International University
For Science & Technology

Faculty of Engineering

الجامعة الدولية الخاصة
للعلوم والتكنولوجيا
كلية الهندسة

محاضرات
في
الرياضيات //1//

د. محمد بشير غرّة

2025 – 2024

فهرس

الفصـل الأول

الـدوال أو التـوابــع

Functions

9

1-1 الـدوال ورسومها البيانية

Functions and Their Graphs 9

1-1-1 أمـثـلـــة

Examples 9

1-1-2 الـدوال المعرّفة على شكل قطع□ الـدوال المتقطعة

Piecewise-Defined Functions 10

1-1-3 الـدوال الشهيرة

Common Functions 11

1-1-3 -1 الـدوال الخطية

Linear Functions 12

1-1-3 -2 دوال القوى

Power Functions 12

1-1-3 -3 كثيرات الحدود

Polynomials 14

1-1-3 -4 الـدوال الكسريـة

Rational Functions 15

1-1-3 -5 الـدوال المثلثية

Trigonometric Functions 15

1-1-3 -6 الـدوال الأسـيـة

Exponential Functions 15

3-1-1 -7 الـدوال اللـوغاريتمية
Logarithmic Functions 16
4-1-1 تـمـــاريــن
Exercises 17
2-1 دمج الـدوال وانسحاب الرسوم البيانية وتوسيعها
Combining Functions; Shifting and Scaling Graphs 17
1-2-1 مجموع وفرق وجداء وقسمة دوال
Sums, Differences, Products, and Quotients 17
2-2-1 تركيب الـدوال
Composite Functions 19
3-2-1 الانسحاب والرسـم البيـاني لدالـة
Shifting a Graph of a Function 20
1-3-2-1 صيغ الانسحاب أو الإزاحـة
Vertical Shifting 20
4-2-1 تـمـــاريــن
Exercises 22
3-1 الـدوال المثلثية
Trigonometric Functions 24
4-1 الـدوال الأســـــيـة
Exponential Functions 26
1-4-1 أمـثـلـــــة
Examples 27
2-4-1 تـمـــاريــن
Exercises 28
5-1 الـدوال العكسية واللوغاريتمات
Inverse Functions and Logarithms 28
1-5-1 الـدوال واحد لواحد
One-to-One Functions 29
2-5-1 الـدوال العكسية
Inverse Functions 30
3-5-1 كيفية إيجـاد الـدالة العكسيـة
Finding Inverses 30

1-5-4 أمـثـلــــة
Examples 31
1-5-5 الـدالـة اللوغاريتمية
Logarithmic Function 33
1-5-6 أمـثـلــــة
Examples 36
1-5-7 الـدوال الـمثلـثيـة الـعكسـيـة
Inverse Trigonometric Functions 39
1-5-8 متطـابقـات تتضمن $\sin^{-1}$ و $\cos^{-1}$
Identities Involving Arcsine and Arccosine 41
1-5-9 أمـثـلــــة
Examples 41
1-5-10 تـمـــاريــن
Exercises 42

الفصل الثاني

47

النهايات والاستمرار

LIMITS AND CONTINUITY

2-1 نهايات دالة وقوانين النهايات
Limit of a Function and Limit Laws 47
2-1-1 قوانين الـنـهـايـات
Limit Laws 49
2-1-2 تـمـــاريــن
Exercises 54
2-2 التعريف الدقيق للنهاية
The Precise Definition of a Limit 55
2-3 النهايات من جانب أو طرف واحد
One-Sided Limits 56

1-3-2 أمثـلــــــة
57 ....Examples
4-2 النهايات التي تتضمن sinθ/θ
60 .... Limits Involving (sinθ/θ)
1-4-2 أمثـلــــــة
60 ....Examples
2-4-2 تـمـــاريــن
63 ....Exercises
5-2 الاســـتمرار
66 ....Continuity
1-5-2 أمثـلــــــة
66 ....Examples
2-5-2 تـمـــاريــن
68 ....Exercises
6-2 النهايات التي تتضمن ما لا نهاية ومقاربات الرسوم البيانية
69 ....Limits Involving Infinity and Asymptotes of Graphs
1-6-2 النهايات عند اللانهاية للدوال الكسرية
70 ....Limits at Infinity of Rational Functions
2-6-2 المستقيمات المقاربة الأفقيـة
70 .... Horizontal Asymptotes
3-6-2 المستقيمات المقاربة المـائلـة
70 ....Oblique Asymptotes
4-6-2 المقاربات العموديــة
72 ....Vertical Asymptotes
5-6-2 تـمـــاريــن
73 ....Exercises

الفصل الثالث

77 التـفـــاضـــل
DIFFERENTIATION

1-3 المماسات والمشتق عند نقطة
77 ......Tangents and the Derivative at a Point
1-1-3 تـمـــاريـــن
79 ......Exercises
2-3 المشتق كدالة
80 ......The Derivative as a Function
1-2-3 حساب المشتقات من التعريف
80 ......Calculating Derivatives from the Definition
2-2-3 أمـثـلـــــة
80 ......Examples
3-2-3 تـمـــاريـــن
83 ......Exercises
3-3 قـواعد التفاضـل
84 ......Differentiation Rules
1-3-3 الـقوى والمضاعفات والمجاميع والفـروق
84 ......Powers, Multiples, Sums, and Differences
2-3-3 تـمـــاريـــن
87 ......Exercises
4-3 مشتق الـدوال المثلثية
88 Derivatives of Trigonometric Functions
1-4-3 أمـثـلـــــة
89 ......Examples
2-4-3 تـمـــاريـــن
90 ......Exercises
3-4-3 مشتق الـدالـة المركبة
92 ......Derivative of a Composite Function

4-4-3 أمثـلـــــة
Examples 92
5-4-3 تـمـــاريــن
Exercises 95
5-3 التفاضـل الضمني
Implicit Differentiation 96
1-5-3 المستقيمـات المماســـة والمستقيمـات النـاظـمــة
Tangents, and Normal Lines 98
2-5-3 تـمـــاريــن
Exercises 99
6-3 مشتقات الـدوال العكسية واللوغاريتمات
Derivatives of Inverse Functions and Logarithms 100
1-6-3 مشتقات معكوسات الـدوال القابلة للاشتقاق
Derivatives of Inverses of Differentiable Functions 100
2-6-3 مشتق دالة اللوغاريتم الطبيعي
Derivative of the Natural Logarithm Function 103
3-6-3 المشتقات لـ a^u و $\log_a(u)$
The Derivatives of a^u and $\log_a(u)$ 103
4-6-3 التفاضل اللوغاريتمي
Logarithmic Differentiation 104
5-6-3 العدد e معبراً عنه كنهاية
The Number e Expressed as a Limit 105
6-6-3 تـمـــاريــن
Exercises 106
7-3 الـدوال المثلثية العكسية
Inverse Trigonometric Functions 108
1-7-3 متطابقات الـدالـة العكسية و الـدالـة المساعدة العكسية
Inverse Function–Inverse Cofunction Identities 109
2-7-3 تـمـــاريــن
Exercises 110

الفصل الأول

الـــدوال أو الـتـــوابـع

Functions

1-1 الـــدوال ورسومها البيانية
Functions and Their Graphs

تـعـريـــف لتكن M, N مجموعتين. نقول إن f تـــابـع أو دالـــة معرّفة على M وتأخذ قيمها في N، أو f دالـــة من M في N، ونكتب ذلك على الشكل: $f: M \rightarrow N$ إذا قابل كل عنصر x من M عنصراً واحداً فقـط y من N.

نُسمي المجموعة M مجموعة تعريف الـدالة f.

إذا كان a عنصراً من M عندها نُسمي العنصر المقابل له $b = f(a)$ من N صورتــه.

