Essential Skills Mathematics

*Modulewijzer*

Module A

*Rekenen met getallen & letters*

**Leerdoelen en onderwerpen**

**Leerdoelen**

Na deze module bestudeerd te hebben moet je:

* Weten wat een term en wat een factor is
* Haakjes kunnen wegwerken en kunnen ontbinden in factoren met getallen
* Een getal kunnen ontbinden in priemfactoren
* Kunnen rekenen met breuken, machten en wortel
* Kunnen rekenen met letters

## **Onderwerpen**

A1. Termen, Factoren en haakjes

A2. Priemfactoren

A3. Breuken

A4. Machten

A5. Wortels

Antwoorden van de opgaven

**Boek**

Je kan gebruikmaken van het volgende boek als aanvullend materiaal:

Basisvaardigheden Wiskunde HTO / 4e druk. ISBN: 978-90-01-57517-5

In de tabel op de volgende pagina is aangegeven welke paragrafen in het boek overeenkomen met de verschillende paragrafen van deze studiewijzer.

|  |  |
| --- | --- |
| **Paragraaf studiewijzer** | **Paragraaf / pagina boek** |
| A1.1. Termen en factoren | - |
| A1.2. Haakjes wegwerken | §3.1 / p.28 |
| A1.3. Ontbinden in factoren | §3.3 / p.32 |
| A2.1. Ontbinden in priemfactoren | - |
| A3.1. Breuken vereenvoudingen | §1.4 / p. 16 |
| A3.2. Breuken optellen en aftrekken | §1.5 / p.18 |
| A3.3. Breuken vermenigvuldigen | §1.6 / p.20 |
| A3.4. Breuken delen | §1.6 / p.20 |
| A4.1. Machten vermenigvuldigen | §2.1 – 2.2 / p.22-24 |
| A4.2. Machten delen | §2.1 – 2.2 / p.22-24 |
| A4.3. Macht van een macht | §2.1 – 2.2 / p.22-24 |
| A5.1. Rekenen met wortels | §2.3 / p.26, zie opgave 12 |
| A5.2. Wortels vereenvoudigen | - |
| A5.3. Wortels schrijven als oneigenlijke macht | §2.3 / p.26 |

# **A1. Termen, factoren en haakjes**

In deze module ga je rekenen met getallen en letters. Letters in algebraïsche uitdrukkingen stellen in deze module steeds getallen voor.

* a + b is de som van a en b,
* a − b is het verschil van a en b, enzovoort.

Bij het vermenigvuldigen vervangen we het maalteken vaak door een punt, of

we laten het helemaal weg. We schrijven dus vaak a · b of ab in plaats van a×b.

Vaak gebruiken we ook mengvormen van letters en getallen: 2ab betekent

2 × a × b. We zetten bij dergelijke combinaties het getal voorop:

* dus 2ab en niet a2b of ab2.

**Prioriteitsvolgorde**

Bij optellen, aftrekken, vermenigvuldigen en delen gelden een aantal prioriteitsregels:

* Optellen en aftrekken wordt uitgevoerd in de volgorde waarin deze bewerkingen voorkomen, van links naar rechts.
* Vermenigvuldigen en delen wordt uitgevoerd in de volgorde waarin deze bewerkingen voorkomen, van links naar rechts.
* Vermenigvuldigen en delen hebben voorrang boven optellen en aftrekken.

Hieronder volgen enkele voorbeelden. Rechts van het “=”teken wordt aangegeven wat de juiste volgorde van rekenen is.

* a − b + c = (a − b) + c
* a – b ∙ c = a − (b ∙ c)
* a + b / c = a + (b / c)
* a / b ∙ c = (a / b) ∙ c

Tip: Gebruik haakjes in alle gevallen waarin misverstanden in de volgorde

van het uitvoeren van algebraïsche bewerkingen zouden kunnen ontstaan!

A1.1. Termen en factoren

Als we gaan rekenen en daarbij gaan optellen, aftrekken en vermenigvuldigen hebben we te maken met verschillende definities.

Een *som* of *verschil* bestaat uit *termen*, een *product* bestaat uit *factoren*.

* Bekijk de volgende berekening: 2 + 3 = 5. Deze berekening bevat twee termen, namelijk 2 en 3.
* De berekening 3 ∙ 5 = 15 bevat de twee factoren 3 en 5.

Laten we nu eens kijken naar de som 3 ∙ a + 5 ∙ b ∙ c.

* Hierbij zijn 3 ∙ a en 5 ∙ b ∙ c de termen. Ze worden immers gescheiden door een plus.
* De term 3 ∙ a bestaat uit twee factoren, namelijk 3 en a.
* De term 5 ∙ b ∙ **c** bestaat uit drie factoren, namelijk 5, b en c.

