



---

## Lista de Algoritmos

---

3.1	<i>DominaçãoDeÁrvore(A)</i> [36]	78
5.1	<i>Aplicação do Passo (b) do processo de redução</i>	113
5.2	<i>Aplicação do Passo (c) do processo de redução</i>	114

---

## Lista de Símbolos

---

$(v, w)$ -caminho	Caminho no qual $v$ é o vértice inicial e $w$ é o vértice final
$\alpha(G)$	Número de independência do grafo $G$
$\bar{G}$	Grafo complementar do grafo $G$
$\Delta(G)$	Grau máximo entre os vértices do grafo $G$
$\delta(G)$	Grau mínimo entre os vértices do grafo $G$
$\Gamma(G)$	Tamanho do maior conjunto dominante minimal do $G$
$\gamma(G)$	Número de dominação do grafo $G$
$\gamma_{\leq l}(G)$	Número de dominação a uma distância $l$ do grafo $G$ .
$\gamma_{\times k}(G)$	Número de $k$ -dominação do grafo $G$
$\gamma_c(G)$	Número de dominação conexa do grafo $G$
$\gamma_H(G)$	Número de $H$ -dominação do grafo $G$
$\gamma_t(G)$	Número de dominação total do grafo $G$
$\kappa(G)$	Número de conexidade do grafo $G$
$\omega(G)$	Tamanho da maior clique do grafo $G$
$\rho(G)$	Número de empacotamento do grafo $G$
$C(G)$	Centro do grafo $G$
$C_m$	Ciclo de tamanho $m$
$CDM(G)$	Conjunto de todos os conjuntos dominantes minimais do grafo $G$
$d(v)$	Grau do vértice $v$
$d(v, w)$	Distância entre os vértices $v$ e $w$

---

$diam(G)$	Diâmetro do grafo $G$
$E(G)$	Conjunto de arestas do grafo $G$
$exc(v)$	Excentricidade do vértice $v$
$F(G)$	Número de dominação eficiente do grafo $G$
$G \simeq G'$	Isomorfismo entre os grafos $G$ e $G'$
$g(G)$	Cintura do grafo $G$
$G[V']$	Subgrafo de $G$ induzido pelo conjunto de vértices $V'$
$G_1 \circ G_2$	Corona entre os grafos $G_1$ e $G_2$
$G_1 \times G_2$	Produto cartesiano entre os grafos $G_1$ e $G_2$
$G_{j,k}$	Grade $j \times k$
$G_M$	Grafo de um emparelhamento $M$ em $G$
$I(D)$	Influência do conjunto $D$
$K_n$	Grafo completo de ordem $n$
$K_{p_1, p_2, \dots, p_k}$	Grafo $k$ -partido completo
$L(G)$	Grafo linha do grafo $G$
$L^i(G)$	$i$ -ésimo grafo linha iterado do grafo $G$
$m$	Tamanho de um grafo
$n$	Ordem de um grafo
$N^l(v)$	Vizinhança aberta a uma distância $l$ do vértice $v$
$N^l[v]$	Vizinhança fechada a uma distância $l$ do vértice $v$
$N_G(D)$	Vizinhança aberta do conjunto $D$ no grafo $G$
$N_G(v)$	Vizinhança aberta do vértice $v$ no grafo $G$
$N_G[D]$	Vizinhança fechada do conjunto $D$ no grafo $G$
$N_G[v]$	Vizinhança fechada do vértice $v$ no grafo $G$
$N_n$	Grafo vazio de ordem $n$

$P_m$	Caminho de tamanho $m$
$Q_k$	Hipercubo de dimensão $k$
$Q_{r,s}$	Grafo das Rainhas do tabuleiro de dimensões $r \times s$
$R(G)$	Redundância do grafo $G$
$rad(G)$	Raio do grafo $G$
$S_n$	Grafo estrela de $n$ vértices
$v \not\sim w$	Não-adjacência entre os vértices $v$ e $w$
$v \sim w$	Adjacência entre os vértices $v$ e $w$
$V(G)$	Conjunto dos vértices do grafo $G$

---

## Introdução

---

A dominação é uma área da teoria dos grafos caracterizada por sua extensiva produção científica. Suas raízes históricas são datadas do século XIX, mas, sua formalização ocorreu apenas em 1958, quando Claude Berge apresentou o conceito de *coeficiente de estabilidade externa* [10]. Desde os resultados precursores de Ore [97], em 1962, foram publicados, até 1998, aproximadamente 1200 trabalhos que abordam esse tema [66].

De uma maneira geral, um *conjunto dominante* consiste de um subconjunto de vértices adjacentes a todos os outros vértices do grafo. A determinação do menor conjunto dominante possui grande importância teórica e prática, pois se trata de um problema  $\mathcal{NP}$ -completo [54] que possui aplicações em diversas áreas de pesquisa. Em um estudo recente [34], por exemplo, o conceito de dominação foi proposto para a predição das estruturas de moléculas de RNA de um tipo específico. Outros exemplos de aplicações são indicados em [66].

Variações do conceito clássico de dominação estão amplamente discutidas na literatura, sendo que a grande maioria concentra diversos problemas em aberto. Este trabalho discorre sobre a dominação tradicional, dando ênfase a uma variação denominada *dominação eficiente* [6, 7]. Nesse contexto, o objetivo do presente trabalho consiste em realizar um estudo exploratório sobre esses temas, de modo a reunir o conhecimento teórico requerido para pesquisas avançadas. Para isso, buscou-se a apresentação e o detalhamento das demonstrações dos teoremas estudados. Em particular, será visto que o conceito de dominação eficiente converge para uma generalização denominada *múltipla dominação eficiente* [28, 105], que incorpora os resultados obtidos durante a realização deste estudo.

A dissertação está organizada em cinco capítulos. No Capítulo 2, são apresentados conceitos básicos, no âmbito de teoria dos grafos, utilizados no decorrer do texto. O Capítulo 3 discorre sobre aspectos relacionados à dominação em grafos, no que se refere a sua contextualização histórica, variações sobre o conceito clássico, aplicações práticas e resultados teóricos. Com essa mesma abordagem, o Capítulo 4 detalha tópicos relacionados à dominação eficiente, apresentando, também, uma seção sobre os grafos eficientemente domináveis. O Capítulo 5 versa sobre múltipla dominação eficiente em

grafos, reunindo os resultados teóricos que dizem respeito a esse tema. Finalmente, estão sumarizadas no Capítulo 6 as principais conclusões e contribuições obtidas por meio deste trabalho, bem como diretrizes para investigações futuras.

## Conceitos Preliminares

### 2.1 Apresentação

Neste capítulo são introduzidos alguns conceitos fundamentais em Teoria dos Grafos, com a finalidade de se estabelecer a terminologia e notação utilizada no decorrer da dissertação, sendo o texto fundamentado nos livros de Bondy e Murty [16], Diestel [43] e West [122]. Eventualmente, este trabalho poderá mencionar famílias e/ou classes que aqui não foram definidas, sendo que, para detalhamento das mesmas, o leitor poderá consultar o livro de Brandstädt, Le e Spinrad [18].

### 2.2 Definições Básicas

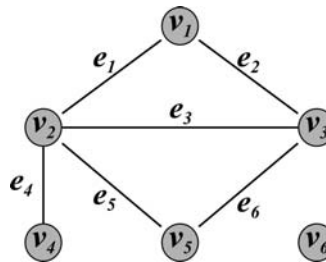
Um **grafo**  $G$  é um par ordenado  $(V, E)$  constituído pelos conjuntos disjuntos  $V$  e  $E$ , tais que  $V = V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$  é o conjunto dos **vértices** e  $E = E(G) = \{e_1, \dots, e_m\}$  é o conjunto das **arestas**, sendo cada aresta de  $E$  um par não ordenado  $(v, w)$  de elementos  $v$  e  $w$  pertencentes a  $V$ . Neste trabalho, define-se como a **ordem**  $n$  e o **tamanho**  $m$  de um grafo a cardinalidade dos conjuntos  $V$  e  $E$ , respectivamente. Quando  $n = 0$  ou  $n = 1$ , diz-se que  $G$  é um grafo **trivial**.

Se  $e$  é uma aresta e  $v$  e  $w$  são vértices de modo que  $e = (v, w) \in E$ , então  $v$  e  $w$  são **adjacentes**, sendo tal adjacência denotada por  $v \sim w$ . Além disso, diz-se que  $v$  e  $w$  são as **extremidades** da aresta  $e$  e que  $e$  é **incidente** aos vértices  $v$  e  $w$ . Na situação em que  $v$  e  $w$  não são adjacentes, denota-se  $v \not\sim w$ . Duas arestas são consideradas adjacentes quando possuírem uma extremidade em comum. A **subdivisão de uma aresta**  $e = (u, w)$ , com  $u \neq w$ , consiste na inserção de um vértice  $v$  no conjunto  $V$ , substituindo a aresta  $e$  pelas arestas  $(u, v)$  e  $(v, w)$ .

Denomina-se como **laço** a aresta  $e = (v, w)$  tal que  $v = w$ . Duas ou mais arestas são denominadas **múltiplas** quando possuem o mesmo par de vértices. Um grafo  $G$  é **simples** se não possuir laços nem arestas múltiplas. Quando um grafo possui arestas múltiplas é chamado de **multigrafo** e quando possui laços é um **pseudografo**. Se o

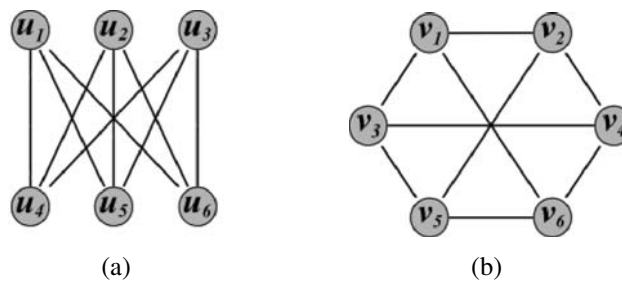
conjunto de vértices e o conjunto de arestas são finitos, então o grafo é **finito**. Na situação em que  $V = \emptyset$  e  $E = \emptyset$ , tem-se  $G$  como um grafo **nulo**. A menos que esteja indicado, todo grafo deste trabalho é considerado simples e finito.

Grafos podem ser representados graficamente da seguinte maneira: desenham-se os vértices como pontos e as arestas como linhas unindo dois pontos se os vértices correspondentes definirem uma aresta. Por exemplo, a Figura 2.1 ilustra o grafo  $G = (V, E)$ , onde  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_6\}$  e  $E = \{e_1 = (v_1, v_2), e_2 = (v_1, v_3), e_3 = (v_2, v_3), e_4 = (v_2, v_4), e_5 = (v_2, v_5), e_6 = (v_3, v_5)\}$ . Diz-se que um grafo é **planar** se sua representação gráfica puder ser desenhada no plano de tal modo que suas arestas não se cruzem, conforme também pode ser verificado na ilustração a seguir.



**Figura 2.1:** Exemplo de um grafo planar.

Sejam  $G = (V, E)$  e  $G' = (V', E')$  dois grafos. Tais grafos serão **isomorfos**, denotando-se por  $G \simeq G'$ , se existir uma bijeção  $\phi : V \rightarrow V'$  em que  $(v, w) \in E \Leftrightarrow (\phi(v), \phi(w)) \in E'$  para todo  $v$  e  $w \in V$ , sendo a função  $\phi$  denominada **isomorfismo**. Na Figura a seguir estão ilustrados dois grafos isomorfos, em que  $\phi(u_1, \dots, u_6) = (v_2, v_6, v_3, v_4, v_5, v_1)$ .

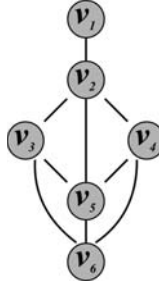


**Figura 2.2:** Dois grafos isomorfos.

A **vizinhança aberta** de um vértice  $v$  em um grafo  $G$  é definida como o conjunto formado pelos vértices de  $G$  que são adjacentes a  $v$ , sendo denotada por  $N_G(v)$  ou, resumidamente,  $N(v)$ . Dessa forma,  $N_G(v) = N(v) = \{w | (v, w) \in E(G)\}$ . Já a **vizinhança fechada** de  $v$  em  $G$ , denotada por  $N_G[v]$  ou  $N[v]$ , é dada pela união dos conjuntos  $\{v\}$  e  $N_G(v)$ . Similarmente, considerando-se um conjunto  $D \subseteq V$ ,  $N_G(D) = N(D) = \bigcup_{v \in D} N(v)$  e  $N_G[D] = N[D] = D \cup N(D)$  denotam, respectivamente, a vizinhança aberta e a vizinhança fechada de  $D$  em  $G$ . Para um conjunto  $D \subseteq V$ , o vértice  $v \in D$  é chamado de **enclave** de

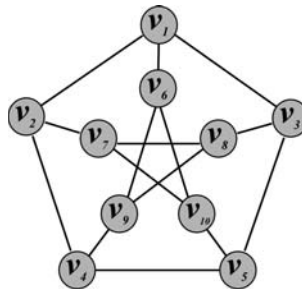


$D$  se  $N[v] \subseteq D$ . Um conjunto de vértices é dito **livre de enclave** se não possuir nenhuma enclave. No grafo da Figura 2.3,  $N(v_3) = \{v_2, v_5, v_6\}$  e  $N[v_3] = \{v_2, v_3, v_5, v_6\}$  definem a vizinhança aberta e fechada do vértice  $v_3$ , respectivamente. Observe ainda que os vértices  $v_3, v_4$  e  $v_6$  são enclaves de  $N[v_5]$ , mas  $v_1$  e  $v_2$  não. Dois vértices  $v$  e  $w$  são considerados **gêmeos idênticos** se  $N[v] = N[w]$ .



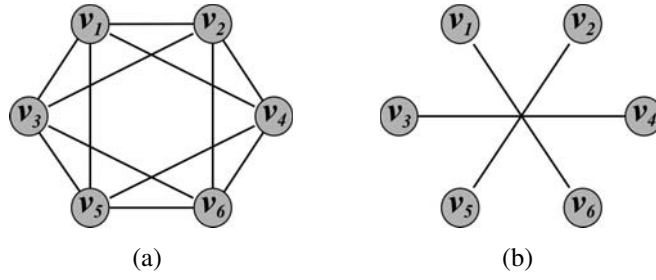
**Figura 2.3:** Exemplo de um grafo cujos vértices  $v_3, v_4$  e  $v_6$  são enclaves de  $N[v_5]$ .

Designa-se como o **grau** de um vértice  $v$  e denota-se por  $d(v)$  o número de arestas incidentes a  $v$ , isto é,  $d(v) = |N(v)|$ . O **grau máximo** dentre todos os vértices de um grafo  $G$  é denotado por  $\Delta(G)$  e o **grau mínimo** por  $\delta(G)$ . Um vértice que possui grau zero é denominado **isolado**. Um vértice **pendente** ou **folha** é um vértice de grau 1. Um vértice de **suporte** é o único vizinho de uma folha. Um grafo é dito  **$k$ -regular** se  $\Delta(G) = \delta(G) = k$ . Na Figura 2.4 tem-se um exemplo de grafo 3-regular (ou **cúbico**). Este grafo é conhecido como *Grafo de Petersen*.



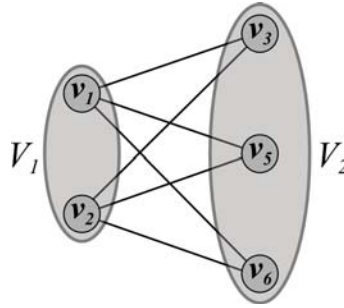
**Figura 2.4:** Grafo de Petersen.

Considere um grafo  $G = (V, E)$  de ordem  $n$ . Se os vértices de  $G$  são dois a dois adjacentes, então  $G$  é denominado grafo **completo** de ordem  $n$  e denotado por  $K_n$ . Por outro lado, se os vértices de  $G$  não são dois a dois adjacentes, então  $G$  é denominado grafo **vazio** de ordem  $n$  e denotado por  $N_n$ . Designa-se por grafo **complementar** de  $G$  o grafo  $\bar{G} = (V, \bar{E})$  que possui o mesmo conjunto de vértices de  $G$ , mas cujo conjunto de arestas é  $\bar{E} = \{(v, w) | (v, w) \notin E\}$ . Observe que o complemento de  $K_n$  é o grafo  $N_n$  e, por consequência, o complemento de  $N_n$  é o grafo  $K_n$ . A Figura 2.5 ilustra um grafo (Figura 2.5(a)) e seu complemento (Figura 2.5(b)).



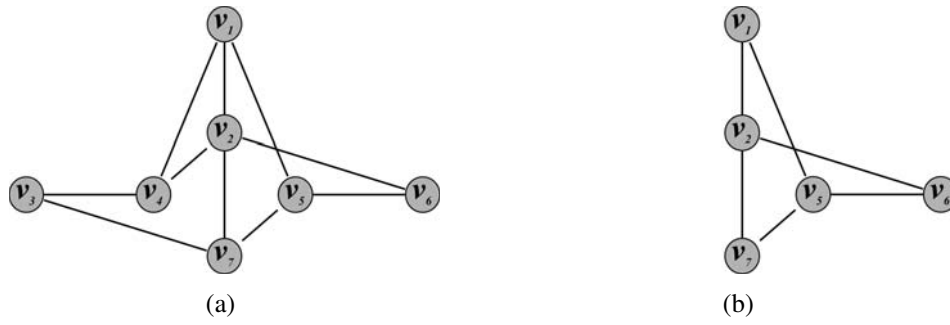
**Figura 2.5:** Um grafo e seu complemento.

Diz-se que  $G$  é um grafo  $k$ -partido se o conjunto de vértices  $V$  pode ser particionado em  $k$  subconjuntos  $V_1, \dots, V_k$  disjuntos, de modo que toda aresta  $(v, w) \in E$  possui suas extremidades em conjuntos  $V_i$  e  $V_j$  distintos chamados de partições. Para  $k = 2$  denomina-se  $G$  como *bipartido* e, para  $k = 3$ , como *tripartido*. Diz-se que um grafo bipartido é **igualmente bipartido** se as suas partições possuírem a mesma cardinalidade. Neste caso, os subconjuntos  $V_1$  e  $V_2$  definem uma **bipartição igualitária**. Se  $G$  é  $k$ -partido e todos os vértices de partições distintas são dois a dois adjacentes, então  $G$  é denominado  *$k$ -partido completo*. Desta forma, se  $p_1, p_2, \dots, p_k$  correspondem, respectivamente, aos tamanhos das partições  $V_1, V_2, \dots, V_k$ , então  $G$  é denotado por  $K_{p_1, p_2, \dots, p_k}$ . A Figura 2.6 exemplifica um grafo  $K_{2,3}$  com partições  $V_1$  e  $V_2$ . Uma **estrela**  $S_n$  de  $n$  vértices é um grafo  $K_{1,t}$ , com  $t = n - 1$ .



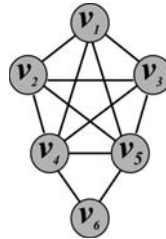
**Figura 2.6:** Grafo  $K_{2,3}$  com partições  $V_1$  e  $V_2$ .

Um **subgrafo** de  $G = (V, E)$  é um grafo  $G' = (V', E')$  tal que  $V' \subseteq V$  e  $E' \subseteq E$ .  $G'$  é um subgrafo **próprio** se  $G' \neq G$ . Se  $G'$  for um subgrafo de  $G$  que contém todas as arestas  $(v, w) \in E$  para  $v, w \in V'$ , então  $G'$  é um subgrafo **induzido** de  $G$ . Denota-se por  $G[V']$  o subgrafo de  $G$  induzido por um conjunto de vértices  $V'$ . Um **subgrafo gerador** de  $G$  é um subgrafo com o conjunto de vértices  $V(G)$ . Se  $G'$  é um subgrafo de  $G$ , então  $G$  é um supergrafo de  $G'$ . O subgrafo  $G' \subseteq G$  é considerado maximal em relação à propriedade  $\pi$  se  $G'$  satisfaz  $\pi$  e se não existir um subgrafo  $G'' \subseteq G$  que satisfaz  $\pi$  contendo propriamente  $G'$ . Na Figura 2.7 está exemplificado um grafo  $G$  (Figura 2.7(a)) e um subgrafo de  $G$  induzido pelos vértices  $v_1, v_2, v_5, v_6$  e  $v_7$  (Figura 2.7(b)). Diz-se que  $G$  é **livre de  $H$**  se  $G$  não possuir um subgrafo induzido isomorfo ao subgrafo  $H$ .



**Figura 2.7:** (a) Um grafo  $G$  e (b) seu subgrafo induzido pelos vértices  $v_1, v_2, v_5, v_6$  e  $v_7$ .

Denomina-se como **clique** o subgrafo maximal que é completo. O tamanho da maior clique de  $G$  é denotado como  $\omega(G)$ . Um vértice  $v$  de um grafo  $G$  é um **vértice simplicial** se o subgrafo induzido por  $N[v]$  formar uma clique. Quando todos os vértices de  $G$  forem simpliciais ou adjacentes a pelo menos um vértice simplicial, então  $G$  é denominado **grafo simplicial**. Uma clique de um grafo  $G$  contendo pelo menos um vértice simplicial é denominada **simplexo**. No grafo da Figura 2.8, os vértices  $\{v_1, \dots, v_5\}$  definem uma clique de tamanho 5. Como não existe outra clique de tamanho maior,  $\omega(G) = 5$ . Observe que esse grafo é simplicial, uma vez que  $v_1, v_2, v_3$  e  $v_6$  são vértices simpliciais e adjacentes aos outros vértices restantes,  $v_4$  e  $v_5$ . Além do mais, os subconjuntos  $V' = \{v_1, \dots, v_5\}$  e  $V'' = \{v_4, v_5, v_6\}$  formam dois simplexos do grafo em questão.



**Figura 2.8:** Grafo no qual  $\omega(G) = 5$ .

Um **caminho** é um grafo  $P$  dado por uma sequência de vértices distintos  $\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$  para os quais  $(v_i, v_{i+1}) \in E$ , com  $i = 1, \dots, k - 1$ . Se existir um caminho  $P$  entre os vértices  $v$  e  $w$ , designa-se  $P$  como um  $(v, w)$ -caminho no qual  $v$  é o vértice inicial e  $w$  é o vértice final. O comprimento de um caminho corresponde a sua quantidade de arestas. Dessa forma, se  $P$  é um caminho que possui  $m$  arestas, então  $P$  é denotado por  $P_m$ .

A **distância**  $d(v, w)$  corresponde ao tamanho do menor  $(v, w)$ -caminho existente no grafo. A **vizinhança aberta a uma distância  $l$**  é o conjunto  $N^l(v) = \{w : d(v, w) = l\}$  e a **vizinhança fechada a uma distância  $l$**  é o conjunto  $N^l[v] = \{w : d(v, w) \leq l\}$ . Define-se como **diâmetro** de um grafo  $G$  e detona-se por  $\text{diam}(G)$  a maior distância entre dois vértices quaisquer de  $G$ . Por sua vez, a **excentricidade**  $\text{exc}(v) = \max\{d(v, w) : w \in V\}$

de um vértice  $v$  corresponde à maior distância de  $v$  a qualquer vértice do grafo. Já o **raio**  $rad(G) = \min\{exc(v) : v \in V\}$  de um grafo  $G$  é a menor excentricidade entre seus vértices. O **centro**  $C(G)$  de um grafo  $G$  é o conjunto de todos os vértices de  $G$  que possuem excentricidade mínima. No grafo da Figura 2.9, observe que os vértices possuem o rótulo  $v_{i,j}$ , com  $i$  e  $j$  variando de 1 até 4. No mais,  $N^3(v_{1,1}) = \{v_{1,2}, v_{2,1}, v_{3,4}, v_{4,3}\}$ , por exemplo. Além disso, note que  $rad(G) = exc(v_{1,2}) = exc(v_{2,2}) = 4$  e  $diam(G) = exc(v_{1,1}) = 5$ .

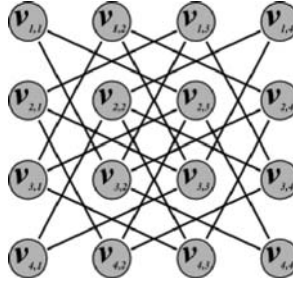


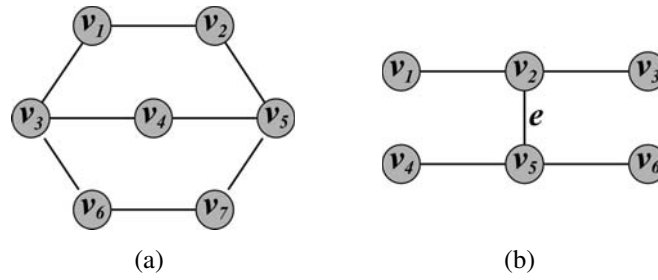
Figura 2.9: Um grafo de raio 4.

De maneira similar à definição de caminho, a sequência de vértices  $\langle v_1, v_2, \dots, v_k \rangle$  para os quais  $E = \{(v_i, v_{i+1}) | i = 1, \dots, k-1\} \cup \{(v_k, v_1)\}$  é denominada **ciclo**. O comprimento de um ciclo é dado por sua quantidade de arestas, sendo que  $C_m$  denota um ciclo de comprimento  $m$ . O tamanho do menor ciclo em um grafo  $G$  é designado como a **cintura** e denotado por  $g(G)$ . Um grafo  $G$  sem ciclos é denominado **acíclico**. Um grafo  $G$  é denominado **hamiltoniano** se existir um ciclo em  $G$  que contenha todos os vértices do grafo exatamente uma vez.

Considere agora  $k \in \mathbb{N}$  tal que  $k < n$ .  $G$  é um grafo **conexo** se para todo par de vértices  $v$  e  $w$  existir pelo menos um  $(v, w)$ -caminho. Uma **componente conexa** de  $G$  é um subgrafo maximal conexo em  $G$ . Caso  $G$  não seja um grafo conexo, denomina-se então como **desconexo**. Se  $G$  for desconexo com  $v$  e  $w$  em componentes distintas,  $d(v, w) = \infty$ . Um vértice cuja remoção aumenta a quantidade de componentes conexas de um grafo é chamado de **vértice de corte**. De maneira semelhante, o conjunto  $V' \subset V$  para o qual  $G \setminus V'$  é desconexo é denominado **conjunto de corte**. O tamanho do menor conjunto  $V' \subset V$  tal que  $V'$  é um conjunto de corte ou  $G \setminus V'$  tem somente um vértice é denominado **número de conexidade**  $\kappa(G)$ . Um grafo  $G$  é  **$k$ -conexo** se  $G \setminus V'$  for conexo para todo conjunto  $V' \subset V$  cujo tamanho é menor do que  $k$ . Uma **ponte** é uma aresta cuja remoção diminui a conexidade do grafo. O grafo da Figura 2.10(a) é um exemplo de grafo 2-conexo e a aresta  $e$  do grafo da Figura 2.10(b) é uma ponte.

Em alguns livros de teoria dos grafos [77, 122], é difundido o fato de que todo grafo conexo possui, pelo menos,  $n - 1$  arestas. O teorema a seguir estabelece uma relação entre a ordem  $n$ , o tamanho  $m$  e o número de componentes de um grafo  $G$ .

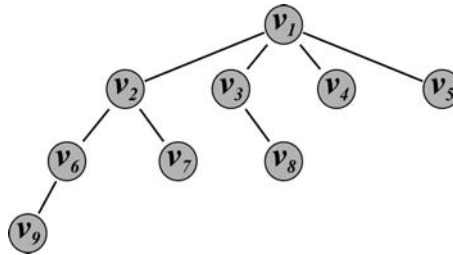
**Teorema 2.1** *Se  $G$  um grafo de ordem  $n$  e tamanho  $m = n - k$ , então  $G$  possui no mínimo  $n - k$  componentes.*



**Figura 2.10:** (a) Grafo 2-conexo e (b) grafo com uma ponte  $e$ .

*Prova.* Suponha  $G$  de ordem  $n$  e tamanho  $n - k$ . Conforme pontuado anteriormente, se  $G$  é conexo então  $m \geq n - 1$ . Assuma que o grafo  $G$  possua  $0 < j < m$  componentes. Observe que a  $i$ -ésima componente de  $G$  possui  $n_i$  vértices e, pelo menos,  $n_i - 1$  arestas. Consequentemente, o número total de arestas de  $G$  corresponde à  $\sum_{i=1}^j (n_i - 1) = n - j$ , o que é uma contradição, visto que o tamanho de  $G$  é igual a  $n - k$ . Logo, existem  $n - k$  componentes em  $G$ .  $\square$

Uma **árvore** é um grafo  $A$  acíclico e 1-conexo. Chama-se de **subárvore** qualquer subgrafo de  $A$  que também é uma árvore. O grafo da Figura 2.11 é uma árvore.



**Figura 2.11:** Uma árvore enraizada em  $v_1$ .

Uma árvore é denominada **enraizada** quando um de seus vértices for designado como a **raiz** da árvore, permitindo assim uma organização hierárquica. A árvore da Figura 2.11, por exemplo, possui o vértice  $v_1$  como raiz. Agora, sejam  $v$  e  $w$  dois vértices de uma árvore  $A$  de raiz  $r$ . Suponha que  $v$  pertença ao caminho de  $r$  a  $w$  em  $A$ . Então  $v$  é **ancestral** de  $w$ , sendo  $w$  **descendente** de  $v$ . Se  $(v, w)$  é uma aresta de  $A$ , então  $v$  é **pai** de  $w$ , sendo  $w$  **filho de**  $v$ .

Um vértice  $v \in V(A)$  é chamado de **penúltimo** se for adjacente a no mínimo uma folha e no máximo uma não folha. Um **caterpillar** é uma árvore cuja remoção de todas as folhas induz a um caminho. Uma **floresta** é um grafo desconexo na qual toda componente é uma árvore. Um **percurso** em uma árvore é o processo de visitar cada um de seus vértices exatamente uma vez. Existem vários tipos de percurso em árvore. No percurso em **pós-ordem**, busca-se visitar os filhos primeiro e depois a raiz. Na árvore

A da Figura 2.11 o percurso em pós-ordem visitaria os vértices na seguinte sequência:  $v_9, v_6, v_7, v_2, v_8, v_3, v_4, v_5 \in v_1$ .

Um **hipercubo de dimensão  $k$** , onde  $k \in \mathbb{Z}^+$ , é um grafo cujo conjunto de vértices representam  $k$ -tuplas ordenadas binárias<sup>1</sup>. Existirá uma aresta entre dois vértices do hipercubo se as  $k$ -tuplas correspondentes se diferirem apenas em uma coordenada. O hipercubo de dimensão  $k$ , denotado por  $Q_k$ , é regular de grau  $k$ , possui  $2^k$  vértices e  $k2^{k-1}$  arestas. Na Figura 2.12 está ilustrado um hipercubo de dimensão 3. Observe que os rótulos dos vértices são triplas ordenadas.

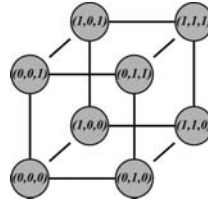


Figura 2.12: Um hipercubo  $Q_3$ .

Dados dois grafos  $G_1$  e  $G_2$ , define-se como **corona** o grafo  $G = G_1 \circ G_2$  formado da seguinte maneira: uma cópia de  $G_1$  e  $|V(G_1)|$  cópias de  $G_2$ , sendo o  $i$ -ésimo vértice de  $G_1$  adjacente a todos os vértices da  $i$ -ésima cópia de  $G_2$ . O grafo  $G$  da Figura 2.13(b) é uma corona em que  $G_1 = C_3$  e  $G_2 = P_1$ . Observe que o rótulo de cada vértice das cópias de  $P_1$  também inclui um índice sobrescrito que representa a numeração da cópia à qual pertence.

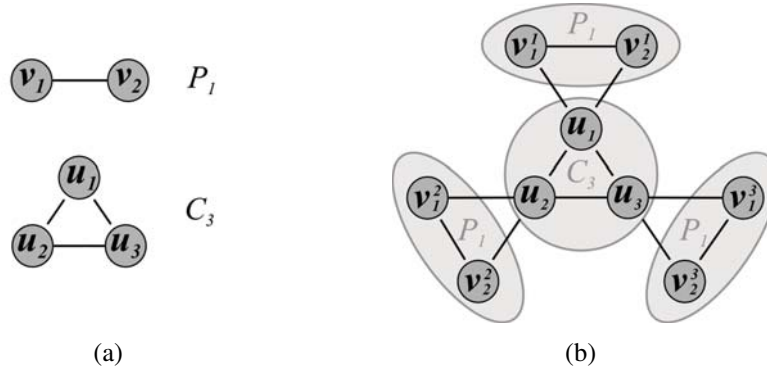


Figura 2.13: (a) Um caminho  $P_1$  e um ciclo  $C_3$ ; e (b) a corona  $G = C_3 \circ P_1$ .

O **produto cartesiano** dos grafos  $G_1$  e  $G_2$ , denotado por  $G_1 \times G_2$ , é formado pelo conjunto de vértices  $V(G_1) \times V(G_2)$ , sendo que os vértices  $v_i v_j^2$  e  $v_k v_l$  serão adjacentes

<sup>1</sup>Uma  $k$ -tupla ordenada  $(x_1, x_2, \dots, x_k)$  é uma coleção ordenada que possui  $x_1$  como primeiro elemento,  $x_2$  como segundo elemento, ..., e  $x_k$  como  $k$ -ésimo elemento. Em uma  $k$ -tupla ordenada binária os elementos podem ser 0 ou 1. Uma 2-tupla ordenada é denominada “par ordenado” enquanto uma 3-tupla ordenada é denominada “tripla-ordenada”.

<sup>2</sup>O rótulo  $v_i v_j$  representa o par ordenado  $(v_i, v_j)$  dado por  $V(G_1) \times V(G_2)$

se, e somente se: *i*)  $v_i = v_k$  e  $(v_j, v_l) \in E(G_2)$ ; ou *ii*)  $v_j = v_l$  e  $(v_i, v_k) \in E(G_1)$ . O produto cartesiano de dois caminhos  $P_j$  e  $P_k$  é chamado de **grade**, sendo denotado por  $G_{j,k}$ . Já o produto entre dois ciclos é denominado **toro**. No grafo da Figura 2.14, tem-se  $G = G_1 \times G_2$ , onde  $G_1$  é um caminho de 3 vértices e  $G_2$  um ciclo com 4 vértices.

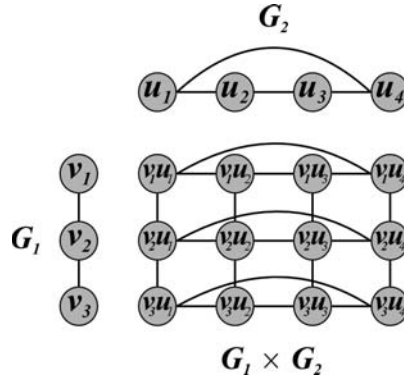


Figura 2.14:  $G = P_2 \times C_4$ .

O **grafo linha**  $L(G)$  de um grafo  $G$  é definido da seguinte maneira: para cada aresta de  $E(G)$  cria-se um vértice em  $L(G)$ , sendo dois vértices adjacentes se, e somente se, as arestas correspondentes forem adjacentes em  $G$ . Se este processo se repetir para os grafos resultantes, tem-se então os **grafos linha iterados** de  $G$  que são formados iterativamente, ou seja:  $L^2(G) = L(L(G))$ ,  $L^3(G) = L(L^2(G))$ , ...,  $L^k(G) = L^{k-1}(L(G))$ . Na Figura 2.15 está exemplificado um grafo  $G$  (Figura 2.15(a)), seu grafo linha  $L(G)$  (Figura 2.15(b)) e o grafo  $L^2(G)$  (Figura 2.15(c)).

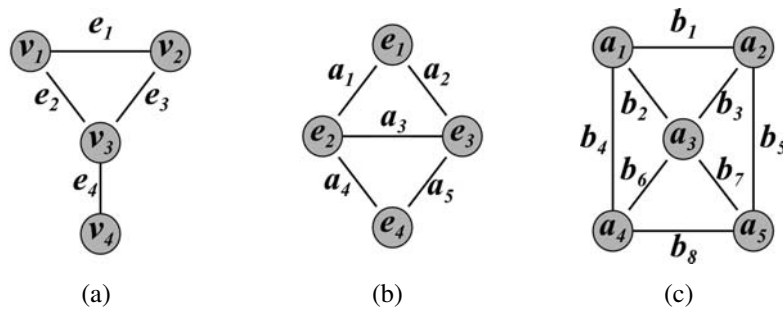


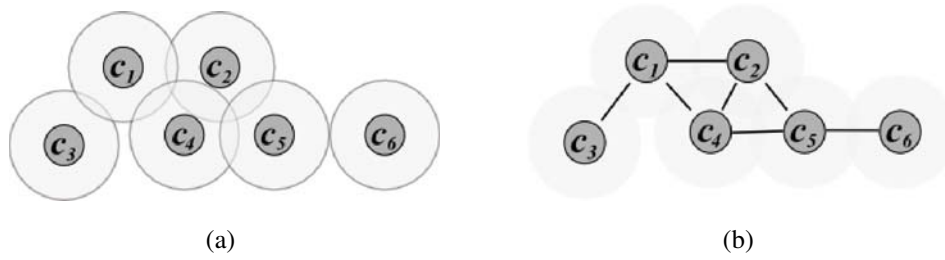
Figura 2.15: (a) Um grafo  $G$ ; (b) seu grafo linha  $L(G)$  e (c)  $L^2(G)$ , o segundo grafo linha de  $G$ .

Para  $r_i \geq 3$ , considere  $n_i$  e  $r_i$  a ordem e o grau do  $i$ -ésimo grafo linha iterado  $L^i(G)$  de um grafo  $G$  de ordem  $n_0$  e  $r_0$ -regular.

**Teorema 2.2 (Buckley [19, 20])** Se  $G_0$  é um grafo  $r_0$ -regular de ordem  $n_0$ , seu  $k$ -ésimo grafo linha iterado  $L^k(G_0)$  é um grafo de ordem  $n_k = n_{k-1}r_{k-1}/2$  e regular de grau  $r_k = 2r_{k-1} - 2$  conforme

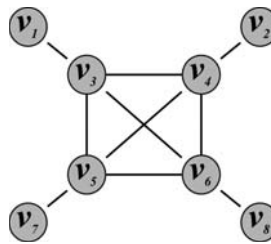


Considere um conjunto de  $n$  círculos de tamanhos iguais no plano. O **grafo de disco unitário**  $G$  de ordem  $n$  é construído da maneira como se segue. Cada vértice de  $G$  corresponde a um círculo do plano e dois vértices serão adjacentes quando os círculos correspondentes se interceptam. Assume-se que também ocorre a intersecção entre dois círculos quando ambos se tangenciam. Por exemplo, na Figura 2.16 estão ilustrados seis círculos dispostos em uma superfície plana (Figura 2.16(a)) e seu respectivo grafo de disco unitário (Figura 2.16(b)).



**Figura 2.16:** (a) Seis círculos dispostos em uma superfície plana e  
(b) seu respectivo grafo de disco unitário.

Dado um grafo  $G = (V, E)$ , o conjunto  $I \subseteq V$  é denominado **conjunto independente** se todos os seus vértices não forem adjacentes entre si. Esse conjunto  $I$  será máximo se não existir outro conjunto independente  $I'$  de maior cardinalidade, e maximal se não existir  $I'$  independente tal que  $I \subset I'$ . Observe que todo conjunto independente máximo também é maximal, mas nem todo conjunto maximal é máximo. O **número de independência** de  $G$ , denotado por  $\alpha(G)$ , corresponde ao tamanho do maior conjunto independente de  $G$ . No grafo da Figura 2.17, tem-se  $I = \{v_1, v_2, v_7, v_8\}$  como um conjunto independente máximo.



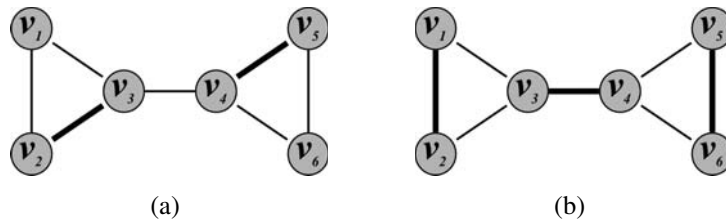
**Figura 2.17:** Grafo com  $\alpha(G) = 4$ .

Define-se como **emparelhamento** de um grafo  $G$  o conjunto  $M \subseteq E$  de arestas que não compartilham as mesmas extremidades, ou seja,  $M$  é um conjunto de arestas independentes. Se o vértice  $v \in V$  é extremidade de alguma aresta pertencente ao emparelhamento  $M$ , diz-se então que  $v$  é um vértice **saturado** por  $M$ .