نَسمي مجموعة العناصر a من M، والتي لها الصورة b من N، الصورة العكسية للعنصر b ونرمز له بالرمز $f^{-1}(b)$.

لتكن A مجموعة جزئية من M. نَسمي مجموعة كل العناصر التي من الشكل $f(a)$، حيث $a \epsilon A$، صورة المجموعة A ونرمز لها بالرمز $f^{-1}(A)$.

من ناحية أخرى نُعرف الصورة العكسية $f^{-1}(B)$، بالنسبة لكل مجموعة B من N، على أنها مجموعة كل العناصر من M التي تنتمي صورها إلى B.

1-1-1 أمـثـلــــــة
Examples

مجموعة القيم $R(f)$ Range (y)	مجموعة التعريف $D(f)$ Domain (x)	الـدالــــة Function
$[0, \infty[$	$]-\infty, \infty[$	$f(x) = x^2$
$]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$	$]-\infty, 0[\cup]0, \infty[$	$f(x) = \frac{1}{x}$
$[0, \infty[$	$[1, \infty[$	$f(x) = \sqrt{x-1}$
$[1, \infty[$	$]-\infty, \infty[$	$f(x) = \sqrt{x^2+1}$

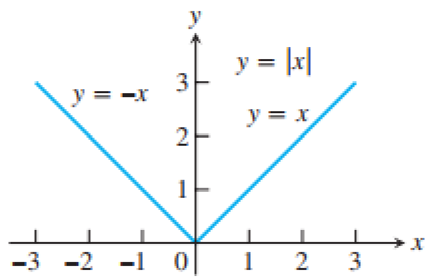
2-1-1 الـدوال المعرّفة على شــكل قـطــع– الـدوال المتقطعة
Piecewise-Defined Functions

في بعض الأحيان يتم وصف الـدالـة باستخدام صيغ مختلفة على أجزاء مختلفة من مجالها. ومن الأمثلة على ذلك دالة القيمة المطلقة **absolute value function:**

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & < 0, \end{cases}$$

صياغة أولى

صياغة ثانية



مـثـــال 1

الـدالـة

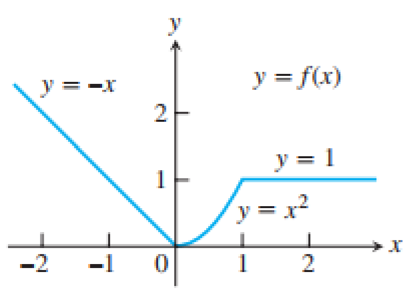
$$f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1, & x > 1, \end{cases}$$

صياغة أولى

صياغة ثانية

صياغة ثالثة

يتم تعريفها على المحور الحقيقي بالـكامل ويتم تحديد قيمها بصيغ مختلفة، وذلك اعتماداً على موضع x.



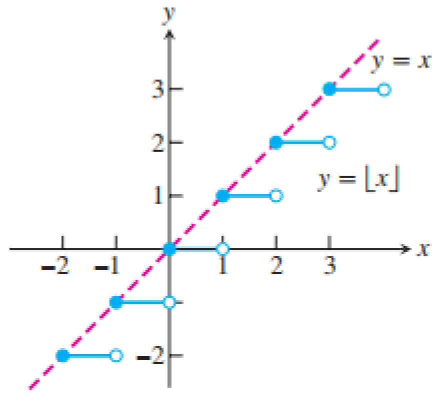
مـثـــال 2

تُسمى الـدالـة التي تكون قيمتها عند أي رقم x هي أكبر عدد صحيح أقل من أو يساوي x باسم دالـة العدد الصحيح الأكبر أو دالـة الحد الأدنى للأعداد الصحيحة (**Greatest integer function or the Integer floor function**). ويـرمـز لها $\lfloor x \rfloor$.

لاحظ أن:

$$\lfloor 2.4 \rfloor = 2, \quad \lfloor 1.9 \rfloor = 1, \quad \lfloor 0 \rfloor = 0, \quad \lfloor -1.2 \rfloor = -2,$$
$$\lfloor 2 \rfloor = 2, \quad \lfloor 0.2 \rfloor = 0, \quad \lfloor -0.3 \rfloor = -1 \quad \lfloor -2 \rfloor = -2.$$

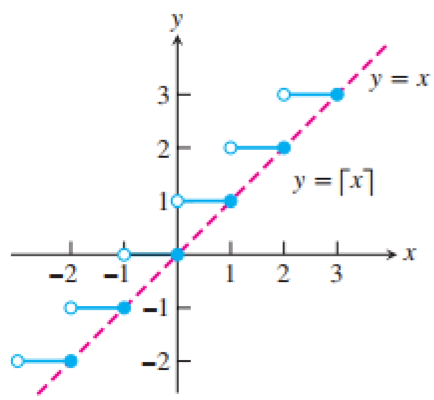
■



﴿الرسم البياني للـدالـة $y = \lfloor x \rfloor$﴾

مـثـال 3

تُسمى الـدالـة التي تكون قيمتها عند أي رقم x هي أصغر عدد صحيح أكبر من أو يساوي x باسم دالة العدد الصحيح الأصغر أو دالة الحد الأقصى للأعداد الصحيحة (least integer function or the Integer ceiling function). ويـرمـز لهـا $\lceil x \rceil$.



﴿الرسم البياني للـدالـة $y = \lceil x \rceil$﴾

3-1-1 الـدوال الشهيرة

Common Functions

غالبًا ما نصادف مجموعة متنـوعة من أنـواع الـدوال المهمة في حساب التفاضل والتـكامـل. نـحددهـا ونصفها بإيـجاز هنـا.

1-3-1-1 الـدوال الخطية
Linear Functions

تُسمى الـدالـة من الشكل

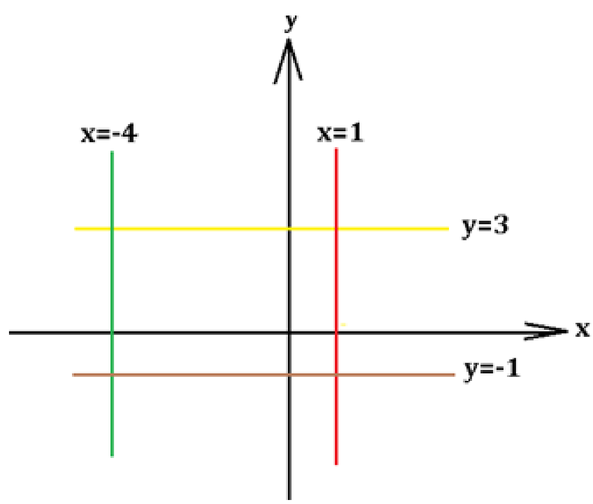
$$Ax + by + c = 0, \qquad a, b, c\epsilon R, \quad (a \wedge b \neq 0 \text{ معاً})$$

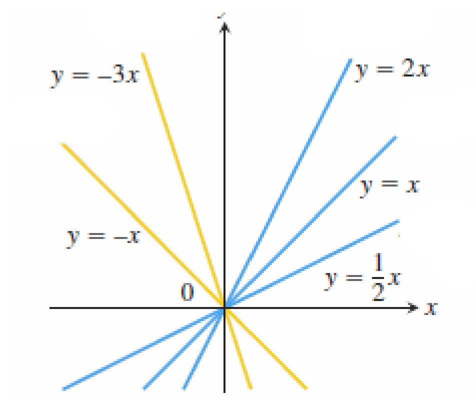
أو الشكل

$$y = mx + c, \qquad\qquad m, c\epsilon R$$

دالة خطية (أي تكون فيها المتغيرات x,y من الدرجة الأولى على الأكثر).