We kijken nu naar de machtsverheffing Het getal 4 wordt hierbij het exponent genoemd. Om te bepalen of deze machtsverheffing uit termen of factoren bestaat en hoeveel dit er zijn, schrijven we dit eerst uit. Machtsverheffen is namelijk herhaald vermenigvuldigen met hetzelfde getal:

* (de uitkomst is positief!)
* We hebben hier dus te maken met vier factoren (namelijk 4 maal -2)

Een ander voorbeeld is .

* (de uitkomst is negatief!)
* We hebben hier dus te maken met drie factoren (namelijk 3 maal -3)

**Optellen van termen met letters:**

De prioriteitsvolgorde en het onderscheid van termen en factoren is belangrijk bij de vereenvoudiging van expressies. Met vereenvoudigen wordt bedoeld is het herschrijven van een gegeven expressie in de meest eenvoudigste vorm.

**Voorbeeld 1:**

We hebben te maken met de expressie: 7 ∙ a + 4 ∙ a. Kort schrijf je dit als: 7a + 4a.

* We hebben hier te maken met 2 termen: “7a” en “4a”.
* We gaan op zoek naar gelijke termen.
* 7a, kan je ook schrijven als: a + a + a + a + a + a + a.
* 4a, kan je ook schrijven als: a + a + a + a.
* Als je beide bij elkaar optelt krijg je: 7a + 4a = (a+a+a+a+a+a+a) + (a+a+a+a) = 11a

**Voorbeeld 2:**

We hebben te maken met de expressie: 7 ∙ a + 2 ∙ a + 4 ∙ b. Oftewel: 7a + 2a + 4b.

* We hebben hier te maken met 3 termen: “7a”, “2a” en “4b”.
* We gaan op zoek naar gelijke termen.
* 7a, kan je ook schrijven als: a + a + a + a + a + a + a.
* 2a, kan je ook schrijven als: a + a.
* 4b, kan je ook schrijven als: b + b + b + b.
* a en b zijn geen gelijke termen en kan je dus ook niet bij elkaar optellen.
* Je krijgt dus: 7a + 2a + 4b = (a+a+a+a+a+a+a) + (a+a) + (b+b+b+b) = 9a + 4b.

**Voorbeeld 3:**

We hebben te maken met de expressie: 2 ∙ a + 3 ∙ a + 4 ∙ b + 2. Oftewel: 2a + 3a + 4b + 2.

* We hebben hier te maken met 4 termen: “2a”, “3a”, “4b” en “2”.
* We gaan op zoek naar gelijke termen.
* 2a en 3a zijn gelijke termen.
* 4b is de enige term met “b”.
* 2 is de enige term als los getal.
* We hebben dus te maken met 3 gelijke termen.
* Je krijgt dus: 2a + 3a + 4b + 2 = 5a + 4b + 2.

**Voorbeeld 4:**

We hebben te maken met de expressie: 2 ∙ a - 3 ∙ a + 4 ∙ b. Oftewel: 2a - 3a + 4b.

* We hebben hier te maken met 3 termen: “2a”, “-3a” en “4b”.
* Let hier op het “-“teken. Deze “hoort” bij de 3a.
* Je krijgt dus: 2a - 3a + 4b = -a + 4b.

### ***Opgave A1.1.***

Bereken en geef aan uit hoeveel termen/factoren de volgende sommen/producten bestaan:

1. -4 + 7
2. -7 ∙ a + 9 ∙ a + 2 ∙ b
3. -3 ∙ p ∙ q – 9 ∙ p ∙ q

Ga nu in Grasple aan de slag met opgaven van dit onderdeel om na te gaan of je de stof goed hebt begrepen.

A1.2. Haakjes wegwerken

Stel we hebben te maken met de volgende som: a (b + c).

* Er is nu sprake van een product van 2 factoren.
* We kunnen de haakjes wegwerken, met als resultaat een som van 2 termen.

Als je *haakjes* wilt wegwerken kun je de volgende regel toepassen:

* a (b + c) = a b + a c

**Voorbeeld 1**

* We hebben te maken met de som: 2 (a + b).
* Er is nu weer sprake van een product van 2 factoren.

Uitwerking:

* 2 (a + b) = 2 a + 2b = 2a + 2b.
* Rechts van het “=”teken staat nu een som van 2 termen: “2” + “2”.

**Voorbeeld 2**

* We hebben nu te maken met de som: -4 (4 ) – 4 = -4 (4) – 4.