Um emparelhamento  $M$  é máximo se não existir um emparelhamento  $M'$  tal que  $|M| < |M'|$ . Na situação em que não existe um emparelhamento  $M'$  tal que  $M \subset M'$ , diz-

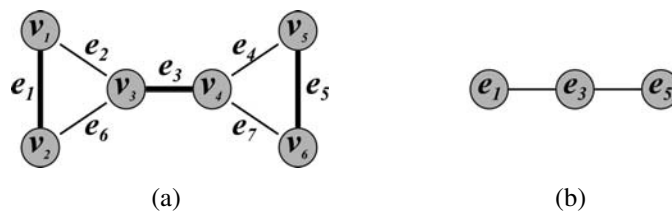


se que  $M$  é um emparelhamento maximal. Além disso, um emparelhamento  $M$  é dito **perfeito** se saturar todos os vértices do grafo. Se  $M$  é um emparelhamento perfeito, então a ordem do grafo é um número par. Um grafo é **equiemparelhável** se todo emparelhamento maximal possuir o mesmo tamanho. A Figura 2.18 exemplifica um emparelhamento maximal (Figura 2.18(a)) e um emparelhamento máximo e perfeito (Figura 2.18(b)), sendo que as arestas pertencentes a esses emparelhamentos estão desenhadas com a espessura mais grossa que as demais. O grafo em questão é chamado de 3-barbell. Um grafo  **$n$ -barbell** é formado por dois grafos completos  $K_n$  unidos por uma única ponte.



**Figura 2.18:** (a) um emparelhamento maximal e (b) um emparelhamento máximo e perfeito.

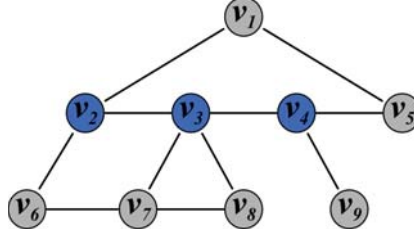
Suponha que  $G$  é um grafo que possui um emparelhamento perfeito  $M = \{e_1, \dots, e_{n/2}\}$ . Define-se  $G_M = (V_M, E_M)$  como o **grafo de um emparelhamento**  $M$  que pode ser construído da maneira que se segue. Cada aresta do emparelhamento perfeito  $M$  de  $G$  é um vértice em  $V_M$ . Dois vértices de  $V_M$  serão adjacentes em  $G_M$  quando ambas as arestas correspondentes possuem, pelo menos, uma aresta em comum em suas vizinhanças no grafo  $G$ . Na Figura 2.19 está ilustrado um exemplo de tal construção. Repare que  $M = \{e_1, e_3, e_5\}$  é um emparelhamento perfeito em  $G$  (Figura 2.19(a)). No grafo  $G_M$  (Figura 2.19(b)), note que  $e_1 \sim e_3$  e  $e_3 \sim e_5$ , mas  $e_1 \not\sim e_5$ , pois as arestas correspondentes não possuem uma aresta em comum em suas vizinhanças no grafo  $G$ .



**Figura 2.19:** (a) Um grafo com seu emparelhamento perfeito  $M$  e (b) Grafo  $G_M$  de um emparelhamento  $M$ .

Considere um conjunto  $D \subseteq V$ . Diz-se que  $D$  é um **conjunto dominante** de  $G$  se para todo  $v \in V$  a condição  $|N[v] \cap D| \geq 1$  for satisfeita. Se um vértice  $v$  pertence ao conjunto  $D$ , então  $v$  é chamado de **vértice dominante**. Um vértice estará **dominado** quando possuir um vizinho dominante. Neste trabalho, vértices que pertencem a um conjunto dominante de um grafo estarão coloridos com a cor azul, conforme ilustrado

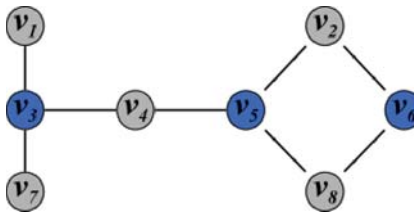
na Figura 2.20, onde  $D = \{v_2, v_3, v_4\}$  é um conjunto dominante de  $G$ . Existem outros conjuntos dominantes nesse grafo, entretanto, observe que é impossível obter um conjunto dominante com cardinalidade menor que 3.



**Figura 2.20:** Grafo que possui conjuntos dominantes.

Se  $D \subseteq V$  é um conjunto dominante de um grafo  $G = (V, E)$ , consequentemente,  $V - D$  é um conjunto livre de enclave e  $N[D] = V$ . Diz-se que  $D$  é um **conjunto dominante minimal** ou **conjunto- $\gamma$**  se não existir um subconjunto próprio  $D' \subset D$  tal que  $D'$  também seja um conjunto dominante. O conjunto de todos os conjuntos dominantes minimais de um grafo  $G$  é denotado por  $CDM(G)$ . O tamanho do menor conjunto dominante minimal de  $G$  é denominado **número de dominação** de  $G$ , sendo denotado por  $\gamma(G)$ . Similarmente,  $\Gamma(G)$  corresponde ao tamanho do maior conjunto dominante minimal de  $G$ .

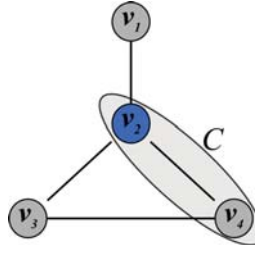
Para o grafo  $G$  da Figura 2.21, pode-se citar como exemplo de conjuntos dominantes minimais:  $\{v_3, v_5, v_6\}$ ,  $\{v_1, v_5, v_7, v_8\}$  e  $\{v_1, v_2, v_4, v_7, v_8\}$ . Existem outros conjuntos dominantes minimais nesse grafo, entretanto, observe que é impossível obter um conjunto dominante minimal com cardinalidade menor que 3 ou maior que 5. Logo,  $\gamma(G) = 3$  e  $\Gamma(G) = 5$ . Vale ressaltar que os  $v_3, v_5$  e  $v_6$  também formam um conjunto independente. Dessa forma,  $D = \{v_3, v_5, v_6\}$  é denominado conjunto dominante independente.



**Figura 2.21:** Grafo que possui diversos conjuntos dominantes minimais, sendo que  $\gamma(G) = 3$  e  $\Gamma(G) = 5$ . O conjunto  $D = \{v_3, v_5, v_6\}$  é um conjunto dominante minimal que também é independente.

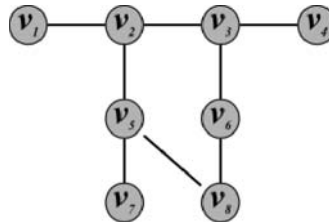
O conjunto  $C \subseteq V$  é uma **cobertura de vértices** se toda aresta de  $E$  possuir pelo menos uma extremidade em  $C$ . Toda cobertura de vértices é um conjunto dominante por definição, mas o contrário nem sempre é verdadeiro, conforme ilustrado na Figura 2.22.

Um conjunto  $D \subseteq V$  é denominado **pacote** de  $G$  se para todo par de vértices  $v$  e  $w$  de  $D$  ocorrer a distância  $d(v, w) > 2$ . O **número de empacotamento** de  $G$ , denotado



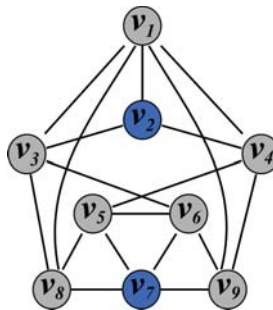
**Figura 2.22:** Grafo  $G$  para o qual  $C = \{v_2, v_4\}$  é um conjunto de cobertura que também domina todos os outros vértices do grafo. Por outro lado, o conjunto dominante  $D = \{v_2\}$  não define uma cobertura de vértices.

por  $\rho(G)$ , é a máxima cardinalidade de um pacote de  $G$ . Para  $k \in \mathbb{Z}^+$ , define-se como  $k$ -**pacote** o conjunto  $D$  cujos vértices estão a uma distância maior do que  $k$ . De uma maneira geral, um 1-pacote é um conjunto independente e um 2-pacote - ou seja, um pacote - é um conjunto que dominará sua vizinhança exatamente uma vez. No grafo da Figura 2.23, o conjunto  $D' = \{v_1, v_3, v_7, v_8\}$  é um 1-pacote e o conjunto  $D'' = \{v_1, v_4, v_8\}$  um 2-pacote.



**Figura 2.23:** Grafo em que  $D' = \{v_1, v_3, v_7, v_8\}$  é um 1-pacote e  $D'' = \{v_1, v_4, v_8\}$  um 2-pacote.

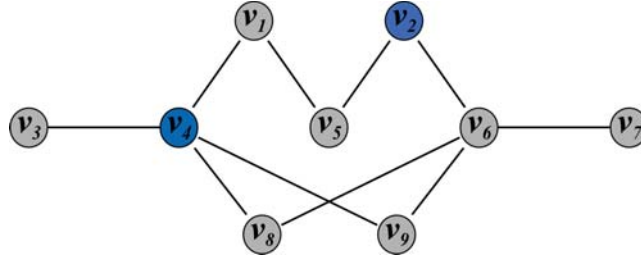
Agora, considere um grafo  $G = (V, E)$  e um conjunto  $D \subseteq V$ . Se para todo vértice  $v \in V$  a condição  $|N[v] \cap D| = 1$  for satisfeita, então  $D$  é denominado **conjunto dominante eficiente**. Note que se  $D$  é um conjunto dominante eficiente, então  $D$  também é um pacote. No grafo ilustrado na Figura 2.24, o conjunto  $D = \{v_2, v_7\}$  é um conjunto dominante eficiente mínimo de  $G$ .



**Figura 2.24:** Grafo que possui um conjunto dominante eficiente.

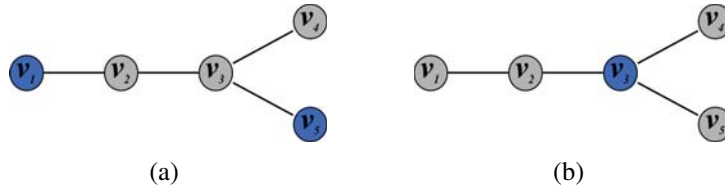
Muitos grafos não possuem conjuntos dominantes eficientes, como por exemplo o ciclo  $C_5$ . Nestes casos, busca-se determinar a maior quantidade de vértices que podem

ser dominados por um pacote  $D$ , sendo tal parâmetro denominado **número de dominação eficiente** e denotado por  $F(G)$  para um grafo  $G$  qualquer. Se  $F(G) = n$ , então diz-se que  $G$  é **eficientemente dominável** e que  $D$  é um conjunto dominante eficiente. Para o grafo  $G$  de ordem 9 da Figura 2.25, tem-se  $F(G) = 8$ , sendo este valor atingido pelo pacote  $D = \{v_2, v_4\}$ . Neste trabalho, os vértices pertencentes a algum pacote também estarão coloridos com a cor azul, afim de que se ilustre a dominação de sua vizinhança.



**Figura 2.25:** Grafo em que  $F(G) = 8$ .

Um grafo pode possuir pacotes de cardinalidades distintas que atingem o mesmo valor para o número de dominação eficiente, conforme o exemplo ilustrado na Figura 2.26 pela árvore  $A$ , sendo que  $F(A) = 4$ . Nas Figuras 2.26(a) e 2.26(b),  $D' = \{v_1, v_5\}$  e  $D'' = \{v_3\}$  são conjuntos que dominam a sua vizinhança uma única vez, porém  $|D'| = 2$  e  $|D''| = 1$ .

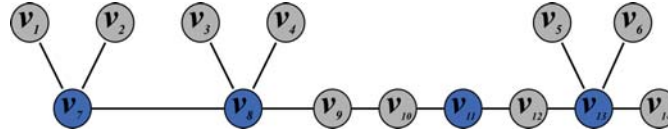


**Figura 2.26:** Uma árvore  $A$  com  $F(A) = 4$  para dois conjuntos que dominam suas vizinhanças uma única vez.

Dado um conjunto  $D \subseteq V$ , denota-se por  $I(D) = \sum_{v \in D} |N[v]|$  a **influência** exercida por  $D$ , correspondendo à quantidade de vértices que o conjunto  $D$  possui em sua vizinhança. Nesse contexto, o número de dominação eficiente pode ser definido através de tal parâmetro:  $F(G) = \max\{I(D) : D \text{ é um pacote}\}$ . Por outro lado, a **redundância**  $R(G) = \min\{I(D) : D \text{ domina o conjunto } V(G)\}$  é uma medida que visa mensurar a menor quantidade de vezes que os vértices de um grafo  $G$  podem dominados. Outro parâmetro importante é a **redundância de cardinalidade**  $RC(G)$ , que representa o número de vértices dominados mais do que uma vez por um conjunto dominante em um grafo  $G$ .

Para exemplificar tais conceitos, a árvore  $A$  da Figura 2.27 ilustra um conjunto dominante minimal de cardinalidade 4. Observe que  $D' = \{v_1, v_3, v_{10}, v_{13}\}$  e  $D'' = \{v_7, v_{10}, v_{13}\}$  são 1-pacotes que definem  $F(A) = 12$ . Como tal grafo não é eficientemente

dominável, pelo menos um de seus vértices será dominado mais de uma vez por um conjunto dominante. Tomando  $D''' = \{v_7, v_8, v_{10}, v_{13}\}$  e  $D'''' = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_{10}, v_{13}\}$ , tem-se dois conjuntos dominantes cujas respectivas influências são  $I(D''') = 17$  e  $I(D'') = 16$ . Como não existe outro conjunto dominante cuja influência é menor do que 16,  $R(A) = I(D'') = 16$ . Além disso, o conjunto  $D'''$  estabelece  $RC(A) = 2$ , uma vez que  $D'''$  domina  $v_7, v_8$  e  $v_{12}$  duas vezes.



**Figura 2.27:** Uma árvore  $A$  tal que  $\gamma(A) = 4$ ,  $F(A) = 12$  e  $R(A) = 16$ .

---

## Conjuntos Dominantes em Grafos

---

### 3.1 Apresentação

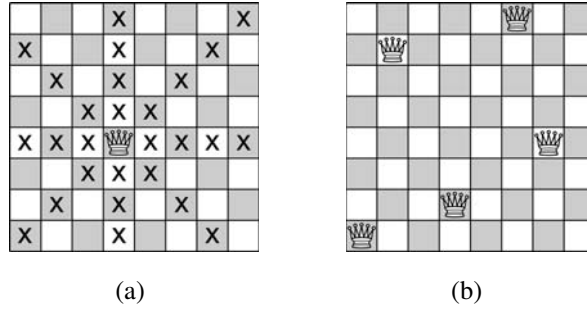
A dominação em grafos é um tema extensivo e notavelmente discutido na literatura, conforme evidenciado em [65], [66] e [68]. Neste capítulo, são abordados alguns dos principais aspectos relacionados a esse assunto, visando contextualizá-lo em termos de suas raízes históricas, variações que surgiram sobre a conceituação clássica, aplicações práticas no mundo real e alguns dos resultados teóricos. Para tanto, a seção 3.2 discorre sobre o desenvolvimento desse tema desde o século XIX aos dias atuais. Já a seção 3.3 apresenta algumas variações do conceito clássico de dominação por meio de problemas que envolvem conjuntos dominantes. Aplicações práticas da dominação em grafos podem ser verificadas através dos exemplos indicados na seção 3.4. Iniciando a discussão de alguns aspectos teóricos, a seção 3.5 trata das propriedades relacionadas aos conjuntos dominantes. Uma vez que é desejável determinar o tamanho de um conjunto dominante mínimo de um grafo, na seção 3.6 são investigadas situações nas quais o número de dominação tem seu valor exato ou limitado. Finalizando, aspectos algorítmicos e de complexidade são discutidos na seção 3.7.

### 3.2 Contextualização Histórica

A origem do estudo de conjuntos dominantes em grafos é atribuída ao *Problema das Rainhas* que, segundo Henning [70], foi apresentado pelo enxadrista De Jaenisch [40] no ano de 1862. Para a descrição desse problema, considere um tabuleiro de xadrez  $n \times n$  e um conjunto finito de rainhas.

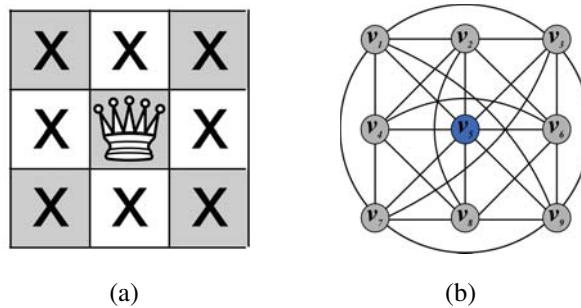
De acordo com as regras do xadrez, uma rainha pode se movimentar em um número qualquer de casas na horizontal, vertical ou diagonal. Logo, a rainha ilustrada no tabuleiro  $8 \times 8$  da Figura 3.1(a) pode se mover para ou atacar todas as posições marcadas com “X” no tabuleiro. Diz-se então que tais posições estão dominadas pela rainha em questão. O problema consiste em determinar o número mínimo de rainhas posicionadas

de tal forma que nenhuma possa atacar outra e que, além disso, todas as posições do tabuleiro ou estão dominadas ou possuem uma rainha. O número mínimo de rainhas para dominar todas as posições de um tabuleiro  $8 \times 8$  é igual a cinco [40]. No tabuleiro da Figura 3.1(b), tem-se uma possível solução para o problema utilizando cinco rainhas.



**Figura 3.1:** (a) Uma rainha domina posições na horizontal, vertical ou diagonal e (b) Possível solução de um tabuleiro  $8 \times 8$  utilizando cinco rainhas.

O problema das rainhas pode ser definido como um problema de conjuntos dominantes em grafos: dado um tabuleiro  $r \times s$ , onde  $r$  é o número de linhas e  $s$  é o número de colunas, o **Grafo de Rainhas**  $Q_{r,s} = (V, E)$  é construído de modo que as posições do tabuleiro correspondam aos vértices do grafo, sendo dois vértices  $v$  e  $w$  adjacentes se, e somente se, uma rainha localizada na posição definida pelo vértice  $v$  puder se movimentar para a posição definida pelo vértice  $w$ . Solucionar o problema das rainhas em um tabuleiro  $r \times s$  equivale a encontrar o menor conjunto dominante independente do grafo  $Q_{r,s}$ . A Figura 3.2 exemplifica a disposição de uma rainha dominando todas as posições de um tabuleiro  $3 \times 3$  (Figura 3.2(a)), bem como seu respectivo grafo  $Q_{3,3}$  (Figura 3.2(b)), dominado pelo conjunto dominante mínimo  $D = \{v_5\}$ .



**Figura 3.2:** (a) Tabuleiro  $3 \times 3$  com todas as posições dominadas e (b) seu respectivo grafo  $Q_{3,3}$ , dominado por  $D = \{v_5\}$ .

Embora diversos problemas de tabuleiros tenham sido propostos e estudados por enxadristas europeus em meados do século XIX, os conceitos relacionados à dominação

só foram reaparecer nos livros de Ahrens [1], no ano de 1901, e König [81], em 1936. Porém, a formalização em Teoria dos Grafos ocorreu somente em 1958, quando Claude Berge, em seu livro *Théorie des graphes et ses applications* [10], apresentou o conceito de **coeficiente de estabilidade externa**, cuja definição equivale-se à definição do número de dominação de um grafo [66]. Vale citar também que, posteriormente, Berge adotou o termo *número de absorção* no lugar de coeficiente de estabilidade externa. No entanto, apenas em 1962 que os termos “conjunto dominante” e “número de dominação” foram propostos por Oysten Ore no livro *Theory of Graphs* [97], no qual dedica um capítulo aos conjuntos dominantes, independentes e de cobertura [66].

A partir de 1970, a dominação em grafos começou a ser estudada intensivamente [70]. Em 1977, Cockayne e Hedetniemi [37] publicaram a primeira revisão de literatura sobre o assunto, resumizando os principais resultados obtidos até então. Além disso, introduziram a notação  $\gamma(G)$ , hoje amplamente utilizada.

No ano de 1975, Cockayne, Goodman e Hedetniemi [36] apresentaram um algoritmo de tempo linear que determina o número de dominação  $\gamma(A)$  para uma árvore  $A$  arbitrária. Em contrapartida, por meio de uma redução do problema de cobertura de vértices, Garey e Johnson [54] mostraram, em 1979, que decidir se um grafo arbitrário  $G$  possui um conjunto dominante de cardinalidade menor ou igual a um inteiro  $k$  é um problema  $\mathcal{NP}$ -Completo.

Em 1990, uma edição especial do periódico *Discrete Mathematics* [68] foi inteiramente dedicada ao assunto, abordando desde aspectos teóricos às variações e questões algorítmicas do problema. Além disso, incluiu um levantamento bibliográfico com uma listagem dos artigos que foram publicados sobre o assunto até então. No ano de 1998, Haynes, Hedetniemi e Slater [65, 66] publicaram dois livros sobre dominação em grafos, tratando esse tema de uma maneira compreensiva através da descrição de alguns dos principais resultados e apresentação de tópicos mais avançados. Tais materiais são considerados necessários e fundamentais para novos estudos dentro da área.

Por fim, ressalta-se que o desenvolvimento da pesquisa sobre dominação em grafos foi tão extensivo que, até o ano de 1998, a literatura reunia mais de 1200 artigos, nos quais são discutidos cerca de 75 tipos de variações do problema tradicional, a grande maioria caracterizada como computacionalmente difícil [66].

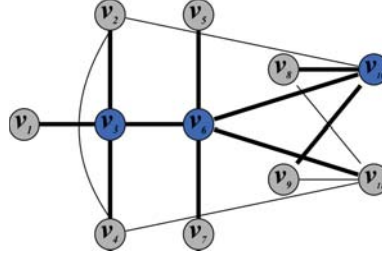
## 3.3 Tipos de Dominação

### 3.3.1 Dominação Conexa

Introduzido por Sampathkumar e Walikar [106], um **conjunto dominante conexo** é um conjunto dominante  $D$  cujo subgrafo induzido  $G[D]$  é conexo. Repare que



desconexidade de  $G$  implica na inexistência de conjuntos dominantes que tenham essa propriedade. A cardinalidade do menor conjunto dominante conexo é denominada **número de dominação conexa** e denotada por  $\gamma_c(G)$ . Na Figura 3.3, tem-se um grafo  $G$  para o qual  $D = \{v_3, v_6, v_{10}\}$  é um conjunto dominante conexo.



**Figura 3.3:** Exemplo de grafo para o qual  $\gamma_c(G) = 3$ . As arestas em negrito definem uma árvore geradora de  $G$  em que o número de folhas é maximizado.

Ainda em relação à Figura 3.3, observe que o grafo ilustrado possui algumas arestas em negrito que definem uma árvore geradora de  $G$  cujo número de folhas é maximizado. Conforme mencionado por Caro, West e Yuster [24], se  $D$  é um conjunto dominante conexo mínimo de  $G$ , então  $|V| - \gamma_c(G)$  corresponde ao número máximo de folhas de uma árvore geradora para o mesmo grafo, o que estabelece uma relação entre esses dois problemas. Dessa forma, como a determinação de uma árvore geradora com o número de folhas maximizado para um grafo  $G$  é um problema  $\mathcal{NP}$ -Completo [54], encontrar o menor conjunto dominante conexo de um grafo  $G$  também é  $\mathcal{NP}$ -Completo.

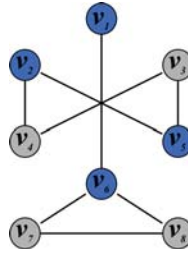
### 3.3.2 Dominação Total

Dado um grafo  $G = (V, E)$ , o conjunto  $D \subseteq V$  é denominado **conjunto dominante total** (ou **conjunto dominante aberto**) se para todo vértice  $v \in V$ ,  $N(v) \cap D \neq \emptyset$ . Ao contrário da dominação tradicional, a dominação total está definida somente para grafos que não possuem vértices isolados, uma vez que cada vértice  $v \in D$  domina apenas sua vizinhança aberta  $N(v)$  e não a si mesmo. O **número de dominação total**  $\gamma_t(G)$  corresponde à cardinalidade do menor conjunto dominante total.

Para exemplificar, considere o grafo ilustrado na Figura 3.4. Tal grafo possui duas componentes conexas, sendo que a componente formada pelos vértices  $\{v_1, v_6, v_7, v_8\}$  tem o conjunto dominante total formado pelos vértices  $v_1$  e  $v_6$ . Já a componente formada pelos vértices  $\{v_2, v_3, v_4, v_5\}$  é totalmente dominada pelos vértices  $v_3$  e  $v_5$ . Consequentemente,  $\gamma_t(G) = 4$ .

A dominação total foi introduzida por Cockayne, Dawes e Hedetniemi [35] no ano de 1980. Segundo Ptaff, Laskar e Hedetniemi, [100] decidir se  $G$  possui ou não um conjunto dominante total é  $\mathcal{NP}$ -Completo para grafos gerais. No ano de 2009, avanços

recentes sobre esse t pico foram levantados por Henning [72], complementando a revisão da literatura de Haynes, Hedetniemi e Slater [65, 66].

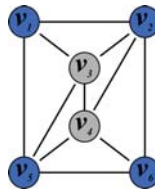


**Figura 3.4:** Exemplo de grafo para o qual  $\gamma_t(G) = 4$ .

### 3.3.3 Múltipla Domina o

Dado um grafo  $G = (V, E)$  e um inteiro fixo  $k$ , diz-se que  $D$    um **conjunto  $k$ -dominante** de  $G$  se todo vértice pertencente    $V$  estiver dominado por, no mínimo,  $k$  vértices de  $D$ . Define-se como o **número de  $k$ -domina o** de um grafo  $G$  e se denota por  $\gamma_{\times k}(G)$  a cardinalidade mínima de um conjunto  $k$ -dominante de  $G$ . Na situa o em que não existe um conjunto  $k$ -dominante,  $\gamma_{\times k}(G) = \infty$ . De fato, um grafo  $G$  possui um conjunto  $k$ -dominante se, e somente se,  $\delta(G) + 1 \geq k$ . Observe que quando  $k = 1$ , tem-se o problema de domina o tradicional. Por outro lado, quando  $k = 2$ , tem-se um **conjunto duplo dominante** [63].

No grafo a seguir, tem-se um exemplo de conjunto 3-dominante mínimo de cardinalidade 4.



**Figura 3.5:** Exemplo de grafo para o qual  $\gamma_{\times 3}(G) = 4$ .

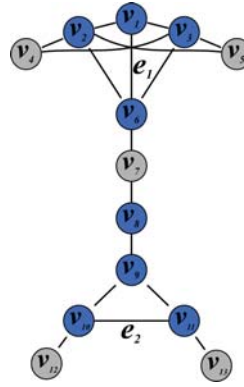
A múltipla domina o foi inicialmente definida por Harary e Haynes [63]. Conforme mencionado por Liao e Chang [86], decidir se  $G$  possui um conjunto  $k$ -dominante para algum  $k$  fixo   um problema  $\mathcal{NP}$ -Completo, mesmo quando  $G$    bipartido ou split<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>Conforme mencionado no Capítulo 2, a defini o desta classe de grafo pode ser encontrada no livro de Brandst dt, Le e Spinrad [18].

### 3.3.4 $H$ -Dominação

Seja  $H$  um grafo de ordem  $p$ . Se  $G$  é um grafo e  $D \subseteq V(G)$ , diz-se que  $D$  é  $H$ -*decomponível* se possuir uma partição  $D = D_1 \cup \dots \cup D_j$  disjunta onde  $|D_i| = p$  e  $H$  é um subgrafo gerador de  $G[D_i]$  para  $1 \leq i \leq j$ . O **número de  $H$ -dominação**, denotado por  $\gamma_H(G)$ , corresponde à cardinalidade mínima de um **conjunto dominante  $H$ -decomponível**. Na situação em que  $G$  não possui tal conjunto,  $\gamma_H(G) = \infty$ . Para  $\delta(G) \geq 1$ , observe que  $\gamma_{K_1}(G) = \gamma(G)$  e  $\gamma_{K_2}(G) = \gamma_{K_{1,1}}(G) = \gamma_{P_2}(G)$ .

No grafo a seguir, tem-se um conjunto dominante  $K_{1,3}$ -decomponível constituído por  $D = D_1 \cup D_2$ , onde  $D_1 = \{v_1, v_2, v_3, v_6\}$ ,  $D_2 = \{v_8, v_9, v_{10}, v_{11}\}$   $G[D_1] = C_4 + e_1$  e  $G[D_2] = K_{1,3} + e_2$ , sendo  $e_1 = (v_1, v_6)$  e  $e_2 = (v_{10}, v_{11})$  duas arestas de  $G$ .



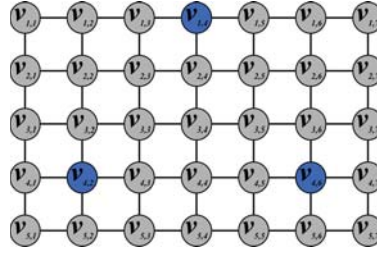
**Figura 3.6:** Exemplo de grafo para o qual  $\gamma_{K_{1,3}}(G) = 8$ .

O conceito de  $H$ -dominação foi apresentado em 2003 por Koh, Lim e Slater[80]. De acordo com esses autores, para qualquer grafo  $H$  arbitrário, determinar se  $G$  possui um conjunto dominante  $H$ -decomponível é  $\mathcal{NP}$ -Completo. Aparentemente, não existem outros trabalhos relacionados ao tema. Entretanto, Koh, Lim e Slater[80] sugeriram os seguintes tópicos para pesquisa: *i)* o estudo de aspectos algorítmicos do problema para classes de grafos distintas; *ii)* a caracterização da classe de grafos com  $\gamma_{P_3} < \infty$ ; *iii)* a determinação de condições para que  $\gamma_H(G) < \infty$ ; e, *iv)* o estudo dos valores possíveis de  $\gamma_{H_1}(G)/\gamma_{H_2}(G)$  para dois grafos  $H_1$  e  $H_2$ .

### 3.3.5 Dominação a Distância

Define-se  $D \subseteq V$  como um **conjunto dominante a uma distância  $l$**  se todo vértice em  $V - D$  estiver a uma distância menor ou igual a  $l$  em relação a pelo menos um vértice de  $D$ . Em outras palavras,  $N^l[D] = V(G)$ . A cardinalidade mínima de um conjunto dominante a uma distância  $l$  de um grafo  $G$  é definida como **número de dominação a distância  $l$  de  $G$**  e denotado por  $\gamma_{\leq l}(G)$ .

Na grade  $P_4 \times P_6$  da Figura 3.7 está ilustrado um conjunto dominante a uma distância 3 cuja cardinalidade também é 3.



**Figura 3.7:** Grade  $P_4 \times P_6$  para o qual  $\gamma_{\leq 3}(P_4 \times P_6) = 3$ .

O conceito de dominação a distância foi apresentado por Meir e Moon [92] no ano de 1975. O problema de determinar  $\gamma_{\leq l}(G)$  para um grafo  $G$  é  $\mathcal{NP}$ -Completo, conforme demonstrado por Chang e Nemhauser [26] em 1984. Em 1998, Henning [71] publicou uma revisão de literatura sobre este tópico.

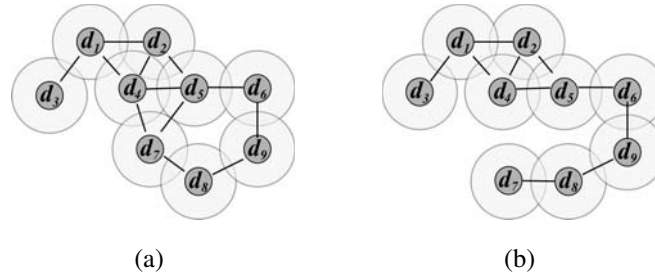
## 3.4 Aplicações de Conjuntos Dominantes

### 3.4.1 Conjuntos Dominantes em Redes Sem Fio

Nos últimos anos, os progressos nas áreas de informática e telecomunicações motivaram o desenvolvimento de uma grande variedade de dispositivos de computação portáteis e dotados com a capacidade de comunicarem e interagirem entre si [74]. Consequentemente, verifica-se o crescimento na utilização das redes sem fio por dispositivos móveis, conforme evidenciado cotidianamente.

De modo geral, a arquitetura de redes sem fio pode ser classificada em dois tipos: redes infra-estruturadas e redes *ad hoc*. As redes infra-estruturadas são caracterizadas por possuírem estações de suporte à mobilidade dos nodos. Tais estações são conhecidas como pontos de acesso e são responsáveis pela transmissão de mensagens entre os componentes da rede. Já as redes *ad hoc* se caracterizam por não necessitarem de uma infra-estrutura já estabelecida ou uma administração centralizada, sendo os nodos capazes de trocar mensagens diretamente entre si [74]. Em ambas situações, os grafos de disco unitário são frequentemente utilizados na modelagem da topologia da rede [32], onde o disco de cada vértice corresponde à abrangência do sinal do dispositivo de tal modo que a intersecção ou tangenciamento entre os discos de dois vértices implica que os respectivos dispositivos podem se comunicar diretamente.

No caso das redes *ad hoc* sem fio, o processo de comunicação compõe um cenário constituído de diversos desafios aos cientistas e engenheiros que trabalham em pesquisas relacionadas ao tema [5, 123]. Por exemplo, a mobilidade dos nodos e a possibilidade de comunicação intermitente implicam em uma topologia de rede dinâmica e complexa, conforme a situação ilustrada pelos grafos de disco unitário da Figura 3.8 e descrita logo a seguir.



**Figura 3.8:** Exemplos de topologias para uma determinada rede *ad hoc* móvel em momentos  $t_1$  e  $t_2$  distintos. (a) Topologia em um tempo  $t_1$  e (b) Topologia em um tempo  $t_2$ , após a movimentação do dispositivo  $d_7$ .

Na Figura 3.8, uma mensagem do dispositivo  $d_1$  para o dispositivo  $d_7$  passaria apenas pelo vértice  $d_4$  (Figura 3.8(a)). Com a movimentação do vértice  $d_7$ , uma outra topologia foi definida e uma mensagem de  $d_1$  para  $d_7$  percorrerá uma distância maior (Figura 3.8(b)). Dessa forma, quando dois dispositivos precisam trocar mensagens e não estão ao alcance um do outro, os outros nodos da rede devem cooperar no processo de comunicação, desempenhando a função de roteadores de dados. Esse tipo de comunicação é denominada comunicação multi-saltos [74] e o desenvolvimento de algoritmos para protocolos de roteamento que englobam essas características possui diversas abordagens [2], dentre elas destaca-se a de *clusterização* [5, 123], na qual os dispositivos são dinamicamente divididos em subgrupos, sendo que cada subgrupo possui um determinado nodo responsável pela transmissão de mensagens entre subgrupos, o que estabelece uma relação hierárquica de comunicação. Os nodos responsáveis por essa tarefa de roteamento são denominados *cluster heads*.

O processo de clusterização pode ser formalmente definido em grafos e, para isso, considere um grafo  $G = (V, E)$  representando uma rede de comunicação onde os vértices e arestas correspondem aos nodos e às conexões, respectivamente. Observe então que os vértices de  $G$  podem ser particionados em uma coleção de subconjuntos  $\{V_1, V_2, \dots, V_k\}$  não necessariamente disjuntos, onde  $V = \bigcup_{i=1}^k V_i$  e  $G[V_i]$  é um subgrafo conexo de  $G$  para  $1 \leq i \leq k$ . Dessa forma, cada subconjunto pode representar um cluster da rede. Um grafo  $G' = (V', E')$  é então construído da seguinte maneira: cada vértice  $v'_i \in V'$  corresponde ao conjunto  $V_i$  e  $v'_i \sim v'_j$  se, e somente se, existir um vértice  $u_i \in V_i$  adjacente a um vértice  $u_j \in V_j$ . Observe que  $u_i$  e  $u_j$  podem desempenhar o papel de *cluster heads*. Convém ressaltar que o conceito de dominação em grafos tem sido amplamente utilizado para o processo de clusterização [5, 29]. Nesse caso, uma vez que um conjunto dominante conexo  $D$  é encontrado para o grafo  $G$ , cada vértice de  $D$  pode representar um *cluster head* e sua vizinhança um subgrupo no processo de clusterização.

Finalizando, vale citar que a utilização de uma rede *ad hoc* móvel está frequen-

temente associada às situações em que existe a necessidade de se estabelecer rapidamente uma rede de comunicação, tais como a coordenação de resgates em situações de desastre ou a troca de informações táticas em campos de batalha [74]. Para uma compreensão mais ampla sobre o tema, os trabalhos de Balasundaram e Butenko [5] e de Chen, Liestman e Liu [29] apresentam uma detalhada revisão de literatura e abordam diversos aspectos da aplicação aqui discutida.

### 3.4.2 Detecção Precoce e Vacinação Dirigida em Surtos de Doenças Infecciosas

De acordo com Wasserman e Faust [120], uma rede social é uma estrutura composta por um conjunto de atores e relações existentes entre os mesmos. Nesse contexto, o ator é uma unidade discreta que, geralmente, corresponde a uma pessoa ou um conjunto de pessoas que representam uma unidade social. Já as relações entre os atores são caracterizadas em termos de uma ou mais propriedades dicotômicas [66]. Como exemplo de redes sociais, pode-se citar as redes de co-autoria de artigos científicos, na qual os atores representam os pesquisadores e a relação estabelecida é a de autoria em artigos científicos.

Os grafos também podem ser utilizados para representar relações sociais: diante de uma certa propriedade  $\pi$ , um *grafo de rede social* pode ser construído, considerando que os vértices representam os atores e uma aresta entre dois vertices indica que a propriedade  $\pi$  ocorre para os atores correspondentes [66]. De fato, desde a fundamentação da teoria de redes sociais, os grafos têm sido utilizados por cientistas na modelagem do relacionamento entre diversos membros de sistemas sociais complexos, no intuito de estudar e caracterizar seus comportamentos [120].

Um outro exemplo de aplicação de redes sociais foi proposto em uma edição de 2004 da revista *Nature* [46]:

A densidade característica em redes de contatos sociais de áreas urbanas constitui uma fábrica perfeita para uma propagação rápida e descontrolada de doenças. Atualmente, o aumento na tendência de urbanização agrava o problema, pois estima-se que por volta de 2030 mais de 60% da população mundial viverá em cidades [127]. Tais fatos colocam em discussão questões importantes: “Como o surto de uma doença será contido antes de se tornar uma epidemia?” e “Quais estratégias de vigilância devem ser implementadas?”. Considerando um modelo de mistura homogênea<sup>2</sup>, um estudo recente [78] apontou que a vacinação em massa é recomendada para um surto de varíola. Por outro lado, ao utilizar modelos com equações diferenciais, outra pesquisa [62] mostrou que a vaci-

---

<sup>2</sup>Modelo matemático para processos epidemiológicos, com base na hipótese de que o vetor pode contaminar qualquer hospedeiro com igual probabilidade.

nação em massa não era necessária. Diante disso, os governantes devem avaliar os riscos associados à vacinação de uma grande população [93] em contraposição aos riscos da perda do controle de um surto. Portanto, a discussão política de tais questões requer a descrição de uma solução da propagação da doença em uma abordagem que seja diferente do modelo de mistura homogênea e do modelo de equações diferenciais.

O modelo epidemiológico adotado por Eubank *et al.* [46] foi o de mistura heterogênea<sup>3</sup>, empregando o conceito de grafos sociais. Uma questão levantada foi a seguinte: “O processo epidemiológico poderia ser parado sem recorrer à vacinação em massa?”. Foi relatado que a resposta para esta pergunta depende da detecção precoce da doença e de uma vacinação dirigida.

Em uma situação idealizada, considere que sensores situados em determinadas localizações podem detectar se uma pessoa está infectada ou não. A viabilidade da detecção precoce depende do número de sensores necessários para cobrir toda a população. Esse problema é equivalente a encontrar um conjunto dominante mínimo, cujos vértices do conjunto dominante representam as localizações em que deverão ser instalados os sensores. Na ocorrência de uma detecção, todas as pessoas que frequentam a área de cobertura do sensor deverão ser vacinadas para que sejam curadas e a propagação da doença não ocorra.