نُسمي m ميل المستقيم، وهو عبارة عن ظـل الزاوية التي يصنعها المستقيم مع المحور ox.

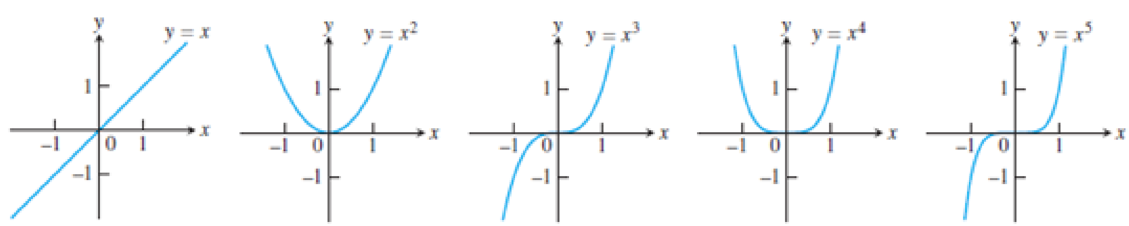




2-3-1-1 دوال الـقـوى
Power Functions

تُسمى الـدالـة $f(x) = x^a$، التي يكون فيها a ثابتاً **دالـة القـوة**. هنـاك العديد من الحالات الهامة التي يجب مراعاتها بالنسبة إلى الثابت a:

(1) $a = n$ ، عدد صحيح موجب

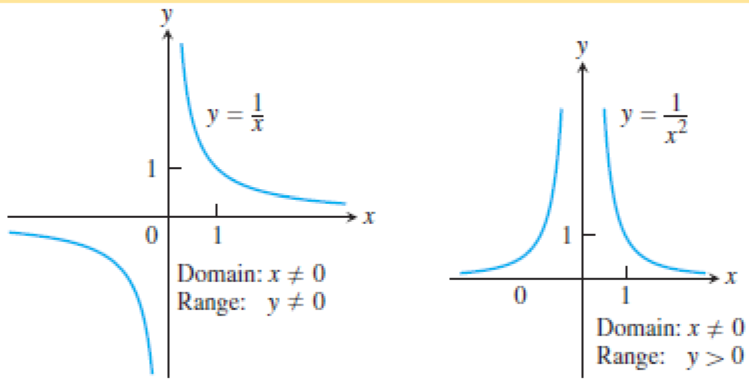


منحنيات الـدالـة $f(x) = x^n, \ n = 1, 2, 3, 4, 5$ المعرفة من أجل $-\infty < x < \infty$

نلاحظ أنه مع ازياد القوة $\mathbf{n}$، تميل المنحنيات إلى التسطح باتجاه المحور $\mathbf{o\,x}$ على المجال $]-1,1[$، وترتفع بشكل أكثر حدة من أجل $|x| > 1$. يمر كل منحنى عبر النقطة $(1، 1)$ وعبر المبدأ.

الرسوم البيانية للدوال ذات القوى الزوجية متناظرة حول المحور $\mathbf{oy}$، وتكون ذات القوى فردية متناظرة حول نقطة الأصل. وتتناقص الدوال ذات القوى الزوجية على الفترة $]-\infty,0]$ وتتزايد على $[0,\infty[$؛ و تتزايد الدوال ذات القوى الفردية على طول المحور $]-\infty,\infty[$.

(2) $a=-1$ أو $a=-2$

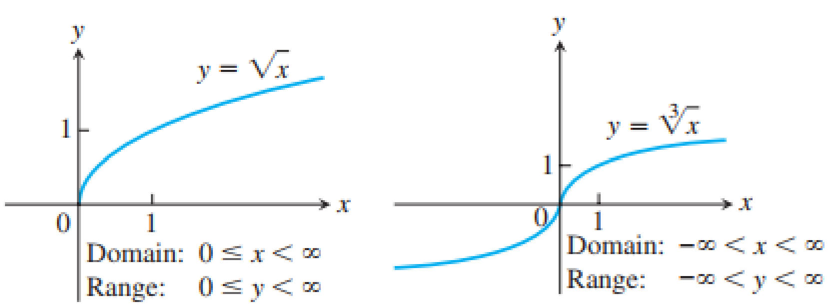


الدالتان $f(x)=x^{-1}=\frac{1}{x}$ و $f(x)=x^{-2}=\frac{1}{x^2}$ معرّفتـان من أجل كل $x \neq 0$

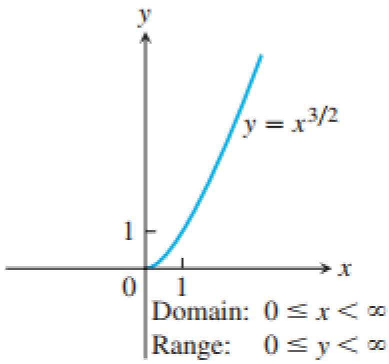
الرسم البياني لـ $y=\frac{1}{x}$ هو القطع الزائـد $xy=1$ ، الذي يقترب من المحاور الإحداثية مبتعداً عن نقطـة الأصل، ومتناظر حول نقطة الأصل، ومتناقص على المجالات $]-\infty,0[$ و $]0,\infty[$.

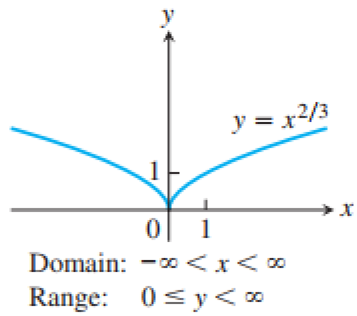
الرسم البياني لـ $y=\frac{1}{x^2}$ يقترب أيضًا من محاور الإحداثيات، ومتناظر حول المحور $\mathbf{oy}$ ومتزايدة على المجال $]-\infty,0[$ ومتناقص على $]0,\infty[$.

(3) $a=\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{3}{2},\frac{2}{3}$



منحنيات دالة القوى $f(x)=x^a,\ a=\frac{1}{2},\frac{1}{3}$





منحنيات دالـة القوى $f(x) = x^a,\ a = \frac{3}{2}, \frac{2}{3}$

الدوال $f(x) = x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$ و $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$ هي دوال الجذر التربيعي والجذر التكعيبي على التوالي. مجال تعريف دالة الجذر التربيعي هو $[0, \infty[$، ولكن دالة الجذر التكعيبي معرفة من أجل جميع قيم x الحقيقية.

3-3-1-1 كثيرات الحدود

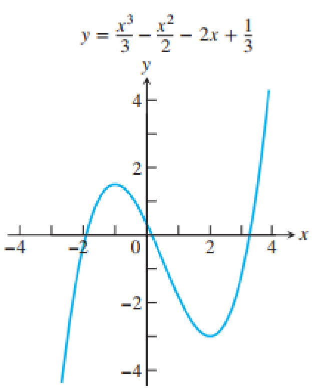
Polynomials

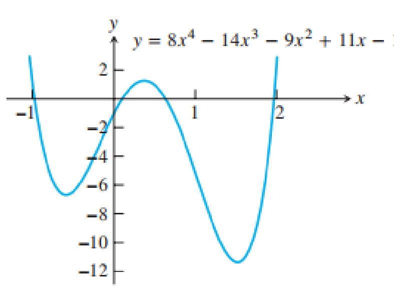
الـدالـة p هي كثيرة حدود إذا كانت من الشكل

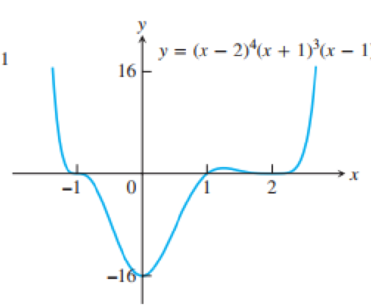
$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

حيث n هو عدد صحيح غير سالب والأعداد $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ هي ثوابت حقيقية (تُسمى معاملات كثيرة الحدود). جميع كثيرات الحدود لها مجال التعريف $]-\infty, \infty[$. إذا كان المعامل الرئيسي $a_n \neq 0$ و $n > 0$ عندها تُسمى n **درجة كثيرة الحدود**. الـدوال الخطية $(y = mx + c,\ m \neq 0)$ هي كثيرات حدود من الدرجة 1.