Uitwerking:

* -4 (4) – 4 = -4 4 + -4 2 - 4x.
* Werk verder uit, door de producten uit te rekenen: -16 -8 - 4x.
* Werk verder uit, door gelijke termen bij elkaar op te tellen/af te trekken: -20x -8.

### ***Opgave A1.2.***

Werk de haakjes weg (niet uitrekenen):

a) 

b) 

c) 

d) 

Ga nu in Grasple aan de slag met opgaven van dit onderdeel om na te gaan of je de stof goed hebt begrepen.

A1.3. Ontbinden in factoren

Het *ontbinden in factoren* is de omgekeerde bewerking van het wegwerken van haakjes:

* a b + a c = a (b + c)

**Voorbeeld 1**

Kijk naar het volgende voorbeeld:

* 19 a + 19 b.
* 19 a + 19 b = 19 (a + b)

### ***Opgave A.1.3.***



Ontbind (niet uitrekenen):

a) 

b) 

c) 

Ga nu in Grasple aan de slag met opgaven van dit onderdeel om na te gaan of je de stof goed hebt begrepen.

# **A2. Priemfactoren**

De *delers* van een (geheel) getal zijn alle (gehele) getallen waardoor dat getal deelbaar is.

Elk geheel getal groter dan 1 heeft *minstens* 2 delers: de deler 1 en het getal zelf.

Een *priemgetal* heeft precies twee delers. Het eerste priemgetal is 2, daarna volgen 3, 5, 7, 11, 13, 17,... Elk geheel getal groter dan 1 is opgebouwd uit priemfactoren.

Om een getal in priemfactoren te ontbinden kijk je steeds wat het kleinste priemgetal is waardoor je kan delen. Bij het getal dat je vervolgens overhoudt, doe je dit ook, totdat je uitkomt op 1.

**Voorbeeld 1**

* Het getal 100.
* 100 kan je delen door priemgetal 2. Over blijft 50.
* 50 kan je delen door priemgetal 2. Over blijft 25.
* 25 kan je delen door priemgetal 5. Over blijft 5.
* 5 kan je delen door priemgetal 5. Over blijft 1.
* Dus: 100 = 2 2 = 2² 5².

**Voorbeeld 2**

* Het getal 360.
* 360 kan je delen door priemgetal 2. Over blijft 180.
* 180 kan je delen door priemgetal 2. Over blijft 90.
* 90 kan je delen door priemgetal 2. Over blijft 45.
* 45 kan je delen door priemgetal 3. Over blijft 15.
* 15 kan je delen door priemgetal 3. Over blijft 5.
* 5 kan je delen door priemgetal 5. Over blijft 1.
* Dus: 360 = 2 2 2 5 = . 5.

### ***Opgave A2.1.***



Ontbind de volgende getallen in priemfactoren:

a)  c) 

b)  d) 

Ga nu in Grasple aan de slag met opgaven van dit onderdeel om na te gaan of je de stof goed hebt begrepen.

**A3. Breuken**



Een *breuk* of *quotiënt* is te schrijven als: 

A3.1. Breuken vereenvoudigen

Een zelfde factor 'wegdelen' uit de teller en de noemer heet *vereenvoudigen*. Je gaat daarbij op zoek naar de grootste gemeenschappelijke deler van de teller en de noemer.

, waarbij “p” is de grootste gemeenschappelijke deler.

**Voorbeeld 1**

* = aangezien de grootste gemeenschappelijke deler gelijk is aan 50.
* Dit zie je niet altijd direct in 1x. Daarom kan je dit ook doen in kleinere stapjes.
* . Je kan nu zien dat je beide gemakkelijk door 10 kan delen.
* Je ziet nu dat je beide door 5 kan delen.
* = = = 200

**Voorbeeld 2**

* = aangezien de grootste gemeenschappelijke deler gelijk is aan 7.

Dit zie je niet altijd direct in 1x. Daarom kan je dit ook doen in kleinere stapjes. Begin bij het getal 2 en kijk of zowel de teller als noemer deelbaar is door dat getal. Zo niet, probeer dat met getal 3, weer niet? Doe hetzelfde met getal 4, etc..

* 21 en 14 kan je niet beide door 2 delen. Wel door 3.
* = =

Let op het handig wegschrappen van de 4 en de 5 in: 

Soms is het handig om teller en noemer met hetzelfde getal te vermenigvuldigen om de breuk 'eenvoudiger' te maken. In het algemeen:



Voorbeeld: 

### ***Opgave A3.1.***



Vereenvoudig:

a) 

b) 

c) 

Ga nu in Grasple aan de slag met opgaven van dit onderdeel om na te gaan of je de stof goed hebt begrepen.