### 3.5 Propriedades de Conjuntos Dominantes

Conforme mencionado anteriormente, o estudo de conjuntos dominantes em grafos iniciou-se por volta de 1960. Os primeiros trabalhos focavam-se nas propriedades de conjuntos dominantes minimais, conforme pode ser verificado pelos teoremas apresentados em 1962 por Ore [97]. Enquanto o Teorema 3.1 estabelece que pelo menos uma de duas propriedades deve ocorrer nos vértices de um conjunto dominante minimal, o Teorema 3.2 afirma que, se  $G$  é um grafo sem vértices isolados, o complemento de um conjunto dominante minimal também é um conjunto dominante.

**Teorema 3.1 (Ore [97])** *Um conjunto dominante  $D$  de um grafo  $G$  é um conjunto dominante minimal se, e somente se, para cada vértice  $v \in D$ , pelo menos uma das seguintes propriedades for verdadeira:*

$\pi_1$ : *Existência de um vértice  $w \in V - D$  tal que  $N(w) \cap D = \{v\}$ .*

$\pi_2$ :  *$v \in D$  é um vértice isolado em  $G[D]$ , isto é,  $N(v) \cap D = \emptyset$ .*

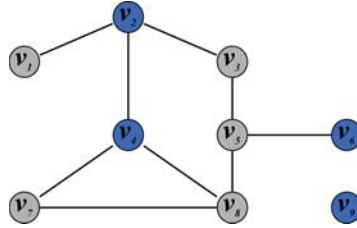
<sup>3</sup>Modelo matemático para processos epidemiológicos, onde se assume que a heterogeneidade de contatos emerge da estrutura da população de vetores e dos hospedeiros em seus domicílios. Essa abordagem utiliza grafos de redes sociais.



*Prova.* Considere  $D$  como um conjunto dominante minimal de  $G$ . Dessa forma, para cada  $v \in D$ ,  $D - \{v\}$  não é um conjunto dominante de  $G$ . Consequentemente, existe um vértice  $w \in V - (D - \{v\})$  que não é adjacente a outro vértice de  $D - \{v\}$  e, portanto, deve ser dominado pelo vértice  $v$ . Se  $w = v$ , então  $v$  não é adjacente a outro vértice de  $D$ , possuindo assim a propriedade  $\pi_2$ .

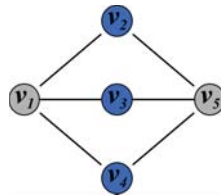
Por outro lado, se  $w \neq v$ , então  $w \in N(v)$ . Pela hipótese,  $w$  não possui vizinhos em  $D - \{v\}$ , o que faz com que  $v$  tenha a propriedade  $\pi_1$ . Inversamente, suponha que um vértice  $v \in D$  possua no mínimo uma das propriedades  $\pi_1$  ou  $\pi_2$ . Diante disso, observe que o conjunto  $D - \{v\}$  não dominará todos os vértices do grafo, completando a prova.  $\square$

O Teorema 3.1 expõe uma condição suficiente e necessária para que um conjunto dominante seja minimal: todo vértice  $v$  de um conjunto dominante minimal  $D$  possui no mínimo uma das propriedades  $\pi_1$  ou  $\pi_2$ . Quando  $v$  possuir a propriedade  $\pi_1$ , então existe um vértice  $w$  dominado exclusivamente por  $v$ . Na situação em que  $v$  possui a propriedade  $\pi_2$ ,  $v$  não será adjacente a nenhum outro vértice do conjunto  $D$ . Na Figura 3.9, observe que os vértices  $v_2$  e  $v_4$  satisfazem a propriedade  $\pi_1$ , enquanto  $v_6$  satisfaz  $\pi_1$  e  $\pi_2$ , e  $v_9$  satisfaz  $\pi_2$ .



**Figura 3.9:** Exemplo de um grafo  $G$  com conjunto dominante minimal.

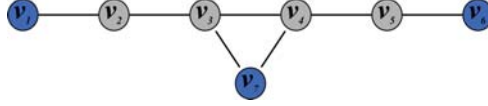
Todo conjunto dominante mínimo de um grafo também é um conjunto dominante minimal. Entretanto, o contrário nem sempre é válido. Por exemplo, no grafo da Figura 3.10, todos os vértices azuis possuem a propriedade  $\pi_2$  e definem um conjunto dominante minimal de cardinalidade 3. Porém, tal conjunto não é um conjunto dominante mínimo, pois  $D = \{v_1, v_5\}$  também domina o grafo.



**Figura 3.10:** Os vértices  $v_1$  e  $v_5$  definem um conjunto dominante mínimo do grafo.



Sendo  $D$  um conjunto dominante minimal de  $G$  e  $\delta(G) \geq 1$ , o próximo teorema diz que  $V - D$  é um conjunto dominante de  $G$ . No grafo da Figura 3.11 tem-se  $D = \{v_1, v_6, v_7\}$  como um conjunto dominante minimal e  $V - D = \{v_2, v_3, v_4, v_5\}$  um conjunto dominante.

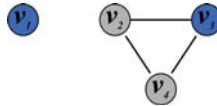


**Figura 3.11:** O complemento de um conjunto dominante minimal define um conjunto dominante.

**Teorema 3.2 (Ore [97])** Se  $G$  é um grafo sem vértices isolados e  $D$  é um conjunto dominante minimal de  $G$ , então  $V - D$  é um conjunto dominante de  $G$ .

*Prova.* Pelo Teorema 3.1, cada vértice  $v \in D$  tem no mínimo uma das propriedades  $\pi_1$  ou  $\pi_2$ . Se  $v$  possui a propriedade  $\pi_1$ , então  $v$  é adjacente a algum vértice de  $V - D$ . Se  $v$  possui a propriedade  $\pi_2$ , então  $v$  é isolado em  $G[D]$ . Entretanto,  $G$  não possui vértices isolados, fazendo com que  $v$  seja adjacente a algum vértice em  $V - D$ . Consequentemente, todo vértice de  $D$  é adjacente a algum vértice de  $V - D$ . Portanto,  $V - D$  é um conjunto dominante de  $G$ .  $\square$

Como contra-exemplo do Teorema 3.2, considere o grafo  $G$  da Figura 3.12 em que o vértice  $v_1$  é isolado,  $D = \{v_1, v_3\}$  e  $V - D = \{v_2, v_4\}$ .



**Figura 3.12:** Grafo  $G$  que possui um vértice isolado e está dominado pelo conjunto  $D = \{v_1, v_3\}$ . Entretanto, observe que tal grafo não pode ser dominado pelo conjunto  $V - D = \{v_2, v_4\}$ .

Em 1979, Bollobás e Cockayne [15] observaram a relação entre conjuntos dominantes mínimos e a propriedade  $\pi_1$  do Teorema 3.1 em grafos sem vértices isolados.

**Teorema 3.3 (Bollobás e Cockayne [15])** Se  $G$  é um grafo tal que  $\delta(G) \geq 1$ , então existe um conjunto dominante mínimo  $D$  em que cada vértice  $v \in D$  possui a propriedade  $\pi_1$ .

*Prova.* Entre todos os conjuntos dominantes mínimos de  $G$ , escolha  $D$  de tal forma que o número de arestas em  $G[D]$  seja máximo. Considere então um vértice  $v \in D$  que satisfaça a propriedade  $\pi_2$  e não satisfaça a propriedade  $\pi_1$ . Dessa forma,  $v$  é um vértice isolado em  $G[D]$  e, como  $\delta(G) \geq 1$ , todos os vizinhos de  $v$  devem pertencer ao conjunto  $V - D$ .

Suponha  $w$  um vértice qualquer pertencente a  $N(v)$ . Como  $v$  não possui a propriedade  $\pi_1$ , o vértice  $w$  possuirá, no mínimo, um vizinho em  $D - \{v\}$ . Assim,  $(D - \{v\}) \cup \{w\}$  é um conjunto dominante mínimo cujo subgrafo induzido conterà pelo menos uma aresta incidente a  $w$  e, conseqüentemente, mais arestas do que o subgrafo induzido por  $D$ , contradizendo a escolha do conjunto  $D$ . Logo,  $D$  não pode conter vértices com propriedade  $\pi_2$ , sendo, portanto, necessário que tenham a propriedade  $\pi_1$ .  $\square$

## 3.6 Limites Sobre o Número de Dominação

### 3.6.1 Limites em Termos da Ordem

No que diz respeito à ordem de um grafo  $G$ , o número de dominação  $\gamma(G)$  possui limites naturalmente condicionados à quantidade de elementos pertencentes ao conjunto  $V(G) \neq \emptyset$ :  $1 \leq \gamma(G) \leq n$ . Como exemplo de grafos que atingem tais limites, podem ser citados: o grafo vazio  $N_n$ , para o limite superior, e a estrela  $S_n$  e o grafo completo  $K_n$ , para o limite inferior. Para grafos sem vértices isolados, o limite superior foi melhorado através de um resultado direto dos teoremas clássicos de Ore (Teoremas 3.1 e 3.2):

**Teorema 3.4 (Ore [66])** *Se  $G$  é um grafo sem vértices isolados, então  $\gamma(G) \leq \frac{n}{2}$ .*

*Prova.* Seja  $D$  um conjunto- $\gamma$  de  $G$ . Como  $G$  não possui vértices isolados, então cada vértice de  $D$  possui no mínimo um vizinho em  $V - D$ , pois, caso contrário,  $D$  não seria um conjunto dominante minimal. Conseqüentemente, a cardinalidade do conjunto  $D$  é limitada superiormente por  $n/2$ .  $\square$

O Teorema 3.4 garante que um grafo  $G$  sem vértices isolados tem um conjunto dominante mínimo com cardinalidade menor ou igual a  $n/2$ . Grafos sem vértices isolados e com o número de dominação igual à metade de sua ordem foram independentemente caracterizados por Payan e Xuong [99], em 1982, e por Fink *et al.* [50], em 1985.

**Teorema 3.5 (Payan e Xuong [99], Fink *et al.* [50])** *Para um grafo  $G$  com ordem par  $n$  e sem vértices isolados,  $\gamma(G) = \frac{n}{2}$  se, e somente se, os componentes de  $G$  são o ciclo  $C_4$  ou a coroa  $H \circ K_1$  para qualquer grafo conexo  $H$ .*

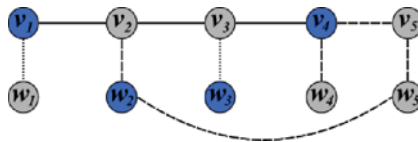
*Prova.* Inicialmente, observe que  $\gamma(G) = n/2$  se, e somente se, a cardinalidade do conjunto dominante minimal de qualquer componente do grafo  $G$  for igual à metade da quantidade de vértices da componente em questão. Dessa forma, assumamos  $G$  conexo.

Pelo Teorema 3.3, sabe-se que  $G$  possui um conjunto dominante mínimo onde todos os vértices têm a propriedade  $\pi_1$ . Considere então  $D = \{v_1, \dots, v_{\frac{n}{2}}\}$  como sendo tal

conjunto e, para cada vértice  $v_i \in D$ , seja  $w_i$  um vértice de  $V - D$  tal que  $N(w_i) \cap D = \{v_i\}$ . Consequentemente, entre  $D$  e  $V - D$  só existem arestas do tipo  $(v_i, w_i)$ , com  $i = 1, \dots, \frac{n}{2}$ . Repare ainda que, se  $\gamma(G) = \frac{n}{2}$ , então  $V = D \cup \{w_1, \dots, w_{\frac{n}{2}}\}$ . Nesse sentido, quando  $n = 2$ ,  $G$  é isomorfo a  $K_2$ , que é a corona de  $K_1$ . Se  $n = 4$ , então  $G$  é isomorfo a  $C_4$  ou a  $P_3$ , que é a corona de  $K_2$ . Para  $n \geq 6$ , será demonstrado que os vértices  $v_i$  ou  $w_i$  têm grau 1, com  $1 \leq i \leq \frac{n}{2}$ .

Sem perda de generalidade, suponha que  $d(w_i) = 1$  para todo vértice  $w_i$  com  $1 \leq i \leq \frac{n}{2}$ . Devido à conexidade do grafo  $G$ ,  $G[D]$  também é conexo e  $d(v_i) \geq 2$  para todo vértice  $v_i$  com  $1 \leq i \leq \frac{n}{2}$ . Agora, selecione dois vértices  $w_j$  e  $w_k$  quaisquer e adicione a aresta  $(w_j, w_k)$ , fazendo com que  $w_j$  e  $w_k$  possuam grau igual a 2. Em seguida, será mostrado que  $G$  possui um subgrafo gerador  $G'$  isomorfo a um  $P_5 \cup \frac{n-6}{2}K_2$ .

Dentre os vértices  $v_j$  e  $v_k$ , selecione aquele que possuir menor grau. Sem perda de generalidade, suponha que  $d(v_j) < d(v_k)$ . Repare, então, que a sequência  $\langle v_j, w_j, w_k, v_k \rangle$  define um  $P_3$  como subgrafo de  $G$ . Como  $n \geq 6$  e  $d(v_k) > d(v_j) \geq 2$ , o vértice  $v_k$  será adjacente a um outro vértice  $v_l$  que, por sua vez, possui um vizinho  $w_l$  em  $V - D$ . Logo,  $\langle v_j, w_j, w_k, v_k, v_l, w_l \rangle$  define um  $P_5$  como um subgrafo que sempre estará presente em grafos que obedecem às condições anteriormente estabelecidas. Convém ressaltar que, na situação em que  $d(v_j) = d(v_k)$ , os graus dos vértices  $v_j$  e  $v_k$  devem ser diferentes de 2, pois, em caso contrário,  $G[D]$  seria desconexo. Portanto, considerando  $d(v_j) = d(v_k)$ , a sequência que possui um  $P_5$  como subgrafo gerador também estará garantida ao se selecionar  $v_j$  ou  $v_k$  como vértice inicial. Logo,  $V - \{v_j, w_j, w_k, v_k, v_l, w_l\}$  possui  $n/2 - 3$  subgrafos isomorfos a um  $K_2$ . Consequentemente,  $G$  possui um subgrafo gerador  $G'$  isomorfo a um  $P_5 \cup \frac{n-6}{2}K_2$ , conforme o exemplo da Figura 3.13.



**Figura 3.13:** Grafo  $G$  que contém um subgrafo gerador  $G'$  isomorfo a um  $P_5 \cup \frac{n-6}{2}K_2$ . Observe que as arestas tracejadas definem um  $P_5$  e as arestas pontilhadas definem os subgrafos  $K_2$ . Nesse caso,  $\gamma(G) = \gamma(G') = 4$ . Se  $w_2$  não fosse adjacente a  $w_5$ , então o valor de  $\gamma(G)$  seria  $\frac{10}{2} = 5$ .

Segue-se que  $\gamma(G') \leq \frac{n}{2} - 1$  e, como  $\gamma(G)$  deve ser menor ou igual a  $\gamma(G')$ , tem-se uma contradição. Dessa forma, ou os vértices  $v_i$  ou os vértices  $w_i$  devem ter grau 1. Portanto,  $G$  é a corona  $H \circ K_1$  de algum grafo conexo  $H$ . O inverso também é válido, uma vez que o ciclo  $C_4$  e a corona  $H \circ K_1$  não têm vértices isolados, possuem ordem par e o número de dominação igual à metade de sua ordem.  $\square$

O Teorema 3.4 considera apenas grafos que possuem grau mínimo  $\delta(G) \geq 1$ . Levando-se em conta os grafos com a restrição  $\delta(G) \geq 2$ , Blank [14], em 1973, e McCuaig e Shepherd [91], em 1989, conseguiram, de maneira independente, melhorar o limite superior para grafos com  $n \geq 8$ , conforme será visto no Teorema 3.6. Seja  $\mathcal{A}$  a coleção de grafos da Figura 3.14.

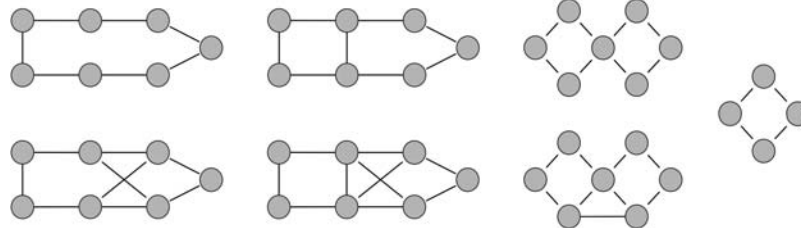


Figura 3.14: Coleção  $\mathcal{A}$  de grafos.

**Teorema 3.6 (Blank [14], McCuaig e Shepherd [91])** *Se o grafo  $G$  é conexo com  $\gamma(G) \geq 2$  e  $G \notin \mathcal{A}$ , então  $\gamma(G) \leq \frac{2n}{5}$ .*

O limite do Teorema 3.6 é alcançado pela família de grafos ilustrada na Figura 3.15.

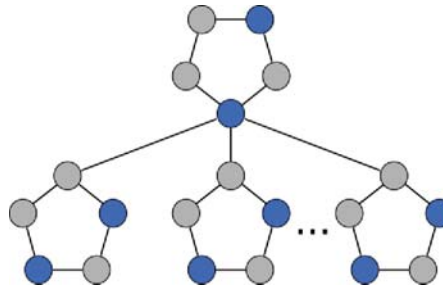


Figura 3.15: Família de grafos com  $\delta(G) \geq 2$  e  $\gamma(G) \leq \frac{2n}{5}$ .

Seja  $\mathcal{B}$  a coleção de grafos da Figura 3.16, e considere  $\mathcal{F} = \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ . Os Lemas 3.7 e 3.8 constituem resultados preliminares na caracterização de grafos em que  $\gamma(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , sendo que o Lema 3.7 diz respeito a grafos com  $\delta(G) \geq 2$  e o Lema 3.8 inclui grafos com  $\delta(G) \geq 1$ .

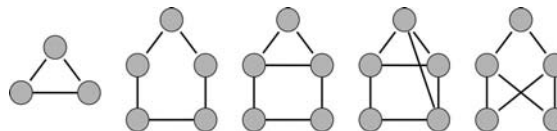


Figura 3.16: Coleção  $\mathcal{B}$  de grafos.

**Lema 3.7 (Baogen et al. [8])** *Se  $G$  é um grafo conexo com  $\delta(G) \geq 2$  e  $\gamma(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , então  $G \in \mathcal{F}$ .*

*Prova.* Enumerando-se todos os grafos conexos  $G$  de ordem  $1 \leq n \leq 7$  e grau mínimo  $\delta(G) \geq 2$ , verificou-se que aqueles que satisfazem  $\gamma(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  estão inclusos na família  $\mathcal{F}$ . Para  $n \geq 8$ , será mostrado que não existe grafo que satisfaz  $\gamma(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . Suponha  $G$  um grafo conexo com  $\delta(G) \geq 2$ ,  $\gamma(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  e ordem  $n \geq 8$ , e considere o Teorema 3.6 que diz: “Se  $G \notin \mathcal{A}$ , então  $\gamma(G) \leq \frac{2n}{5}$ ”. Observe agora que, se  $n$  for par,  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \not\leq \frac{2n}{5}$ , gerando uma contradição. Em outras palavras, se  $G$  possui ordem par  $n$ , então não existe um conjunto dominante de cardinalidade  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . Por outro lado, se  $G$  possui ordem  $n$  ímpar,  $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor \leq \frac{2n}{5}$  somente se  $n = 3$  ou  $n = 5$ . Todos os grafos de ordem três ou cinco com  $\delta(G) \geq 2$  e  $\gamma(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  estão em  $\mathcal{B}$ . Consequentemente, não existem grafos de ordem  $n \geq 8$  e  $\delta(G) \geq 2$  que satisfazem  $\gamma(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . Portanto, os únicos grafos que atendem às condições  $\delta(G) \geq 2$  e  $\gamma(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  são os que pertencem à coleção  $\mathcal{F}$ .  $\square$

**Lema 3.8 (Baogen et al. [8])** *Considere  $V' \subset V$  tal que  $|V'| = \frac{n}{2}$ . Se  $G$  é um grafo conexo e  $\gamma(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , então existe no máximo um vértice pendente adjacente a cada vértice  $v \in V'$ , exceto pela possibilidade de haver um vértice que pode ser adjacente a exatamente dois vértices pendentes quando  $n$  for ímpar.*

*Prova.* Seja  $G$  um grafo conexo com  $\gamma(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . Seja  $W$  o conjunto de vértices pendentes que são adjacentes a um único vértice  $v \in V'$ , sendo que  $|W| = t$ . Note que o subgrafo induzido  $G' = G[V - (W - \{v\})]$  não possui vértices isolados. Como a ordem de  $G'$  é igual a  $\frac{n-t-1}{2}$ , então, pelo Teorema 3.4,  $\gamma(G')$  possui o seguinte limite superior:

$$\gamma(G') \leq \left\lfloor \frac{n-t-1}{2} \right\rfloor. \quad (3-1)$$

Voltando ao grafo  $G$ , observe que se o vértice  $v \in V'$  pertencer ao conjunto dominante, então os vértices de  $W$  estarão dominados. Dessa forma, se  $n$  for par, isto é,  $n = 2k$  para algum inteiro  $k \geq 0$ ,  $\gamma(G)$  possui o limite superior 3-2:

$$\begin{aligned} k &= \gamma(G) \leq 1 + \gamma(G') \\ k &= \gamma(G) \leq 1 + \left\lfloor \frac{2k-t-1}{2} \right\rfloor, \end{aligned} \quad (3-2)$$

o que implica em  $t \leq 1$ . Já se  $n$  for ímpar, isto é,  $n = 2k + 1$  para algum inteiro  $k \geq 0$ , então:

$$k = \gamma(G) \leq 1 + \left\lfloor \frac{2k+1-t-1}{2} \right\rfloor, \quad (3-3)$$

o que implica em  $t \leq 2$ .

Agora, resta mostrar que apenas um vértice de  $V'$  pode ser adjacente a dois vértices pendentes. Suponha que  $R$  é o conjunto de vértices adjacentes a exatamente dois

vértices pendentos, sendo  $|R| = r$ . Note que todos os vértices de  $R$  estão em qualquer conjunto dominante mínimo de  $G$ . Seja  $G''$  o subgrafo formado pela remoção de todos os vértices de  $R$  e considere  $I$  o conjunto de vértices isolados em  $G''$  que, conseqüentemente, são dominados em  $G$  por  $R$ . O grafo  $G'' - I$  não possui vértices isolados e tem, no máximo,  $2k + 1 - 3r$  vértices. Logo, pelo Teorema 3.4, o tamanho de um conjunto dominante mínimo para  $G'' - I$  deve obedecer o seguinte limite:

$$\gamma(G'' - I) \leq \left\lfloor \frac{2k + 1 - 3r}{2} \right\rfloor. \quad (3-4)$$

Observe agora que um conjunto dominante de  $G'' - I$  em união com o conjunto  $R$  domina todo o grafo  $G$ . Portanto,

$$\begin{aligned} k &= \gamma(G) \leq r + \gamma(G'' - I) \\ k &= \gamma(G) \leq r + \left\lfloor \frac{2k + 1 - 3r}{2} \right\rfloor, \end{aligned} \quad (3-5)$$

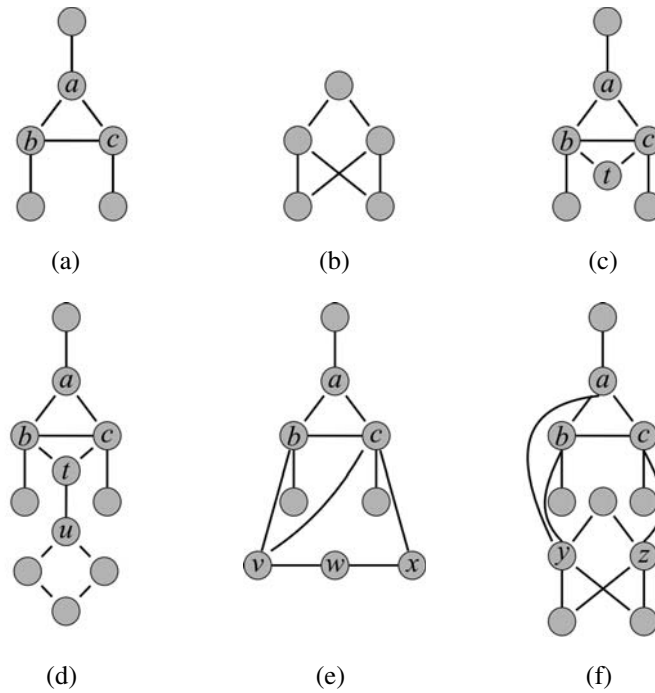
implicando em  $r \leq 1$  e completando a prova.  $\square$

Em seguida, tem-se a Tabela 3.1 que descreve seis classes de grafos, indicando exemplos que estão ilustrado na Figuras 3.17. Conforme será visto nos Lemas de 3.9 à 3.15, e também no Teorema 3.16, tais classes foram caracterizadas como aquelas cujos grafos satisfazem  $\gamma(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ .

**Tabela 3.1:** Classes de Grafos  $\mathcal{G}_i$  com  $1 \leq i \leq 6$

Classe	Exemplo
$\mathcal{G}_1 = \{C_4\} \cup \{G : G = H \circ K_1\}$ , onde $H$ é um grafo conexo.	Figura 3.17(a)
$\mathcal{G}_2 = \mathcal{F} - \{C_4\}$	Figura 3.17(b)
$\mathcal{G}_3 = \bigcup_H \mathcal{S}(H)$ , onde $\mathcal{S}(H)$ é o conjunto de grafos conexos que formados através da corona $H \circ K_1$ adicionando-se um novo vértice $t$ adjacente a um ou mais vértices de $H$ , sendo $H$ um grafo qualquer.	Figura 3.17(c)
$\mathcal{G}_4 = \{\theta(G) : G \in \mathcal{G}_3\}$ , onde $\theta(G)$ é o grafo obtido conectando-se $G \in \mathcal{G}_3$ a um $C_4$ através da adição de uma aresta $(t, u)$ , sendo $t$ o vértice adicionado na formação de $G \in \mathcal{G}_3$ e $u$ um vértice de $C_4$ .	Figura 3.17(d)
$\mathcal{G}_5 = \bigcup_H \mathcal{P}(H)$ , onde $\mathcal{P}(H)$ é o conjunto de grafos conexos formados através da corona $H \circ K_1$ adicionando-se um caminho $P_2$ dado pela sequência de vértices $\langle v, w, x \rangle$ , tal que os vértices $v$ e $x$ são adjacentes a um ou mais vértices de $H$ , sendo $H$ um grafo qualquer.	Figura 3.17(e)
$\mathcal{G}_6 = \bigcup_{H, X} \mathcal{R}(H, X)$ , onde $\mathcal{R}(H, X)$ é o conjunto de grafos conexos formados através da corona $H \circ K_1$ com a adição de arestas entre os vértices de $H$ e $T \subseteq V(X)$ , sendo cada vértice de $T$ adjacente a um ou mais vértices de $H$ , tal que nenhum conjunto com menos de $\gamma(X)$ vértices de $X$ domina $V(X) - T$ , onde $H$ é um grafo qualquer e $X \in B$ .	Figura 3.17(f)

De acordo com a Tabela 3.1, a classe  $\mathcal{G}_1$  está representada por um grafo  $H \circ K_1$ , onde  $H$  é um  $C_3$  formado pelos vértices  $a, b$  e  $c$  (Figura 3.17(a)). Já o exemplo da classe  $\mathcal{G}_2$  é um grafo pertencente à família  $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$  (Figura 3.17(b)). Por sua vez, o exemplo de  $\mathcal{G}_3$  considera  $H \circ K_1$  como o grafo da Figura 3.17(a), sendo  $t$  adjacente aos vértices  $b$  e  $c$  de  $H$  (Figura 3.17(c)). Para  $\mathcal{G}_4$ , o exemplo indicado assume que  $G$  é o grafo da Figura 3.17(c) (Figura 3.17(d)). No caso de  $\mathcal{G}_5$ , tem-se  $H \circ K_1$  como o grafo da Figura 3.17(a), sendo  $v$  adjacente a  $b$  e  $c \in H$ , e  $x$  adjacente a  $c \in H$  (3.17(e)). Finalmente, o exemplo da classe  $\mathcal{G}_6$  considera  $H \circ K_1$  como o grafo da Figura 3.17(a) e  $X \in \mathcal{B}$  o grafo da Figura 3.17(b), sendo  $y \in U$  adjacente aos vértices  $a$  e  $b \in H$ , e  $z \in U$  adjacente ao vértice  $c \in H$  (Figura 3.17(f)).



**Figura 3.17:** Exemplos de grafos pertencentes à classe  $\bigcup_{i=1}^6 \mathcal{G}_i$

**Lema 3.9** (Baogen *et al.* [8], Randerath e Volkmann [101]) *Se  $G$  um grafo conexo de ordem par tal que  $\gamma(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , então  $G \in \mathcal{G}_1$ .*

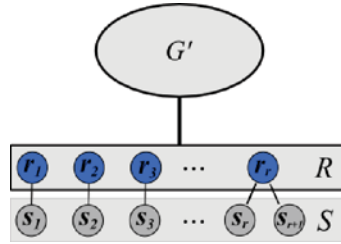
*Prova.* Vide o Teorema 3.5. □

**Lema 3.10** (Baogen *et al.* [8], Randerath e Volkmann [101]) *Se  $G$  é um grafo conexo de ordem ímpar tal que  $\delta(G) \geq 2$  e  $\gamma(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ , então  $G \in \mathcal{G}_2$ .*

*Prova.* Vide o Lema 3.7. □

**Lema 3.11 (Baogen *et al.* [8], Randerath e Volkmann [101])** *Seja  $G$  um grafo conexo de ordem ímpar tal que  $\delta(G) = 1$  e  $\gamma(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . Além disso, considere  $S \neq \emptyset$  como o conjunto de vértices pendentes de  $G$  e  $R$  como a vizinhança aberta de  $S$ , de modo que  $|R| = r$ . Se  $|S| = r + 1$ , então  $G \in \mathcal{G}_3$ .*

*Prova.* Do Lema 3.8, sabe-se que  $|S| = r$  ou  $|S| = r + 1$ . Suponha  $|S| = r + 1$ . Como consequência do Teorema 3.3, existe no mínimo um conjunto dominante mínimo de  $G$  que contém  $R$ . Considere então  $G' = (V', E')$ , onde  $V' = V - (R \cup S)$ , e considere a Figura 3.18 que ilustra a estrutura do grafo  $G$ , sendo destacada a existência do subgrafo  $G'$  e dos subconjuntos de vértices  $R$  e  $S$ . Os contornos enegrecidos do subgrafo  $G'$  e do conjunto  $R$  indicam que seus vértices possuem grau maior que 1 em  $G$ . Atente-se ao fato de que  $G$  é conexo e, conseqüentemente,  $G - S$  também. Dessa forma, se  $G' \neq \emptyset$ , então existe no mínimo um vértice de  $R$  adjacente a algum vértice de  $G'$ . Essa situação fica evidenciada pelo traço ligando o subgrafo  $G'$  ao conjunto  $R$ . Por outro lado, se  $G' = \emptyset$ ,  $G[R]$  deve ser conexo.



**Figura 3.18:** Estrutura de um grafo do Lema 3.11.

Observe que  $G'$  possui  $n - (2r + 1)$  vértices. Agora suponha que  $G'$  é um grafo não vazio. Como  $G$  é conexo,  $G'$  deve ter no mínimo um vértice  $x$  com vizinhos em  $R$ . Além disso, se um vértice  $v$  possui grau 0 em  $G'$ , então  $v$  é adjacente a dois ou mais vértices de  $R$  em  $G$ . Respectivamente, caso  $v$  possua grau 1 em  $G'$ , então  $v$  é adjacente a um ou mais vértices de  $R$  em  $G$ . Dessa forma,  $R$  domina  $S$ ,  $x$  e todos os vértices de grau 0 ou 1 em  $G'$ .

Se  $Y$  é o conjunto de vértices não-isolados em  $G' - x$ , pode-se deduzir que  $R$  domina todos os vértices de  $\bar{Y}$ . Pelo Teorema 3.4, o subgrafo induzido  $G[Y]$  possui um conjunto- $\gamma$   $D'$  tal que:

$$\begin{aligned} D' &\leq \left\lfloor \frac{|Y|}{2} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{n - ((2r + 1) + 1)}{2} \right\rfloor \\ D' &\leq \left\lfloor \frac{n - 2r - 2}{2} \right\rfloor. \end{aligned} \quad (3-6)$$



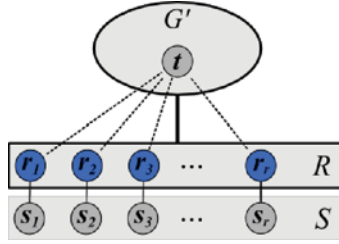
Como  $R \cup D'$  domina  $G$ :

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \gamma(G) \leq r + \left\lfloor \frac{n-2r-2}{2} \right\rfloor, \quad (3-7)$$

o que gera uma contradição, implicando em  $G'$  vazio e  $G[R]$  conexo. Logo  $G \in \mathcal{G}_3$ .  $\square$

**Lema 3.12 (Baogen *et al.* [8], Randerath e Volkmann [101])** *Seja  $G$  um grafo conexo de ordem ímpar tal que  $\delta(G) = 1$  e  $\gamma(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . Além disso, considere  $S \neq \emptyset$  como o conjunto de vértices pendentes de  $G$  e  $R$  como a vizinhança aberta de  $S$ , de modo que  $|R| = r$ . Fazendo  $G' = (V', E')$ , onde  $V' = V - (R \cup S)$ , se  $|S| = |R| = r$  e  $\delta(G') = 0$ , então  $G \in \mathcal{G}_3$ .*

*Prova.* Do Lema 3.8, sabe-se que  $|S| = r$  ou  $|S| = r + 1$ . Suponha  $|S| = |R| = r$  e  $\delta(G') = 0$ . Na Figura 3.19 está ilustrada a estrutura de  $G$ , que se difere da estrutura de um grafo do Lema 3.11 (Figura 3.18) pela presença de um vértice  $t$  isolado em  $G'$  e pelo fato de que  $|S| = r$ . Já as arestas tracejadas entre  $t$  e  $r_1, \dots, r_n$  visam ilustrar que  $t$  só pode ser adjacente aos vértices de  $R$ , possuindo no mínimo dois vizinhos.



**Figura 3.19:** Estrutura de um grafo do Lema 3.12. As arestas tracejadas entre  $t$  e  $r_1, \dots, r_n$  ilustram que  $t$  tem no mínimo dois vizinhos em  $R$ .

Suponha  $G' - t$  um grafo não vazio. Como  $G$  é conexo, então  $G' - t$  possui um vértice  $u$  adjacente a um vértice de  $R$ . Se  $Z$  é o conjunto de vértices não-isolados em  $G' - \{t, u\}$ , pode-se deduzir que  $R$  domina todos os vértices de  $Z$ . Desde que  $|V(G')| = n - 2r$ , a desigualdade 3-6 também acontece para o grafo  $G' - \{t, u\}$ , gerando novamente uma contradição que implica em  $G' - t$  vazio. Consequentemente,  $G \in \mathcal{G}_3$ .  $\square$

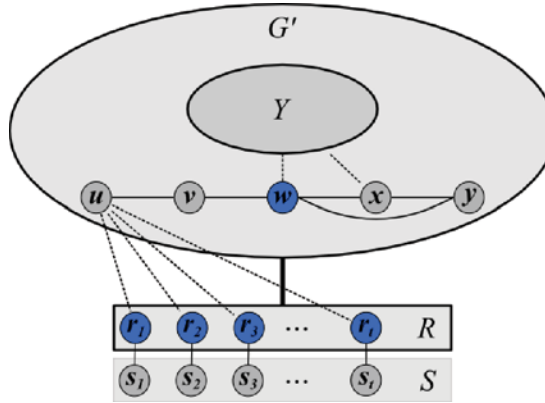
**Lema 3.13 (Baogen *et al.* [8], Randerath e Volkmann [101])** *Seja  $G$  um grafo conexo de ordem ímpar tal que  $\delta(G) = 1$  e  $\gamma(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . Além disso, considere  $S \neq \emptyset$  como o conjunto de vértices pendentes de  $G$  e  $R$  como a vizinhança aberta de  $S$ , de modo que  $|R| = r$ . Fazendo  $G' = (V', E')$ , onde  $V' = V - (R \cup S)$ , e  $U$  como o conjunto formado pelos vértices de grau 1 em  $G'$ , se  $|S| = |R| = r$ ,  $\delta(G') = 1$  e  $G' - U$  não possui vértices isolados, então  $G \in \mathcal{G}_4$ .*

*Prova.* Do Lema 3.8, sabe-se que  $|S| = r$  ou  $|S| = r + 1$ . Suponha  $|S| = |R| = r$  e  $\delta(G') = 1$ . Se  $U \neq \emptyset$  é o conjunto de vértices de grau 1 em  $G'$ , pela definição deste grafo, nenhum vértice de  $U$  pode ser um vértice pendente em  $G$ . Consequentemente, cada vértice de  $U$  é adjacente a pelo menos um vértice de  $R$ , significando que  $R$  domina  $U$ . Aplicando-se o Teorema 3.4 ao grafo  $G' - U$ , tem-se que

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \gamma(G) \leq r + \left\lfloor \frac{n - 2r - |U|}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n - |U|}{2} \right\rfloor, \quad (3-8)$$

o que implica em  $|U| = 1$ .

Seja  $U = \{u\}$  e  $v$  o único vizinho de  $u$  em  $G'$ . Por hipótese,  $G' - U$  não possui vértices isolados. Se  $\delta(G' - U) = 1$ , então  $v$  é o único vértice que tem grau 1 em  $G' - U$ . Dessa forma, considere  $w$  vizinho de  $v$  em  $G' - U$ . Como  $w$  deve possuir mais de um vizinho em  $G' - U$ , então existe um vértice  $x \in G' - \{u, v, w\}$  adjacente a  $w$ . Logo, se existir um vértice  $y$  isolado em  $G' - \{u, v, w, x\}$ , o mesmo não poderá ser adjacente a  $u$  e  $v$ . Entretanto, uma vez que tal vértice deve possuir grau mínimo igual a dois em  $G' - U$ , pode-se deduzir que  $y$  é adjacente aos vértices  $w$  e  $x$ . Agora, se  $Y$  é o conjunto de vértices não-isolados de  $G' - \{u, v, w, x\}$ , seus vértices só podem ser adjacentes entre si, aos vértices do conjunto  $R$ , a  $w$  e  $x$ . Portanto, pode-se afirmar que  $R \cup \{w\}$  domina os conjuntos  $R$ ,  $S$  e  $\{u, v, w, x\}$ .



**Figura 3.20:** Estrutura de um grafo do Lema 3.13.

A Figura 3.20 exemplifica a estrutura descrita anteriormente, sendo ilustrados os conjuntos  $R$ ,  $S$  e  $Y$ , e o subgrafo  $G'$ . Além do mais, são destacados os vértices  $u$ ,  $v$ ,  $w$ ,  $x$  e  $y$  de  $G'$ . As arestas tracejadas entre  $u$  e  $t_1, \dots, t_n$  visam ilustrar que  $u$  deve ser adjacente a pelo menos um desses vértices. Similarmente, os vértices do conjunto  $Y$  só podem ser adjacentes a  $w$  e  $x$  em  $G'$ , sendo que  $|N[Y] \cap \{w, x\}| \geq 1$ , pois  $G$  é conexo. Lembre-se que o traço ligando  $G'$  e  $R$  permite que qualquer membro de  $G'$  possua vizinhos em  $R$ , incluindo os vértices do conjunto  $Y$ , e que os contornos enegrecidos do subgrafo  $G'$  e dos conjuntos  $R$ ,  $S$  e  $Y$  indicam que seus vértices possuem grau maior que 1 em  $G$ .