كثيرات الحدود من الـدرجة 2، والتي تُكتب عـادةً $p(x) = ax^2 + bx + c$، تُسمى الـدوال التربيعية. وعلى نحو مماثل، الدوال التكعيبية هي كثيرات حدود $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ من الدرجة 3.



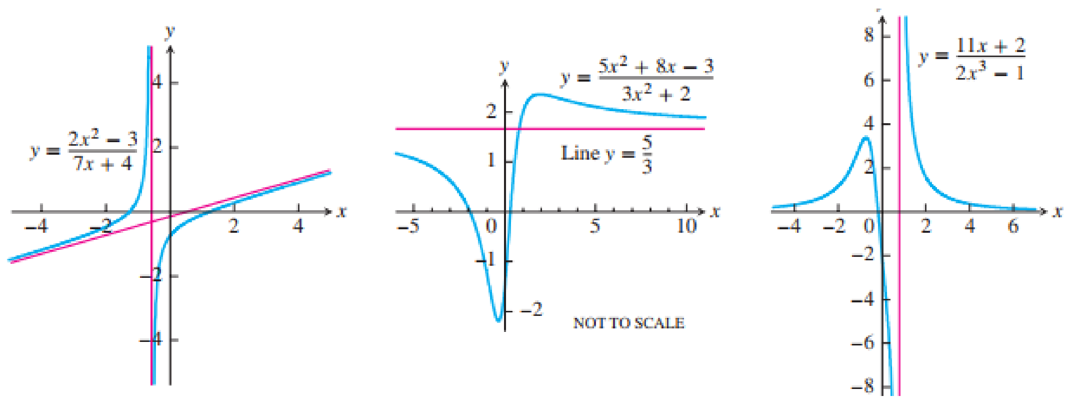




منحنيات لثلاث كثيرات حدود

4-3-1-1 الــدوال الـكـســريــة
Rational Functions

الــدوال الكسرية هي حاصل أو نسبة $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ حيث $p(x)$ و $q(x)$ كثيرات الحدود. إن مجموعة تعريف الــدالــة الكسرية هو مجموعة الأعداد x الحقيقية التي يكــون من أجلها $q(x) \neq 0$. وتـظهـر الــرسوم البيانية العديد من الدوال الكسرية.

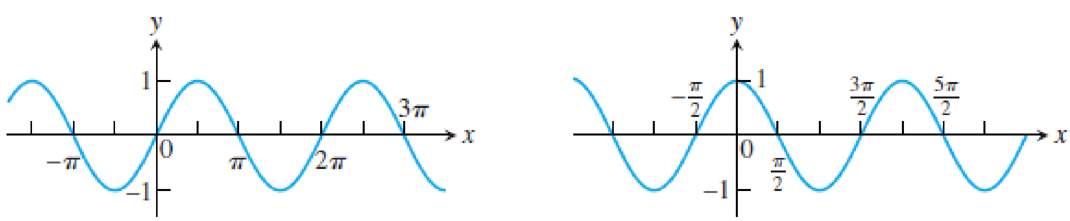


﴿رسوم بيانية لثلاث دوال جبرية﴾

5-3-1-1 الــدوال المثـلـثيــة
Trigonometric Functions

$f(x) = \sin x$ معرّف على R ويأخذ قيمه في $[-1, 1]$.

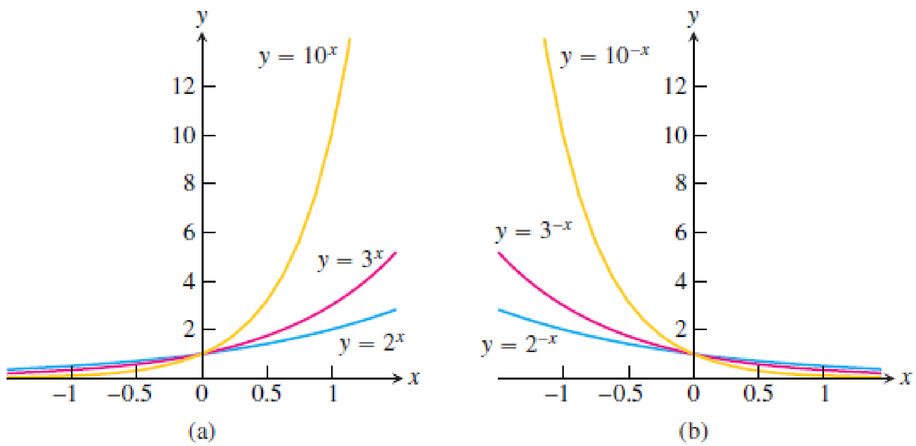
$f(x) = \cos x$ معرّف على R ويأخذ قيمه في $[-1, 1]$



(a) $f(x) = \sin x$ (b) $f(x) = \cos x$

6-3-1-1 الــدوال الأســـيـــة
Exponential Functions

دوال النموذج $f(x) = a^x$ الذي يكون فيه الأساس $a > 0$ ثابتــاً موجبــاً و $a \neq 1$ تُسمى الدوال الأسية.
جميع الدوال الأسية لها مجال التعريف $]-\infty, +\infty[$ ومجموعة القيم $]0, \infty[$، لذلك لا تأخذ الــدالــة لأسية أبدًا القيمة 0.

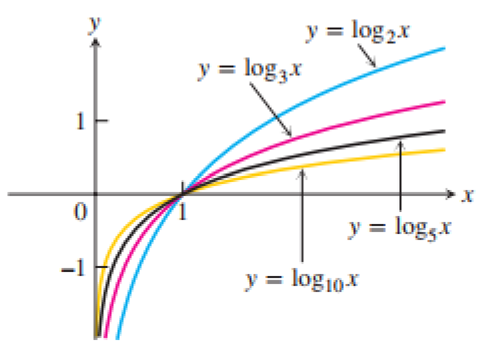


﴿الرسوم البيانية للدوال الأســية﴾

7-3-1-1 الـدوال اللـوغـاريتميـة

Logarithmic Functions

الدوال اللوغاريتمية هي الدوال $f(x) = \log_a x$ التي توجد فيها القاعدة $a \neq 1$ ثابت موجب. إنـها الدوال العكسية للدوال الأســية. ويبين الشكل التالي الرسوم البيانية لأربعة دوال لـوغاريتمية مع قواعد مختلفة. وفي كل حالة تكون مجموعة التعريف $]0, \infty[$ ومجموعة القيم $]-\infty, +\infty[$



﴿رسوم بيانية لأربعة دوال لـوغـاريتمية﴾

4-1-1 تـمـــاريـــن
Exercises

الـدوال

أوجد المجال والمدى لكل دالة.

Find the domain and range of each function.

1. $f(x) = 1 + x^2$
2. $f(x) = 1 - \sqrt{x}$
3. $F(x) = \sqrt{5x + 10}$
4. $g(x) = \sqrt{x^2 - 3x}$
5. $f(t) = \dfrac{4}{3 - t}$
6. $G(t) = \dfrac{2}{t^2 - 16}$

الـدوال والرسوم البيانية

أوجد مجال التعريف وأرسم الدوال بيانياً للدوال الأتية.

Find the domain and graph the functions.