A3.2. Breuken optellen en aftrekken

Breuken met dezelfde noemer heten *gelijknamig*. Gelijknamige breuken optellen/aftrekken gaat in het algemeen als volgt:

 en 

*Gelijknamige breuken* kun je zonder nadenken optellen/aftrekken. Bekijk de volgende twee voorbeelden:  en 

*Ongelijknamige breuken* moet je eerst gelijknamig maken. In het algemeen:

* 

* 

Bekijk de volgende twee voorbeelden:

* 
* 

### ***Opgave A3.2.***



Bereken:

a) 

b) 

******c) 

Ga nu in Grasple aan de slag met opgaven van dit onderdeel om na te gaan of je de stof goed hebt begrepen.

A3.3. Breuken vermenigvuldigen

Breuken vermenigvuldigen gaat als volgt:



Merk op dat bij het vermenigvuldigen van breuken het onbelangrijk is of de breuken gelijknamig zijn.

Voorbeeld: 

### ***Opgave A3.3.***



Bereken:

a) 

b) 

c) 

Ga nu in Grasple aan de slag met opgaven van dit onderdeel om na te gaan of je de stof goed hebt begrepen.





A3.4. Breuken delen

Delen door een breuk is vermenigvuldigen met de omgekeerde breuk:



**Voorbeelden**

* 
* 

Als laatste nog even dit: '*Delen door nul is flauwekul*'. Neem de noemer maar *vlak bij nul*, bijvoorbeeld 0.001 en kijk:

.

Evenzo , dit rijst de pan uit!

Nul delen door 'iets' levert nul op:  In het algemeen: , waarbij 

***Opgave A3.4.***

Bereken:

a)  b) 

Ga nu in Grasple aan de slag met opgaven van dit onderdeel om na te gaan of je de stof goed hebt begrepen.

**A4. Machten**

In hoofdstuk A1. hebben we gezien dat machtsverheffen herhaald vermenigvuldigen is. Laten we nu eens kijken naar een aantal rekenregels en voorbeelden.

* De eerste regel die we bekijken is de volgende: . Dus  maar ook .
* De volgende regel wordt vaak toegepast en is belangrijk: 

**Voorbeelden**

* 
* .

A4.1. Machten vermenigvuldigen

Als we *machten met elkaar vermenigvuldigen* kun je de volgende algemene rekenregel toepassen:

* 

Hierbij noem je  het grondtal en  en  de exponenten.

**Voorbeelden**

* 
* 

### ***Opgave A4.1.***

Schrijf korter:

a) 

b) 

c) 

d)   
Ga nu in Grasple aan de slag met opgaven van dit onderdeel om na te gaan of je de stof goed hebt begrepen.

A4.2. Machten delen

Bij *machten delen* kun je de volgende algemene rekenregel toepassen:



**Voorbeelden:**

* 
* 

### ***Opgave A4.2.***

Schrijf korter:

a) 

b) 

c) 

c) 

Ga nu in Grasple aan de slag met opgaven van dit onderdeel om na te gaan of je de stof goed hebt begrepen.

A4.3. Macht van een macht

Bij een *macht van een macht* kun je de volgende regel toepassen:



**Voorbeelden:**

* 
* 

***Opgave A4.3.***

Schrijf korter:

a) 

b) 

c) 

Ga nu in Grasple aan de slag met opgaven van dit onderdeel om na te gaan of je de stof goed hebt begrepen.





**A.5. Wortels**

A5.1. Rekenen met wortels

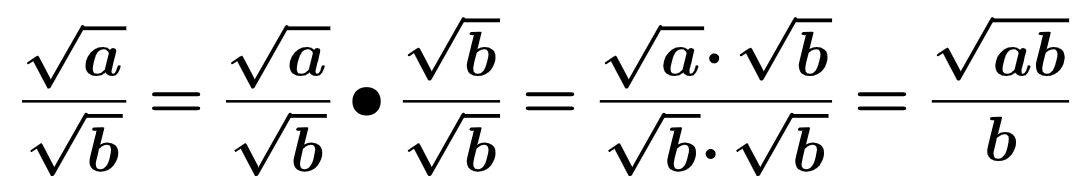
Laten we weer beginnen met wat schrijfwijzen en rekenregels. Als je bijvoorbeeld de wortel uit 2 kwadrateert krijg je 2 terug: .

Maar ook geldt:  en 

Hieruit kunnen we een aantal rekenregels herleiden.