Pelo Teorema 3.4, o subgrafo induzido  $G[Y]$  pode ser dominado por no máximo  $|Y|/2$  vértices. Consequentemente,

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor &= \gamma(G) \leq (r+1) + \left\lfloor \frac{|Y|}{2} \right\rfloor \\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor &= \gamma(G) \leq (r+1) + \left\lfloor \frac{n-2r-4}{2} \right\rfloor, \end{aligned} \quad (3-9)$$

gerando uma contradição. Logo,  $\delta(G' - U) \geq 2$ . Agora, observe que  $G' - U$  possui ordem par e, desde que  $\gamma(G) = \lfloor n/2 \rfloor$ ,  $\gamma(G' - U) = |V(G' - U)|/2$ . Aplicando-se o Teorema 3.5, tem-se que  $G' - U = mC_4$ , onde  $m \geq 1$ . Entretanto, se  $m > 1$ , então pelo menos um vértice de cada uma das  $m$  componentes  $C_4$  deve ser adjacente a um vértice de  $R$ , implicando em  $\gamma(G) < \lfloor n/2 \rfloor$ . Portanto,  $G' - U = C_4$  e  $G \in \mathcal{G}_4$ .  $\square$

**Lema 3.14 (Baogen *et al.* [8], Randerath e Volkmann [101])** *Seja  $G$  um grafo conexo de ordem ímpar tal que  $\delta(G) = 1$  e  $\gamma(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . Além disso, considere  $S \neq \emptyset$  como o conjunto de vértices pendentes de  $G$  e  $R$  como a vizinhança aberta de  $S$ , de modo que  $|R| = r$ . Fazendo  $G' = (V', E')$ , onde  $V' = V - (R \cup S)$ , e  $U$  como o conjunto formado pelos vértices de grau 1 em  $G'$ , se  $|S| = |R| = r$ ,  $\delta(G') = 1$  e  $G' - U$  possui vértices isolados, então  $G \in \mathcal{G}_5$ .*

*Prova.* Do Lema 3.8, sabe-se que  $|S| = r$  ou  $|S| = r+1$ . Suponha  $|S| = |R| = r$  e  $\delta(G') = 1$ . Se  $U \neq \emptyset$  é o conjunto de vértices de grau 1 em  $G'$ , pela definição deste grafo, nenhum vértice de  $U$  pode ser um vértice pendente em  $G$ . Consequentemente, cada vértice de  $U$  é adjacente a pelo menos um vértice de  $R$ , significando que  $R$  domina  $U$ .

Considere  $I$  como o conjunto de vértices isolados em  $G' - U$ , onde  $|I| = i \geq 1$ . Como cada vértice de  $I$  possui grau maior que 1 em  $G'$ , deverá, portanto, possuir no mínimo dois vizinhos em  $U$  para que seja isolado em  $G' - U$ . Desde que  $d_{G'}(u) = 1$  para todo  $u \in U$ , então  $|U| \geq 2i$ . Dessa forma,  $R$  domina  $R \cup S \cup U$ ,  $I$  domina a si mesmo e, pelo Teorema 3.4, no máximo  $|V' - (U \cup I)|/2$  vértices são necessários para dominar os vértices não-isolados de  $G' - U$ . Assim

$$\begin{aligned} \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor &= \gamma(G) \leq r + i + \left\lfloor \frac{n - 2r - (2i + i)}{2} \right\rfloor \\ \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor &= \gamma(G) \leq r + i + \left\lfloor \frac{n - 2r - (3i)}{2} \right\rfloor, \end{aligned} \quad (3-10)$$

implicando em  $i = 1$ , ou seja,  $G' - U$  tem exatamente um vértice isolado, denominado  $w$ , com no mínimo dois vizinhos em  $U$ , designados  $v$  e  $x$ . Agora,  $V' - (U \cup \{w\})$  não possui

vértices isolados e pode ser dominado por no máximo

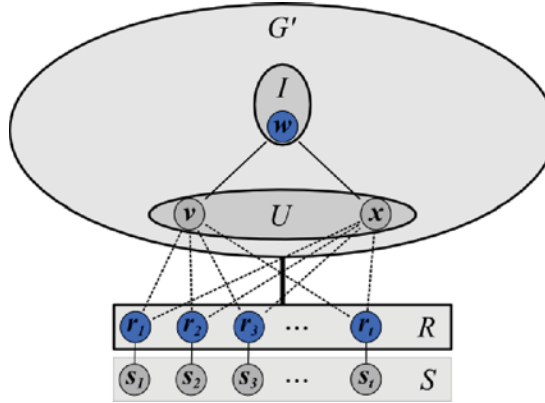
$$\left\lfloor \frac{|V' - (U \cup \{w\})|}{2} \right\rfloor \leq \left\lfloor \frac{n - 2r - |N[w]|}{2} \right\rfloor. \quad (3-11)$$

vértices. Além do mais,  $R \cup \{w\}$  domina  $R \cup S \cup U \cup \{w\}$ . Consequentemente,

$$\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor = \gamma(G) \leq r + 1 + \left\lfloor \frac{n - 2r - |N[w]|}{2} \right\rfloor, \quad (3-12)$$

o que implica em  $|N[w]| \leq 3$ . Logo,  $N[w] = \{v, w, x\}$ . Repare que, se  $w$  fosse dominado por  $R$ , o lado direito da desigualdade 3-12 poderia ser subtraído em uma unidade, gerando uma contradição e indicando que  $w$  não pode ter vizinhos em  $R$ . Esse fato evidencia que, para dominar  $w$ , no mínimo um vértice de  $\{v, w, x\}$  deve estar no conjunto- $\gamma$  de  $G$ .

A Figura 3.21 exemplifica a estrutura do grafo descrito, sendo destacado os subconjuntos  $I$  e  $U$  e seus respectivos vértices. Nesta ilustração,  $w$  pertence ao conjunto- $\gamma$ . Já as arestas tracejadas conectando  $v$  e  $x$  aos vértices do conjunto  $R$  indicam que esses devem possuir no mínimo um vizinho entre  $r_1, \dots, r_r$ .



**Figura 3.21:** Estrutura de um grafo do Lema 3.14.

Agora suponha que  $G' - \{v, w, x\}$  seja não vazio e observe que esse grafo possui ordem par. Desde que  $\gamma(G) = \lfloor n/2 \rfloor$ , serão necessários exatamente  $|V(C)|/2$  vértices de cada componente  $C$  de  $G' - \{v, w, x\}$  em cada conjunto- $\gamma$  de  $G$ . Por esse motivo,  $C$  deve ter ordem par e, pelo Teorema 3.5,  $C = C_4$  ou  $C = H \circ K_1$ , para qualquer grafo conexo  $H$ .

De acordo com a estrutura do grafo, nenhum vértice de  $C$  pode ser adjacente aos vértices  $v$ ,  $w$  e  $x$ . Diante disso, se  $C = C_4$ , então a conexidade de  $G$  implica que um vértice de  $C$  será adjacente a um vértice de  $R$ , sugerindo que existe um conjunto- $\gamma$  de  $G$  que inclui  $R$ ,  $w$  e apenas um dos vértices de  $C$ , o que é uma contradição.

Por outro lado, uma vez que  $v$  e  $x$  possuem grau 1 em  $G'$  e  $w$  só pode ser adjacente a tais vértices, se  $C = H \circ K_1$ , cada vértice pendente de  $C$  deverá ter no mínimo um vizinho em  $R$ . Novamente, existirá um conjunto- $\gamma$  de  $G$  contendo menos que  $|V(C)|/2$

vértices de  $C$ . Portanto,  $G' - \{v, w, x\} = \emptyset$  e, assim,  $G \in \mathcal{G}_5$ .  $\square$

**Lema 3.15 (Baogen *et al.* [8], Randerath e Volkmann [101])** *Seja  $G$  um grafo conexo de ordem ímpar tal que  $\delta(G) = 1$  e  $\gamma(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ . Além disso, considere  $S \neq \emptyset$  como o conjunto de vértices pendentes de  $G$  e  $R$  como a vizinhança aberta de  $S$ , de modo que  $|R| = r$ . Fazendo  $G' = (V', E')$ , onde  $V' = V - (R \cup S)$ , e  $U$  como o conjunto formado pelos vértices de grau 1 em  $G'$ , se  $|S| = |R| = r$ ,  $\delta(G') \geq 2$ , então  $G \in \mathcal{G}_6$ .*

*Prova.* Do Lema 3.8, sabe-se que  $|S| = r$  ou  $|S| = r + 1$ . Suponha  $|S| = |R| = r$  e  $\delta(G') = 2$ . Para que  $\gamma(G) = \lfloor n/2 \rfloor$ , todo conjunto dominante mínimo de  $G$  deverá incluir  $|V(C)|/2$  vértices de qualquer componente  $C$  de ordem par presente em  $G'$ . Como  $\delta(G') \geq 2$ , tais componentes não são isomorfas a  $H \circ K_1$ , onde  $H$  é um grafo conexo. Já a inexistência de componentes isomorfas a  $C_4$  pode ser justificada com um argumento similar ao subcaso 3.2. Portanto,  $G'$  não possui componentes de ordem par.

Considerando a existência de mais do que uma componente de ordem ímpar, observa-se que o valor de  $\gamma(G')$  será sempre menor do que  $\lfloor |V(G')|/2 \rfloor$ , implicando em  $\gamma(G) < \lfloor n/2 \rfloor$ , o que é uma contradição. Logo,  $G'$  possui apenas uma componente de ordem ímpar que, pelo Lema 3.7, pertence à coleção  $\mathcal{F} - C_4$ .

Considere agora  $T \neq \emptyset$  como o conjunto de vértices de  $G'$  com vizinhos em  $R$ . Se  $G' \in \mathcal{A} - C_4$ ,  $V(G') - T$  pode ser dominado por menos do que  $\gamma(G')$  vértices de  $G'$ , uma vez que  $G$  é conexo. Dessa forma, um conjunto- $\gamma$  de  $G$  contém menos do que  $\lfloor |V(G')|/2 \rfloor$  vértices de  $G'$ . Consequentemente,  $\gamma(G) < \lfloor n/2 \rfloor$ , contradizendo a hipótese deste teorema.

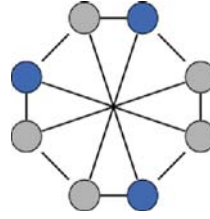
Por outro lado, se  $G' \in \mathcal{B}$ ,  $\gamma(G')$  vértices são necessários para dominar  $V(G') - T$ . Portanto,  $G' \in \mathcal{B}$  e, assim,  $G \in \mathcal{G}_6$ .  $\square$

**Teorema 3.16 (Baogen *et al.* [8], Randerath e Volkmann [101])** *Um grafo conexo  $G$  satisfaz  $\gamma(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$  se, e somente se,  $G \in \mathcal{G} = \bigcup_{i=1}^6 \mathcal{G}_i$ .*

*Prova.* Do Lema 3.9 ao Lema 3.15 provou-se que quando  $\gamma(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ ,  $G \in \mathcal{G} = \bigcup_{i=1}^6 \mathcal{G}_i$ . O inverso também é válido, uma vez que todo grafo  $G \in \mathcal{G}_i$  possui um conjunto- $\gamma$  de cardinalidade  $\lfloor n/2 \rfloor$ .  $\square$

Reed [103], em 1996, melhorou o limite superior de  $\gamma(G)$  para grafos conexos com grau mínimo três (Teorema 3.17). O grafo da Figura 3.22 atinge o limite proposto.

**Teorema 3.17 (Reed [103])** *Se  $G$  é um grafo conexo com  $\delta(G) \geq 3$ , então  $\gamma(G) \leq \frac{3n}{8}$ .*



**Figura 3.22:** Grafo 3-regular para o qual  $\gamma(G) = 3$ .

A Tabela 3.2 sumariza os limites inferiores conforme o grau mínimo do grafo. Quando necessária, a última coluna é utilizada para indicar algum tipo de observação em relação ao resultado.

**Tabela 3.2:** Limites superiores para  $\gamma(G)$  conforme  $\delta(G)$

$\delta(G)$	Limite superior para $\gamma(G)$	Observação
0	$n$	
1	$n/2$	
2	$2n/5$	$G$ é conexo e não pertence à família $\mathcal{B}$
3	$3n/8$	$G$ é conexo

Frente aos limites superiores de  $\gamma(G)$  para  $1 \leq \delta(G) \leq 3$ , Haynes, Hedetniemi e Slater [66] propuseram a seguinte conjectura:

**Conjectura 3.18 (Haynes, Hedetniemi e Slater [66])** Para qualquer grafo  $G$  com  $\delta(G) \geq k$ ,  $\gamma(G) \leq \frac{kn}{3k-1}$ .

Sohn e Xudong [116], em 2005, e Xing, Sun e Chen [125], em 2006, provaram a veracidade da conjectura anterior para  $\delta(G) = 4$  e  $\delta(G) = 5$ , respectivamente. Ambas as provas utilizaram o método de cobertura de vértices de caminhos disjuntos proposto por Reed [103]. Na situação em que  $\delta(G) = 6$ , Xing, Hattingh e Plummer [124], em 2008, provaram que  $\gamma(G) \leq 6n/17$  para grafos hamiltonianos. Entretanto, a questão continua aberta para grafos gerais. Já os trabalhos de Caro e Roditty [22, 23] garantem a veracidade para  $k \geq 7$ , através do Teorema 3.19. Xing, Hattingh e Plummer [124] corroboram esse resultado demonstrando que o limite de Caro e Roditty [22, 23] é menor do que o conjecturado por Haynes, Hedetniemi e Slater [66], para  $\delta(G) \geq k \geq 7$ .

**Teorema 3.19 (Caro e Roditty [22, 23])** Para qualquer grafo  $G$ ,

$$\gamma(G) \leq n \left[ 1 - \delta(G) \left( \frac{1}{\delta(G) + 1} \right)^{1 + \frac{1}{\delta(G)}} \right].$$

Em 2008, Frendrup *et al.* [53] derivou um novo resultado através da aplicação do Teorema de Reed para grafos de ordem  $n \geq 14$  com grau mínimo  $\delta(G) \geq 2$ . Para a descrição,, então:

**Teorema 3.20 (Freundrup *et al.* [53])** *Seja  $G$  é um grafo de ordem  $n \geq 14$  e  $\delta(G) \geq 2$ . Além disso, considere  $k_1(H)$  e  $k_2(H)$  o número de componentes de  $H$  que são isomorfas a um grafo da família  $\{P_2, P_3, P_4, C_5\}$  e  $\{P_0, P_1\}$ , respectivamente. Se  $W$  é o conjunto de vértices de grau maior que 2 em  $G$ , então*

$$\gamma(G) \leq \frac{3}{8}n + \frac{1}{8}k_1(G - W) + \frac{1}{4}k_2(G - W).$$

Levando-se em consideração os grafos conexos que não possuem  $K_{1,3}$  ou  $K_3 \circ K_1$  como subgrafos induzidos, o limite superior de Ore (Teorema 3.4) foi melhorado com o seguinte resultado de Cockayne, Ko e Shepherd [38]:

**Teorema 3.21 (Cockayne, Ko e Shepherd [38])** *Se  $G$  é um grafo conexo livre de  $K_{1,3}$  e de  $K_3 \circ K_1$ , então  $\gamma(G) \leq \lceil \frac{n}{3} \rceil$ .*

*Prova.* Seja  $G$  conexo, livre de  $K_{1,3}$  e de  $K_3 \circ K_1$ , possuindo  $n = 3k + r$  vértices, onde  $0 \leq r \leq 2$ . Se  $k = 0$ , os grafos que satisfazem a hipótese têm seu número de dominação limitado superiormente por  $\lceil n/3 \rceil$ . Para  $k \geq 1$ , observe que se o conjunto  $V$  possuir a partição  $\{U_1, \dots, U_k, R\}$ , onde  $|U_i| = 3$ ,  $|R| = r$ ,  $\Delta(G[U_i]) \geq 2$  e  $G[R] = K_r$ , então cada partição poderá fornecer um vértice ao conjunto dominante, a fim de atingir o limite proposto.

Para demonstrar que o conjunto  $V$  possui a partição descrita, considere o trabalho de Shepherd [110] que, em 1991, provou a existência de um caminho hamiltoniano entre qualquer par de vértices de todo grafo livre de  $K_{1,3}$  e de  $K_3 \circ K_1$ . Diante desse resultado, considere  $P = \langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle$  um caminho hamiltoniano arbitrário de  $G$ , onde  $n \geq 3$ . A partição pode ser realizada fazendo  $n \bmod 3 = r$ ,  $U_i = \{v_j \mid v_j \in P, 1 \leq j \leq n - r\}$  para  $i = \lfloor j/3 \rfloor$  e  $R = \{v_j \mid n - r \leq j \leq n\}$ .  $\square$

O teorema a seguir é um resultado de Weber [121] que, através de métodos probabilísticos, demonstrou a existência de tais limites inferior e superior para quase todos os grafos.

**Teorema 3.22 (Weber [121])** *Seja  $p = \lfloor (\log_2 n - 2 \log_2 \log_2 n + \log_2 \log_2 e) \rfloor$ . Para quase todos os grafos,*

$$p + 1 \leq \gamma(G) \leq p + 2.$$

Finalizando esta subseção, na próxima página está descrita uma tabela que sumariza os limites em termos da ordem estudados neste trabalho.

Tabela 3.3: Limites em termos da ordem estudados neste trabalho

Tipo de Grafo	Limite	Teorema	Autor(es)
Grafo $G$ sem vértices isolados	$\gamma(G) \leq \frac{n}{2}$	3.4	Ore [66]
Grafo $G$ com ordem par $n$ e sem vértices isolados	$\gamma(G) = \frac{n}{2}$	3.5	Payan e Xuong [99], Fink <i>et al.</i> [50]
Grafo $G$ é conexo com $\gamma(G) \geq 2$ e $G$ à família $\mathcal{A}$ da Figura 3.14	$\gamma(G) \leq \frac{2n}{5}$	3.6	Blank [14], McCuaig e Shepherd [91]
Grafo $G$ pertencente à classe $\mathcal{G} = \bigcup_{i=1}^6 \mathcal{G}_i$ descrita na Tabela 3.1	$\gamma(G) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$	3.16	Baogen <i>et al.</i> [8], Randerath e Volkman [101]
Grafo $G$ conexo com $\delta(G) \geq 3$	$\gamma(G) \leq \frac{3n}{8}$	3.17	Reed [103]
Grafo $G$ arbitrário	$\gamma(G) \leq n \left[ 1 - \delta(G) \left( \frac{1}{\delta(G)+1} \right)^{1+\frac{1}{\delta(G)}} \right]$	3.19	Caro e Roditty [22, 23]
Grafo $G$ de ordem $n \geq 14$ e $\delta(G) \geq 2$	$\gamma(G) \leq \frac{3}{8}n + \frac{1}{8}k_1(G-W) + \frac{1}{4}k_2(G-W)$ , onde $k_1(H)$ e $k_2(H)$ correspondem ao número de componentes de $H$ que são isomorfas a um grafo da família $\{P_2, P_3, P_4, C_5\}$ e $\{P_0, P_1\}$ , respectivamente, e $W$ é o conjunto de vértices de grau maior que 2 em $G$	3.20	Frendrup <i>et al.</i> [53]
Grafo $G$ conexo livre de $K_{1,3}$ e de $K_3 \circ K_1$	$\gamma(G) \leq \lceil \frac{n}{3} \rceil$	3.21	Cockayne, Ko e Shepherd [38]
Para quase todos grafos	$p+1 \leq \gamma(G) \leq p+2$ , onde $p = \lfloor (\log_2 n - 2 \log_2 \log_2 n + \log_2 \log_2 e) \rfloor$	3.22	Weber [121]



### 3.6.2 Limites em Termos da Ordem e Tamanho

Previamente a apresentação dos limites que envolvem a ordem e o tamanho do grafo, é necessário abordar um importante resultado de Vizing [118] que estabelece a quantidade de arestas  $m$  em um grafo que possui determinado valor para o número de dominação  $\gamma(G)$ .

**Teorema 3.23 (Vizing [118])** *Se um grafo  $G$  tem  $\gamma(G) \geq 2$ , então*

$$m \leq \left\lfloor \frac{1}{2}(n - \gamma(G))(n - \gamma(G) + 2) \right\rfloor.$$

*Prova.* Observe a suficiência em mostrar que  $m \leq \frac{1}{2}(n - \gamma(G))(n - \gamma(G) + 2)$ . Seja  $G$  um grafo com  $\gamma(G) \geq 2$ . Aplicando a indução sobre a ordem do grafo, se  $n = 2$ , então  $G = K_2$  ou  $G = \bar{K}_2$ , sendo que apenas  $G = \bar{K}_2$  possui  $\gamma(G) \geq 2$  e, desse modo, satisfaz a desigualdade. Na hipótese de indução, assume-se que todo grafo  $G$  com ordem menor do que  $n$  obedece à desigualdade. Considere então grafos  $G$  tal que  $\gamma(G) \geq 3$ , onde  $v$  é um vértice de grau máximo.

Conforme será visto no Teorema 3.29,  $|N(v)| = \Delta(G) \leq n - \gamma(G)$ , isto é,  $\Delta(G) = n - \gamma(G) - r$ , onde  $0 \leq r \leq n - \gamma(G)$ . Se  $S = V - N[v]$ , então  $|S| = n - (\Delta(G) + 1) = n - n + \gamma(G) + r - 1 = \gamma(G) + r - 1$ . Se o vértice  $u \in N(v)$ , então  $(S - N(u)) \cup \{u, v\}$  é um conjunto dominante de  $G$  e, portanto,  $\gamma(G) \leq |S - N(u)| + 2 = \gamma(G) + r - 1 - |S \cap N(u)| + 2$ , implicando em  $|N(u) \cap S| \leq r + 1$  para todo  $u \in N(v)$ . Consequentemente, o número de arestas  $m_1$  entre  $N(v)$  e  $S$  é no máximo  $\Delta(G)(r + 1)$ . Além disso, se  $D$  é um conjunto- $\gamma$  de  $G[S]$ , então  $D \cup \{v\}$  é um conjunto dominante de  $G$ . Logo,  $\gamma(G) \leq |D \cup \{v\}|$ , o que implica em  $\gamma(G[S]) \geq \gamma(G) - 1 \geq 2$ . Pela hipótese de indução, o número de arestas em  $G[S]$  é:

$$\begin{aligned} m_2 &\leq \left\lfloor \frac{1}{2}(|S| - \gamma(G[S]))(|S| - \gamma(G[S]) + 2) \right\rfloor \\ &\leq \left\lfloor \frac{1}{2}(\gamma(G) + r - 1 - (\gamma(G) - 1))(\gamma + r - 1 - (\gamma(G) - 1) + 2) \right\rfloor \\ m_2 &\leq \frac{1}{2}r(r + 2). \end{aligned} \tag{3-13}$$

Considere agora  $m_3 = |E(G[N[v]])|$ . Sabe-se que: *i)*  $v$  tem  $\Delta(G)$  arestas incidentes; *ii)* cada vértice  $u \in N(v)$  tem grau no máximo  $\Delta(G)$ ; e, *iii)* as arestas entre  $S$  e  $N(v)$  são, no máximo,  $r + 1$  para cada vértice  $u \in N(v)$ . Dessa forma,  $|E(G[N[v]])| = \Delta(G) + |E(G[N(v)])| = \Delta(G) + [\frac{1}{2}(\Delta(G) - 1) - (r + 1)] = \Delta(G) + \frac{1}{2}\Delta(G) - r - 2$ .

Portanto, fazendo  $m = m_1 + m_2 + m_3$  e  $r = n - \gamma(G) - \Delta(G)$ , tem-se a desigualdade 3-14.

$$\begin{aligned}
m &\leq \Delta(G)(r+1) + \frac{1}{2}r(r+2) + \Delta(G) + \frac{1}{2}(\Delta(G) - r - 2) \\
m &\leq \frac{1}{2}2\Delta(G)(n - \gamma(G) - \Delta(G) + 1) + \\
&\quad \frac{1}{2}(n - \gamma(G) - \Delta(G))(n - \gamma(G) - \Delta(G) + 2) + \\
&\quad \frac{1}{2}2\Delta(G) - n - \gamma(G) - \Delta(G) - 2 \\
m &\leq \frac{1}{2}(n - \gamma(G))(n - \gamma(G) + 2) - \frac{1}{2}\Delta(G)(n - \gamma(G) - \Delta(G)). \quad (3-14)
\end{aligned}$$

Consequentemente, tem-se a desigualdade 3-15, estabelecendo a veracidade para grafos com  $\gamma(G) \geq 3$ .

$$m \leq \frac{1}{2}(n - \gamma(G))(n - \gamma(G) + 2). \quad (3-15)$$

Finalizando a prova, observe que o resultado é válido para grafos com  $\gamma(G) \geq 2$ , uma vez que adicionando um vértice isolado ao grafo  $G$  obtém-se  $G'$  de ordem  $n + 1$ , onde  $\gamma(G') \geq 3$ ,  $\Delta(G') = \Delta(G)$ , e  $|E(G')| = |E(G)|$ .  $\square$

Vizing [118] construiu ainda a família de grafos  $G_{n,\gamma}$  de ordem  $n$  e número de dominação  $\gamma \geq 2$ , cuja quantidade de arestas  $m$  satisfaz o resultado do Teorema 3.23. Se  $\gamma = 2$ , então  $G_{n,2}$  é o grafo obtido pela remoção das arestas que compõem uma *cobertura mínima de arestas* (ou seja, o menor conjunto de arestas incidentes a todos os vértices de  $G$ ) de um grafo completo  $K_t$ , unindo todos os seus vértices a cada vértice de um  $\bar{K}_2$ . Observe que  $t = n - 2$  e o grafo resultante possui um conjunto dominante mínimo de cardinalidade 2. Além disso, seu tamanho é dado pela Equação 3-16.

$$m = \frac{1}{2}t(t-1) - \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil + 2t = \frac{1}{2}t(t-1+4) - \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil. \quad (3-16)$$

Fazendo  $t = n - 2$ :

$$\begin{aligned}
m &= \frac{1}{2}(n-2)(n+1) - \left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil \\
m &= \frac{n(n-1)}{2} - \left\lceil \frac{n-2}{2} \right\rceil - \frac{2}{2}. \quad (3-17)
\end{aligned}$$

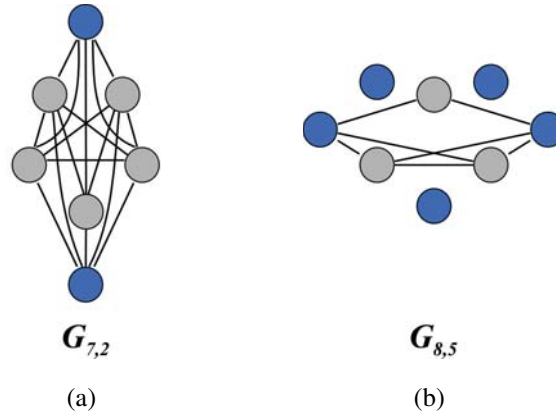
Como  $n(n-1)/2$  é inteiro, então  $n(n-1)/2 = \lfloor n(n-1)/2 \rfloor$ . Além do mais,  $\lceil (n-2)/2 \rceil = \lfloor (n-3)/2 + 1 \rfloor$ . Assim:

$$\begin{aligned}
m &= \left\lfloor \frac{n(n-1)}{2} \right\rfloor - \left( \left\lfloor \frac{n-3}{2} \right\rfloor + 1 \right) - \frac{2}{2} \\
&= \left\lfloor \frac{n(n-1)}{2} - \frac{n}{2} \right\rfloor \\
m &= \left\lfloor \frac{n(n-2)}{2} \right\rfloor.
\end{aligned} \tag{3-18}$$

Se  $\gamma(G) > 2$ , então seja  $G_{n,\gamma}$  o grafo obtido adicionando um conjunto de  $\gamma - 2$  vértices isolados a  $G_{n-\gamma+2,2}$ . Consequentemente, o número de dominação deste grafo será igual a  $\gamma$ . No mais,  $|E(G_{n,\gamma})| = |E(G_{n-\gamma+2,2})|$ . Logo, a ordem de  $G_{n,\gamma}$  pode ser obtida usando a Equação 3-18. Dessa forma:

$$\begin{aligned}
m &= \left\lfloor \frac{n(n-2)}{2} \right\rfloor \\
&= \left\lfloor \frac{(n-\gamma+2)(n-\gamma+2-2)}{2} \right\rfloor \\
m &= \left\lfloor \frac{(n-\gamma+2)(n-\gamma)}{2} \right\rfloor.
\end{aligned} \tag{3-19}$$

De acordo com Haynes, Hedetniemi e Slater [66], a família de grafos  $G_{n,\gamma}$  possui grau máximo  $\Delta(G_{n,\gamma}) = n - \gamma$  e atinge o limite superior do Teorema 3.29. Os grafos ilustrados a seguir pertencem à família  $G_{n,\gamma}$ .



**Figura 3.23:** Exemplos de grafos da família  $G_{n,\gamma}$  de Vizing.

Ao considerar grafos com  $\Delta(G) < n - \gamma$ , Sanchis [107] melhorou o resultado do Teorema 3.23.

**Teorema 3.24 (Sanchis [107])** *Se um grafo  $G$  tem  $\gamma(G) \geq 2$  e grau máximo  $\Delta(G)$  satisfazendo  $\Delta(G) < n - \gamma$ , então*

$$m \leq \left\lfloor \frac{1}{2}(n - \gamma(G))(n - \gamma(G) + 1) \right\rfloor$$

Como consequência do Teorema 3.23, tem-se um limite superior para o número de dominação de um grafo em termos de sua ordem e tamanho. Um limite inferior envolvendo os mesmos parâmetros foi proposto por Berge [11] como exercício em seu livro *Graphs and Hypergraphs*. Tais limites estão apresentados no Teorema 3.24.

**Teorema 3.25 (Berge [11], Vizing [118])** *Para qualquer grafo  $G$ ,*

$$n - m \leq \gamma(G) \leq n + 1 - \sqrt{1 + 2m}.$$

*Além disso,  $\gamma(G) = n - m$  se, e somente se, cada componente de  $G$  for uma estrela.*

*Prova.* Do Teorema 3.23,  $2m \leq (n - \gamma(G))^2 + 2(n - \gamma(G))$ . Para isolar  $\gamma(G)$  nessa desigualdade, primeiramente será aplicado o *método de completar o quadrado*, adicionando-se o quadrado da metade do coeficiente do termo  $2(n - \gamma(G))$  a ambos os lados. Assim:

$$\begin{aligned} 2m + \frac{2^2}{2} &\leq (n - \gamma(G))^2 + 2(n - \gamma(G)) + \frac{2^2}{2} \\ 2m + 1 &\leq (n - \gamma(G))^2 + 2(n - \gamma(G)) + 1. \end{aligned} \quad (3-20)$$

Em seguida, ao reescrever o termo da direita como um *quadrado da soma*, obtém-se:

$$2m + 1 \leq (n - \gamma(G) + 1)^2. \quad (3-21)$$

Consequentemente, tem-se a Equação 3-22, definindo um limite superior para  $\gamma(G)$ .

$$\begin{aligned} \sqrt{2m + 1} &\leq n - \gamma(G) + 1 \\ \sqrt{2m + 1} - n - 1 &\leq -\gamma(G) \\ \gamma(G) &\leq n + 1 - \sqrt{2m + 1}. \end{aligned} \quad (3-22)$$

No que se refere ao limite inferior, seja  $D$  um conjunto dominante mínimo de  $G$ . Dessa forma, existem no mínimo  $n - |D|$  arestas em  $G$ . Consequentemente,  $\gamma(G) \geq n - m$ .

Agora, para demonstrar que esse limite é atingido por grafos cujas componentes são isomorfas a uma estrela, lembre-se do fato de que para todo grafo  $G$ ,  $\gamma(G) \geq 1$ . Diante disso, o limite  $\gamma(G) \geq n - m$  permite a inferência de que  $n - m > 0$ . Considere, então,  $m < n$ . Nessa situação, observe que  $G$  deve possuir, no mínimo,  $n - m$  componentes, conforme o Teorema 2.1. Assim, se  $\gamma(G) = n - m$ , então cada componente só poderá fornecer apenas 1 vértice ao conjunto dominante mínimo de  $G$ , sendo que tal fato só pode ocorrer se cada componente do grafo for uma estrela.  $\square$

Em 1996, Sanchis [108] obteve limites superiores para grafos conexos com  $\delta(G) \geq 3$  e  $m \geq n \geq 3$ :

**Teorema 3.26 (Sanchis [108])** *Se  $G$  é um grafo conexo tal que  $\delta(G) \geq 2$  e  $m \geq n \geq 3$ , então  $\gamma(G) \leq (m + 2)/3$ . Além do mais, a igualdade ocorrerá se, e somente se,  $G$  for um ciclo  $C_n$ , onde  $n \equiv 1 \pmod{3}$ .*

*Prova.* Primeiramente, repare que se  $G$  for um ciclo  $C_n$ , onde  $n \equiv 1 \pmod{3}$ , então  $\gamma(G) = (m + 2)/3$ . O argumento é o seguinte: a cada três vértices, um deverá pertencer ao conjunto dominante. Como  $n \equiv 1 \pmod{3}$ , sempre restará um vértice  $v$  não-dominado cujos vizinhos já estão dominados, implicando em  $\gamma(C_n - \{v\}) = (n - 1)/3$ . Dessa forma,  $v$  deve estar presente no conjunto dominante de  $C_n$ , fazendo com que  $\gamma(C_n) = |\{v\}| + (n - 1)/3 = (n + 2)/3 = (m + 2)/3$ .

Agora, será mostrado que todo grafo conexo  $G$  tal que  $\delta(G) \geq 2$ ,  $m \geq n \geq 3$  e  $G \neq C_n$  para  $n \not\equiv 1 \pmod{3}$  possui um conjunto dominante de cardinalidade menor do que  $(m + 2)/3$ . Para isto, será aplicada a indução sobre  $m$ : se  $m = 3$ ,  $G = C_3$  e  $\gamma(C_3) = 1 < 5/3$ . Na hipótese de indução, assume-se que para qualquer grafo  $G$  com  $m - 1$  arestas,  $\gamma(G) \leq ((m - 1) + 1)/3$ .

- *Caso 1:*  $G$  é um ciclo de  $n$  vértices, onde  $n \equiv 0 \pmod{3}$  ou  $n \equiv 2 \pmod{3}$ .

Seja  $G$  é um ciclo  $C_n$  tal que  $n \not\equiv 1 \pmod{3}$ . Se  $n \equiv 0 \pmod{3}$ , então  $\gamma(G) = n/3$ . Por outro lado, se  $n \equiv 2 \pmod{3}$ , então  $\gamma(G) = (n + 1)/3$ . Consequentemente,  $n \not\equiv 1 \pmod{3}$ ,  $\gamma(G) \leq (n + 1)/3 = (m + 1)/3$ .

Se  $G$  não atende às condições do primeiro caso, considere  $W_1 = \{v \in V \mid d(v) \geq 3\}$  e  $W_2 = V - W_1$ .

- *Caso 2:* Suponha que exista uma aresta  $e$  unindo dois vértices de  $W_1$ .

– *Subcaso 2.1:  $G - e$  é conexo.*

Se  $G - e$  é um ciclo e  $n \equiv 1 \pmod{3}$ , então  $\gamma(G) \leq \gamma(G - e) = ((m - 1) + 2)/3 = (m + 1)/3$ . Caso contrário, usando a hipótese de indução,  $\gamma(G) \leq \gamma(G - e) \leq ((m - 1) + 1)/3 = m/3$ .

– *Subcaso 2.2:  $G - e$  é desconexo, de modo que  $G_1$  e  $G_2$  sejam as duas componentes de  $G - e$ .*

\* *Subcaso 2.2.1: Nem  $G_1$  e nem  $G_2$  são ciclos de  $n_1$  e  $n_2$  vértices, respectivamente, tal que  $n_1 \equiv n_2 \pmod{3} \equiv 1 \pmod{3}$ .*

Sabe-se que  $\gamma(G) \leq \gamma(G_1) + \gamma(G_2)$ . Usando a hipótese de indução,

$$\gamma(G_1) + \gamma(G_2) \leq \frac{m_1 + 1}{3} + \frac{m_2 + 1}{3} = \frac{(m_1 + m_2) + 2}{3} = \frac{(m - 1) + 2}{3}.$$

\* *Subcaso 2.2.2:  $G_1$  e  $G_2$  são ciclos de  $n_1$  e  $n_2$  vértices, respectivamente, tal que  $n_1 \equiv n_2 \pmod{3} \equiv 1 \pmod{3}$ .*

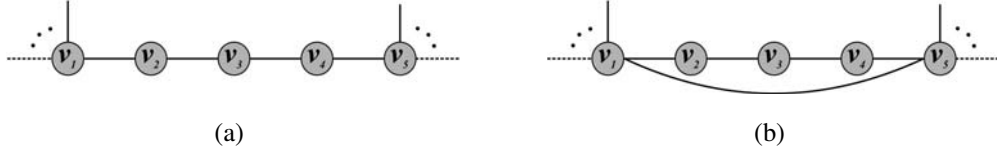
Considere  $e = (v, w)$ . Observe que é possível encontrar um conjunto dominante  $D_1$  para  $G_1$  que inclua  $v$  e possua tamanho  $(n_1 + 2)/3$ . Além disso,  $\gamma(G[G_2 - \{w\}]) = (n_2 - 1)/2$ , sendo  $D_2$  um conjunto dominante mínimo para  $G[G_2 - \{w\}]$ . Fazendo  $D = D_1 \cup D_2$ , todos os vértices de  $G$  estarão dominados, sendo que  $\gamma(G) = ((n_1 + n_2) + 2 - 1)/3 = ((m_1 + m_2) + 1)/3 = ((m - 1) + 1)/3 = m/3$ .

Note que uma situação não foi tratada dentro subcaso 2.2: quando uma das componentes é isomorfa a  $C_n$  e a outra não, onde  $n \equiv 1 \pmod{3}$ . Tal condição será contemplada no decorrer da prova. Agora, se o grafo  $G$  não se enquadra nos casos já descritos, suponha que exista um  $P_4$  em  $G$  dado pela sequência  $\langle v_1, \dots, v_5 \rangle$  de vértices distintos, sendo que  $v_2, v_3$  e  $v_4 \in W_2$ .

- *Caso 3:  $v_1 \approx v_5$  ou, se  $v_1 \sim v_5$ , então  $v_1$  e  $v_5 \in W_1$ .*

As duas situações possíveis estão ilustradas na Figura 3.24. Construa  $G'$  da seguinte maneira: se necessário, adicione a aresta  $(v_1, v_5)$  ao grafo  $G - \{v_2, v_3, v_4\}$ ,

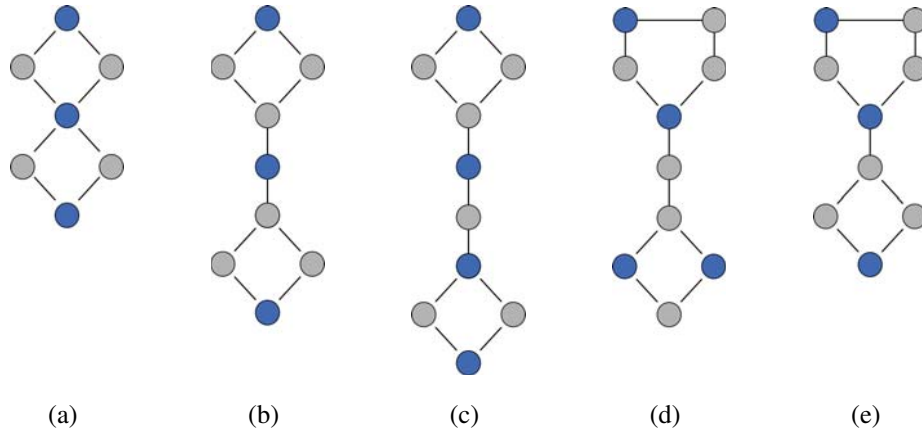
obtendo-se  $\gamma(G') \leq (m-2)/3$  pela hipótese de indução e considerando  $D'$  um conjunto dominante mínimo para  $G'$ . Se ambos  $v_1$  e  $v_5$  pertencem ou não a  $D'$ , seja  $D = D' \cup \{v_3\}$ . Se  $v_1 \in D'$  e  $v_5 \notin D'$ , seja  $D = D' \cup \{v_4\}$ . Se  $v_5 \in D'$  e  $v_1 \notin D'$ , seja  $D = D' \cup \{v_2\}$ . Portanto,  $D$  é um conjunto dominante de  $G$  que satisfaz o limite proposto.