15. $f(x) = 5 - 2x$
16. $f(x) = 1 - 2x - x^2$
17. $g(x) = \sqrt{|x|}$
18. $g(x) = \sqrt{-x}$
19. $F(t) = t/|t|$
20. $G(t) = 1/|t|$

الـدوال المحددة على شـكل قطـع

قم برسم الدوال الأتية بيانياً.

Graph the following functions.

25. $f(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

26. $g(x) = \begin{cases} 1 - x, & 0 \le x \le 1 \\ 2 - x, & 1 < x \le 2 \end{cases}$

27. $F(x) = \begin{cases} 4 - x^2, & x \le 1 \\ x^2 + 2x, & x > 1 \end{cases}$

28. $G(x) = \begin{cases} 1/x, & x < 0 \\ x, & 0 \le x \end{cases}$

2-1 دمج الـدوال وانسحاب الرسوم البيانية وتوسـيعها
Combining Functions; Shifting and Scaling Graphs

في هذا القسم، نلقي نظرة على الطرق الرئيسية التي يتم بها دمج الدوال أو تحويلها لتكوين دوال جديدة.

1-2-1 مجمـوع وفـرق وجداء وقسمة دوال
Sums, Differences, Products, and Quotients

مثل الأرقام، يُمكن جمع الدوال وطرحها وضربها وقسمتها (باستثناء الحالات التي يكون فيها المقام صفراً) لإنتاج دوال جديدة. إذا كانت f و g دوال، فبالنسبة لكل x تنتمي إلى مجالات كل من f و g (أي بالنسبة إلى $x \epsilon D(f) \cap D(g)$)، فإننا نعرّف الدوال $f + g$ و $f - g$ و $f.g$ بالصيغ التالية

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$$

$$(f.g)(x)=f(x).g(x)$$

لاحظ أن الإشارة $+$ الموجودة على الجانب الأيسر من المعادلة الأولى تُمثل عملية جمع الدوال، بينما تعني الإشارة $+$ الموجودة على الجانب الأيمن من المعادلة جمع الأعداد الحقيقية $f(x)$ و $g(x)$.

في أي نقطة من $D(f)\cap D(g)$ حيث $g(x)\neq 0$ يُمكننا أيضًا تعريف الـدالـة $\frac{f}{g}$ بالصيغة

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}\,,\qquad (g(x)\neq 0).$$

يُمكن أيضاً ضرب الدوال بالثوابت:

إذا كان c عددًا حقيقيًا، فإن الـدالـة cf تُعرف من أجل كل x من مجال f بالشكل

$$(cf)(x)=cf(x).$$

مـثــال 4

ليكن لدينا:

$$f(x)=\sqrt{x+1}\quad,\quad g(x)=x-2$$

عندها يكون:

$$(f+g)(x)=\sqrt{x+1}+x-2$$
$$(f-g)(x)=\sqrt{x+1}-x+2$$

$$(f.g)(x)=\sqrt{x+1}\times(x-2)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{x+1}}{x-2}\,,\quad x\neq 2$$

حيث: $x\epsilon[-1,\infty[$.

مـثــال 5

الدوال المعرفة بالشكل

$$f(x)=\sqrt{x}\quad \text{and}\quad g(x)=\sqrt{1-x}$$

لها مجالات التعريف $D(f)=[0,\infty[$ و $D(g)=]-\infty,1]$ والنقاط المشتركة لهذه المجالات هي النقاط

$$[0,\infty[\,\cap\,]-\infty,1]=[0,1].$$

يُلخص الجدول التالي الصيغ والمجالات للتركيبات الجبريــة المختلفة للدالتين.

Function	Formula	Domain
$f+g$	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$	$[0,1]=D(f)\cap D(g)$
$f-g$	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{x}-\sqrt{1-x}$	$[0,1]$
$g-f$	$(g-f)(x)=f(x)-g(x)=\sqrt{1-x}-\sqrt{x}$	$[0,1]$
$f.g$	$(f.g)(x)=f(x).g(x)=\sqrt{x(1-x)}$	$[0,1]$
f/g	$(f/g)(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}=\sqrt{\dfrac{x}{1-x}}$	$[0,1[$ $x=1$ مستبعدة
g/f	$(g/f)(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}=\sqrt{\dfrac{1-x}{x}}$	$]0,1]$ $x=1$ مستبعدة

2-2-1 تـركيب الـدوال
Composite Functions

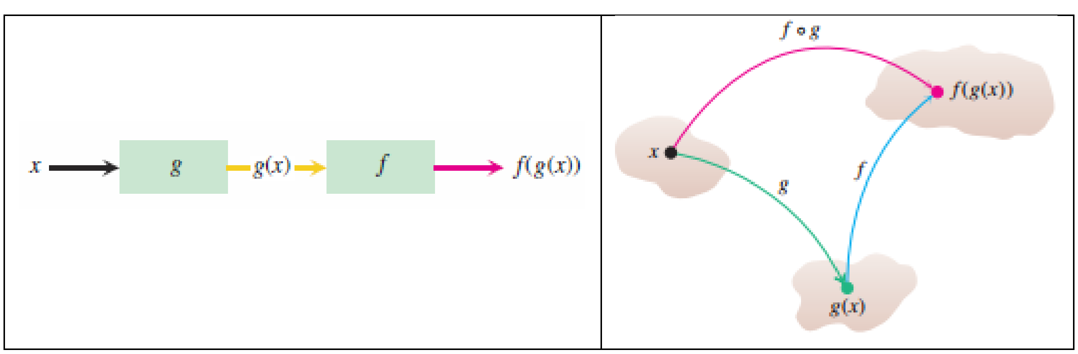
التركيب هو طريقة أخرى لدمج الدوال.

تـعريـف إذا كانت f و g دالتين، فإن الـدالة المركبـة $f\circ g$ تُعرف على النحـو التالي

$$(f\circ g)(x):=f\big(g(x)\big).$$

يتكون مجال تعريف $f\circ g$ من الأعداد x (من مجال تعريف g) بحيث يقع $g(x)$ في مجال تعريف f.

إذاً يُمكن صياغة $f\circ g$ عندما تقع مجموعة قيم g في مجموعة تعريف f. لإيجاد $(f\circ g)(x)$، نوجد أولاً $g(x)$ ومن ثم نوجد $f\big(g(x)\big)$. يصور الشكل التالي $f\circ g$ كرســم تخطيطي آلي ويوضح الشكل الآخر المركب كرســم تخطيطي ســهمي.



مـثــال 6

إذا كان $f(x) = \sqrt{x}$ و $g(x) = x + 1$ فأوجد

(1) $(f \circ g)(x)$ (2) $(g \circ f)(x)$ (3) $(f \circ f)(x)$ (4) $(g \circ g)(x)$

الحل

مجال التعريف	التركيب
$[-1, \infty[$	(1) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x+1}$
$[0, \infty[$	(2) $(g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right) = f(x) + 1 = \sqrt{x} + 1$
$[0, \infty[$	(3) $(f \circ f)(x) = f\left(f(x)\right) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{\sqrt{x}} = x^{\frac{1}{4}}$
$]-\infty, \infty[$	(4) $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(x) + 1 = (x + 1) + 1 = x + 2$

3-2-1 الانسحاب والرسم البيـاني لدالـة
Shifting a Graph of a Function

تتمثل إحدى الطرق الشائعة للحصول على دالة جديدة من دالة موجودة بإضافة ثابت إلى كل مخرج للـدالـة الموجودة، أو إلى متغير الإدخال الخاص بها. ويكون رسم الـدالـة الجديدة هو رسم الـدالـة الأصلية المسحوبة رأسياً أو أفقياً، على النحو التالي.