* De eerste rekenregel: 
* De tweede rekenregel: *,* waarbij
* A picture containing text, clock, watch, gauge

  Description automatically generatedEen derde belangrijke regel is de volgende: 
* Zo noteren we ook als regel:

* De laatste regel betreft het wegwerken van de wortel in de noemer van een breuk  
    
  We zien dat in de noemer staat en het is de gewoonte om wortels in de noemer van een breuk weg te werken. We vermeniguldigen dus met en dat is eigenlijk vermenigvuldigen met 1, dus de waarde van de breuk blijft dezelfde. Daardoor kunnen we nu wel in de noemer wegwerken

**Voorbeelden**

* 
* 

A picture containing text, clock, watch, gauge

Description automatically generated

A picture containing calendar

Description automatically generated



A picture containing diagram

Description automatically generated

* Diagram

  Description automatically generated

### ***Opgave A.5.1.***

Bereken:

a) 

b) 

c) 

Ga nu in Grasple aan de slag met opgaven van dit onderdeel om na te gaan of je de stof goed hebt begrepen.

A5.2. Wortel vereenvoudigen

Door toepassing van de bovengenoemde rekenregels zijn sommige wortels in een *vereenvoudigde vorm* te herschrijven. Hierbij is het handig om een priemontbinding (hoofdstuk A2.) te maken van het getal onder de wortel.

**Voorbeeld 1**

* 

Je moet dus op zoek gaan naar kwadraten onder het wortelteken.

Bij het volgende voorbeeld worden twee wortels met elkaar vermenigvuldigd en vereenvoudigd:

**Voorbeeld 2**

* , nu even de factoren verplaatsen:
*  Dan: 

Je kunt ook eerst de vermenigvuldiging uitvoeren en daarna een priemontbinding maken:

* 

### ***Opgave A5.2.***

Vereenvoudig:

a) 

b) 

Bereken en vereenvoudig:

c) 

d) 

Ga nu in Grasple aan de slag met opgaven van dit onderdeel om na te gaan of je de stof goed hebt begrepen.

A5.3. Wortel schrijven als oneigenlijke macht

Wortels kun je schrijven als een *oneigenlijke macht*. Bekijk de volgende rekenregel:



**Voorbeeld 1**

* 

Merk op dat de '2' meestal wordt weggelaten als we het over een *vierkantswortel* hebben, dus: .

**Voorbeeld 2**

* 
* 

***Opgave A5.3.***

Schrijf als oneigenlijke macht:

a) 

b) 

c) 

Ga nu in Grasple aan de slag met opgaven van dit onderdeel om na te gaan of je de stof goed hebt begrepen.

Nu we wortels als oneigenlijke machten kunnen schrijven, kunnen we alle rekenregels toepassen die we in de voorgaande hoofdstukken hebben geleerd.

Bekijk de volgende berekeningen. Ze lijken moeilijk maar als je de rekenregels goed kent valt het reuze mee:

a) 

b) 



**Antwoorden van de opgaven**



### ***Opgave A1.1.***

Bereken en geef aan uit hoeveel termen/factoren de volgende sommen/producten bestaan:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
|  | Aantal termen | Aantal factoren | Vereenvoudigd |
| -4 + 7 | 2 | 0 | 3 |
| -7 ∙ a + 9 ∙ a + 2 ∙ b | 3 | 6 | 2a + 2b |
| -3 ∙ p ∙ q – 9 ∙ p ∙ q | 2 | 6 | -12pq |
|  | 0 | 100 | 1 |



### ***Opgave A1.2.***

Werk de haakjes weg (niet uitrekenen):

a) 

b) 

c) 

d) 



### ***Opgave A1.3.***



Ontbind (niet uitrekenen):

a) 

b) 

c) 

***Opgave A2.1.***



Ontbind de volgende getallen in priemfactoren:

a) 

b) 

c) 

d) 



### ***Opgave A3.1.***



Vereenvoudig:

a) 

b) 

c) 



***Opgave A3.2.***



Bereken:

a)

b)

c) 



### ***Opgave A3.3.***



Bereken:

a) 

b)

c) 



### ***Opgave A3.4.***



Bereken:

a) 

b) 



***Opgave A4.1.***

Schrijf korter:

a) 

b) 

c) 

d) 



### ***Opgave A4.2.***

Schrijf korter:

a) 

b) 

c)

d) 



### ***Opgave A4.3.***

Schrijf korter:

a) 

b) 

c) 



### ***Opgave A5.1.***

Bereken:

a) 

b) 

c) 



### ***Opgave A5.2.***

Vereenvoudig:

a) 

b) 

Bereken en vereenvoudig:

c) 

d) 



### ***Opgave A5.3.***

Schrijf als oneigenlijke macht:

a) 

b) 

c) 