**Figura 3.24:** (a)  $v_1 \sim v_5$  e (b) Quando  $v_1 \sim v_5$ ,  $v_1$  e  $v_5 \in W_1$ .

A não ocorrência dos casos anteriores implica que: *i*) vértices distintos de  $W_1$  podem estar separados por, no máximo, 2 vértices de  $W_2$ ; *ii*) todo vértice  $v \in W_2$  será adjacente a um vértice de  $w \in W_1$ , a não ser que  $v$  esteja em um  $C_4$  ou  $C_5$  que possua exatamente um vértice em  $W_1$ ; e, *iii*) não existem vértices  $v, w \in W_1$  para os quais  $v \sim w$ , salvo a situação em que  $e = (v, w)$  conecta duas componentes,  $G_1$  e  $G_2$ , sendo uma delas isomorfa a um  $C_4$ , e a outra não isomorfa à  $C_n$ , onde  $n \not\equiv 1 \pmod{3}$ . Assim, se  $G$  não atende às condições dos casos 1, 2 e 3, considere o caso 4:

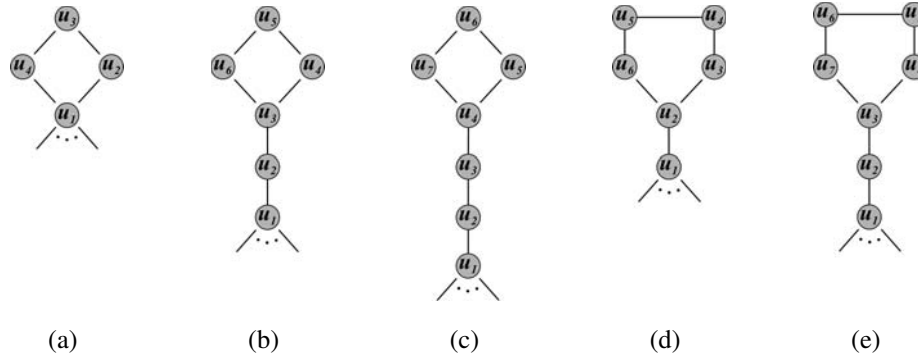
- *Caso 4:* Se  $G$  é um dos grafos ilustrados na Figura 3.25, então o resultado é assegurado por observação.



**Figura 3.25:** Grafos do caso 4.

Uma vez que  $G$  não se enquadre em nenhum dos casos anteriores, considere o próximo:

- *Caso 5:* Suponha que exista um vértice  $u_1 \in W_1$  anexado a uma das estruturas ilustradas na Figura 3.26, e considere  $U = \{u_k \mid 2 \leq k \leq 7\}$ ,  $G' = G - U$  e  $m_U$  a quantidade de arestas que incidem sobre algum vértice de  $U$ .

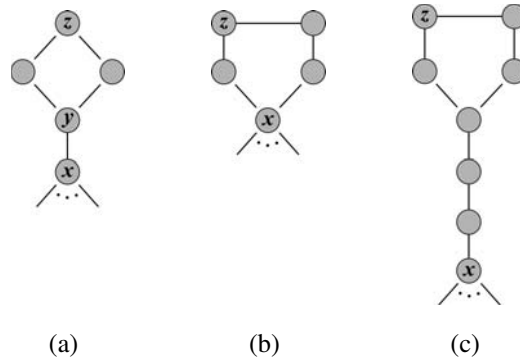


**Figura 3.26:** Estruturas do caso 5.

Aplicando-se a hipótese de indução ao grafo  $G'$  e observando que  $G[U]$  pode ser dominado por  $\lfloor m_U/3 \rfloor$  vértices, o limite é assegurado para  $G$ :

$$\begin{aligned}
 \gamma(G) &\leq \gamma(G') + \gamma(G[U]) \\
 &\leq \frac{(m - (m_U)) + 1}{3} + \left\lfloor \frac{m_U}{3} \right\rfloor < \frac{(m - m_U + 1)}{3} + \frac{m_U + 1}{3} \\
 \gamma(G) &< \frac{m + 2}{3}.
 \end{aligned}$$

Por fim, se nenhuma das condições dos casos de 1 a 5 forem satisfeitas, caso exista um vértice de  $W_2$  sem vizinhos em  $W_1$  ou dois vértices de  $W_1$  adjacentes, então  $G$  deve possuir uma das estruturas da Figura 3.27. Dessa ilustração, considere  $G'$  um subgrafo gerador de  $V(G) - S$ , onde  $S$  é o subconjunto de vértices que formam a estrutura, excluindo o vértice  $x$ .



**Figura 3.27:** Estruturas que não ocorrem nos casos de 1 a 5.

Primeiramente, observe  $G'$  não pode ser um  $C_4$ , pois tal situação foi contemplada nos casos anteriores para todas as três estruturas. Considere então os seguintes conjuntos:

- $D_1$ : consiste de todos os vértices de  $W_1$ , exceto por  $y$  na Figura 3.27(a); e,



- $D_2 = \{z\}$ .

Seja  $D = D_1 \cup D_2$ . Se  $v \in D_1$ , então  $v$  é, no mínimo, adjacente a três vértices de  $D_2$ , de tal modo que nenhum de seus vizinhos será adjacente a outro vértice de  $D_1$ . Dessa forma, para cada vértice  $v \in D_1$  são contabilizadas no mínimo 3 arestas. Observe também que o conjunto  $D_2$  contabilizará no mínimo três arestas que não foram incluídas pelos vértices de  $D_1$ . Portanto, o tamanho de  $D$  é limitado superiormente por  $q/3$ .

Para finalizar a prova, note que  $\gamma(G) = (m+2)/3$  foi obtido apenas para o grafo  $C_n$ , com  $n \equiv 1 \pmod{3}$ .

□

Fisher, Fraughnaugh e Seager [51] forneceram um limite de dominação para grafos com  $i$  vértices isolados e grau máximo igual a 3:

**Teorema 3.27 (Fisher, Fraughnaugh e Seager [51])** *Seja  $G$  um grafo com  $i$  vértices isolados tal que  $\Delta(G) \leq 3$ .*

$$\gamma(G) \leq \frac{1}{4}(3n - m + i)$$

Sanchis [108] ainda estimou o número de arestas de um grafo  $G$  de grau mínimo 2 e número de dominação  $\gamma(G)$ :

**Teorema 3.28 (Sanchis [108])** *Seja  $G$  é um grafo conexo tal que  $\delta(G) \geq 2$ .*

- i) Se  $\gamma(G) < \frac{n}{3}$ , então  $m \geq \left\lceil \frac{3(n-\gamma(G))}{2} \right\rceil$ ;
- ii) Se  $\frac{n}{3} \leq \gamma(G) \leq \frac{(n+2)}{3}$ , então  $m \geq n$ ; e,
- iii) Se  $\gamma(G) > \frac{(n+2)}{3}$ , então  $m \geq 3\gamma(G) - 1$ .

Concluindo esta subseção, a tabela a seguir sumariza os limites em termos da ordem e tamanho estudados neste trabalho.

**Tabela 3.4:** Limites em termos da ordem e tamanho estudados neste trabalho

Tipo de Grafo	Limite	Teorema	Autor(es)
Grafo $G$ arbitrário	$n - m \leq \gamma(G) \leq n + 1 - \sqrt{1 + 2m}$	3.25	Berge [11], Vizing [118]
Grafo $G$ conexo com $\delta(G) \geq 2$ e $m \geq n \geq 3$	$\gamma(G) \leq (m+2)/3$	3.26	Sanchis [108]
Grafo $G$ com $i$ vértices isolados com $\Delta(G) \leq 3$	$\gamma(G) \leq \frac{1}{4}(3n - m + i)$	3.27	Fisher, Fraughnaugh e Seager [51]

### 3.6.3 Limites em Termos da Ordem e Grau

Nesta seção serão abordados os limites sobre o número de dominação que, além de envolverem a ordem, consideram também o grau máximo ou mínimo do grafo. O primeiro teorema expõe um limite inferior, determinado por Walikar, Acharya e Sampathkumar [119], e um limite superior, obtido por Berge [11].

**Teorema 3.29 (Walikar, Acharya e Sampathkumar [119], Berge [11])** *Para qualquer grafo  $G$ ,*

$$\left\lceil \frac{n}{1 + \Delta(G)} \right\rceil \leq \gamma(G) \leq n - \Delta(G).$$

*Prova.* Seja  $D$  um conjunto- $\gamma$  de  $G$ . Para o limite inferior, considere o fato de que cada vértice pode, no máximo, dominar a si mesmo e outros  $\Delta(G)$  vértices. Logo, no mínimo  $\lceil n/(1 + \Delta(G)) \rceil$  vértices são necessários no conjunto dominante para que todo o grafo esteja dominado. Já o limite superior considera a existência do vértice  $v$  que possui o grau máximo de  $G$ . Como  $v$  domina  $N[v]$ , os vértices de  $V - N[v]$  devem dominar eles mesmos. Isso significa que o subgrafo induzido  $G[V - N[v]]$  possui seu número de dominação limitado por  $n - \Delta(G) - 1$  vértices. Consequentemente,  $\gamma(G) \leq n - \Delta(G)$ .  $\square$

Observe que  $\gamma(G) = n/(1 + \Delta(G))$  se, e somente se,  $G$  possui um conjunto dominante  $D$  tal que  $N[u] \cap N[v] = \emptyset$  para todo  $u, v \in D$  e  $|N(v)| = \Delta(G)$  para todo  $v \in D$ . Como exemplo de grafos que atingem tais limites, considere a coleção formada por  $t$  estrelas  $S_\Delta$  e ciclos  $C_{3t}$ , onde  $1 \leq t \leq n$ . Nesses casos,  $\gamma(G) = t = n/(1 + \Delta(G))$ . No que diz respeito ao limite superior, um exemplo de grafo que o atinge é a corona  $K_p \circ K_1$ , onde  $n = 2p$ ,  $\Delta = \gamma = p$ . Domke, Dunbar e Markus [44] caracterizaram as árvores que alcançam tal limite, conforme o Teorema 3.30.

**Teorema 3.30 (Domke, Dunbar e Markus [44])** *Seja  $H$  o grafo formado pela subdivisão de no máximo  $t - 1$  arestas de uma estrela  $S_t$ , onde  $t \geq 0$ . Para qualquer árvore  $A$ ,  $\gamma(A) = n - \Delta(A)$  se, e somente se,  $A$  é isomorfa a  $H$ .*

*Prova.* Considere  $A$  uma árvore tal que  $\gamma(A) = n - \Delta(A)$  e seja  $v$  um vértice de grau máximo de  $A$ . Se  $A - N[v] = \emptyset$ , então  $A$  é uma estrela  $S_t$  com  $t \geq 0$  e, portanto, isomorfa a  $H$ . Assuma então que existe no mínimo um vértice em  $A - N[v]$  e considere  $I$  um conjunto independente maximal do subgrafo induzido  $G[A - N[v]]$ . Logo, todos os vértices de  $G[A - N[v]]$  não pertencentes a  $I$  possuem no mínimo um vizinho em tal conjunto, fazendo com que  $I \cup \{v\}$  seja um conjunto dominante independente para  $A$  de modo que  $\gamma(G) \leq |I \cup \{v\}|$ , conforme Berge [11]. Nesse contexto,  $n = \gamma(A) + \Delta(A) \leq |I| + 1 + \Delta(A) \leq n$ . Observe agora que  $|I| + 1 + \Delta(A) = n$  se, e somente se,  $|I| = n - \Delta(A) - 1$ , implicando em  $V - N[v]$  como um conjunto dominante independente. De fato, essa última afirmação pode

ser justificada da seguinte maneira: suponha que exista uma aresta em  $G[A - N[v]]$ . Assim,  $|V - N[v]| - 1 = n - (\Delta(A) + 1) - 1$  corresponde à cardinalidade máxima de qualquer conjunto dominante independente  $I'$  de  $G[A - N[v]]$ . Consequentemente, o conjunto dominante independente  $D' = I' \cup \{v\}$  terá cardinalidade  $n - \Delta(A) - 1$ , o que é uma contradição, pois  $\gamma(A) = n - \Delta(A)$  por hipótese, e o tamanho de um conjunto dominante mínimo nunca será maior do que tamanho de um conjunto dominante independente. Agora, considere a existência de um vértice  $w \in N(v)$  que tenha  $k$  vizinhos  $w_1, \dots, w_k$  em  $V - N[v]$ , onde  $k > 1$ . Logo,  $w_1, \dots, w_k \subseteq I$  e, consequentemente, pertencem a algum conjunto dominante mínimo  $D$  de  $A$ . Entretanto,  $D - \{w_1, \dots, w_k\} \cup \{w\}$  é um conjunto dominante mínimo de cardinalidade menor do que  $|D|$ , o que é contradição. Portanto, todos os vértices de  $N(v)$  possuem grau 0 ou 1 em  $V - N[v]$ . Além do mais,  $N(v)$  deve possuir no mínimo um vértice sem vizinhos em  $V - N[v]$ , pois, em caso contrário,  $N(v)$  seria um conjunto dominante mínimo de cardinalidade  $\Delta(A)$ , implicando em  $\gamma(A) + \Delta(A) = 2\Delta(A)$ , isto é, um número par. Como  $n = |\{v\}| + 2\Delta(A)$  é ímpar, tem-se uma contradição. Logo,  $N(v)$  tem no mínimo um vértice de grau 0 em  $V - N[v]$ . Nessas condições, a árvore  $A$  é isomorfa ao grafo  $H$ .

Resta mostrar que se  $A$  é isomorfa a  $H$ , então  $\gamma(A) + \Delta(A) = n$ . Para isso, considere a hipótese de modo que a raiz de  $A$  seja seu vértice  $v$  de grau máximo e suponha que  $I = V - N[v]$ . Observe então que  $D = \{v\} \cup I$  é um conjunto dominante mínimo de  $A$  e  $\bar{D} = N(v)$ . Consequentemente,  $|D| + |\bar{D}| = \gamma(A) + \Delta(A) = n$ , finalizando a prova.  $\square$

Slater [114], em 1995, propôs o limite inferior a seguir:

**Teorema 3.31 (Slater [114])** *Se  $G$  tem a sequência de graus  $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ , com  $d_i \geq d_{i+1}$ , então  $\gamma(G) \geq \min\{k : k + (d_1 + d_2 + \dots + d_k) \geq n\}$ .*

*Prova.* Suponha que a sequência  $(d_1, d_2, \dots, d_n)$  corresponde à sequência de graus dos vértices  $v_1, v_2, \dots, v_n$  para um grafo  $G$  de ordem  $n$ , com  $d_i \geq d_{i+1}$ . Encontrando o menor valor de  $k$  para o qual  $k + d_1 + d_2 + \dots + d_k \geq n$ , tem-se um limite inferior para  $\gamma(G)$ . Para a verificação, considere  $D' = \{v_i \mid 1 \leq i \leq k\}$  onde  $k$  é o menor valor para o qual  $k + d_1 + d_2 + \dots + d_k \geq n$ . Observe então que qualquer outro conjunto  $D''$  a ser formado pelos vértices do grafo de modo que  $|D''| + \sum_{v \in D''} d(v)$  seja maior ou igual a  $n$  não terá cardinalidade menor do que  $k$ , uma vez que a sequência  $(d_1, d_2, \dots, d_n)$  é decrescente. Dessa forma, se  $D'$  não é um conjunto- $\gamma$  de  $G$ , qualquer outro conjunto- $\gamma$  possuirá cardinalidade maior ou igual a  $k$ . Portanto,  $\gamma(G) \geq \min\{k : k + (d_1 + d_2 + \dots + d_k) \geq n\}$ .  $\square$

Flach e Volkmann [52] forneceram um limite superior em termos dos graus mínimo e máximo, além da ordem do grafo.

**Teorema 3.32 (Flach e Volkmann [52])** *Para qualquer grafo  $G$ ,*

$$\gamma(G) \leq \left( \frac{n+1 - (\delta(G)-1) \frac{\Delta(G)}{\delta(G)}}{2} \right).$$

Como consequência, tem-se o Corolário 3.33 de Payan [98] que considera grafos para os quais  $\delta(G) \geq 1$ . Marcu [90] ainda melhorou tal limite para grafos com  $\gamma(G) \geq 3$ , conforme o Teorema 3.34.

**Corolário 3.33 (Payan [98])** *Se  $G$  não possui vértices isolados, então*

$$\gamma(G) \leq \frac{n+2 - \delta(G)}{2}.$$

**Teorema 3.34 (Marcu [90])** *Se  $G$  não possui vértices isolados, então*

$$\gamma(G) \leq \frac{n+1 - \delta(G)}{2}.$$

O próximo limite foi determinado por Alon e Spencer [3], Arnaudov [4] e Payan [98].

**Teorema 3.35 (Alon e Spencer [3], Arnaudov [4] e Payan [98])** *Se  $G$  não possui vértices isolados, então*

$$\gamma(G) \leq \frac{n(1 + \ln(\delta(G) + 1))}{\delta(G) + 1}.$$

Arnaudov [4] e Payan [98] forneceram ainda o seguinte limite:

**Teorema 3.36 (Arnaudov [4] e Payan [98])** *Se  $G$  não possui vértices isolados, então*

$$\gamma(G) \leq \frac{n}{\delta(G)+1} \sum_{j=1}^{\delta(G)+1} \frac{1}{j}.$$

Por fim, na próxima página encontra-se uma tabela que sumariza os limites em termos da ordem e grau estudados neste trabalho.

**Tabela 3.5:** Limites em termos da ordem e grau estudados neste trabalho

Tipo de Grafo	Limite	Teorema	Autor(es)
Grafo $G$ arbitrário	$\left\lceil \frac{n}{1+\Delta(G)} \right\rceil \leq \gamma(G) \leq n - \Delta(G)$	3.29	Walikar, Acharya e Sampathkumar [119], Berge [11]
Árvore $A$ isomorfa a um subgrafo $H$ , onde $H$ é o grafo formado pela subdivisão de no máximo $t - 1$ arestas de uma estrela $S_t$ , onde $t \geq 0$	$\gamma(A) = n - \Delta(A)$	3.30	Domke, Dunbar e Markus [44]
Grafo $G$ arbitrário	$\gamma(G) \geq \min\{k : k + (d_1 + d_2 + \dots + d_k) \geq n\}$ , onde $(d_1, d_2, \dots, d_n)$ é a sequência de graus dos vértices de $G$ com $d_i \geq d_{i+1}$	3.31	Slater [114]
Grafo $G$ arbitrário	$\gamma(G) \leq \left( \frac{n+1 - (\delta(G)-1) \frac{\Delta(G)}{\delta(G)}}{2} \right)$	3.32	Flach e Volkmann [52]
Grafo $G$ sem vértices isolados	$\gamma(G) \leq \frac{n(1+\ln(\delta(G)+1))}{\delta(G)+1}$	3.35	Alon e Spencer [3], Arnaudov [4] e Payan [98]
Grafo $G$ sem vértices isolados	$\gamma(G) \leq \frac{n}{\delta(G)+1} \sum_{j=1}^{\delta(G)+1} \frac{1}{j}$	3.36	Arnaudov [4] e Payan [98]

### 3.7 Aspectos Algorítmicos e de Complexidade

Uma das principais abordagens utilizadas na investigação de um problema  $\mathcal{NP}$ -Completo em grafos consiste em restringir o estudo a alguma classe em especial, reavaliando a complexidade algorítmica do problema. O objetivo geral é determinar características estruturais que permitam o desenvolvimento de algoritmos de tempo polinomial para os grafos pertencentes ao problema e à classe em questão [84].

No que se refere à dominação em grafos, já é bem difundido e aceito o fato de que determinar o número de dominação de um grafo arbitrário  $G$  é  $\mathcal{NP}$ -Completo [54]. De acordo com Haynes, Hedetniemi e Slater [66], esse resultado motivou o estudo extensivo desse problema e suas variações para diversas classes de grafos, conforme será visto adiante. O tradicional problema de decisão envolvendo o conceito de dominação em grafos pode ser enunciado da seguinte forma:

---

**PROBLEMA DE DOMINAÇÃO**

---

**Instância:** Um grafo  $G = (V, E)$  e um inteiro positivo  $k$

**Questão:**  $G$  possui um conjunto dominante de cardinalidade menor ou igual a  $k$  ?

---

De acordo com Garey e Johnson [54], o problema permanece  $\mathcal{NP}$ -Completo para grafos planares que possuam grau máximo 3 ou sejam regulares de grau 4. Esse tipo de resultado também foi estabelecido na situação em que  $G$  é um grafo bipartido [42], de caminho não-dirigido [17], um círculo [79], de comparabilidade [42], cordal [17], livre de  $K_{1,3}$  [67] ou split [12, 26, 39]<sup>4</sup>.

Por outro lado, vale ressaltar que, antes da obtenção de resultados referentes à  $\mathcal{NP}$ -completude desse problema, Cockayne, Goodman e Hedetniemi [36] apresentaram um algoritmo linear que determina o número de dominação de uma árvore  $A$ . Para a descrição desse algoritmo, considere uma árvore  $A = (V, E)$  de tal modo que  $V = C \cup L \cup R$ , onde  $C$ ,  $L$  e  $R$  representam os vértices rotulados como *cercados*, *livres* e *requisitados*, respectivamente. Além disso, o algoritmo também utiliza um importante fato:

**Proposição 3.37** *Para qualquer árvore  $A = (V, E)$ , o conjunto de vértices  $V$  possui uma sequência  $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$  denominada ordenação de árvore tal que  $v_i$  é uma folha de  $G_i = G[\{v_i, v_{i+1}, \dots, v_n\}]$  para  $1 \leq i \leq n - 1$ .*

Conforme mencionado por Chang [25], encontrar uma ordenação de árvore para  $A$  pode ser feito em tempo linear. Portanto, dada uma sequência de vértices que

---

<sup>4</sup>Conforme mencionado no Capítulo 2, a definição de tais classes de grafos podem ser encontrada no livro de Brandstädt, Le e Spinrad [18].

representa uma ordenação de árvore, a idéia básica consiste em iterativamente analisar uma folha  $v_i$  adjacente a algum vértice  $u \in \{v_{i+1}, \dots, v_n\}$ . Para dominar  $v_i$ , qualquer conjunto dominante mínimo de  $A$  deve conter  $u$  ou  $v_i$ . Entretanto, desde que  $N[v_i] \subseteq N[u]$ , é mais interessante incluir  $u$  em  $D$ . Dessa forma,  $u$  será rotulado como “requisitado” e a folha  $v_i$  será removida da árvore. Em alguma iteração do algoritmo, ocorrerá a análise de uma folha  $v_j$  “requisitada” adjacente a algum vértice  $w \in \{v_{j+1}, \dots, v_n\}$  não rotulado como “requisitado”. Nesse caso,  $v_j$  deverá ser incluída em  $D$  e, como  $w$  estará dominado, rotula-se  $w$  como “livre” e remove-se  $v_j$  de  $A$ . Por conveniência, todos os vértices estão, inicialmente, rotulados como “cercado”.

---

**Algoritmo 3.1:** *DominaçãoDeÁrvore(A)* [36]

---

**Entrada:** Uma árvore  $A$  representada pela ordenação de árvore  $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$ , onde todos os vértices estão rotulados “cercados”.

**Saída:** Um conjunto dominante mínimo  $D$  de  $A$ .

```

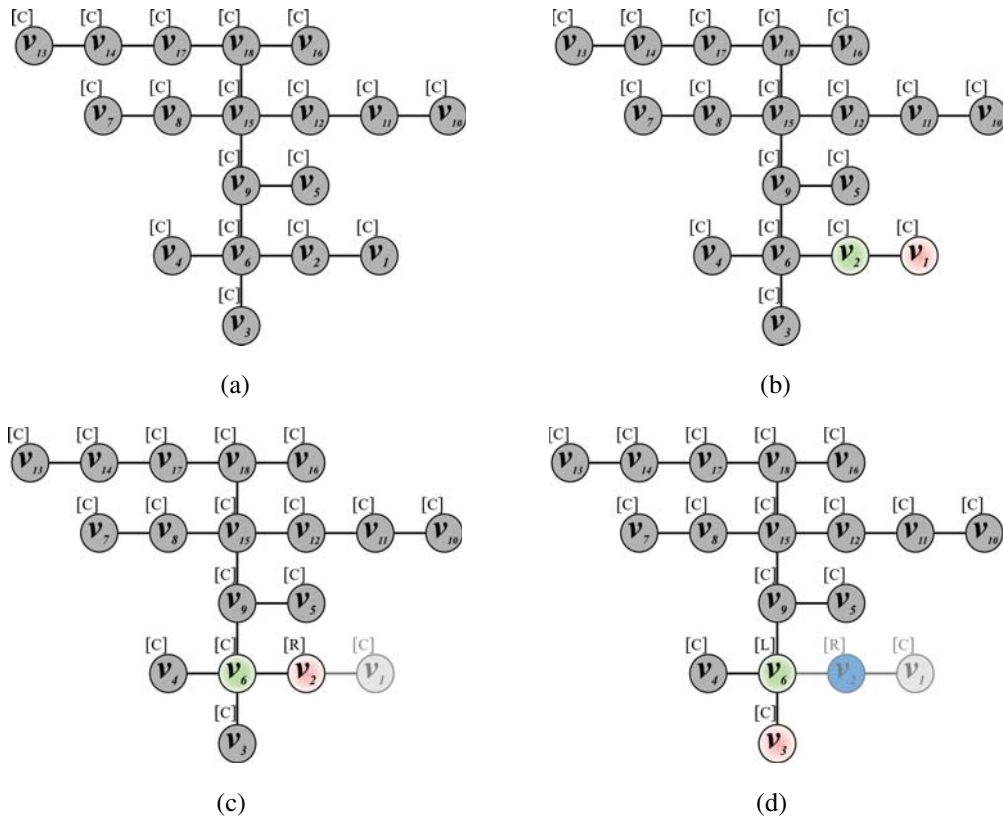
1   $D \leftarrow \emptyset$ 
2  para  $i \leftarrow 1$  até  $n - 1$  faça
3      Seja  $v_j$  o único vizinho de  $v_i$ ;
4      se  $\text{rótulo}(v_i) = \text{“cercado”}$  então
5          rotule  $v_j$  como “requisitado”;
6      senão
7          se  $\text{rótulo}(v_i) = \text{“requisitado”}$  então
8               $D \leftarrow D \cup \{v_i\}$ ;
9              se  $\text{rótulo}(v_j) = \text{“cercado”}$  então rotule  $v_j$  como “livre”;
10         fim
11     fim
12     remova  $v_i$  de  $A$ ;
13 fim
14 se  $\text{rótulo}(v_n) \neq \text{“livre”}$  então  $D \leftarrow D \cup \{v_n\}$ ;
15 retorna  $D$ 

```

---

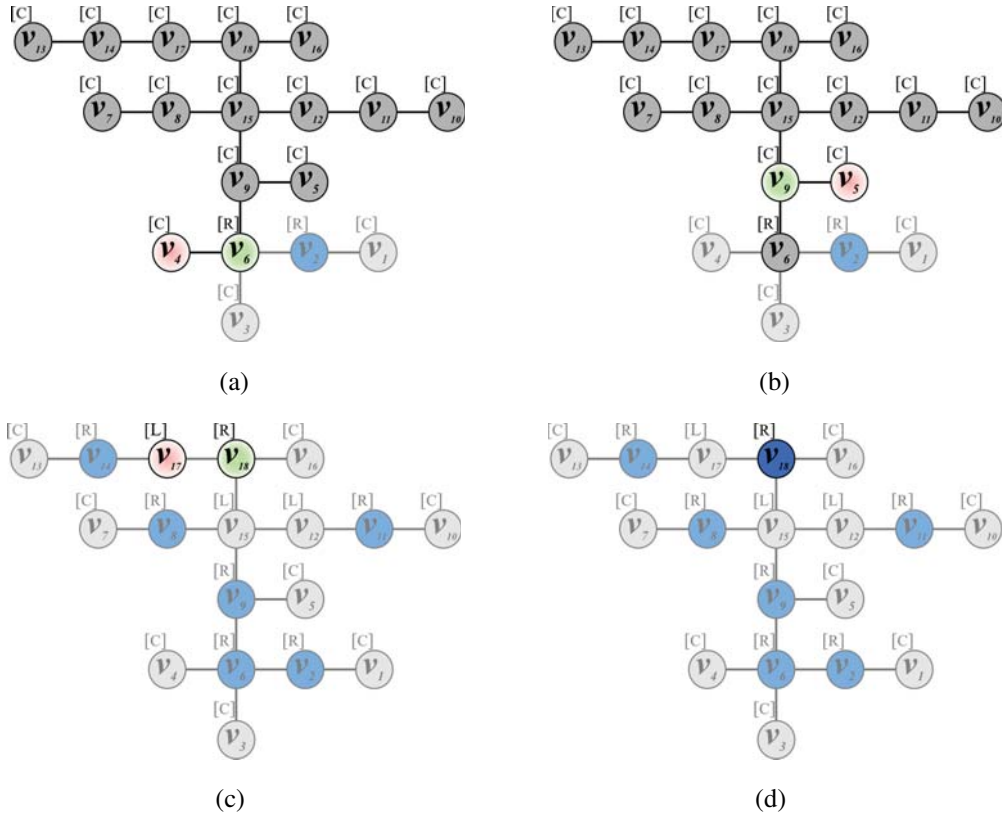
As Figuras 3.28 e 3.29 exemplificam a aplicação do Algoritmo 3.1 para a árvore ilustrada na Figura 3.28(a). Observe que os índices dos vértices correspondem a uma ordenação de árvore. Além disso, o rótulo de cada vértice está representado entre parênteses. Inicialmente, o algoritmo define o conjunto  $D$  como vazio (linha 1). Entre as linhas 2 e 11 está definido o processo que analisa iterativamente  $n - 1$  vértices da árvore. Para a árvore em questão, o primeiro passo do laço consiste na avaliação do vértice  $v_1$  (destacado por uma cor levemente avermelhada) juntamente com seu vizinho

$v_2$  (destacado por uma cor levemente esverdeada) (Figura 3.28(b)). Diante da condição descrita na linha 4, o vértice  $v_2$  será rotulado como “requisitado” (linha 6) e o vértice  $v_1$  será removido de  $A$  (linha 12). Isso implica na situação exposta na Figura 3.28(c), onde também é destacada a segunda iteração do laço de repetição, em que ocorre a análise do vértice  $v_2 \sim v_6$ . Como  $v_2$  e  $v_6$  estão rotulados como “requisitado” e “cercado”, respectivamente, as linhas 8 e 9 do algoritmo serão executadas. Assim, o vértice  $v_2$  será inserido no conjunto  $D$  (linha 8),  $v_6$  será rotulado como “livre” (linha 9) e  $v_2$  será removido de  $A$  (linha 12), dando início ao terceiro passo onde é analisado o vértice  $v_3 \sim v_6$  (Figura 3.28(d)). As Figuras 3.29(a) e 3.29(b) ilustram os passos 4 e 5, respectivamente. Já a Figura 3.29(c) demonstra a última iteração do laço, no momento em que o vértice  $v_{17} \sim v_{18}$  é analisado. Por fim, o último grafo representa a execução da linha 14 para  $v_{18}$ , concluindo a execução do algoritmo.



**Figura 3.28:** Exemplo de aplicação do Algoritmo 3.1. (a) Árvore  $A$  utilizada como entrada; (b) Passo inicial do laço de iteração: análise de  $v_1 \sim v_2$ ; (c) Segundo passo: análise de  $v_2 \sim v_6$ ; e, (d) Após a remoção do vértice  $v_1$  e inserção de  $v_2$  no conjunto  $D$ , o vértice  $v_3 \sim v_6$  é analisado.





**Figura 3.29:** Exemplo de aplicação do Algoritmo 3.1 (continuação). (a) Quinto passo; (b) Sexto passo; (c) Décimo sétimo e último passo do processo iterativo: análise de  $v_{17}$ ; e, (d) Inserção de  $v_{18}$  em  $D$ , após a execução da linha 14.

Uma análise superficial do Algoritmo 3.1 aponta que é necessário avaliar apenas uma vez cada um dos  $n$  vértices da árvore. Conforme será demonstrado adiante, esse mesmo algoritmo também resolve um problema mais geral, envolvendo o conceito de *número de dominação opcional*.

Um *conjunto dominante opcional* de uma árvore  $A$  é qualquer conjunto de vértices  $D$  que contém todos os vértices rotulados como “requisitados”, ou seja,  $R \subseteq V$ . Um vértice “cercado” ou é um elemento de  $D$  ou será adjacente a um vértice de  $D$ . Vértices “livres” não necessitam serem dominados ou incluídos em  $D$ , mas podem ser utilizados para dominar vértices “cercados”. Dessa forma, o número de dominação opcional  $\gamma_{opc}(A)$  corresponde à cardinalidade mínima de um conjunto dominante opcional mínimo de  $A$ . Observe que se  $C = V$  e  $L = R = \emptyset$ ,  $\gamma_{opc}(A) = \gamma(A)$  [36].

A construção e corretude do algoritmo foi baseada no seguinte teorema:

**Teorema 3.38 (Cockayne, Goodman e Hedetniemi [36])** *Suponha que  $A = (V, E)$  seja uma árvore que possua vértices “cercados”, “livres” e “requisitados”. Considere  $v$  uma*

folha de  $A$  adjacente ao vértice  $u$ . As seguintes afirmações estão asseguradas:

- i) Se  $v \in L$ , então  $\gamma_{opc}(A) = \gamma_{opc}(A - v)$ ;
- ii) Se  $v \in C$  e  $A'$  é a árvore  $A$  após a remoção de  $v$  e rotulação de  $u$  como “requisitado”, então  $\gamma_{opc}(A) = \gamma_{opc}(A')$ ;
- iii) Se  $v \in R$  e  $u \in R$ , então  $\gamma_{opc}(A) = 1 + \gamma_{opc}(A - v)$ ; e,
- iv) Se  $v \in R$ ,  $u \notin R$  e  $A'$  é a árvore  $A$  após a remoção de  $v$  e rotulação de  $u$  como “livre”, então  $\gamma_{opc}(A) = 1 + \gamma_{opc}(A')$ .

*Prova.*

- i) Uma vez que  $v$  esteja rotulado como “livre”, qualquer conjunto dominante opcional mínimo de  $A - v$  também domina  $A$ . Assim  $\gamma_{opc}(A) \leq \gamma_{opc}(A - v)$ . Suponha que  $D$  seja um conjunto dominante opcional mínimo de  $A$ . Se  $v \notin D$ , então  $D$  também domina  $A - v$ . Caso contrário, se  $v \in D$ ,  $(D \setminus \{v\}) \cup \{u\}$  será um conjunto dominante opcional mínimo de  $A$  cuja cardinalidade é igual a  $|D|$  e que também domina  $A - v$ . Assim,  $\gamma_{opc}(A - v) \leq |D| = \gamma_{opc}(A)$ ;
- ii) Se  $u$  está rotulado como “requisitado” em  $A'$ , um conjunto dominante opcional mínimo  $D$  de  $A'$  sempre conterá  $u$  que, conseqüentemente, sempre dominará  $v$ . Assim,  $D$  também dominará  $A$  e  $\gamma_{opc}(A) \leq \gamma_{opc}(A')$ . Por outro lado, considere  $D$  um conjunto dominante opcional mínimo de  $A$ . Desde que  $v$  esteja rotulado como “cercado” em  $A$ , ou  $u$  ou  $v$  estará em  $D$ . Suponha  $D' = (D \setminus \{v\}) \cup \{u\}$  e observe que se trata de um conjunto dominante opcional mínimo de  $A'$ , onde  $u$  está rotulado como “requisitado”. Logo,  $\gamma_{opc}(A') \leq |D| \leq |D| = \gamma_{opc}(A)$ ;
- iii) Se  $D'$  é um conjunto dominante opcional mínimo de  $A'$ , então  $D' \cup \{v\}$  é um conjunto dominante opcional mínimo de  $A$ . Assim,  $\gamma_{opc}(A) \leq 1 + \gamma_{opc}(A')$ . Suponha então que algum conjunto dominante opcional mínimo de  $A$  contenha  $u$  e  $v$ . Assim,  $D \setminus \{v\}$  é um conjunto dominante opcional mínimo de  $A$ . Portanto,  $\gamma_{opc}(A') \leq \gamma_{opc}(A) - 1$ ; e,
- iv) Se  $D'$  é um conjunto dominante opcional mínimo de  $A'$ , então  $D' \cup \{v\}$  é um conjunto dominante opcional mínimo de  $A$ . Assim,  $\gamma_{opc}(A) \leq 1 + \gamma_{opc}(A')$ . Por outro lado, algum conjunto dominante opcional mínimo  $D$  de  $A$  conterá  $v$ . Desde que  $u$  esteja rotulado como “livre” em  $A'$ ,  $D \setminus \{v\}$  é um conjunto dominante opcional mínimo em  $A'$ . Portanto,  $\gamma_{opc}(A') \leq \gamma_{opc}(A) - 1$ .

□

Algoritmos de tempo polinomial também foram obtidos para outras classes de grafos. Como exemplo, podem ser citadas as classes de grafos fortemente cordais [47], de permutação [48, 104, 117], de co-comparabilidade [83], de intervalo [27, 47], hereditário à distância [94], sem tripla asteroidal [82], entre outras<sup>5</sup>. Ressalta-se ainda que alguns dos algoritmos descritos na literatura utilizam métodos como programação dinâmica e programação linear. Chang [25], Kratsch [84] e Haynes, Hedetniemi e Slater [66] resumizam alguns dos principais resultados algorítmicos e de  $\mathcal{NP}$ -completude referentes à dominação em grafos e suas variações.

---

<sup>5</sup>Conforme mencionado no Capítulo 2, a definição de tais classes de grafos podem ser encontrada no livro de Brandstädt, Le e Spinrad [18].

---

## Conjuntos Dominantes Eficientes em Grafos

---

### 4.1 Apresentação

Neste capítulo, são apresentados alguns dos principais aspectos relacionados à dominação eficiente em grafos. O texto está organizado da maneira como se segue. A seção 4.2 visa contextualizar historicamente esse tema, resgatando suas origens e destacando problemas relacionados. Já na seção 4.3 são exemplificados três tipos de dominação eficiente: a ponderada, de arestas e a  $(j, k)$ -dominação eficiente. Aplicações e propriedades de conjuntos dominantes eficientes são apresentadas nas seções 4.4 e 4.5, respectivamente. Por sua vez, a seção 4.6 aborda os limites para o número de dominação eficiente, enquanto que a seção 4.7 discorre sobre algumas caracterizações de classes de grafos eficientemente domináveis. Por fim, aspectos algorítmicos e de complexidade são apresentados na seção 4.8.

### 4.2 Contextualização Histórica

A Teoria da Informação é uma área de pesquisa matemática cujo objetivo é estudar o armazenamento e manipulação da informação [75]. Suas idéias iniciais são datadas por volta de 1920 e estão relacionadas à expansão da rede telefônica da AT&T nos Estados Unidos [45]. Nesse contexto, Nyquist [95] e Hartley [64] conceberam as primeiras fórmulas para o cálculo da quantidade de informação transmitida através de uma linha telefônica em 1924 e 1928, respectivamente. Tais estudos foram essenciais para que, no ano de 1948, Claude Shannon fundamentasse a Teoria da Informação em seu trabalho “A mathematical theory of communication” [109].

A motivação principal de Shannon foi o problema fundamental das comunicações: “reproduzir em um ponto, de forma exata ou aproximada, uma mensagem enviada de outro ponto”. Esse problema leva em consideração uma fonte, um transmissor, um canal de comunicação, um receptor e um destinatário de uma informação, conforme ilustrado na Figura 4.1:



**Figura 4.1:** Diagrama de um processo de comunicação.

De acordo com Shannon [109], a fonte é o elemento do processo de comunicação que produz a informação. Já o transmissor é responsável por converter a informação em um sinal adequado à transmissão pelo canal. O canal, por sua vez, é o meio utilizado no envio do sinal para o receptor, enquanto o objetivo deste é reconstruir a mensagem a partir do sinal enviado pelo transmissor. Por último, o destinatário representa o destino final da mensagem enviada pela fonte. Em um sistema de telefonia, por exemplo, o transmissor transforma a informação sonora produzida pela fonte em sinais elétricos que podem ser transmitidos por fios condutores até o receptor que transforma o sinal em informação para o destinatário.

Qualquer canal real está sujeito a interferências de origens diversas que podem distorcer o sinal enviado pelo transmissor de modo que a mensagem recebida pelo destinatário não seja idêntica àquela enviada pela fonte [109]. Para resolver essa situação, foram desenvolvidos os códigos corretores de erros [69, 73]. Essencialmente, um código corretor de erros é uma maneira organizada de acrescentar dados adicionais à mensagem, de modo que, ao se recuperar a informação, seja possível detectar e corrigir os erros obtidos durante o processo de transmissão. Um exemplo de código corretor de erros é o código perfeito.

No ano de 1973, o conceito de códigos perfeitos foi generalizado por Norman Biggs [13] como códigos- $d$  perfeitos em grafos. De acordo com esse autor, um código perfeito, binário e de comprimento  $k$  utilizado na correção de erros simples é um código perfeito no hipercubo  $Q_k$ . Posteriormente, ao pesquisarem árvores com conjuntos dominantes disjuntos de diversos tipos, Bange, Barkauskas e Slater [6] apresentaram, em 1978, a dominação eficiente em grafos, mais tarde discutida pelos mesmos autores em [7]. Já em 1990, pesquisas sobre a alocação de recursos em computadores paralelos motivaram Livingston e Stout [87] a estudarem os conjuntos  $d$ -dominantes perfeitos que são os mesmos códigos- $d$  perfeitos de Biggs. Além disso, observaram que a definição de conjuntos dominantes eficientes é equivalente ao conjunto 1-dominante perfeito.