1-3-2-1 صيغ الانسحاب أو الإزاحـة
Vertical Shifting

الانسحاب العمودي $(V.S)$
Vertical Shifting

$y = f(x) + k$

$k > 0$ انسحاب المنحني نحوى الأعلى بمقدار k وحدة.

$k < 0$ انسحاب المنحني نحوى الأسفل بمقدار k وحدة.

الانسحاب الأفقي $(H.S)$
Horizontal Shifts

$y = f(x + k)$

$k > 0$ انسحاب المنحني نحوى اليسار بمقدار k وحدة.

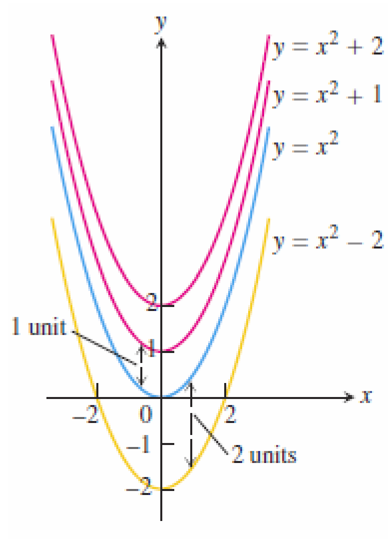
$k < 0$ انسحاب المنحني نحوى اليمين بمقدار k وحدة.

مـثــال 7

(1) إضافة (1) إلى الجانب الأيمن من الصيغة $y = x^2$ للحصول $y = x^2 + 1$ للحصول على انسحاب للرسم البياني نحو الأعلى بمقدار وحدة واحدة.

(2) إضافة (-2) إلى الجانب الأيمن من الصيغة $y = x^2$ للحصول $y = x^2 - 2$ للحصول على انسحاب للرسم البياني نحو الأسفل بمقدار وحدتان.

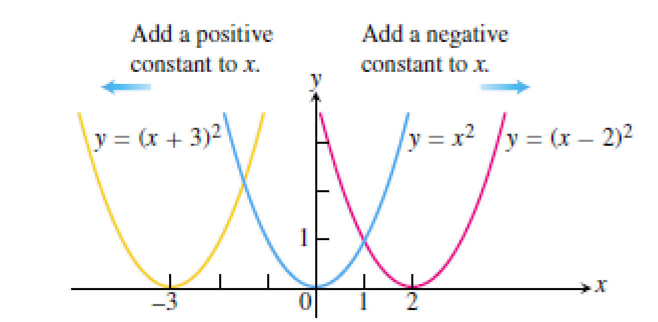
(3) إضافة (2) إلى الجانب الأيمن من الصيغة $y = x^2$ للحصول $y = x^2 + 2$ للحصول على انسحاب للرسم البياني نحو الأعلى بمقدار وحدتان.



لتحريك الرسم البياني للـدالـة $f(x) = x^2$ لأعلى (أو لأسفل)، نضيف ثوابت موجبة (أو سالبة) إلى صيغة f

(4) إضافة (3) إلى x في المعادلة $y = x^2$ للحصول $y = (x + 3)^2$ للحصول على انسحاب للرسم البياني نحو اليسار بمقدار ثلاث وحدات (الشكل 1.29).

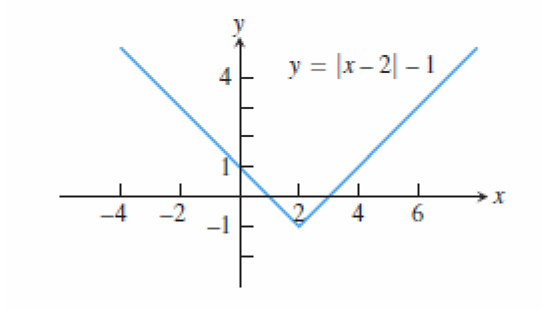
(5) إضافة (-2) إلى x في المعادلة $y = x^2$ للحصول $y = (x - 2)^2$ للحصول على انسحاب للرسم البياني نحو اليمين بمقدار وحدتان.



لتحريك الرسم البياني إلى اليسار، نضيف ثابتًا موجباً إلى x.

لتحريك الرسم البياني إلى اليمين، نضيف ثابتاً سالبًا إلى x.

(6) إضافة (-2) إلى x في المعادلة $y = |x|$ ثم إضافة 1- للناتج، يُعطي $y = |x-2|-1$ ويسحب الرسم البياني نحو اليمين بمقدار وحدتان ووحدة واحدة نحو الأسفل.



نقل الرسم البياني لـ $y = |x|$ 2 وحدة إلى اليمين ووحدة واحدة إلى الأسفل

4-2-1 تـمـــاريـــن

Exercises

التراكيب الجبرية

إيجاد مجالات التعريف ومجموعات القيم لـ f و g و $f+g$ و $f.g$

Find the domains and ranges of $f, g, f+g$ and $f.g$

1. $f(x) = x, \quad g(x) = \sqrt{x-1}$
2. $f(x) = \sqrt{x+1}, \quad g(x) = \sqrt{x-1}$

إيجاد مجالات التعريف ومجموعات القيم لـ f و g و $^{f}/_{g}$ و $^{g}/_{f}$

Find the domains and ranges of $f, g, {}^{f}/_{g}$ and ${}^{g}/_{f}$

3. $f(x) = 2, \quad g(x) = x^2 + 1$
4. $f(x) = 1, \quad g(x) = 1 + \sqrt{x}$

تركيب الدوال

5. If $f(x) = x + 5$ and $g(x) = x^2 - 3$, find the following

a. $f(g(0))$	b. $g(f(0))$
c. $f(g(x))$	d. $g(f(x))$
e. $f(f(-5))$	f. $g(g(2))$
g. $f(f(x))$	h. $g(g(x))$

6. If $f(x) = x - 1$ and $g(x) = \frac{1}{1+x}$ find the following

a. $f(g(1/2))$	b. $g(f(1/2))$
c. $f(g(x))$	d. $g(f(x))$
e. $f(f(2))$	f. $g(g(2))$
g. $f(f(x))$	h. $g(g(x))$

Write a formula for $f \circ g \circ h$

7. $f(x) = x + 1, \quad g(x) = 3x, \quad h(x) = 4 - x$
8. $f(x) = 3x + 4, \quad g(x) = 2x - 1, \quad h(x) = x^2$
9. $f(x) = \sqrt{x+1}, \quad g(x) = \frac{1}{x+4}, \quad h(x) = \frac{1}{x}$
10. $f(x) = \frac{x+2}{3-x}, \quad g(x) = \frac{x^2}{x^2+1}, \quad h(x) = \sqrt{2-x}$

افترض وعبر عن كل من الدوال في التمرينين الآتيين على هيئة تركيب يتضمن واحدًا أو أكثر من f و g و h و j.

Let $(x) = x - 3$, $g(x) = \sqrt{x}$, $h(x) = x^3$ and $j(x) = 2x$. Express each of the functions in Exercises 11 and 12 as a composite involving one or more of f, g, h, and j

11. **a.** $y = \sqrt{x} - 3$ **b.** $y = 2\sqrt{x}$

c. $y = x^{1/4}$ **d.** $y = 4x$

e. $y = \sqrt{(x-3)^3}$ **f.** $y = (2x-6)^3$

12. **a.** $y = 2x - 3$ **b.** $y = x^{3/2}$

c. $y = x^9$ **d.** $y = x - 6$

e. $y = 2\sqrt{x-3}$ **f.** $y = \sqrt{x^3 - 3}$

انسخ وأكمل الجدول التالي

13. Copy and complete the following table.

	$g(x)$	$f(x)$	$(f \circ g)(x)$
a.	$x - 7$	$\sqrt{x}$	?
b.	$x + 2$	$3x$	?
c.	?	$\sqrt{x-5}$	$\sqrt{x^2-5}$
d.	$\frac{x}{x-1}$	$\frac{x}{x-1}$	?
e.	?	$1 + \frac{1}{x}$	x
f.	$\frac{1}{x}$	?	x

ارسم بيانيا الدوال التالية

Graph the following functions

35. $y = \sqrt{x+4}$ **36.** $y = \sqrt{9-x}$

37. $y = |x-2|$ **38.** $y = |1-x| - 1$

39. $y = 1 + \sqrt{x-1}$ **40.** $y = 1 - \sqrt{x}$

41. $y = (x+1)^{2/3}$ **42.** $y = (x-8)^{2/3}$

43. $y = 1 - x^{2/3}$ **44.** $y + 4 = x^{2/3}$

45. $y = \sqrt[3]{x-1} - 1$ **46.** $y = (x+2)^{3/2} + 1$

47. $y = \dfrac{1}{x-2}$ **48.** $y = \dfrac{1}{x} - 2$

49. $y = \dfrac{1}{x} + 2$ **50.** $y = \dfrac{1}{x+2}$

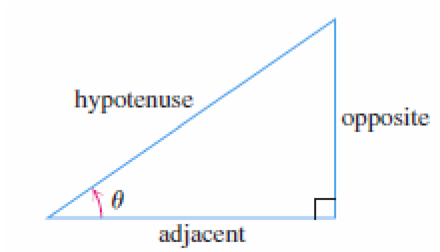
3-1 الـدوال المثلثية

Trigonometric Functions

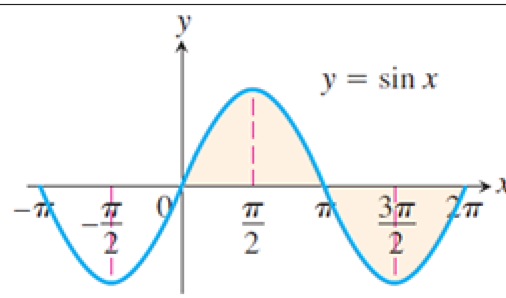
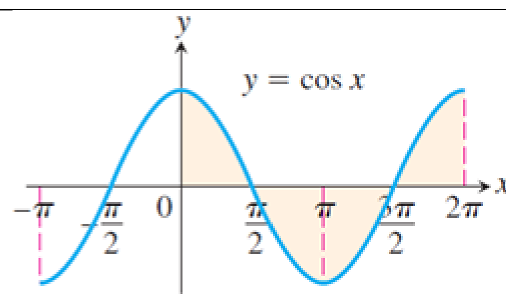
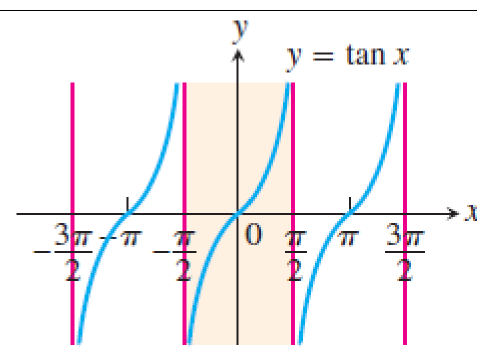
$$\sin\theta = \frac{\text{opp}}{\text{hyp}} \qquad \csc\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{opp}}$$

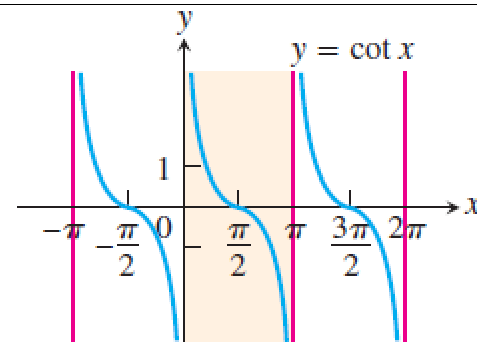
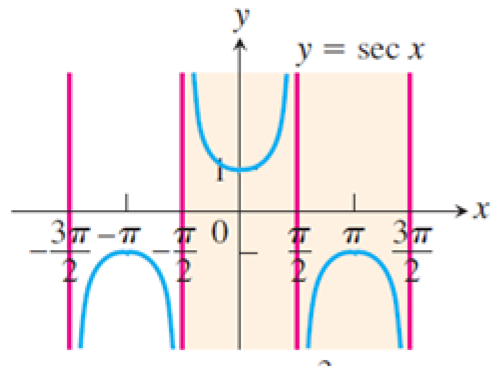
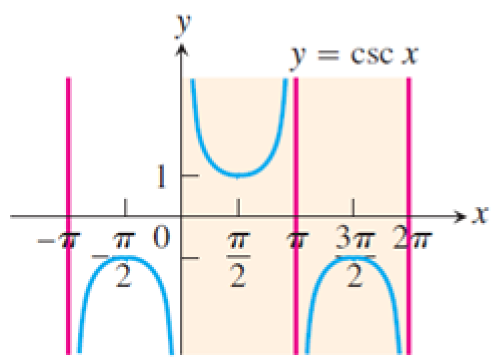
$$\cos\theta = \frac{\text{adj}}{\text{hyp}} \qquad \sec\theta = \frac{\text{hyp}}{\text{adj}}$$

$$\tan\theta = \frac{\text{opp}}{\text{adj}} \qquad \cot\theta = \frac{\text{adj}}{\text{opp}}$$



﴿النسب المثلثية للزاوية الحادة﴾

الـدالــة **Function**	مجموعة التعريف ومجموعة القيم والدور **D(f) + R(f) + per.**	الـرسم البيـاني **Graph**
$y = \sin(x)$	**Domain:** $-\infty < x < \infty$ **Range:** $-1 \le y \le 1$ **Period:** 2π	
$y = \cos(x)$	**Domain:** $-\infty < x < \infty$ **Range:** $-1 \le y \le 1$ **Period:** 2π	
$y = \tan(x)$	**Domain:** $R\backslash\left\{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \ldots\right\}$ **Range:** $-\infty < y < \infty$ **Period:** π	

$y = \cot(x)$	**Domain:** $R \backslash \{\pm\pi, \pm 2\pi, \dots\}$ **Range:** $-\infty < y < \infty$ **Period:** π	
$y = \sec(x)$	**Domain:** $R \backslash \left\{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \dots\right\}$ **Range:** $y \le -1$ or $y \ge 1$ **Period:** 2π	
$y = \csc(x)$	**Domain:** $R \backslash \{0, \pm\pi, \pm 2\pi, \dots\}$ **Range:** $y \le -1$ or $y \ge 1$ **Period:** 2π	

المتطابقات المثلثية

Trigonometric Identities

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$$\cos^2(x) = \frac{1 + \cos(2x)}{2}$$

$$\sin^2(x) = \frac{1 - \cos(2x)}{2}$$

$$\sec^2(x) = 1 + \tan^2(x)$$

$$\csc^2(x) = 1 + \cot^2(x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$$

$$1 + \tan^2(x) = \sec^2(x)$$

$$1 + \cot^2(x) = \csc^2(x)$$

$$\frac{1}{\cos(x)} = \sec(x) \ \left(= \text{Secant}(x)\right), \quad \frac{1}{\sin(x)} = \csc(x) \ \left(= \text{Cosecant}(x)\right)$$

$$\sin(A + B) = \sin(A)\cos(B) + \cos(A)\sin(B)$$

$$\sin(A - B) = \sin(A)\cos(B) - \cos(A)\sin(B)$$

$$\cos(A + B) = \cos(A)\cos(B) - \sin(A)\sin(B)$$

$$\cos(A - B) = \cos(A)\cos(B) + \sin(A)\sin(B)$$

متباينتان خاصتان

لأي زاوية θ مقاسة بالراديان،

$$-|\theta| \leq \sin\theta \leq |\theta| \qquad \text{and} \qquad -|\theta| \leq 1 - \cos\theta \leq |\theta|.$$

4-1 الدوال الأسية

Exponential Functions

نُسمي الدالة

$$f(x) = a^x, a > 0, \ \ a \neq 1$$

دالة أسية ذات القاعدة أو الأساس a.