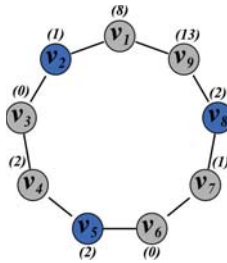
Finalmente, cabe ressaltar que alguns autores empregam o termo *conjunto dominante perfeito* ao invés de conjunto dominante eficiente. Entretanto, a definição original de dominação perfeita não se equivale à dominação eficiente. Dessa forma, o levantamento bibliográfico relacionado à dominação eficiente inclui alguns trabalhos que utilizam o termo dominação perfeita.

## 4.3 Tipos de Dominação Eficiente

### 4.3.1 Dominação Eficiente Ponderada

Além das premissas para a dominação eficiente, considere que cada vértice  $v \in V(G)$  está associado a um número real dado por  $w(v)$ , sendo essa função denominada *peso de  $v$* . O problema da **dominação eficiente ponderada** consiste em encontrar um conjunto dominante eficiente  $D$  de  $G$  de modo que o peso  $w(D)$  de  $D$  seja mínimo, onde  $w(D) = \sum_{v \in D} w(v)$ .

No grafo  $C_9$  da Figura 4.2, o peso associado a cada vértice está ilustrado entre parênteses. Observe que existem três conjuntos dominantes eficientes,  $D_1 = \{v_1, v_4, v_7\}$ ,  $D_2 = \{v_2, v_5, v_8\}$  e  $D_3 = \{v_3, v_6, v_9\}$  de pesos  $w(D_1) = 11$ ,  $w(D_2) = 5$  e  $w(D_3) = 13$ , respectivamente. Logo,  $D_2$  é o conjunto dominante eficiente de peso mínimo de  $C_9$ .



**Figura 4.2:** Ciclo  $C_9$  e seu conjunto dominante eficiente cuja soma dos pesos é mínima.

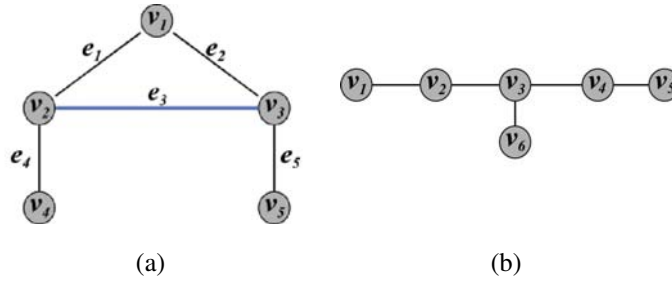
Quando  $w(v) = 1$  para todo  $v \in V$ , tem-se o problema de dominação eficiente tradicional. A dominação eficiente ponderada foi estudada por Lu e Tang [89], que também sumarizaram alguns dos resultados relacionados e obtidos até então. Conforme mencionado por tais autores, esse problema é  $\mathcal{NP}$ -Completo para uma grande variedade de grafos.

### 4.3.2 Dominação Eficiente de Arestas

Um **conjunto dominante de arestas** de um grafo  $G$  é um conjunto  $E' \subseteq E(G)$  para o qual toda aresta em  $E(G) \setminus E'$  é adjacente a pelo menos uma aresta de  $E'$ . O tamanho do menor conjunto dominante de arestas é denominado **número de dominação de arestas** e denotado por  $\gamma'(G)$ . Yannakakis e Gavril [126] foram os precursores no estudo dessa variação e mostraram que a determinação de  $\gamma'(G)$  para um grafo arbitrário  $G$  é um problema  $\mathcal{NP}$ -Completo.

A dominação eficiente de arestas incorpora a noção de eficiência ao conceito de dominação de arestas. Nesse contexto,  $E'$  é um **conjunto dominante eficiente de arestas** se toda aresta de  $E$  for dominada exatamente por uma aresta de  $E'$ . A cardinalidade do

menor conjunto dominante eficiente de arestas de um grafo  $G$  é denominada **número de dominação eficiente de arestas** de  $G$  e denotada por  $\gamma'_e(G)$ . No grafo da Figura 4.3(a),  $E' = \{e_3\}$  é um conjunto dominante eficiente de arestas. Outros grafos são eficientemente domináveis por arestas, tais como  $P_n$  para todo  $n \geq 1$ ,  $C_n$  para  $n \equiv 0 \pmod{3}$ ,  $K_{m,n}$  para  $m = 1$  ou  $n = 1$ , e  $K_n$  para  $n \leq 3$ . Por outro lado, alguns grafos não possuem conjuntos dominantes eficientes de arestas, conforme exemplificado na árvore da Figura 4.3(b).



**Figura 4.3:** (a) Grafo para o qual  $\gamma'_e(G) = 1$  e (b) Árvore que não possui um conjunto dominante eficiente de arestas.

Determinar se  $G$  possui ou não um conjunto dominante eficiente de arestas é um problema  $\mathcal{NP}$ -Completo, conforme demonstrado por Grinstead *et al.* [60]. Condições necessárias e suficientes para a existência de um conjunto dominante eficiente de arestas em grafos regulares foram fornecidas por Georges *et al.* [55]. Como trabalhos mais recentes sobre o tema, podem ser indicados [21] e [88].

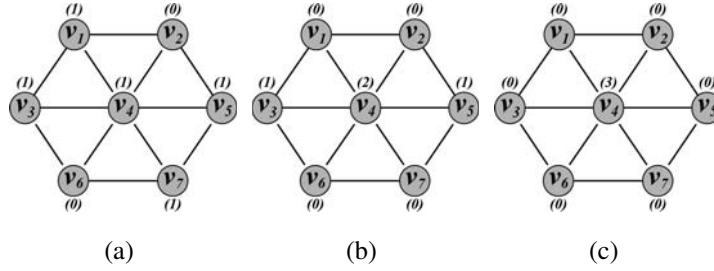
### 4.3.3 $(j, k)$ -Dominação Eficiente

Introduzida recentemente por Rubacalba e Slater [105], a  $(j, k)$ -dominação relaciona o conceito da múltipla dominação às *funções dominantes*. Nesse contexto, designa-se como **função de  $(j, k)$ -dominação** a função  $f : V(G) \rightarrow \{1, \dots, j\}$  responsável em atribuir pesos aos vértices de um grafo, de modo que um vértice  $v$  estará dominado quando  $f(N[v]) = \sum_{v \in N[v]} f(v) \geq k$ . Ressalta-se também que  $1 \leq j \leq k$ . Se para todo  $v \in V(G)$ ,  $f(N[v]) \geq k$ , então  $G$  é  $(j, k)$ -dominável.

Na  $(j, k)$ -dominação, o menor valor para o somatório dos pesos de todos os vértices é representado pelo **número de  $(j, k)$ -dominação** e denotado por  $\gamma_{j,k}(G)$ . Observe que se  $j = 1$ , a  $(1, k)$ -dominação corresponde à múltipla dominação, apresentada na Seção 3.3.3 do Capítulo 3, fazendo com que  $\gamma_{1,k}(G) = \gamma_{\times k}(G)$ . A dominação tradicional ocorre quando  $j = k = 1$ .

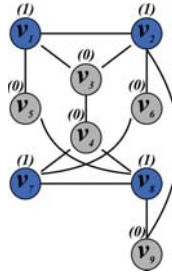
Na Figura 4.4 está ilustrado um grafo  $G$  para o qual o número de  $(j, k)$ -dominação é analisado em três situações distintas, considerando  $1 \leq j \leq 3$  e  $k$  fixado em 3. Os pesos dos vértices estão representados entre parênteses. Na Figura 4.4(a), por

exemplo,  $\gamma_{1,3}(G) = 5$ , sendo que a solução correspondente atribui pesos  $f(v_1) = f(v_3) = f(v_4) = f(v_5) = f(v_7) = 1$  e  $f(v_2) = f(v_6) = 0$ .



**Figura 4.4:** (a)  $\gamma_{1,3}(G) = 5$ ; (b)  $\gamma_{2,3}(G) = 4$ ; e (c)  $\gamma_{3,3}(G) = 3$ .

Rubacalba e Slater [105] ainda incorporaram a noção de eficiência à  $(j,k)$ -dominação, definindo então a  $(j,k)$ -**Dominação Eficiente**. Nesse caso,  $F_{j,k} = \max\{I(f) | f(N[w]) \leq k \text{ para todo } w \in V(G), \text{ onde } f : V(G) \rightarrow \{0, \dots, j\}\}$  corresponde ao **número de  $(j,k)$ -dominação eficiente**, onde  $I(f) = \sum_{v \in V(G)} (1 + d(v))f(v)$ . Diz-se que  $G$  é **eficientemente  $(j,k)$ -dominável** se, e somente se,  $F_{j,k}(G) = k|V(G)| = kn$ . Similarmente,  $R_{j,k}(G) = \min\{I(f) : f \text{ é uma função de } (j,k)\text{-dominação}\}$ . No grafo da Figura 4.4(c), observe que  $F_{3,3}(G) = 21 = R_{3,3}(G)$  e, dessa forma, a função de  $(3,3)$ -dominação para  $G$  é eficiente. No grafo  $G$  da Figura 4.5,  $F_{1,2}(G) = 18$ .



**Figura 4.5:** Grafo eficientemente  $(1,2)$ -dominável.

## 4.4 Aplicações de Conjuntos Dominantes Eficientes

### 4.4.1 Distribuição de Recursos em Computadores Paralelos

Por razões diversas, os grafos hipercubos se tornaram importantes como modelos arquiteturais para computadores paralelos, tais como o INTEL iPSC e o NCUBE [66], sendo que vários problemas de processamentos de sinais, visão computacional, reconhecimento de padrões e processamento de imagens podem ser resolvidos eficientemente através de algoritmos paralelos em hipercubos [102].



Dentre algumas vantagens na utilização de arquiteturas hipercúbicas, podem ser elencadas: i) *dois processadores vizinhos têm seus endereços diferenciados por apenas um bit*: dessa forma, pode-se afirmar que o processador  $(0, 1, 1)$  é vizinho de  $(0, 1, 0)$ ; ii) *a posição binária de dois processadores permite saber a distância que os separam*: nesse caso, o número de bits diferentes entre os dois processadores corresponde à quantidade de nodos entre eles, sendo essa distância denominada *distância de Hamming*. Assim,  $(0, 0, 0)$  e  $(1, 1, 1)$  estão a uma distância 3; e, iii) *a obtenção do caminho mais curto entre dois processadores*: a partir do endereço de origem, modifica-se um bit por vez, até que se iguale ao endereço de destino. Logo, a sequência  $\langle (0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 1), (1, 1, 1) \rangle$  corresponde ao caminho mais curto entre  $(0, 0, 0)$  e  $(1, 1, 1)$ .

Um problema clássico em computação paralela envolvendo a dominação eficiente consiste na alocação, localização e distribuição de uma quantidade limitada de recursos entre os processadores [87]. Nesse contexto, os recursos podem ser entendidos como dispositivos de entrada e saída, regiões de memória, componentes de software, entre outros. O objetivo do problema é distribuí-los entre os processadores de modo que, quando um recurso não está localizado em um certo nodo, esteja a uma distância  $d$  na rede. De acordo com Livingston e Stout [87], em muitas situações é desejável que  $d = 1$ . Nesse caso, determinar um conjunto dominante eficiente em um grafo que modela a arquitetura da rede é uma solução ótima para a disposição dos recursos.

#### 4.4.2 Detecção e Correção de Mensagens Binárias com Erros Simples

A dominação eficiente em grafos também desempenha um papel importante na área de codificação [13, 66]. Na transmissão de mensagens binárias com palavras de comprimento  $k$ , cada vértice de um hipercubo  $Q_k$  pode representar uma possível palavra que compõe a mensagem. Dessa forma, se uma mensagem binária é composta por todas as  $2^k$  palavras possíveis, o hipercubo inteiro representará uma mensagem. Nesse contexto, observe que qualquer erro de transmissão que altere um bit de uma palavra enviada gerará uma outra palavra válida. Essa fato implica na impossibilidade de detecção de erros.

Por outro lado, se uma mensagem for construída de modo que suas palavras estejam a uma distância no mínimo 2, a detecção de condições de erros poderá ser realizada, uma vez que a mudança de um bit gerará uma palavra que estará a uma distância no mínimo 1 de qualquer outra que componha a mensagem. Entretanto, apesar de ser possível detectar a ocorrência de um erro, nessa situação não é possível corrigí-lo. Por exemplo, se  $k = 3$  e uma mensagem é composta pelo conjunto  $\{(0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 1)\}$ , uma palavra recebida como  $(0, 1, 1)$  pode ser o resultado de um erro tanto da primeira coordenada de  $(1, 1, 1)$  quanto da segunda coordenada de  $(0, 0, 1)$ , ou ainda da terceira co-

ordenada de  $(0, 1, 0)$ , tornando impossível determinar a palavra que foi transmitida [111]. Vale ressaltar também que, nesse caso, é impossível detectar dois erros em uma mesma palavra. Conforme mencionado por Silva Filho [111], para que seja possível detectar  $e$  erros em uma mensagem, é necessário que os vértices correspondentes às palavras estejam a uma distância mínima  $2e + 1$  no hipercubo.

Considere então uma mensagem onde as palavras estejam a uma distância 3. No hipercubo  $Q_3$  da Figura 4.6, por exemplo, suponha que tal mensagem esteja representada por um conjunto  $D = \{(0, 0, 0), (1, 1, 1)\}$ . A ocorrência de um único erro em qualquer posição nessa mensagem gerará uma nova palavra que estará a uma distância 1 da palavra original e a uma distância no mínimo 2 de qualquer outra palavra em  $D$ . Assumindo a ocorrência apenas um erro e usando o princípio da máxima semelhança, pode-se afirmar que apenas uma das palavras de  $D$  deve estar mais próxima da palavra transmitida erroneamente. Assim, se foi transmitido  $(0, 0, 0)$  e recebido  $(0, 0, 1)$ , a palavra recebida é decodificada corretamente, uma vez que está a uma distância 2 de  $(1, 1, 1)$  e 1 de  $(0, 0, 0)$ . Observe então que  $D$  é um conjunto dominante eficiente no hipercubo  $Q_3$ . De uma maneira geral, a detecção e correção de um erro pode ser realizada se a mensagem binária de comprimento  $k$  corresponder a um conjunto dominante eficiente no hipercubo  $Q_k$  [13].

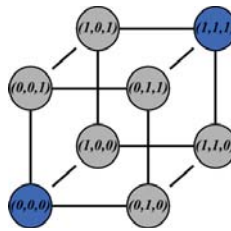


Figura 4.6: Hipercubo  $Q_3$ .

## 4.5 Propriedades de Conjuntos Dominantes Eficientes

Esta seção se inicia com a apresentação de definições que são equivalentes ao conceito de dominação eficiente em grafos.

**Teorema 4.1 (Haynes, Hedetniemi e Slater[66])** *Se  $D = \{v_1, \dots, v_k\}$  é um conjunto dominante eficiente de  $G$ , então as seguintes definições são equivalentes:*

- i)  $D$  é um código perfeito de  $G$ ;
- ii)  $\{N[v_1], \dots, N[v_k]\}$  é uma partição de  $G$ ; e,
- iii)  $D$  é um pacote de  $G$ .

Na situação em que  $G$  não é eficientemente dominável, alguns parâmetros podem ser utilizados na tentativa de se encontrar uma boa aproximação para a noção de eficiência. Uma abordagem consiste em manter a restrição de que todo vértice pode ser dominado no máximo uma vez, buscando maximizar a quantidade de vértices dominados eficientemente. Ou seja, corresponde à determinação de  $F(G)$ . Por outro lado, pode ser desejável minimizar a quantidade de vértices dominados mais do que uma vez, sendo então utilizada a redundância de cardinalidade  $RC(G)$ . Exemplos que ilustram tais parâmetros foram apresentados no Capítulo 2.

Para um grafo  $G$ , o relacionamento entre os parâmetros  $F(G)$ ,  $R(G)$  e  $RC(G)$  está descrito no teorema a seguir:

**Teorema 4.2 (Grinstead e Slater [58], Johnson e Slater [76])** *Para qualquer grafo  $G$ ,*

$$i) F(G) \leq n \leq R(G)$$

$$ii) F(G) = n \text{ se, e somente se } R(G) = n \text{ e se, e somente se, } RC(G) = 0.$$

Por exemplo,  $F(P_n) = n$ . Logo,  $R(P_n) = n$  e  $RC(P_n) = 0$ . Para  $k \in \mathbb{Z}$ ,  $F(C_{3k}) = R(C_{3k}) = 3k$ . Observe também que  $R(C_{3k+1}) = R(C_{3k+2}) = 3k + 3$ ,  $RC(C_{3k+1}) = 2$  e  $RC(C_{3k+2}) = 1$ .

Todo conjunto dominante eficiente é minimal. De modo geral, se um grafo  $G$  é eficientemente dominável, pode-se afirmar que a cardinalidade de um conjunto dominante eficiente  $D$  será igual ao número de dominação  $\gamma(G)$ :

**Teorema 4.3 (Bange, Barkauskas e Slater [6, 7])** *Se  $G$  possui um conjunto dominante eficiente, então a cardinalidade de qualquer conjunto dominante será igual ao número de dominação  $\gamma(G)$ . Em particular, todo conjunto dominante eficiente de  $G$  possui a mesma cardinalidade.*

*Prova.* Sem perda de generalidade, considere  $\{v_1, \dots, v_k\}$  como um conjunto dominante eficiente de  $G$ . Se  $D$  é qualquer conjunto dominante mínimo de  $G$ , então  $k \geq |D|$ . Por outro lado, se  $1 \leq i < j \leq k$ , então  $N[v_i] \cap N[v_j] = \emptyset$  por definição e, sendo  $D$  um conjunto dominante mínimo de  $G$ ,  $D \cap N[v_i] \neq \emptyset$ , uma vez que  $v_i$  está dominado por  $D$ . Isso implica em  $|D| \geq k$ . Consequentemente,  $k = |D|$ , finalizando a prova.  $\square$

## 4.6 Limites Sobre o Número de Dominação Eficiente

Se  $G$  é um grafo de ordem  $n$ , o número de dominação  $F(G)$  está limitado superiormente por  $n$ , sendo esse limite alcançado por grafos eficiente domináveis, tais como a estrela  $S_n$  e caminho  $P_n$ . Considerando o grau máximo  $\Delta(G)$  de um grafo  $G$ , Goddard *et al.* [56] estabeleceram o seguinte teorema:

**Teorema 4.4 (Goddard *et al.* [56])** Para qualquer grafo  $G$ ,

$$i) F(G) \geq \Delta(G) + 1; e,$$

$$ii) F(G) \geq \frac{n(\Delta(G)+1)}{\Delta(G)^2+1}.$$

*Prova.*

$$i) \text{ Se } v \text{ é o vértice que possui grau máximo de } G, \text{ então } F(G) \geq |N[v]| = 1 + \Delta(G)$$

ii) Considere  $D$  um pacote de  $G$  tal que  $I(D) = F(G)$  e  $R = N[D]$ . Consequentemente,  $D$  é um pacote maximal e  $N[R] = V(G)$ . Logo, todo vértice em  $N[R] - N[D]$  terá vizinhos em  $N[D] - D$ , e todo vértice em  $N[D] - D$  tem exatamente um vizinho em  $D$ . Dessa forma,  $|N[R]| \leq |N[D]| + (|N[D]| - |D|)(\Delta(G) - 1)$ . Desde que  $F(G) = |N[D]|$ ,  $n \leq \Delta(G)F(G) - |D|(\Delta(G) - 1)$ . Além do mais,  $F(G) = |N[D]| \leq |D|(\Delta(G) + 1)$ . Assim,  $n \leq \Delta(G)F(G) - F(G)(\Delta(G) - 1)/(\Delta(G) + 1)$ , o que implica no limite proposto.

□

Dado um inteiro  $p$ , o limite (i) do Teorema 4.4 é atingido por  $G \simeq K_p \times K_p$ , onde  $|V(G)| = p^2$ ,  $\Delta(G) = 2p - 2$  e  $F(G) = 2p - 1 = \Delta(G) + 1$ . Já o limite (ii) é alcançado, por exemplo, pelo grafo  $C_5$ . Um resultado derivado de tais limites está expresso no Teorema 4.5.

**Teorema 4.5 (Goddard *et al.* [56])** Se  $G$  é um grafo de ordem  $n$ ,

$$i) F(G) = n, \text{ se } n \leq 3; e,$$

$$ii) F(G) \geq 1 + \sqrt{n-1}, \text{ se } n \geq 4.$$

Levando-se em consideração as árvores, o Teorema 4.6 apresenta um limite inferior para esse tipo de grafo. Porém, na situação em que a árvore é um caterpillar, o limite obtido para o número de dominação eficiente é melhor, conforme o Teorema 4.7.

**Teorema 4.6 (Goddard *et al.* [56])** Para uma árvore  $A$  de ordem  $n$ ,  $F(A) \geq \sqrt{8(n+2)} - 4$ .

*Prova.* Esta prova é válida para florestas de ordem  $n$ . Utilizando indução sobre esse parâmetro, se  $n = 0$ , o resultado prevalecerá. Para o decorrer da demonstração, considere os penúltimos vértices de  $A$  como sendo os penúltimos vértices dos caminhos mais longos da árvore.

Seja  $w$  um penúltimo vértice de  $A$  e  $A' = A - N[w]$ . Pela hipótese de indução,  $F(A') \geq \sqrt{8(n-d(w)+1)} - 4$ . Considere então  $P$  um pacote de  $A'$  tal que  $I(P) = F(A')$ , e  $x \sim w$  uma folha em  $A$ . Uma vez que  $P$  não contém vértices de  $N[w]$ ,  $P \cup \{x\}$  é um pacote de  $A$ . Consequentemente,  $F(A) \geq I(P) + 2 = F(A') + 2 \geq \sqrt{8(n-d(w)+1)} - 2$ .

Agora, observe que se  $\sqrt{8(n-d(w)+1)} \geq \sqrt{8(n+2)} - 2$  a prova estará concluída. Diante disso, assuma que  $d(v) > \sqrt{2(n+2)} - 3/2$  para todo  $v \in A$ , de modo que  $v$  seja um penúltimo vértice. Além disso, suponha que existam os vértices  $w$  e  $w'$  penúltimos e separados por uma distância maior ou igual a três. Observe então que  $Q = \{w, w'\}$  é um pacote de  $A$ . Logo,  $F(A) \geq I(Q) > 2(\sqrt{2(n+2)} - 3/2)$ , o que finalizaria a prova. Logo, supondo que quaisquer 2 penúltimos vértices de  $A$  estão a uma distância no máximo 2,  $A$  terá seu diâmetro menor ou igual a 4. Dessa forma, se  $v$  é um vértice central de  $A$ , então  $v$  será adjacente à  $j$  penúltimos e  $k$  folhas, conforme ilustrado na Figura 4.7.

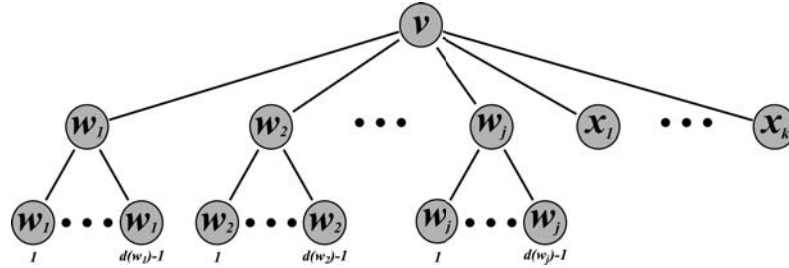


Figura 4.7: Árvore  $A$  de diâmetro 4.

Assuma que  $d(w_i) \leq d(w_{i+1})$  para  $1 \leq i \leq j-1$ . Portanto  $2 \leq d(w_1) \leq d(w_2) \leq \dots \leq d(w_j)$ . Para  $D_1 = \{v\}$  e  $D_2 = \{w_j, w_{1,1}, w_{2,1}, \dots, w_{j-1,1}\}$ ,  $F(T) \geq \max\{I(D_1), I(D_2)\} = \max\{j+k+1, d(w_j) + 2j-2\}$ . Observe também que  $n \leq k + jd(j) + 1$ . Agora, resta determinar a situação na qual o máximo entre os dois limites é minimizado. Isso ocorre quando  $j+k+1 = d(w_j) + 2j-2$ , onde  $j = \sqrt{(n+2)/2} - 1$ ,  $d(w) = \sqrt{2(n+2)} - 1$  e  $k = \sqrt{9(n+2)/2} - 4$ . Nesse caso, o valor atingido para ambos os limites é  $\sqrt{8(n+2)} - 4$ .  $\square$

**Teorema 4.7 (Goddard et al. [56])** Para um caterpillar  $C$  de ordem  $n \geq 2$  com  $k$  vértice em seu corpo,  $F(C) \geq (n+2k+2)/3$ .

*Prova.* Seja o corpo de  $C$  formado pelos vértices  $v_1, \dots, v_k$ , e considere  $v_0$  e  $v_{k+1}$  folhas adjacentes aos vértices  $v_1$  e  $v_{k+1}$ , respectivamente. Se  $P_0, P_1$  e  $P_2$  são pacotes de  $C$  definidos por  $P_i = \{v_j : j \equiv i \pmod{3}\}$  para  $0 \leq j \leq k+1$ , para  $0 \leq i \leq 2$ , observe que toda folha de  $C$  está dominada em um dos três pacotes, com  $v_0$  e  $v_{k+1}$  sendo dominados em dois. Já os vértices pertencentes ao corpo do caterpillar estão dominados em todos os três pacotes. Consequentemente,  $I(P_0) + I(P_1) + I(P_2) \geq n + 2k + 2$ . Assim,

$$F(C) \geq \max\{I(P_0), I(P_1), I(P_2)\} \geq (n + 2k + 2)/3. \quad \square$$

O limite do Teorema 4.6 é atingido pela árvore  $T_j$ , obtida através da estrela  $K_{1,j}$  de vértice central  $v$ , anexando  $3j - 1$  vértices a  $v$  e  $2j$  vértices a cada folha de  $K_{1,j}$ , onde  $j \geq 2$ . Consequentemente,  $n = 2j^2 + 4j$  e  $F(T_j) = 4j = \sqrt{8(n+2)} - 4$ .

Por outro lado, seja  $C$  é um caterpillar com corpo  $v_1, \dots, v_{3h}$ . Se cada vértice  $v_i$  é adjacente à  $j$  folhas, para  $2 \leq j \leq 3h - 1$ , e  $v_1$  e  $v_{3h}$  adjacentes à  $j - 1$  folhas, então  $n = 3hj + 3h - 2$ ,  $k = 3h$ , e  $F(C) = h(j + 3) = (n + 2k + 2)/3$ .

## 4.7 Algumas Caracterizações

No ano de 1993, Clark [33] demonstrou por meio de métodos probabilísticos que quase todos os grafos não são eficientemente domináveis. Entretanto, a determinação de condições necessárias e suficientes para a existência de conjuntos dominantes eficientes em um grafo é um problema que continua a ser discutido na literatura e, no decorrer desta seção, serão apresentados alguns dos resultados que abordam esse tópico.

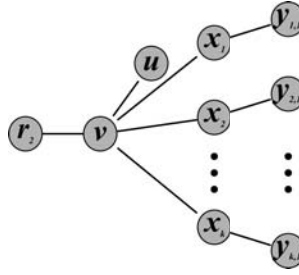
Uma caracterização construtiva de árvores eficientemente domináveis foi descrita por Bange, Barkauskas e Slater [7], através de processos denominados “*fusão*” e “*divisão*”. Nesse contexto, a fusão de duas árvores  $A_1$  e  $A_2$ , com suas respectivas raízes  $r_1$  e  $r_2$ , consiste na formação de uma nova árvore  $A$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} V(A) &= \{V(A_1) - r_1\} \cup \{V(A_2) - r_2\} \cup \{r = r_1 = r_2\} \\ E(A) &= E(A_1) \cup E(A_2) \end{aligned}$$

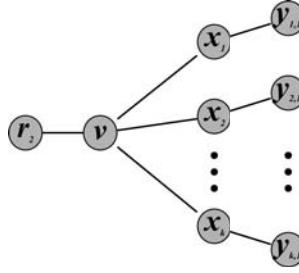
De maneira similar, a divisão de uma árvore  $A$  consiste, inicialmente, na escolha de um vértice  $r$  de grau  $d(r) \geq 2$ . Se  $N(r) = \{v_1, \dots, v_{d(r)}\}$ , o vértice  $r$  pode ser “dividido” em vértices  $r_1$  e  $r_2$ , de modo que  $N(r_1) \cup N(r_2) = N(r)$ ,  $N(r_1) \cap N(r_2) = \emptyset$ ,  $N(r_1) \neq \emptyset$  e  $N(r_2) \neq \emptyset$ . Logo,  $r_1$  e  $r_2$  enraízam duas árvores  $A_1$  e  $A_2$  que podem formar  $A$  em uma operação de fusão. Observe que se  $d(r) = 2$ , então a divisão de  $A$  será única.

**Teorema 4.8 (Bange, Barkauskas e Slater [7])** *Uma árvore  $A$  de diâmetro maior ou igual a três possui um conjunto dominante eficiente se, e somente se,  $A$  puder ser dividida em duas árvores  $A_1$  e  $A_2$  de modo que uma das seguintes afirmações seja verdadeira:*

- i)  $A_1$  tem um conjunto dominante eficiente que não contém  $r_1$  e  $A_2$  é da forma ilustrada na Figura 4.8, para  $k \geq 1$ ;*
- ii)  $A_1$  tem um conjunto dominante eficiente que pode ou não conter  $r_1$  e  $A_2$  é da forma ilustrada da Figura 4.9, para  $k \geq 1$ ; e,*

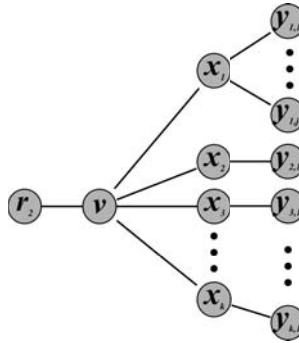


**Figura 4.8:** Árvore  $A_2$  para a afirmação (i).



**Figura 4.9:** Árvore  $A_2$  para a afirmação (ii).

iii)  $A_1$  tem um conjunto dominante eficiente que não contém  $r_1$  e  $A_2$  é da forma ilustrada na Figura 4.10, para  $j \geq 2$  e  $k \geq 1$ .

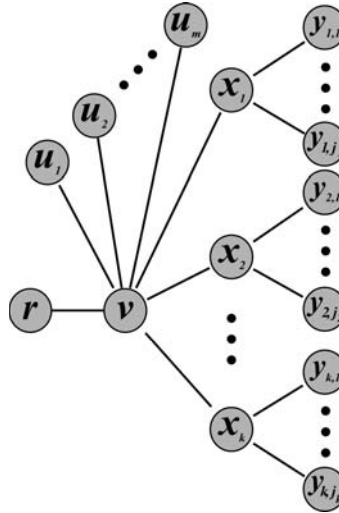


**Figura 4.10:** Árvore  $A_2$  para a afirmação (iii).

*Prova.*

- i)  $D = D_1 \cup \{u, y_{1,1}, \dots, y_{k,1}\}$  é um conjunto dominante eficiente de  $A$ , sendo que  $D_1$  domina eficiente  $A_1$  sem utilizar o vértice  $r_1$ ;
- ii) Suponha que  $D_1$  é um conjunto dominante eficiente de  $A_1$  que não contém  $r_1$ . Logo,  $D = D_1 \cup \{x_1, y_{2,1}, \dots, y_{k,1}\}$  é um conjunto dominante eficiente de  $A$ . Por outro lado, se  $D_1$  contém  $r_1$ , então  $D = D_1 \cup \{y_{1,1}, \dots, y_{k,1}\}$  dominará eficientemente  $A$ ; e,
- iii)  $D = D_1 \cup \{x_1, y_{2,1}, \dots, y_{k,1}\}$  é um conjunto dominante eficiente de  $A$ , sendo que  $D_1$  domina eficiente  $A_1$  sem utilizar o vértice  $r_1$ .

Por outro lado, assuma que  $A$  seja eficientemente dominável. Uma vez que o diâmetro de  $A$  é maior ou igual a 3, pode-se afirmar que a árvore  $A$  é formada pela fusão de subárvores de altura 3 que possuem a forma geral ilustrada na Figura 4.11, onde  $m \geq 0$ ,  $k, j_1, \dots, j_k \geq 1$ .



**Figura 4.11:** Forma geral de uma subárvore de altura 3 enraizada em  $r$ .

Se  $m > 1$ , qualquer conjunto dominante mínimo deverá conter  $v$ . Observe também que ou  $x_1$  ou  $y_{1,i}$ , para  $1 \leq i \leq j_1$ , deve pertencer a qualquer conjunto dominante. Porém, ambos estão muito próximos de  $v$ , o que impossibilita a formação de um conjunto dominante eficiente que inclua esse vértice. Considere agora a situação em que  $m = 1$ . Observe que a subárvore em questão será eficientemente dominável apenas quando  $j_1 = j_2 = \dots = j_k = 1$ . Caso contrário, se  $j_i > 1$  para qualquer  $i = 1, \dots, k$ , então  $x_i$  deverá pertencer a qualquer conjunto dominante mínimo  $D$ . Nesse contexto, ou  $u_1$  ou  $v$  devem estar em  $D$ . Entretanto, ambos estão muito próximo de  $x_i$ . Para  $m = 0$ , suponha  $j_i, j_k \geq 2$  com  $i \neq j$ . Dessa forma,  $x_i$  e  $x_j$  deverão pertencer a qualquer conjunto dominante mínimo. Porém, observe que a distância entre eles é igual a 2. Portanto, para que  $v$  seja dominado eficientemente, no máximo um inteiro entre  $j_1, \dots, j_k$  poderá ser maior do que 1. Consequentemente, se  $A$  possui um conjunto dominante eficiente, suas subárvores enraizadas de altura 3 deve possuir uma das formas ilustradas pelas Figuras 4.8, 4.9 e 4.10.

Finalizando a prova, pode-se afirmar que  $r$  pertencerá ao conjunto dominante eficiente de uma árvore  $A$  somente quando  $A$  puder ser dividida em subárvores do tipo ilustrado na Figura 4.9. Em qualquer outra situação, a inclusão de  $r$  no conjunto dominante eficiente implica que  $A$  não será eficientemente dominável.  $\square$



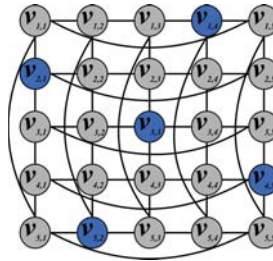
Vale ressaltar que, devido à natureza bastante restritiva da dominação eficiente, grande parte das caracterizações conhecidas consideram grafos regulares. Quando  $G$  é um hipercubo, por exemplo, uma generalização em grafos de um resultado clássico de Golay [57] na teoria dos códigos permite afirmar que tais grafos são eficiente domináveis, conforme o Teorema 4.9.

**Teorema 4.9 (Golay [57])** *Um hipercubo  $Q_k$  é eficientemente dominável se, e somente se,  $k+1 = 2^j$ , para todo  $j \in \mathbb{Z}^+$ .*

O resultado a seguir caracteriza os toros que possuem conjuntos dominantes eficientes:

**Teorema 4.10 (Gu, Jia e Shen [61])** *Sejam  $j \geq 3$  e  $k \geq 2$  números inteiros. O toro  $C_j \times C_k$  possui um conjunto dominante eficiente se, e somente se,  $j$  e  $k$  forem múltiplos de 5.*

Os toros são grafos 4-regulares resultantes do produto cartesiano de dois ciclos. Na Figura 4.12, tem-se um toro  $C_5 \times C_5$  e seu conjunto dominante eficiente. Já o produto cartesiano de dois caminhos geram as grades. No Teorema 4.11 está enunciada uma caracterização de grades eficientemente domináveis. Na Figura 4.13 estão ilustrados exemplos de grafos que se enquadram neste resultado.

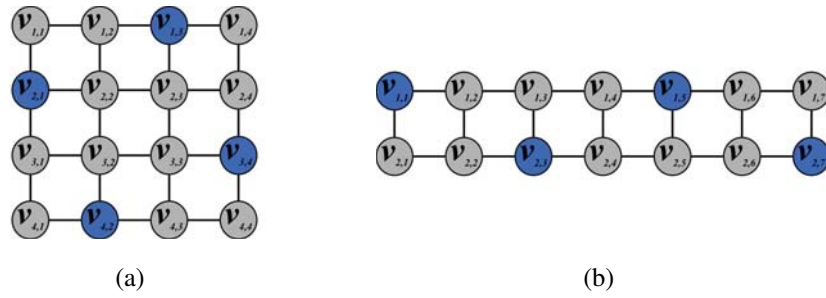


**Figura 4.12:** Um toro  $C_5 \times C_5$ .

**Teorema 4.11 (Livingston e Stout [87])** *Sejam  $j \geq 2$  e  $k \geq 2$  números inteiros. A grade  $G_{j,k}$  possui um conjunto dominante eficiente se, e somente se,*

- i)  $j = k = 4$ ; ou,
- ii)  $j = 2$  e  $k$  for ímpar.

*Além do mais, as soluções são únicas sob funções de automorfismo.*

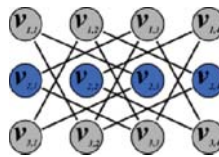


**Figura 4.13:** Grades eficientemente domináveis. (a) Grade  $4 \times 4$  e  
(b) Grade  $2 \times 7$ .

Livingston e Stout [87] ainda caracterizaram os caminhos conectados em cubos. No ano de 2007, Obradović, Peters e Ružić [96] forneceram uma caracterização completa de grafos circulantes com cordas de comprimento dois que são eficientemente domináveis. Além disso, estabeleceram condições necessárias e suficientes para existência de conjuntos dominantes eficientes em grafo circulantes que são 3-regulares e 4-regulares. Dejter e Serra [41] estudaram famílias de grafos Cayley que possuem no mínimo um conjunto dominante eficiente. Ao consideram os grafos de cavalo, Sinko e Slater [112, 113] obtiveram os resultados do Teorema 4.12. O grafo da Figura 4.14 ilustra o caso (iii) desse resultado.

**Teorema 4.12 (Sinko e Slater [112, 113])** *Sejam  $i$  e  $j$  números naturais. O grafo  $KN_{i,j}$  é eficientemente dominável se, e somente se:*

- i)  $i = 1$  e  $j \geq 1$  [112];
- ii)  $i = 2$  e  $j \geq 1$  [112]; e,
- iii)  $i = 3$  e  $j = 4$  [113].



**Figura 4.14:** Para  $3 \leq i \leq j$ ,  $KN_{i,j}$  é eficientemente dominável se, e somente se,  $i = 3$  e  $k = 4$ .

Agora, considere  $G$  um grafo simplicial de modo que dois de seus vértices simpliciais,  $v_i$  e  $v_j$ , sejam gêmeos idênticos. Observe que  $G$  é eficientemente dominável se, e somente se,  $G - \{v_j\}$  for eficientemente dominável. Diante disso, será apresentada a caracterização dos grafos simpliciais eficientemente domináveis (Teorema 4.16), obtida recentemente por Barbosa e Slater [9]. As proposições 4.13 e 4.14 são úteis na descrição do resultado.

**Proposição 4.13 (Barbosa e Slater [9])** *Considere: i)  $G$  um grafo simplicial livre de gêmeos idênticos; ii)  $S = \{s_1, \dots, s_t\}$  o conjunto de vértices simpliciais de  $G$ ; iii)  $S_2 = \{w \in V(G) : N^2(w) \cap S \neq \emptyset\}$  o conjunto de vértices de  $G$  que estão a uma distância 2 de qualquer vértice simplicial; e iv) um vértice  $u$  pertencente aos conjuntos  $S$  e  $S_2$ . Se  $v \in S$  é um vértice simplicial para o qual  $N^2(v) \cap S = \emptyset$ , então  $v$  estará em todo conjunto dominante eficiente de  $G$ .*

*Prova.* Assuma que  $v \in S$ . Consequentemente, existirá um vértice  $w \in N(v) \cap D$ . Como  $v$  é simplicial,  $N[v] \subseteq N[u]$ . Uma vez que  $G$  não possui gêmeos idênticos, existirá um vértice  $y \in N(w) \cap N^2(v)$ . Agora, observe que, por hipótese,  $y \notin S$ , pois  $N^2(v) \cap S = \emptyset$ . Nesse contexto, deverá existir um vértice  $z \in N(y) \cap S$ , pois  $G$  é simplicial. Dessa forma, se  $w \in D$ , então  $N[z] \cap D = \emptyset$ , o que é uma contradição.  $\square$

**Proposição 4.14 (Barbosa e Slater [9])** *Todo vértice a uma distância 2 de um vértice simplicial não poderá pertencer a um conjunto dominante eficiente.*

*Prova.* Seja  $v$  um vértice simplicial e  $y \in N^2(v)$ . Logo,  $N[v] \subseteq N^2(y)$ . Consequentemente, se  $y$  pertence a um pacote  $D$ , então  $D$  não dominará eficientemente o vértice  $v$ , visto que haverá pelo menos um vértice em  $N(v)$  já dominado por  $y$ . Logo, nenhum vértice a uma distância 2 de um vértice simplicial pertencerá a um conjunto dominante eficiente.  $\square$

Dessa forma:

**Teorema 4.15 (Barbosa e Slater [9])** *Considere: i)  $G$  um grafo simplicial livre de gêmeos idênticos; ii)  $S = \{s_1, \dots, s_t\}$  o conjunto de vértices simpliciais de  $G$ ; iii)  $S_2 = \{w \in V(G) : N^2(w) \cap S \neq \emptyset\}$  o conjunto de vértices de  $G$  que estão a uma distância 2 de qualquer vértice simplicial; iv)  $f(v) = |N(v) \cap S|$  a quantidade de vértices simpliciais adjacentes à  $v$ ; v) um vértice  $u$  pertencente aos conjuntos  $S$  e  $S_2$ ; e vi)  $X = \{x \in N(u) : f(x) \geq f(v), \forall v \in N(u)\}$ . Se  $G$  possui um conjunto dominante eficiente, então existe um único vértice  $x \in X$  pertencente a todo conjunto dominante eficiente de  $G$ , de modo que  $x \notin S_2$ .*

*Prova.* Uma vez que  $u \in S_2$ , o conjunto  $(\{u\} \cup N^2(u)) \cap S \neq \emptyset$  e também está contido em  $S_2$ . Logo, pela Proposição 4.14,  $u$  não estará em um conjunto dominante eficiente  $D$ . Dessa forma,  $|D \cap N(u)| = 1$ . Suponha, então, a existência de um vértice  $w \in N(u)$  tal que  $w \notin X$ . Observe que  $w \in S_2$ , pois o fato de não pertencer a  $X$  implica que algum vértice em  $X$  possui um vizinho simplicial não adjacente à  $w$ . Assim, pela Proposição 4.14,  $w$  não estará em um conjunto dominante eficiente  $D$ . Consequentemente, se  $G$  é eficientemente dominável por um conjunto  $D$ , então  $D \cap (X - S_2) \neq \emptyset$ .

Agora, considere  $x \in X$ , tal que  $w \notin S_2$ . Se  $|X - S_2| = 1$  a prova estará concluída. Diante disso, considere  $x_2 \in X - S_2$  tal que  $x \neq x_2$ . Se  $N(x) = N(x_2)$ , então se tem uma contradição, pois essa situação implicaria que tais vértices são gêmeos idênticos. Assuma que  $f(x) = f(x_2) = d \geq 2$  e que  $N(x) \cap S = \{u = v_1, \dots, v_d\}$ . Se algum vértice  $v_j \in N(x_2) \cap S$ , para  $d + 1 \leq j \leq t$ , então  $x$  pertencerá a  $S_2$ , gerando uma contradição. Dessa forma,  $N(x) \cap S = N(x_2) \cap S$ .

Suponha, então,  $y \in N(x_2)$  tal que  $y \notin S$ . Se  $s$  é um vértice simplicial em  $N(y)$ ,  $d(x_2, s) \leq 2$  e, como  $x_2 \notin S_2$ ,  $(x_2, s) \in E(G)$ . Como  $s \in N(x_2) \cap S$ , logo  $s \in N(x) \cap S$ , implicando que  $(x, s) \in E(G)$ . Escolhendo  $y \in N(x)$  tal que  $y \notin S$ , um argumento similar poderá ser utilizado, demonstrando que  $N[x] = N[x_2]$ , o que é uma contradição, já que  $G$  é livre de gêmeos idênticos.  $\square$

Concluindo esta seção, tem-se a caracterização dos grafos simpliciais eficientemente domináveis.

**Teorema 4.16 (Barbosa e Slater [9])** *Considere: i)  $G$  um grafo simplicial livre de gêmeos idênticos; ii)  $S = \{s_1, \dots, s_t\}$  o conjunto de vértices simpliciais de  $G$ ; iii)  $S_2 = \{w \in V(G) : N^2(w) \cap S \neq \emptyset\}$  o conjunto de vértices de  $G$  que estão a uma distância 2 de qualquer vértice simplicial; e, iv)  $D'$  um conjunto dominante construído da seguinte maneira: para cada vértice simplicial  $s$ , se  $s \notin S_2$ , então  $D' = D' \cup \{s\}$ . Se  $s \in S_2$ , então  $D' = D' \cup \{x\}$ , onde  $x$  é o vértice identificado no Teorema 4.15. Além do mais, se não existir tal vértice  $x$ ,  $G$  não é eficientemente dominável. Assim:  $G$  é eficientemente dominável se, e somente se, seu conjunto dominante  $D'$  também for um pacote.*

## 4.8 Aspectos Algorítmicos e de Complexidade

O tradicional problema de decisão envolvendo os conceitos de dominação e eficiência em grafos foi proposto por Bange, Barkauskas e Slater [7], em 1988, e pode ser expresso da seguinte forma:

---

### PROBLEMA DE DOMINAÇÃO EFICIENTE

---

**Instância:** Um grafo  $G = (V, E)$

**Questão:**  $G$  é eficientemente dominável, isto é,  $F(G) = n$ ?

---

Cabe ressaltar que, já é bem difundido e aceito o fato de que o problema da dominação eficiente é  $\mathcal{NP}$ -Completo para grafos gerais [7]. Em 1991, Fellows e Hoover [49] determinaram a  $\mathcal{NP}$ -Compleitude para grafos planares de grau máximo 3. Quando  $G$  é um grafo bipartido ou cordal, esse tipo de resultado também foi obtido por Smart e Slater [115], no ano de 1995.

Por outro lado, na situação em que  $G$  é uma árvore  $A$ , Bange, Barkauskas e Slater [7] demonstraram a existência de um algoritmo linear que determina seu número de dominação eficiente, decidindo se  $A$  é ou não eficiente dominável. Nesse contexto, para algum vértice  $v \in V(A)$ , considere  $Ds(v)$  e  $Fl(v)$  os conjuntos de descendentes e filhos de  $v$ , respectivamente. Além disso, sejam  $f_1(v)$ ,  $f_2(v)$  e  $f_3(v)$  funções de  $v$ , tais que:

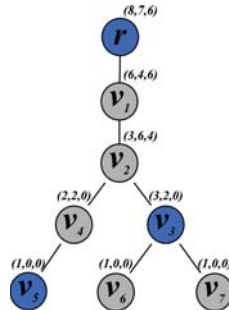
$$f_1(v) = 1 + |Fl(v)| + \sum_{w \in Fl(v)} f_3(w) \quad (4-1)$$

$$f_2(v) = 1 + \max_{w \in Fl(v)} (f_1(w) - \max(f_2(w), f_3(w))) + \sum_{w \in Fl(v)} \max(f_2(w), f_3(w)) \quad (4-2)$$

$$f_3(v) = \sum_{w \in Fl(v)} \max(f_2(w), f_3(w)) \quad (4-3)$$

A função  $f_1(v)$  corresponde ao número máximo de vértices eficientemente domináveis em  $Ds(v)$  por algum conjunto  $D \subseteq Ds(v)$ , de modo que  $v \in D$ . Já  $f_2(v)$  representa a quantidade máxima de vértices eficientemente domináveis em  $Ds(v)$  por algum conjunto  $D \subseteq Ds(v)$ , com algum filho de  $v$  inserido em  $D$ . Finalmente,  $f_3(v)$  é o número máximo de vértices eficientemente domináveis em  $Ds(v)$  por algum conjunto  $D \subseteq Ds(v)$ , tal que  $D \cap N[v] = \emptyset$ . Observe que, para toda folha  $w$ ,  $f_1(w) = 1$  e  $f_2(w) = f_3(w) = 0$ . Além disso, se  $r$  é o vértice raiz de  $A$ , então  $F(A) = \max(f_1(r), f_2(r), f_3(r))$ .

No grafo da Figura 4.15 está ilustrada uma árvore eficientemente dominável. Observe que cada vértice  $v$  está acompanhado por uma tripla que contém, respectivamente, o valor para  $f_1(v)$ ,  $f_2(v)$  e  $f_3(v)$ . Conforme indicado por Bange, Barkauskas e Slater [7], a obtenção de todas as triplas pode ser realizada em tempo linear: a partir da raiz  $r$ , realize um percurso em *pós-ordem*. Após a avaliação de todos os vértices, se  $\max(f_1(r), f_2(r), f_3(r)) = |V(A)|$  então  $A$  é eficientemente dominável.



**Figura 4.15:** Árvore eficientemente dominada, onde cada vértice  $v$  está acompanhado por uma tripla  $(f_1(v), f_2(v), f_3(v))$ .

Além das árvores, o problema de dominação eficiente pode ser resolvido em

tempo linear quando o grafo está restrito às seguintes classes: série-paralelo generalizado [59], de trapezóides [85] e de permutação [85]. Nesse ponto, convém ressaltar que a identificação e o reconhecimento de vértices e grafos simpliciais pode ser realizada em tempo polinomial [30]. Diante desse fato, observe que o Teorema 4.16 permite decidir se  $F(G) = n$  quando  $G$  é um grafo simplicial livre de gêmeos [9]. Apesar disso, decidir se  $F(G) \geq k$ , onde  $k < |V(G)|$ , é um problema  $\mathcal{NP}$ -Completo, mesmo quando restrito aos grafos simpliciais, conforme demonstrado por Barbosa e Slater [9].

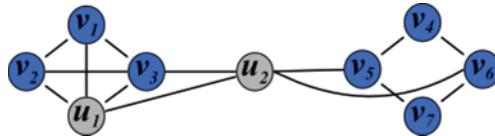
## Múltipla Dominação Eficiente em Grafos

### 5.1 Apresentação

Nos capítulos anteriores, foram abordados tópicos relacionados à dominação clássica e à dominação eficiente em grafos. Já o presente capítulo discorre sobre uma situação específica da  $(j, k)$ -dominação eficiente [105], em que o inteiro  $j$  está fixado em 1. Tal variação é denominada *Múltipla Dominação Eficiente* e, conforme será visto, esse conceito pode ser interpretado como uma generalização da dominação eficiente em grafos. O texto está apresentado em uma única seção que aborda propriedades de conjuntos múltiplos dominantes eficientes, algumas caracterizações e a complexidade de um problema de decisão relacionado.

### 5.2 Conjuntos $k$ -Dominantes Eficientes em Grafos

Considere um inteiro  $k$  de modo que  $1 \leq k \leq n$ . Diz-se que  $D \subseteq V(G)$  é um *conjunto  $k$ -dominante eficiente* de  $G$  se para todo vértice  $v \in V$  a condição  $|N[v] \cap D| = k$  for satisfeita, definindo  $G$  como um grafo *eficientemente  $k$ -dominável*. Na Figura 5.1 está ilustrado um grafo eficientemente 3-dominável pelo conjunto  $D = \{v_1, \dots, v_7\}$ .



**Figura 5.1:** Grafo com um conjunto 3-dominante eficiente.

Se  $D$  é um conjunto  $k$ -dominante eficiente, então a seguinte proposição é uma condição necessária para a sua existência em um grafo  $G$  qualquer:

**Proposição 5.1** *Se  $G$  é eficientemente  $k$ -dominável, então  $\delta(G) \geq k - 1$ .*

*Prova.* Para que um vértice  $v \in V(G)$  seja eficientemente  $k$ -dominado, uma de duas situações deve ocorrer. Se  $v \in D$ ,  $|N(v) \cap D| = k - 1$ . Por outro lado, se  $v \notin D$ ,  $|N(v) \cap D| = k$ .

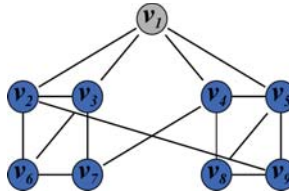
Dessa forma, se existir um vértice  $w \in V(G)$ , tal que  $d(w) = k - 2$ , então  $w$  não pode ser eficientemente  $k$ -dominável. Assim,  $\delta(G) \geq k - 1$ .  $\square$

Consequentemente, se um vértice  $v \in V(G)$  possui grau  $k - 1$ , sua vizinhança fechada  $N[v]$  deverá estar incluída em qualquer conjunto  $k$ -dominante eficiente:

**Proposição 5.2** *Seja  $v \in V(G)$  um vértice de grau  $k - 1$ . Qualquer conjunto  $k$ -dominante eficiente  $D$  de  $G$  deverá incluir  $N[v]$ .*

*Prova.* Suponha que  $v$  não pertença a  $D$ . Se  $N(v) \subseteq D$ ,  $v$  será eficientemente  $(k - 1)$ -dominado. Logo, qualquer conjunto  $k$ -dominante eficiente  $D$  só dominará  $v$   $k$  vezes se  $N[v] \subseteq D$ .  $\square$

Agora, observe que o subgrafo  $G[D]$  induzido pelos vértices de um conjunto  $k$ -dominante eficiente  $D$  é  $(k - 1)$ -regular. Logo, quando  $k = 1$ ,  $G[D]$  é um conjunto independente. Similarmente, na situação em que  $k = 2$ ,  $G[D]$  induz a um emparelhamento e, quando  $k = 3$ ,  $G[D]$  é constituído de uma ou mais componentes isomorfas aos ciclos. Nesse ponto, cabe ressaltar que decidir se um grafo  $G$  possui um subgrafo  $r$ -regular é um problema  $\mathcal{NP}$ -Completo, conforme demonstrado por Chvátal *et al.* [31] para  $r \geq 3$ . No grafo da 5.2, tem-se um grafo e seu conjunto 4-dominante eficiente.



**Figura 5.2:** Grafo com um conjunto 4-dominante eficiente de cardinalidade 8.

**Proposição 5.3** *Seja  $G$  um grafo eficientemente  $k$ -dominável por um conjunto  $D$ . O subgrafo  $G[D]$  induzido pelos vértices do conjunto  $k$ -dominante eficiente é  $(k - 1)$ -regular.*

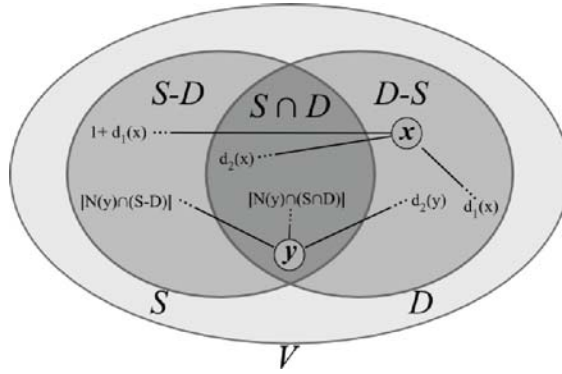
*Prova.* Seja  $D_l = \{v_1, \dots, v_l\}$  um conjunto  $k$ -dominante eficiente de  $G$ , onde  $k \leq l$ . Se  $G$  é um grafo eficientemente  $k$ -dominável,  $G[D_l]$  também será. Isto só é possível se cada vértice  $v_i$  de  $D_l$  for adjacente a outros  $k - 1$  vértices pertencentes a  $D_l - \{v_i\}$ . Dessa forma,  $G[D_l]$  é um grafo  $(k - 1)$ -regular.  $\square$

No capítulo anterior, foi visto que qualquer conjunto dominante eficiente de um grafo  $G$  possui a mesma cardinalidade. Um resultado similar para a múltipla dominação eficiente foi obtido por Rubalcaba e Slater [105]:



**Teorema 5.4 (Rubalcaba e Slater [105])** *Se  $G$  possui um conjunto eficientemente  $k$ -dominável  $D \subseteq V$ , então  $|D| = \gamma_{\times k}(G)$ . Em particular, todo conjunto eficientemente  $k$ -dominável possui a mesma cardinalidade.*

*Prova.* Seja  $D \subseteq V(G)$  um conjunto eficientemente  $k$ -dominável de um grafo  $G$ . Por definição, o número de  $k$ -dominação  $\gamma_{\times k}(G)$  satisfaz  $\gamma_{\times k}(G) \leq |D|$ . Considere, então,  $S \subseteq V$  como um conjunto  $k$ -dominante mínimo de  $G$ . A demonstração consiste em verificar que  $|S| \geq |D|$ , implicando em  $|D| = |S| = \gamma_{\times k}(G)$ . Para tanto, lembre-se que cada vértice  $v \in D$  possui  $k - 1$  vizinhos em  $D$  e, além disso, cada vértice  $v \in V - D$  possui  $k$  vizinhos em  $D$ . Consequentemente, cada vértice  $v \in S - D$  possui exatamente  $k$  vizinhos em  $D$ . Para facilitar a compreensão desta prova, considere também a Figura 5.3, na qual é ilustrado um esquema que visa representar o relacionamento entre vértices  $x$  e  $y$  (pertencentes aos conjuntos  $S \cap D$  e  $D - S$ , respectivamente) com a quantidade de vizinhos que eles possuem nos conjuntos  $S - D$ ,  $S \cap D$  e  $D - S$ . O vértice  $x$ , por exemplo, possui  $d_2(x)$  vizinhos em  $S \cap D$ .



**Figura 5.3:** Esquema que relaciona os vértices  $x$  e  $y$  com as suas respectivas quantidades de vizinhos nos conjuntos  $S - D$ ,  $S \cap D$  e  $D - S$ .

Agora, considere  $x \in D - S$ ,  $d_1(x) = |N(x) \cap (D - S)|$  e  $d_2(x) = |N(x) \cap (D \cap S)|$ . Observe que  $d_1(x)$  e  $d_2(x)$  correspondem, respectivamente, à quantidade de vizinhos de  $x \in D - S$  que estão somente em  $D$ , e em  $D$  e  $S$  ao mesmo tempo. Logo,  $d_1(x) + d_2(x) = k - 1$ . Uma vez que  $x$  é  $k$ -dominado por  $S$ ,  $|N(x) \cap S| \geq k$  e, então,  $|N(x) \cap (S - D)| \geq (k - d_2(x)) = 1 + d_1(x)$ . Para cada  $y \in D \cap S$ , seja  $d_2(y) = |N(y) \cap (D - S)|$  a quantidade de vizinhos de  $y$  que estão apenas em  $D$ . Nesse caso, note que  $|N(y) \cap (S - D)| \geq d_2(y)$ , pois  $y$  tem pelo menos  $k - 1$  vizinhos em  $S$  e exatamente  $k - 1$  vizinhos em  $D$ . Se  $(S - D, D)$  é o conjunto de arestas entre  $S - D$  e  $D$ , então:

$$|(S - D, D)| \geq \sum_{x \in D - S} (1 + d_1(x)) + \sum_{y \in D \cap S} (d_2(y))$$

$$\begin{aligned}
|(S-D, D)| &\geq \sum_{x \in D-S} (1 + d_1(x)) + \sum_{x \in D-S} (d_2(x)) \\
|(S-D, D)| &\geq \sum_{x \in D-S} (1 + d_1(x) + d_2(x)) = k|D-S|. \tag{5-1}
\end{aligned}$$

Como cada vértice de  $S-D$  tem  $k$  vizinhos em  $D$  e  $|(S-D, D)| \geq k|D-S|$ , então  $k|S-D| \geq k|D-S|$ , o que só é possível se  $|S| \geq |D|$ . Portanto,  $|D| = |S| = \gamma_{\times k}(G)$ .  $\square$

A cardinalidade de um conjunto  $k$ -dominante eficiente pode ser estimada através de limites superiores. O limite do Teorema 5.5 está em função de  $k$ , da ordem  $n$  e grau máximo  $\Delta(G)$  de  $G$ . Já o limite do Teorema 5.6, além de envolver o inteiro  $k$  e a ordem  $n$ , considera o tamanho  $m$  do grafo. Ambos os limites são atingidos pelo grafo  $K_n$ .

**Teorema 5.5** *Se  $G$  é eficientemente  $k$ -dominável por um conjunto  $D$ , então*

$$|D| \geq \frac{kn}{\Delta(G) + 1}$$

*Prova.* Seja  $t$  o número de arestas entre  $D$  e  $V-D$ . Uma vez que  $\Delta(G) \geq d(v)$  e  $|N(v) \cap D| = k-1$  para todo  $v \in D$ , então:

$$t \leq (\Delta(G) - (k-1))|D|. \tag{5-2}$$

Como todo vértice em  $V-D$  é adjacente a  $k$  vértices de  $D$ , então:

$$t = k|V-D|. \tag{5-3}$$

Substituindo 5-3 em 5-2:

$$\begin{aligned}
k|V-D| &\leq (\Delta(G) - k + 1)|D| \\
k|V| - k|D| &\leq \Delta(G)|D| - k|D| + |D| \\
kn &\leq \Delta(G)|D| + |D| \\
|D| &\geq \frac{kn}{\Delta(G) + 1}. \tag{5-4}
\end{aligned}$$

$\square$

**Teorema 5.6** *Se  $G$  é eficientemente  $k$ -dominável por um conjunto  $D$ , então:*

$$|D| \geq \frac{2nk - 2m}{k+1}.$$

*Prova.* Seja  $|D|$  um conjunto  $k$ -dominante eficiente. Cada vértice  $v \in V - D$  possui  $k$  vizinhos em  $D$ . Além disso, cada vértice de  $D$  tem  $k - 1$  vizinhos em  $D$ . Logo:

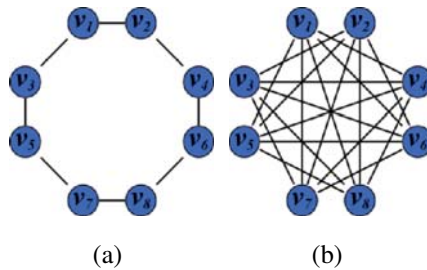
$$\begin{aligned}
 m &\geq k|V - D| + \frac{(k-1)|D|}{2} \\
 m &\geq k|V| - k|D| + \frac{k|D| - |D|}{2} \\
 2m &\geq 2k|V| - 2k|D| + k|D| - |D| \\
 2m &\geq 2kn - k|D| - |D| \\
 2m &\geq 2nk - |D|(k+1) \\
 |D|(k+1) &\geq 2nk - 2m \\
 |D| &\geq \frac{2nk - 2m}{k+1}.
 \end{aligned} \tag{5-5}$$

□

Define-se como o **número de  $k$ -dominação eficiente** e denota-se por  $F_k(G)$  a quantidade de vértices eficientemente  $k$ -domináveis em  $G$ . Quando  $G$  é um grafo  $k$ -regular,  $F_{k+1}(G) = n$ , conforme verificado no Teorema 5.7.

**Teorema 5.7** *Todo grafo  $G$   $r$ -regular é eficientemente  $(r+1)$ -dominável. Além disso, se  $\bar{G}$  é o complemento de um grafo  $r$ -regular, então  $\bar{G}$  é eficientemente  $(n-r)$ -dominável.*

*Prova.* Suponha  $G$   $r$ -regular. Se todo  $v \in V(G)$  pertencer ao conjunto dominante  $D$ , cada vértice será dominado exatamente  $r+1$  vezes por  $D$ . Portanto,  $D$  é um conjunto que domina todos os vértices do grafo exatamente  $r+1$  vezes. Considere, então, o complemento  $\bar{G}$  do grafo  $G$ .  $\bar{G}$  também é um grafo regular, mas de grau  $n-r-1$ . Logo,  $\bar{G}$  é eficientemente  $(n-r)$ -dominável □



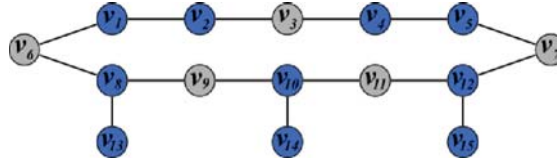
**Figura 5.4:** (a) Um grafo  $G$  de ordem 8, 2-regular e eficientemente 3-dominável (b)  $\bar{G}$  eficientemente 6-dominável.

Considere  $n_i$  e  $r_i$  a ordem e o grau do  $i$ -ésimo grafo linha iterado  $L^i(G)$  de um grafo  $G$  de ordem  $n_0$  e  $r_0$ -regular.

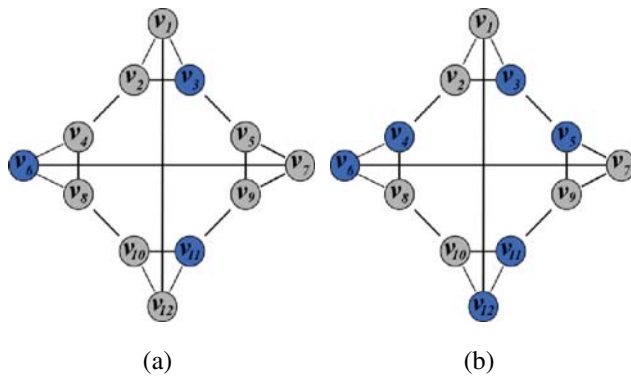
**Corolário 5.8** Se  $G = G_0$  um grafo de ordem  $n_0$  e  $r_0$ -regular, onde  $r_i \geq 3$  para  $0 \leq i \leq k$ , então,  $L^k(G)$  é eficientemente  $(2r_{k-1} - 1)$ -dominável.

*Prova.* Suponha  $G$   $r_0$ -regular. Logo,  $G$  é eficientemente  $(r_0 + 1)$ -dominável, pelo Teorema 5.7. Observe, então, que o grafo  $L(G_0)$  possui  $nr_0/2$  vértices. Como cada aresta de  $G_0$  é incidente a outras  $2(r_0 - 1)$  arestas, então cada vértice de  $L(G_0)$  será regular de grau  $2(r_0 - 1)$ . Em particular,  $L^k(G_0)$  é um grafo de ordem  $n_k = n_{k-1}r_{k-1}/2$  e regular de grau  $r_k = 2r_{k-1} - 2$ , de acordo o Teorema 2.2. Portanto,  $L^k(G)$  é eficientemente  $(2r_{k-1} - 1)$ -dominável. A restrição  $r_i \geq 3$  justifica-se pelo fato de que o grafo linha de um grafo 0, 1 ou 2-regular será um grafo vazio (para  $1 \leq r_i \leq 2$ ) e um ciclo (para  $r_i = 2$ ).  $\square$

Durante este trabalho, foi proposta uma conjectura que consistia na determinação de classes de grafos que possuíam, ao mesmo tempo, conjuntos  $i$ -dominantes eficientes e  $j$ -dominantes eficientes, sendo  $i \neq j$ . Conforme pode ser verificado na Figura 5.5, nem todos os grafos se enquadram nesse problema. Já a Figura 5.6 ilustra um grafo e seus conjuntos  $k$ -dominantes eficientes, para  $1 \leq k \leq 2$ . Ainda nesse contexto, Rubalcaba e Slater [105] obtiveram um importante resultado para grafos regulares (Teorema 5.9), ao estudarem a  $(j, k)$ -dominação eficiente.



**Figura 5.5:**  $F_1(G) \neq n$  e  $F_2(G) = n$



**Figura 5.6:** Grafos  $k$  eficientemente domináveis, para  $1 \leq k \leq 2$ .

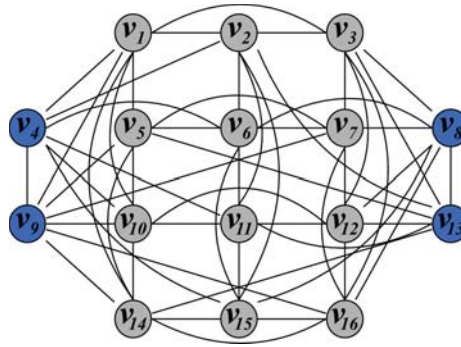
(a)  $F_1(G) = n$  e (b)  $F_2(G) = n$ .

**Teorema 5.9 (Rubalcaba e Slater [105])** Para um grafo  $r$ -regular  $G$  e  $1 \leq k \leq r$ ,  $G$  é eficientemente  $k$ -dominável se, e somente se, existir o conjunto  $D \subseteq V$  cujo subgrafo induzido  $G[D]$  é regular de grau  $k - 1$  e o subgrafo  $G[V - D]$  for regular de grau

$r - k$ . Além do mais,  $G$  é eficientemente  $k$ -dominável se, e somente se, for eficientemente  $(r - k + 1)$ -dominável.

*Prova.* Seja  $D$  um conjunto  $k$ -dominante eficiente. Pela Proposição 5.3,  $G[D]$  é regular de grau  $k - 1$ . Além disso, todo vértice em  $V - D$  possui  $k$  vizinhos em  $D$ . Logo,  $G[V - D]$  é um grafo regular de grau  $r - k$ , e cada vértice de  $D$  é adjacente a exatamente  $r - (k - 1)$  vértices em  $V - D$ . Portanto,  $V - D$  é um conjunto que domina eficientemente todos os vértices de  $G$   $r - k + 1$  vezes.  $\square$

O grafo da Figura 5.7 se enquadra no resultado anterior, para  $r = 7$  e  $k = 6$ .



**Figura 5.7:** Um grafo  $G$  e seu conjunto duplo dominante eficiente  $D = \{v_4, v_8, v_9, v_{13}\}$ . Observe que  $V - D$  é um conjunto 6-dominante eficiente.

Em 2005, Chellali, Khelladi e Maffray [28] construíram uma coleção  $\mathcal{A}$  de árvores que possuem um único conjunto 2-dominante eficiente. Além disso, demonstraram que todas as árvores eficientemente 2-domináveis pertencem à  $\mathcal{A}$ . A descrição de tais resultados considera a proposição a seguir:

**Proposição 5.10 (Chellali, Khelladi e Maffray [28])** *Se um grafo  $G$  possui um conjunto 2-dominante eficiente, então todo vértice de suporte será adjacente a uma única folha e não existem dois vértices de suporte adjacentes.*

*Prova.* Seja  $v$  uma folha e  $w$  seu vértice de suporte. Observe que qualquer conjunto 2-dominante eficiente  $D$  deverá incluir  $v$  e  $w$ . Consequentemente, se existir duas ou mais folhas adjacentes a  $w$ , tal vértice será dominado mais do que 3 vezes. Além disso, como cada vértice de suporte deve ser eficientemente dominado por si mesmo e por sua única folha, não existirão dois vértices de suporte adjacentes.  $\square$

Considere o conjunto  $D(A) \subseteq V(A)$  estabelecido para cada árvore  $A \in \mathcal{A}$ . A coleção  $\mathcal{A}$  pode ser definida da maneira como se segue. Primeiramente,  $A_1 \in \mathcal{A}$  é uma árvore com dois vértices  $x$  e  $y$ , de modo que  $D(A_1) = \{x, y\}$ . Em sequência, se  $A' \in \mathcal{A}$ ,

toda árvore  $A$  a ser incluída na coleção deve ser obtida a partir de  $A'$  por meio das seguintes operações:

- i) *Operação do Tipo-1*: Anexe um caminho  $P_2 = \langle u, v, w \rangle$ , em que  $u, v, w \notin V(A')$ , através da adição de uma aresta entre  $w$  e algum vértice de  $D(A')$ . Faça  $D(A) = D(A') \cup \{u, v\}$ ; e,
- ii) *Operação do Tipo-2*: Anexe um caminho  $P_4 = \langle a_1, \dots, a_5 \rangle$ , em que  $a_1, \dots, a_5 \notin V(A')$ , através da adição de uma aresta entre  $a_3$  e algum vértice de  $V(A') - D(A')$ . Faça  $D(A) = D(A') \cup \{a_1, a_2, a_4, a_5\}$ .

**Lema 5.11 (Chellali, Khelladi e Maffray [28])** *Se  $A \in \mathcal{A}$ , então  $D(A)$  é o único conjunto 2-dominante eficiente de  $A$ .*

*Prova.* Seja  $A \in \mathcal{A}$ . Por definição,  $A$  pode ser obtida através de uma sequência  $A_1, A_2, \dots, A_j = A$  ( $j \geq 1$ ) de árvores da coleção  $\mathcal{A}$ , sendo que cada árvore  $A_{i+1}$  é construída por meio de  $A_i$  utilizando uma das duas operações previamente definidas, para  $1 \leq i \leq j-1$ . A demonstração será realizada através de um processo de indução sobre  $j$ . Se  $j = 1$ , então  $D(A)$  é o único conjunto 2-dominante eficiente de  $A$ . Para  $j \geq 2$ , assume-se a veracidade para todas as árvores de  $\mathcal{A}$  construídas através de  $j-1$  aplicações de operações do Tipo-1 e Tipo-2. Seja  $A' = A_{j-1}$ . Considere os seguintes casos:

- *Caso (a):  $A$  é obtida de  $A'$  utilizando a operação do Tipo-1.*

Observe que  $D(A) = D(A') \cup \{u, v\}$  é um conjunto 2-dominante eficiente de  $A$ , uma vez que, pela hipótese de indução,  $A'$  é eficientemente 2-dominável. Frente à construção,  $w$  será adjacente a um vértice de  $D(A')$  e a um vértice de  $\{u, v\}$ . Além do mais, como  $D(A')$  é único, então  $D(A)$  também preservará a unicidade pela hipótese de indução.

- *Caso (b):  $A$  é obtida de  $A'$  utilizando a operação do Tipo-2.*

Observe que  $D(A) = D(A') \cup \{a_1, a_2, a_4, a_5\}$  é um conjunto 2-dominante eficiente de  $A$ . Pela hipótese de indução,  $A'$  é eficientemente 2-dominável. Note, também, que o caminho  $P_4$  foi anexado à árvore  $A'$  através da aresta entre o vértice  $a_3$  e um vértice que não pertence a  $D(A)$ . Portanto, fazendo  $D(A) = D(A') \cup \{a_1, a_2, a_4, a_5\}$ ,  $A$  será eficientemente 2-dominável. Como  $D(A')$  é único em  $A'$ ,  $D(A)$  também preservará a unicidade pela hipótese de indução.

□

**Teorema 5.12 (Chellali, Khelladi e Maffray [28])** *Uma árvore  $A$  é eficientemente 2-dominável se, e somente se,  $A \in \mathcal{A}$ .*

*Prova.* Pelo Lema 5.11, toda árvore de  $\mathcal{A}$  é eficientemente 2-dominável. Agora, considere  $A$  uma árvore de ordem  $n$  eficientemente 2-dominável por um conjunto  $D$ . Observe que  $n \geq 2$ . Se  $n = 2$ , então  $A \in \mathcal{A}$ . Se  $n \in \{3, 4\}$ , não existem árvores eficientemente 2-domináveis, conforme a Observação 5.10. Se  $n = 5$ , a única árvore eficientemente 2-dominável é isomorfa a um  $P_4$  e, portanto, pode ser obtida de  $A_1$  através de uma operação do Tipo-1.

Para  $n \geq 6$ , assumamos que toda árvore de ordem  $n'$  eficientemente 2-dominável está em  $\mathcal{A}$ , para  $2 \leq n' < n$ . Enraíze  $A$  em um vértice  $r$ . Seja  $u$  uma folha que esteja à distância máxima de  $r$ , e considere  $v$  o pai de  $u$  e  $w$  o pai de  $v$ . Conforme a Observação 5.10,  $u$  é o filho único de  $v$  e, assim,  $\{u, v\} \in D$  e  $w \notin D$ , sendo que  $w$  também não pode ser um vértice de suporte. Diante disso, todos os filhos de  $w$  devem ser vértices de suporte, sendo a quantidade limitada em, no máximo, 2 filhos, pois, caso contrário,  $w$  seria dominado mais do que duas vezes. Note que  $w \neq r$ , pois a árvore induzida por  $w$  e seus descendentes possuem 5 vértices. Portanto, seja  $z$  o pai de  $w$  na árvore enraizada.

Se  $w$  possui exatamente um filho, considere  $A' = A - \{u, v, w\}$ . Uma vez que  $\{u, v\} \subseteq D$  e  $w \notin D$ , então  $z \in D$ . Além disso,  $D - \{u, v\}$  é um conjunto 2-dominante eficiente de  $A'$ . Pela hipótese de indução,  $A' \in \mathcal{A}$  e, pelo Lema 5.11,  $D - \{u, v\} = D(A')$  é o único conjunto 2-dominante eficiente de  $A'$ . Assim,  $A$  pode ser obtida a partir de  $A'$  por meio da operação do Tipo-1, utilizando o caminho  $\langle u, v, w \rangle$ , fazendo com que  $A \in \mathcal{A}$ .

Por outro lado, se  $w$  possui exatamente dois filhos  $v$  e  $v'$ , seja  $T_w$  a subárvore induzida por  $w$  e seus descendentes, de modo que  $w$  seja a raiz. Pela Observação 5.10, cada filho de  $w$  deve ter exatamente um filho. Considere  $u$  filho de  $v$  e  $u'$  filho de  $v'$ . Logo,  $T_w$  é um  $P_4$  dado pela sequência  $\langle u, v, w, v', u' \rangle$ . Uma vez que  $v$  e  $v'$  são vértices de suporte e como  $u$  e  $u'$  são suas respectivas folhas,  $\{u, v, v', u'\} \subseteq D$ ,  $w \notin D$  e  $z \notin D$ . Dessa forma, o vértice  $z$  deve estar eficientemente dominado 2 vezes por  $D \cap A'$ . Pela hipótese de indução,  $A' \in \mathcal{A}$  e, pelo Lema 5.11,  $D \cap A' = D(A')$  é o único conjunto 2-dominante eficiente de  $A'$ . Assim,  $A$  pode ser obtida de  $A'$  por meio da operação do Tipo-2, utilizando o caminho  $\langle u, v, w, v', u' \rangle$ , fazendo com que  $A \in \mathcal{A}$  e completando a demonstração.  $\square$

Uma vez que as árvores são grafos acíclicos, a  $k$ -dominação eficiente em árvores não está definida para  $k \geq 3$ . Dessa forma, como consequência dos Teoremas 4.8 e 5.12, as árvores eficientemente  $k$ -domináveis estão completamente caracterizadas, onde  $1 \leq k \leq 2$ .

**Teorema 5.13 (Chellali, Khelladi e Maffray [28])** *Seja  $G$  um grafo 3-regular.  $G$  possui um conjunto 2-dominante eficiente se, e somente se,  $G$  possuir um emparelhamento perfeito de tal modo que  $G_M$  seja um grafo igualmente bipartido.*

*Prova.* Seja  $G$  um grafo cúbico eficientemente 2-dominável por um conjunto  $D$ . Então,  $G[D]$  é um grafo 1-regular cujas arestas definem um emparelhamento  $M_1$ . Observe que todo vértice de  $G$  tem dois vizinhos em  $V - D$ . Logo, o subgrafo  $G[V - D]$  é um 1-regular e também define um emparelhamento  $M_2$ . Portanto,  $G$  admite um emparelhamento perfeito  $M = M_1 \cup M_2$ . Agora, note que cada aresta de  $E - M$  liga um vértice de  $D$  a um vértice de  $V - D$  e que o subgrafo bipartido  $(D, V - D; E - M)$  é 2-regular, implicando em  $|D| = |V - D|$  e  $|M_1| = |M_2|$ . Portanto, o grafo  $G_M$  é igualmente bipartido com as partições  $M_1$  e  $M_2$ .

Por outro lado, considere  $M$  um emparelhamento perfeito de um grafo cúbico  $G$ , de modo que  $G_M$  seja igualmente bipartido nas partições  $A$  e  $B$ . Seja  $A_M$  (respectivamente  $B_M$ ) os vértices de  $G$  que estão contidos nas arestas correspondentes aos vértices de  $A$  (respectivamente  $B$ ). Desde que  $A$  (respectivamente  $B$ ) seja independente em  $G_M$ ,  $G[A_M]$  (respectivamente  $G[B_M]$ ) é regular de grau 1. Isso implica que todo vértice de  $A_M$  (respectivamente  $B_M$ ) possui dois vizinhos em  $B_M$  (respectivamente  $A_M$ ), uma vez que  $G$  é cúbico. Consequentemente,  $A_M$  e  $B_M$  são dois conjuntos eficientemente 2-domináveis de  $G$ .  $\square$

Conforme já descrito, o problema de determinar se  $G$  possui um conjunto dominante eficiente é  $\mathcal{NP}$ -Completo. Para finalizar este capítulo, generalizamos esse problema, definindo um problema de decisão sobre múltipla dominação eficiente em grafos:

---

**PROBLEMA DA MÚLTIPLA DOMINAÇÃO EFICIENTE**

---

**Instância:** Um grafo  $G = (V, E)$  e um inteiro  $k < n$

**Questão:**  $G$  é eficientemente  $k$ -dominável, isto é,  $F_k(G) = n$ ?

---

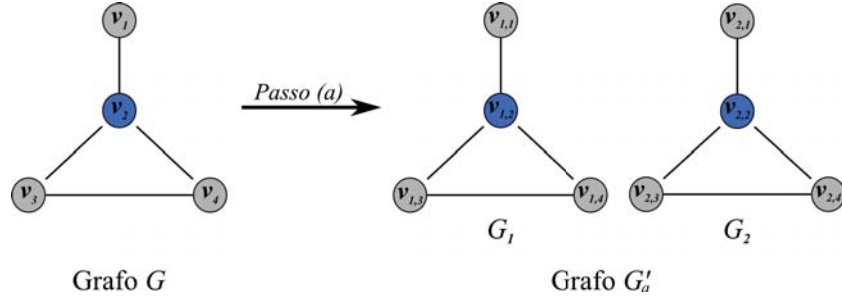
**Teorema 5.14** *Determinar se  $G$  possui um conjunto  $k$ -dominante eficiente é um problema  $\mathcal{NP}$ -completo.*

*Prova.* Dado um grafo  $G = (V, E)$ , um conjunto  $D \subseteq V$  e um inteiro  $k$ , a verificação de que todo vértice  $v \in V$  satisfaz à condição  $|N(v) \cap D| = k$  pode ser realizada em tempo polinomial, significando que esse problema pertence à classe  $\mathcal{NP}$ . Para provar que o problema também é  $\mathcal{NP}$ -Difícil, será demonstrada uma redução a partir do problema da dominação eficiente.

Considere  $G = (V, E)$ , tal que  $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ , e  $D$  um conjunto dominante eficiente de  $G$ . O grafo  $G' = (V', E')$  para o problema da múltipla dominação eficiente deve ser construído a partir de  $G$  observando os seguintes passos:



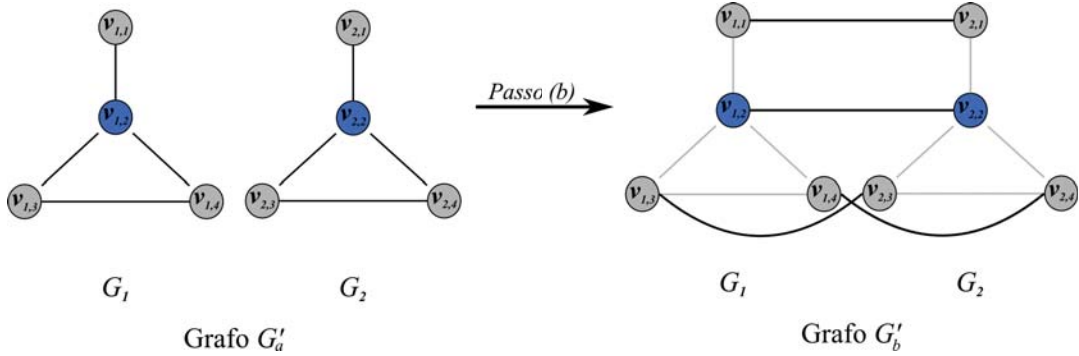
- *Passo (a)*: Criam-se  $k$  cópias de  $G$ , cada uma denotada por  $G_i = (V_i, E_i)$ , onde  $V_i = \{v_{i,1}, v_{i,2}, \dots, v_{i,n}\}$ , para  $1 \leq i \leq k$ . A união de todas as  $k$  cópias de  $G$  define o grafo  $G'_a = (V'_a, E'_a)$ , em que  $V'_a = \{V_1 \cup \dots \cup V_k\}$  possui  $kn$  vértices e  $E' = \{E_1 \cup \dots \cup E_k\}$  possui  $km$  arestas. A Figura 5.8 exemplifica esta etapa, considerando  $k = 2$ .



**Figura 5.8:** Primeiro passo da redução.

Observe que este passo pode ser realizado por um algoritmo cuja complexidade de tempo é  $O(n + m)$ , uma vez que é suficiente percorrer uma única vez o conjunto de vértices e o conjunto de arestas.

- *Passo (b)*: Dado o grafo  $G'_a$ , este passo consiste em adicionar arestas entre todo par de vértices  $v_{i,s}$  e  $v_{j,t}$  pertencentes à  $V'_a$  que satisfaçam  $i \neq j$  e  $s = t$ . O grafo resultante desta operação será denominado  $G'_b = (V'_b, E'_b)$ . A Figura 5.9 exemplifica esta etapa, considerando  $G'_a$  como sendo o grafo resultante da Figura 5.8 e  $k = 2$ .



**Figura 5.9:** Segundo passo da redução.

A seguir, tem-se um algoritmo para a criação do grafo  $G'_b$  de complexidade de tempo  $O(nk^2)$ . Os laços de repetições declaradas nas linhas 1, 2 e 3 são responsáveis pelo fornecimento dos índices dos vértices que serão conectados por uma nova aresta, conforme a descrição da operação do *Passo (b)*.

**Algoritmo 5.1:** *Aplicação do Passo (b) do processo de redução***Entrada:** Grafo  $G'_a$ ,  $n$  e  $k > 0$  inteiros.**Saída:** Grafo  $G'_b$ .

---

```

1 para  $l \leftarrow 1$  até  $n$  faça
2   para  $i \leftarrow 1$  até  $k - 1$  faça
3     para  $j \leftarrow i + 1$  até  $k$  faça
4        $\text{adicione a aresta } (v_{i,l}, v_{j,l})$ 
5     fim
6   fim
7 fim
8 retorna  $G'_b$ 

```

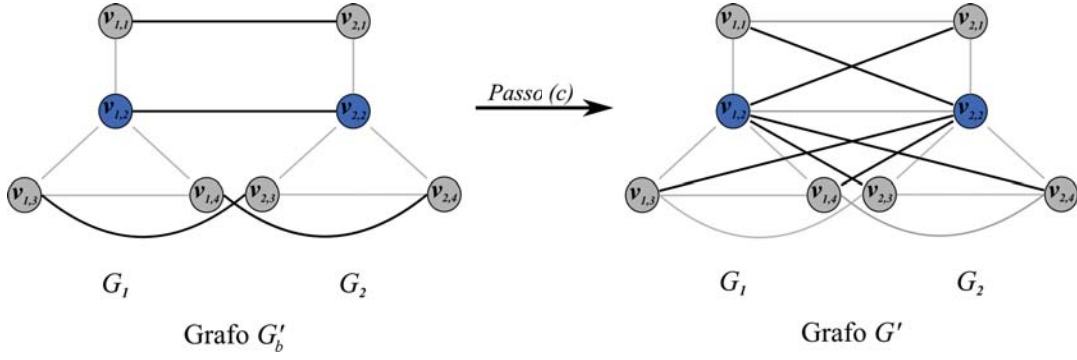
---

Seja  $T(n, k)$  uma função que avalia a complexidade de tempo do algoritmo anterior, considerando como parâmetros de entrada a ordem  $n > 0$  do grafo e um inteiro  $k > 0$ . A justificativa para a complexidade de tempo  $O(nk^2)$  é dada pelos somatórios referentes aos laços das linhas 1, 2 e 3:

$$\begin{aligned}
T(n, k) &= \sum_{l=1}^n \left( \sum_{i=1}^{k-1} \left( \sum_{j=i+1}^k 1 \right) \right) \\
&= \sum_{l=1}^n \left( \sum_{i=1}^{k-1} k - i \right) \\
&= \sum_{l=1}^n \frac{k(k-1)}{2} \\
T(n, k) &= \frac{nk^2 - nk}{2}.
\end{aligned} \tag{5-6}$$

- *Passo (c):* Se  $(v_s, v_t) \in E$  para  $s \leq n$  e  $t \leq n$ , adicionam-se arestas entre  $v_{i,s}$  e  $v_{j,s}$  ao grafo  $G'_b$ , com  $1 \leq i \leq k - 1$ ,  $1 \leq j \leq k$  e  $i \neq j$ . Para cada aresta de  $E$  serão necessárias, no máximo,  $k^2$  operações. Portanto, este passo tem seu número de operações limitado em  $mk^2$ . O grafo resultante é o grafo  $G'$ . A Figura 5.10 exemplifica esta etapa, considerando  $G'_b$  como sendo o grafo resultante da Figura 5.9 e  $k = 2$

Logo após a Figura 5.10, tem-se um algoritmo que descreve as operações deste passo e possui a complexidade de tempo  $O(mk^2)$  que pode ser verificada de maneira similar à avaliação da complexidade de tempo do algoritmo do passo anterior.



**Figura 5.10:** Terceiro e último passo da redução.

---

**Algoritmo 5.2:** Aplicação do Passo (c) do processo de redução

---

**Entrada:** Grafo  $G'_b$ ,  $m$  e  $k$  inteiros.

**Saída:** Grafo  $G'$ .

```

1  para  $l \leftarrow 1$  até  $m$  faça
2       $s \leftarrow$  índice  $s$  do vértice  $v_s$ ;
3       $t \leftarrow$  índice  $t$  do vértice  $v_t$ ;
4      para  $i \leftarrow 1$  até  $k-1$  faça
5          para  $j \leftarrow i+1$  até  $k$  faça
6              adicione as arestas  $(v_{i,s}, v_{j,t})$  e  $(v_{i,t}, v_{j,s})$ 
7          fim
8      fim
9  fim
10 retorna  $G'$ 

```

---

Como o valor de  $k$  é limitado por  $n$ , todos os passos acima podem ser aplicados em tempo polinomial. Agora, resta mostrar que  $G = G_1$  possui um conjunto dominante eficiente se, e somente se,  $G'$  possuir um conjunto  $k$ -dominante eficiente. Pelo *Passo (a)*, cada subgrafo  $G'[V_i]$  possui  $D'_i$  como conjunto dominante eficiente, uma vez que são cópias idênticas do grafo  $G = G_1$ . Com a aplicação do *Passo (b)*, todos os vértices dos conjuntos  $D'_i$  serão dominados eficientemente  $k$  vezes. Já o *Passo (c)* adiciona arestas ao grafo  $G'$  de modo que os vértices pertencentes a  $V' - D'_i$  sejam eficientemente  $k$ -dominados, para  $1 \leq i \leq k$ . Como todos os vertices de  $G'$  foram dominados exatamente  $k$  vezes pelo conjunto  $D' = \bigcup_{i=1}^k D'_i$ , então  $G'$  é um grafo  $k$ -dominado eficientemente. Por outro lado, suponha que  $G'$  possua um conjunto  $k$ -dominante eficiente. Dentre todos os conjuntos  $k$ -dominantes eficientes do grafo, escolha  $D'$  de modo que  $|D' \cap V_i| = l$ , para todo  $i$  de 1 até  $k$  e, se  $v_{i,h} \in D'$ , então  $v_{j,h}$  também estará em  $D'$ , para todo  $i \neq j$ . Observe agora que cada subgrafo induzido  $G'[V_i]$  é isomorfo ao subgrafo  $G_1$  e, que  $D' \cap V_i$  é um

conjunto dominante eficiente de cardinalidade  $l$  para  $G'[V_i]$ , com  $1 \leq i \leq k$ .

□

---

## Conclusões e Considerações Finais

---

Neste trabalho, foi realizado um estudo sobre a dominação em grafos, com ênfase em uma variação denominada dominação eficiente. Para ambos os conceitos, foram apresentadas contextualizações históricas, variações sobre a definição original, aplicações práticas no mundo real e resultados teóricos que se referem às propriedades de conjuntos dominantes e conjuntos dominantes eficientes, limites para  $\gamma(G)$  e  $F(G)$ , bem como resultados algorítmicos e de complexidade. Além disso, abordou-se a múltipla dominação eficiente, para a qual foram fornecidos alguns resultados obtidos durante o desenvolvimento desta dissertação:

- Limites para o tamanho de um conjunto  $k$ -dominante eficiente (Teoremas 5.5 e 5.6);
- A relação entre grafos regulares eficientemente  $k$ -domináveis e seu complemento (Teorema 5.7);
- A relação de um grafo regular eficientemente  $k$ -dominável e seus grafos linha iterados (Teorema 5.8); e,
- A caracterização da  $\mathcal{NP}$ -completude do problema da múltipla dominação eficiente em grafos arbitrários (Teorema 5.14).

Nesse contexto, devido a importância teórica e prática da dominação eficiente, emergem diversas questões relevantes para análise em estudos posteriores. Por exemplo:

- A caracterização de grafos eficientemente  $k$ -domináveis. Em particular, determinar quais grafos são eficientemente  $i$ -domináveis e  $j$ -domináveis ao mesmo tempo.
- A caracterização de classes de grafos cuja quantidade de vértices eficientemente  $k$ -domináveis (bem como a identificação dos mesmos) possa ser feita em tempo polinomial.
- A investigação de novos limites sobre o tamanho de um conjunto  $k$ -dominante eficiente.
- A determinação de classes de grafos para as quais o problema da múltipla dominação eficiente permanece  $\mathcal{NP}$ -Completo.

Cabe ressaltar, ainda, que alguns desses problemas foram estudados no decorrer desta dissertação, no entanto não foram obtidos resultados conclusivos. Sendo assim, espera-se que o presente trabalho forneça subsídios teóricos para estudos futuros voltados à dominação eficiente, bem como à resolução dessas questões em aberto.

---

## Referências Bibliográficas

---

- [1] AHRENS, W. **Mathematische unterhaltungen und spiele**. Leipzig, 1901.
- [2] AKYILDIZ, I. F.; SU, W.; SANKARASUBRAMANIAM, Y.; CAYIRCI, E. **Wireless sensor networks: a survey**. *Computer Networks*, 30(4):393–422, 2002.
- [3] ALON, N.; SPENCER, J. H. **The probabilistic method**. John Wiley & Sons, Inc., 2nd edition, 1992.
- [4] ARNAUTOV, V. I. **Estimation of the exterior stability number of a graph by means of the minimal degree of the vertices**. *Prikl. Math. I Programmirovanie Vyp.*, 11:3–8, 1974.
- [5] BALASUNDARAM, B.; BUTENKO, S. **Graph domination, coloring and cliques in telecommunications**, p. 865–890. Springer Science + Business Media, New York, 2006.
- [6] BANGE, D. W.; BARKAUSKAS, A. E.; SLATER, P. J. **Disjoint dominating sets in trees**. Technical report, Sandia Laboratories, 1978.
- [7] BANGE, D. W.; BARKAUSKAS, A. E.; SLATER, P. J. **Efficient dominating sets in graphs**. In: Ringeisen, R. D.; Roberts, F. S., editors, *Applications of Discrete Mathematics: Proceedings of the Third Conference on Discrete Mathematics*, p. 189–199, Clemson, South Carolina, 1988. Clemson University, SIAM.
- [8] BAOGEN, X.; COCKAYNE, E. J.; HAYNES, T. W.; HEDETNIEMI, S. T.; SHANGCHAO, Z. **Extremal graphs for inequalities involving domination parameters**. *Discrete Math.*, 216(1-3):1–10, 2000.
- [9] BARBOSA, R. M.; SLATER, P. J. **On efficient dominating sets in simplicial graphs**. Aceito para publicação em *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, 2009.
- [10] BERGE, C. **Théorie des graphes et ses applications**. In: *Collection Universitaire de Mathématiques*, volume VIII, p. 277. Il Dunod, Paris, 1958.

- [11] BERGE, C. **Graphs and hypergraphs**, volume 6 de **North-Holland Mathematical Library**. North-Holland, 1973.
- [12] BERTOSSI, A. A. **Dominating sets for split and bipartite graphs**. *Inform. Process. Lett.*, 19:37–40, 1984.
- [13] BIGGS, N. **Perfect codes in graphs**. *J. Combin. Theory Ser. B*, 15:289–296, 1973.
- [14] BLANK, M. M. **An estimate of the external stability number of a graph without suspended vertices**. *Prikl. Math. I Programmirovaniye Vyp.*, 10:3–11, 1973.
- [15] BOLLOBÁS, B.; COCKAYNE, E. J. **Graph-theoretic parameters concerning domination, independence, and irredundance**. *J. Graph Theory*, 49:241–249, 1979.
- [16] BONDY, J.; MURTY, U. **Graph Theory**. Springer Publishing Company, Incorporated, 2008.
- [17] BOOTH, K. S.; JOHNSON, J. H. **Dominating sets in chordal graphs**. *SIAM J. Comput.*, 11:191–199, 1982.
- [18] BRANDSTÄDT, A.; LE, V. B.; SPINRAD, J. P. **Graph classes: a survey**. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 1999.
- [19] BUCKLEY, F. **Iterated line graphs**. *Congr. Numer.*, 33:390–394, 1981.
- [20] BUCKLEY, F. **The size of iterated line graphs**. *Graph Theory Notes N. Y.*, 25:33–36, 1993.
- [21] CARDOSO, D. M.; ORESTES CERDEIRA, J.; DELORME, C.; SILVA, P. C. **Note: Efficient edge domination in regular graphs**. *Discrete Appl. Math.*, 156(15):3060–3065, 2008.
- [22] CARO, Y.; RODITTY, Y. **On the vertex-independence number and star decomposition of graphs**. *Ars Combin.*, 20:167–180, 1985.
- [23] CARO, Y.; RODITTY, Y. **A note on the  $k$ -domination number of a graph**. *Internat. J. Math. Sci.*, 13:205–206, 1990.
- [24] CARO, Y.; WEST, D. B.; YUSTER, R. **Connected domination and spanning trees with many leaves**. *SIAM J. Discret. Math.*, 13(2):202–211, 2000.
- [25] CHANG, G. J. **Handbook of combinatorial optimization**, chapter Algorithmic aspects of domination in graphs, p. 339–405. Kluwer Academic Publishers, 1998.
- [26] CHANG, G. J.; NEMHAUSER, G. L. **The  $k$ -domination and  $k$ -stability problems in sun-free chordal graphs**. *SIAM J. Discret. Methods*, 5:332–345, 1984.



- [27] CHANG, M. S. **Efficient algorithms for the domination problems on interval and circular-arc graphs**. *SIAM J. Comput.*, 27(6):1671–1694, 1998.
- [28] CHELLALI, M.; KHELLADI, A.; MAFFRAY, F. **Exact double domination in graphs**. *Discuss. Math. Graph Theory*, 25(3):291–302, 2005.
- [29] CHEN, Y. P.; LIESTMAN, A. L.; LIU, J. **Ad hoc and sensor networks**, volume 2 de **Wireless Networks and Mobile Computing**, chapter Clustering algorithms for ad hoc wireless networks, p. 145–164. Nova Science Publisher, 2006.
- [30] CHESTON, G. A.; HARE, E. O.; HEDETNIEMI, S.; LASKAR, R. C. **Simplicial graphs**. *Congr. Numer.*, 67:105–113, 1988.
- [31] CHVÁTAL, V.; FLEISCHNER, H.; SHEEHAN, J.; THOMASSEN, C. **Three-regular subgraphs of four regular graphs**. *J. Graph Theory*, 3:371–386, 1979.
- [32] CLARK, B. N.; COLBOURN, C. J.; JOHNSON, D. S. **Unit disk graphs**. *Discrete Math.*, (1-3):165–177, 1990.
- [33] CLARK, L. **Perfect domination in random graphs**. *J. Combin. Math. Combin. Comput.*, 14:173–182, 1993.
- [34] COAKE, T. R. **Using domination to analyse rna structures**. Master's thesis, Department of Mathematics, East Tennessee State University, 2005.
- [35] COCKAYNE, E. J.; DAWES, R. M.; HEDETNIEMI, S. T. **Total domination in graphs**. *Networks*, 10:211–219, 1980.
- [36] COCKAYNE, E. J.; GOODMAN, S.; HEDETNIEMI, S. **A linear algorithm for the domination number of a tree**. *Inform. Process. Lett.*, 4(2):41–44, November 1975.
- [37] COCKAYNE, E. J.; HEDETNIEMI, S. T. **Towards a theory of domination in graphs**. *Networks*, 7:247–261, 1977.
- [38] COCKAYNE, E. J.; KO, C. W.; SHEPHERD, F. B. **Inequalities concerning dominating sets in graphs**. Technical Report DM-370-IR, Dept. Mathematics. Univ. Victoria, June 1985.
- [39] CORNEIL, D. G.; PERL, Y. **Clustering and domination in perfect graphs**. *Discrete Appl. Math.*, 9:27–39, 1984.
- [40] DE JAENISCH, C. F. **Applications de l'analyse mathématique au jeu des échecs**. *Petrograd*, 1862.

- [41] DEJTER, I. J.; SERRA, O. **Efficient dominating sets in cayley graphs.** *Discrete Appl. Math.*, 129:319–328, 2003.
- [42] DEWDNEY, A. K. **Fast turing reductions between problems in np; chapter 4; reductions between np-complete problems.** Technical report, Dept. Computer Science, Univ. Western Ontario, 1981.
- [43] DIESTEL, R. **Graph theory**, volume 173 de **Graduate Texts in Mathematics.** Springer, 2006.
- [44] DOMKE, G. S.; DUNBAR, J. E.; MARKUS, L. R. **Gallai-type theorems and domination parameters.** *Discrete Math.*, 167-168:237–248, 1997.
- [45] ESCARPIT, R. **L'Information et la communication.** Hachette Livre, Paris, 1991.
- [46] EUBANK, S.; GUCLU, H.; KUMAR, V. S. A.; MARATHE, M. V.; SRINIVASAN, A.; TOROCZKAI, Z.; WANG, N. **Modelling disease outbreaks in realistic urban social networks.** *Nature*, 429:180–184, 2004.
- [47] FARBER, M. **Domination, independent domination, and duality in strongly chordal graphs.** *Discrete Appl. Math.*, 7:115–130, 1984.
- [48] FARBER, M.; KEIL, J. M. **Domination in permutation graphs.** *J. Algorithms*, 6:309–321, 1985.
- [49] FELLOWS, M. R.; HOOVER, M. N. **Perfect domination.** *Australas. J. Combin.*, 3:141–150, 1991.
- [50] FINK, J. F.; JACOBSON, M. S.; KINCH, L. F.; ROBERTS, J. **On graphs having domination number half their order.** *Period. Math. Hungar.*, 16:287–293, 1985.
- [51] FISHER, D.; FRAUGHNAUGH, K.; SEAGER, S. **Domination in graphs of maximum degree three.** In: *Proc. 8th Quadrennial Internat. Conf. on Graph Theory, Combinatorics, Algorithms and Applications*, volume 1, p. 411–421, 1998.
- [52] FLACH, P.; VOLKMANN, L. **Estimations for the domination number of a graph.** *Discrete Math.*, 80:145–151, 1990.
- [53] FRENDROP, A.; HENNING, M. A.; RANDERATH, B.; VESTERGAARD, P. D. **An upper bound on the domination number of a graph with minimum degree 2.** *Discrete Math.*, 10.1016/j.disc.2007.12.080, 2008.
- [54] GAREY, M. R.; JOHNSON, D. S. **Computers and intractability: a guide to the theory of NP-Completeness.** Freeman, New York, 1979.

- [55] GEORGES, J. P.; HALSEY, M. D.; SANAULLA, A. M.; WHITTLESEY, M. A. **Edge domination and graph structure**. *Congr. Numer.*, 76:127–144, 1990.
- [56] GODDARD, W.; OELLERMANN, O. R.; SLATER, P. J.; SWART, H. C. **Bounds on the total redundance and efficiency of a graph**. *Ars Combin.*, 54:129–138, 2000.
- [57] GOLAY, M. J. E. **Notes on digital coding**. *Proc. IRE*, 37:657, 1949.
- [58] GRINSTEAD, D. L.; SLATER, P. J. **Fractional domination and fractional packing in graphs**. *Congr. Numer.*, 71:153–172, 1990.
- [59] GRINSTEAD, D. L.; SLATER, P. J. **A recurrence template for several parameters in series-parallel graphs**. *Discrete Appl. Math.*, 54:51–168, 1994.
- [60] GRINSTEAD, D. L.; SLATER, P. J.; SHERWANI, N. A.; HOLMES, N. D. **Efficient edge domination problems in graphs**. *Inf. Process. Lett.*, 48(5):221–228, 1993.
- [61] GU, W.; JIA, X.; SHEN, J. **Independent perfect domination sets in meshes, tori and trees**. Pré-impressão., 2002.
- [62] HALLORAN, M.; LONGINI, I. M. J.; NIZAM, A.; YANG, Y. **Containing bioterrorist smallpox**. *Science*, 298:1428–1432, 2002.
- [63] HARARY, F.; HAYNES, T. W. **Double domination in graphs**. *Ars Combin.*, 55:201–213, 2000.
- [64] HARTLEY, R. V. L. **Transmission of information**. *The Bell System Technical Journal*, 7:335–363, 1928.
- [65] HAYNES, T. W.; HEDETNIEMI, S. T.; SLATER, P. J. **Domination in graphs: advanced topics**, volume 209 de **Pure and Applied Mathematics**. Marcel Dekker, New York, 1998.
- [66] HAYNES, T. W.; HEDETNIEMI, S. T.; SLATER, P. J. **Fundamentals of domination in graphs**, volume 208 de **Pure and Applied Mathematics**. Marcel Dekker, New York, 1998.
- [67] HEDETNIEMI, S.; LASKAR, R. C. **Recent results and open problems in domination theory**. In: Ringeisen, R. D.; Roberts, F. S., editors, *Applications of Discrete Mathematics: Proceedings of the Third Conference on Discrete Mathematics*, p. 205–218, Clemson, South Carolina, 1988. Clemson University, SIAM.
- [68] Hedetniemi, S. T.; Laskar, R. C., editors. **Topics on domination**, volume 86 de **Discrete Math**. Elsevier Science Publishers B. V., Amsterdam, The Netherlands, The Netherlands, 1990.

- [69] HEFEZ, A.; VILLELA, M. L. T. **Códigos corretores de erros**. Série de Computação e Matemática. 2002.
- [70] HENNING, M. A. **Domination in graphs: a survey**. *Congr. Numer.*, 116:139–172, 1996.
- [71] HENNING, M. A. **Domination in graphs: advanced topics**, volume 209 de **Pure and Applied Mathematics**, chapter Distance domination in graphs, p. 321–349. Marcel Dekker, New York, 1998.
- [72] HENNING, M. A. **A survey of selected recent results on total domination in graphs**. *Discrete Math.*, 309:32–63, 2009.
- [73] HUFFMAN, W. C.; PLESS, V. **Fundamentals of error-correcting codes**. Cambridge, 2003.
- [74] IMIELINSKI, T.; KORTH, H. **Mobile computing**. Kluwer Academic Publishers, 1996.
- [75] JACOBS, K. **Discrete stochastics**. Birkhäuser Verlag, 1992.
- [76] JOHNSON, T. W.; SLATER, P. J. **Maximum independent, minimally  $c$ -redundant sets in graphs**. *Congr. Numer.*, 74:193–211, 1990.
- [77] JUNGnickel, D. **Graphs, Networks and Algorithms (Algorithms and Computation in Mathematics)**. Springer-Verlag New York, Inc., Secaucus, NJ, USA, 2004.
- [78] KAPLAN, E.; CRAFT, D.; WEIN, L. **Emergency response to a smallpox attack: the case for mass vaccination**. *Proc Natl Acad. Sci. USA*, 99:10935–10940, 2002.
- [79] KEIL, J. M. **The complexity of domination problems in circle graphs**. *Discrete Appl. Math.*, 42:51–63, 1993.
- [80] KOH, K. M.; LIM, B. B.; SLATER, P. J.  **$h$ -domination in graphs**. *Discrete Math.*, 272:97–105, 2003.
- [81] KÖNIG, D. **Theorie der endlichen und unendlichen graphen**. Teubner, Leipzig, 1936.
- [82] KRATSCH, D. **Domination and total domination on asteroidal triple-free graphs**. *Discrete Appl. Math.*, 99(1-3):111–123, 2000.
- [83] KRATSCH, D.; STEWART, L. **Domination on cocomparability graphs**. *SIAM J. Discrete Math.*, 6(3):400–417, 1993.

- [84] KRATSCH, D. **Domination in graphs: advanced topics**, volume 209 de **Pure and Applied Mathematics**, chapter Algorithms, p. 191–231. Marcel Dekker, New York, 1998.
- [85] LIANG, Y. D.; LU, C. L.; TANG, C. Y. **Efficient domination on permutation graphs and trapezoid graphs**. In: Jiang, T.; Lee, D. T., editors, *Proceedings of Third Annual International Computing and Combinatorics Conference (COCOON'97)*, volume 1276 de **Lecture Notes in Computer Science**. Springer, 1997.
- [86] LIAO, C.-S.; CHANG, G. J. **k-tuple domination in graphs**. *Inf. Process. Lett.*, 87(1):45–50, 2003.
- [87] LIVINGSTON, M.; STOUT, Q. F. **Perfect dominating sets**. *Congr. Numer.*, 79:187–203, 1990.
- [88] LU, C. L.; KO, M.-T.; TANG, C. Y. **Perfect edge domination and efficient edge domination in graphs**. *Discrete Appl. Math.*, 119(3):227–250, 2002.
- [89] LU, C. L.; TANG, C. Y. **Weighted efficient domination problem on some perfect graphs**. *Discrete Applied Mathematics*, 117(1-3):163–182, 2002.
- [90] MARCU, D. **A new upper bound for the domination number of a graph**. *Quart. J. Math. Oxford Ser. 2*, 36:221–223, 1985.
- [91] MCCUAIG, W.; SHEPHERD, B. **Domination in graphs with minimum degree two**. *J. Graph Theory*, 13:749–762, 1989.
- [92] MEIR, A.; MOON, J. W. **Relations between packing and covering numbers of a tree**. *Pacific J. Math.*, 61(1):225–233, 1975.
- [93] NEFF, J. M.; LANE, J. M.; FULGINITI, V. A.; HENDERSON, D. A. **Contact vaccinia: transmission of vaccinia from smallbox vaccination**. *J. Am. Med. Assoc*, 288:1901–1905, 2002.
- [94] NICOLAI, F.; SZYMZCAK, T. **Domination and homogeneous sets - a linear time algorithm for distance-hereditary graphs**. Technical report, Universität Duisburg, 1996.
- [95] NYQUIST, H. **Certain factors affecting telegraph speed**. *The Bell System Technical Journal*, 3:324–346, 1924.
- [96] OBRADOVIĆ, N.; PETERS, J.; RUŽIĆ, G. **Efficient domination in circulant graphs with two chord lengths**. *Inf. Process. Lett.*, 102:253–258, 2007.

- [97] ORE, O. **Theory of graphs**, chapter Dominating sets, covering sets and independent sets, p. 206–223. American Mathematical Society, 1962.
- [98] PAYAN, C. **Sur le nombre d'absorption d'un graphe simple**. *Cahiers Centre Études Rech. Opér.*, 2.3.4:171, 1975.
- [99] PAYAN, C.; XUONG, N. H. **Domination-balanced graphs**. *J. Graph Theory*, 6:23–32, 1982.
- [100] PTAFF, J.; LASKAR, R. C.; HEDETNIEMI, S. **Np-completeness of total and connected domination and irredundance for bipartite graphs**. Technical Report 428, Clemson University, Dept. Math. Sciences, 1983.
- [101] RANDERATH, B.; VOLKMANN, L. **Characterization of graphs with equal domination and covering number**. *Discrete Math.*, 191(1-3):159–169, 1998.
- [102] RANKA, S.; SAHNI, S. **Hypercube Algorithms: With Applications to Image Processing and Pattern Recognition**. Springer-Verlag, 1990.
- [103] REED, B. A. **Paths, stars and the number three**. *Combin. Probab. Comput.*, 5:277–295, 1996.
- [104] RHEE, C. J.; LIANG, Y. D.; DHALL, S. K.; LAKSHMIVARAHAN, S. **An  $o(n+m)$ -time algorithm for finding a minimum-weight dominating set in a permutation graph**. *SIAM J. Comput.*, 25(2):404–419, 1996.
- [105] RUBALCABA, R. R.; SLATER, P. J. **Efficient  $(j,k)$ -domination**. *Discuss. Math. Graph Theory*, 27(3):409–423, 2007.
- [106] SAMPATHKUMAR, E.; WALIKAR, H. B. **The connected domination number of a graph**. *J. Math. Phys. Sci.*, 13(6):607–613, 1979.
- [107] SANCHIS, L. A. **Maximum number of edges in connected graphs with a given domination number**. *Discrete Math.*, 87:64–72, 1991.
- [108] SANCHIS, L. A. **Bounds related to domination in graph with minimum degree two**. *J. Graph Theory*, 25(2):139–152, June 1997.
- [109] SHANNON, C. E. **A mathematical theory of communication**. *The Bell System Technical Journal*, 27:379–423, 1948.
- [110] SHEPHERD, F. B. **Hamiltonicity in claw-free graphs**. *J. Combin. Theory Ser. A*, B 53:173–194, 1991.

- [111] SILVA FILHO, J. G. **Informação, codificação e segurança de dados**. Technical report, Departamento de Engenharia Elétrica, Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, 1998.
- [112] SINKO, A.; SLATER, P. J. **An introduction to influence parameters for chessboard graphs**. *Congr. Numer.*, 172:15–27, 2005.
- [113] SINKO, A.; SLATER, P. J. **Efficient domination in knights graphs**. *AKCE J. Graphs Combin.*, 3(2):193–204, 2006.
- [114] SLATER, P. J. **Locating dominating sets and locating-dominating sets**. In: Alavi, Y.; Schwenk, A., editors, *Graph Theory, Combinatorics, and Applications, Proc. Seventh Quad. Internat. Conf. on the Theory and Applications of Graphs*, p. 1073–1079. John Wiley & Sons, Inc., 1995.
- [115] SMART, C. B.; SLATER, P. J. **Complexity results for closed neighbourhood order parameters**. *Congr. Numer.*, 112:83–96, 1995.
- [116] SOHN, M. Y.; XUDONG, Y. **Domination in graphs of minimum degree four**. In: *The China-Japan Joint Conference on Discrete Geometry, Combinatorics and Graph Theory (CJCDGCGT)*, 2005.
- [117] TSAI, K.; HSU, W. L. **Fast algorithms for the dominating set problem on permutation graphs**. *Algorithmica*, 9:109–117, 1993.
- [118] VIZING, V. G. **A bound on the external stability number of a graph**. *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 164:729–731, 1965.
- [119] WALIKAR, H. B.; ACHARYA, B. D.; SAMPATHKUMAR, E. **Recent developments in the theory of domination in graphs**. *MRI Lecture Notes in Mathematics, Mahta Research Instit., Allahabad*, volume 1, 1979.
- [120] WASSERMAN, S.; FAUST, K. **Social network analysis: methods and applications**. Cambridge University Press, 1999.
- [121] WEBER, K. **Domination number for almost every graph**. *Rostock. Math. Kolloq.*, 16:31–43, 1981.
- [122] WEST, D. B. **Introduction to Graph Theory (2nd Edition)**. Prentice Hall, August 2000.
- [123] WU, J.; LI, H. **Domination and its applications in ad hoc wireless networks with unidirectional links**. In: *ICPP '00: Proceedings of the Proceedings of the 2000 International Conference on Parallel Processing*, p. 189, Washington, DC, USA, 2000. IEEE Computer Society.

- [124] XING, H.-M.; HATTINGH, J. H.; PLUMMER, A. R. **On the domination number of hamiltonian graphs with minimum degree six.** *Appl. Math. Lett.*, 21(10):1037–1040, 2008.
- [125] XING, H.-M.; SUN, L.; CHEN, X.-G. **Domination in graphs of minimum degree five.** *Graphs Combin.*, 22:127–143, 2006.
- [126] YANNAKAKIS, M.; GAVRIL, F. **Edge dominating sets in graphs.** *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 38(3):364–372, 1980.
- [127] ZWINGLE, E. **Megacities.** *Natl Geogr. Mag.*, 202:70–99, 2002.



---

## Índice Remissivo

---

- $(v, w)$ -caminho, [26](#)
- $H$ -dominação, [42](#)
- $k$ -pacote, [34](#)
- árvore, [28](#)
  - caterpillar, [28](#)
  - enraizada, [28](#)
  - floresta, [28](#)
- adjacência
  - entre arestas, [22](#)
  - entre vértices, [22](#)
- aplicações
  - de conjuntos dominantes, [43](#)
- arestas
  - múltiplas, [22](#)
- bipartição igualitária, [25](#)
- caminho, [26](#)
- caterpillar, [28](#)
- centro, [27](#)
- ciclo, [27](#)
- cintura, [27](#)
- clique, [26](#)
- cobertura de vértices, [33](#)
- coeficiente
  - de estabilidade
    - externa, [39](#)
- componente conexa, [27](#)
- conjunto
  - $H$ -decomponível, [42](#)
  - $\gamma$ , [33](#)
  - $k$ -dominante, [41](#)
  - de arestas, [22](#)
  - de corte, [27](#)
  - de vértices, [22](#)
  - dominante, [32](#)
    - $H$ -decomponível, [42](#)
    - a uma distância  $l$ , [42](#)
    - aberto, [40](#)
    - conexo, [39](#)
    - eficiente, [34](#)
    - independente, [33](#)
    - minimal, [33](#)
    - total, [40](#)
  - independente
    - de arestas, [31](#)
    - de vértices, [31](#)
  - livre de enclave, [24](#)
  - pacote, [33](#)
- conjunto- $\gamma$ , [33](#)
- corona, [29](#)
- De Jaenisch, [37](#)
- diâmetro, [26](#)
- distância, [26](#)
- dominação
  - a distância, [42](#)
  - conexa, [39](#)
  - total, [40](#)
- emparelhamento, [31](#)
  - perfeito, [32](#)
- enclave, [23](#)
- estrela, [25](#)

- excentricidade, 26
- extremidades de uma aresta, 22
- floresta, 28
- folha, 24
- grade, 30
- grafo, 22
  - 3-barbell, 32
  - $k$ -conexo, 27
  - $k$ -partido, 25
    - completo, 25
  - $n$ -barbell, 32
  - acíclico, 27
  - bipartido, 25
  - cúbico, 24
  - complementar, 24
  - completo, 24
  - conexo, 27
  - das rainhas, 38
  - de disco unitário, 31
  - de Petersen, 24
  - de um emparelhamento, 32
  - desconexo, 27
  - eficientemente dominável, 35
  - equiemparelhável, 32
  - finito, 23
  - hamiltoniano, 27
  - igualmente bipartido, 25
  - isomórfico, 23
  - linha, 30
    - iterado, 30
  - multigrafo, 22
  - nulo, 23
  - planar, 23
  - pseudografo, 22
  - regular, 24
  - simples, 22
  - simplicial, 26
  - tripartido, 25
  - trivial, 22
  - vazio, 24
- grafos
  - isomórficos, 23
- grau
  - de um vértice  $v$ , 24
  - máximo de um grafo, 24
  - mínimo de um grafo, 24
- hipercubo, 29
- incidência de uma aresta, 22
- influência, 35
- isomorfismo, 23
- laço, 22
- múltipla dominação, 41
- número
  - de  $H$ -dominação, 42
  - de  $k$ -dominação, 41
  - de absorção, 39
  - de conexidade, 27
  - de dominação, 33
    - a uma distância  $l$ , 42
  - conexa, 40
  - eficiente, 35
  - total, 40
  - de empacotamento, 33
  - de independência, 31
- ordem, 22
- pacote, 33
- partição de grafos, 25
- partições, 25
- percurso, 28
  - pós-ordem, 28
- ponte, 27
- problema

- das rainhas, [37](#)
- produto cartesiano, [29](#)
- raio, [27](#)
- redes sem fio, [43](#)
- redudância, [35](#)
- simplexo, [26](#)
- subárvore, [28](#)
- subdivisão de uma aresta, [22](#)
- subgrafo, [25](#)
  - gerador, [25](#)
  - induzido, [25](#)
  - maximal, [25](#)
  - próprio, [25](#)
- supergrafo, [25](#)
- tamanho, [22](#)
- toro, [30](#)
- vértice
  - ancestral, [28](#)
  - de corte, [27](#)
  - de suporte, [24](#)
  - descendente, [28](#)
  - dominado, [32](#)
  - dominante, [32](#)
  - filho, [28](#)
  - folha, [24](#)
  - isolado, [24](#)
  - pai, [28](#)
  - penúltimo, [28](#)
  - pendente, [24](#)
  - raiz, [28](#)
  - saturado, [31](#)
  - simplicial, [26](#)
- vizinhança
  - aberta, [23](#)
  - aberta a uma distância, [26](#)
  - fechada, [23](#)
- fechada a uma distância, [26](#)