جميع الدوال الأسية لها مجال التعريف $]-\infty, +\infty[$ ومجموعة القيم $]0, \infty[$، لذلك لا تأخذ الدالة لأسية أبدًا القيمة 0.

تُعد الدوال الأسية من أهم الدوال في الرياضيات وتظهر في مجموعة واسعة من التطبيقات،

قواعد الأسس:

Rules for Exponents

ليكن $a > 0$ و $b > 0$، عندها يكون من أجل أية أعداد x, y:

$a^x a^y = a^{x+y}$ $(a^x)^y = a^{x.y}$ $\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $\frac{1}{a^x} = a^{-x}$	$\sqrt[x]{a^y} = a^{\frac{y}{x}}$ $a^x b^x = (a.b)^x$ $\frac{a^x}{b^x} = \left(\frac{a}{b}\right)^x$

1-4-1 أمثلـــــة
Examples

$5^{1.2} \times 5^{3.6} = 5^{4.8}$

$$\frac{(\sqrt{12})^5}{\sqrt{12}} = (\sqrt{12})^{5-1} = (\sqrt{12})^4 = (12)^2 = 144$$

$$\left(5^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = 5^{\sqrt{2}\times\sqrt{2}} = 5^2 = 25$$

$$\left(\frac{4}{9}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{4}}{\sqrt{9}} = \frac{2}{3}$$

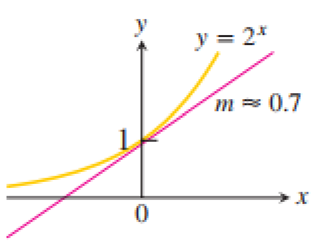
$$\left(25^{\frac{1}{8}}\right)^4 = 25^{\frac{4}{8}} = 25^{\frac{1}{2}} = 5$$

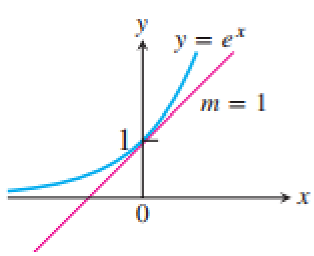
$$(\sqrt{12})^{\frac{1}{2}}(\sqrt{3})^{\frac{1}{2}} = (\sqrt{12}\times\sqrt{3})^{\frac{1}{2}} = (\sqrt{36})^{\frac{1}{2}} = 6^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$$

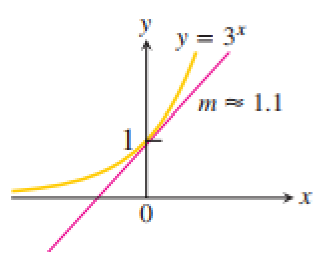
$$\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

الـدالـة الأسـيـة الطبيعية:

إذا كان $a = e$ عندها ندعـو الـدالـة الأسـيـة $f(x) = e^x$ دالـة أسـيـة طبيعية.







2-4-1 تــمـــاريـــن
Exercises

رسم المنحنيات الأسيّة

ارسم المنحنيات المعطاة معاً في المستوى الإحداثي المناسب وقم بتسمية كل منحنى بمعادلته.

Sketch the given curves together in the appropriate coordinate plane and label each curve with its equation.

1. $y = 2^x, y = 4^x, y = 3^{-x}, y = (1/5)^x$

2. $y = 3^x, y = 8^x, y = 2^{-x}, y = (1/4)^x$

3. $y = 2^{-t}$ and $y = -2^t$

4. $y = 3^{-t}$ and $y = -3^t$

5. $y = e^x$ and $y = 1/e^x$

6. $y = -e^x$ and $y = -e^{-x}$

ارسم المنحنيات الأسيّة المنسحبة.

Sketch the shifted exponential curves.

7. $y = 2^x - 1$ and $y = 2^{-x} - 1$

8. $y = 3^x + 2$ and $y = 3^{-x} + 2$

9. $y = 1 - e^x$ and $y = 1 - e^{-x}$

10. $y = -1 - e^x$ and $y = -1 - e^{-x}$

تطبيق قوانين الأســس

استخدم قوانين الأسس لتبسيط التعبيرات في التمارين الأتية.

11. $16^2 \cdot 16^{-1.75}$

12. $9^{1/3} \cdot 9^{1/6}$

13. $\dfrac{4^{4.2}}{4^{3.7}}$

14. $\dfrac{3^{5/3}}{3^{2/3}}$

15. $\left(25^{1/8}\right)^4$

16. $\left(13^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}/2}$

17. $2^{\sqrt{3}} \cdot 7^{\sqrt{3}}$

18. $\left(\sqrt{3}\right)^{1/2} \cdot \left(\sqrt{12}\right)^{1/2}$

19. $\left(\dfrac{2}{\sqrt{2}}\right)^4$

20. $\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)^2$

المركبات التي تتضمن دوال أسية

أوجد المجال والمدى لكل من الدوال الأتية.

Find the domain and range of each of the following functions.

21. $f(x) = \dfrac{1}{2 + e^x}$

22. $g(t) = \cos(e^{-t})$

23. $g(t) = \sqrt{1 + 3^{-t}}$

24. $f(x) = \dfrac{3}{1 - e^{2x}}$

5-1 الــدوال العكسية واللوغاريتمات
Inverse Functions and Logarithms

تُسمى الــدالــة التي تلغي أو تعكس تأثير الــدالــة f بالــدالــة العكسية لـ f.

العديد من الدوال الشائعة مقترنة بدالة عكسية. نُقدم الــدالــة اللوغاريتمية الطبيعية باعتبارها معكوس الــدالــة الأسية، ونقدم أيضاً أمثلة على العديد من الدوال المثلثية العكسية.

1-5-1الـدوال واحـد لـواحـد
One-to-One Functions

تـعريــف تكون الـدالـة $f(x)$ متماثلة **one-to-one** على المجال D إذا كان $f(x_1) \neq f(x_2)$ من أجل أي $x_1 \neq x_2$ من D.

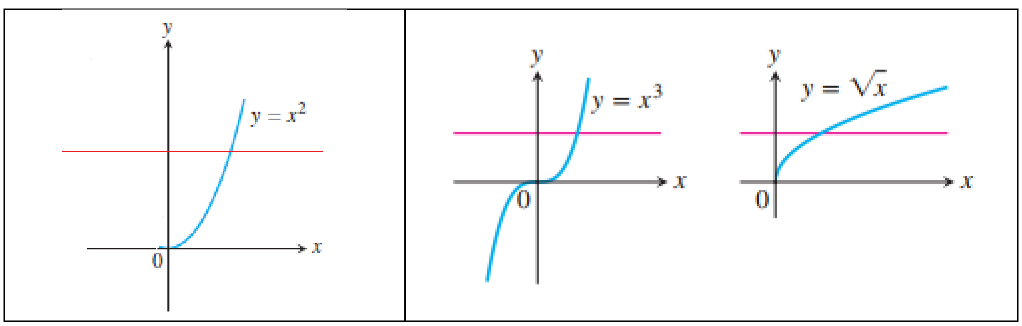
مـثــال 8

بعض الدوال تكون واحد لواحد على كامل مجالها الطبيعي. دوال أخرى ليست واحد لواحد على كامل مجالها، ولكن من خلال تقييد الـدالـة على مجال أصغر يُمكننا إنشاء دالة واحد لواحد.

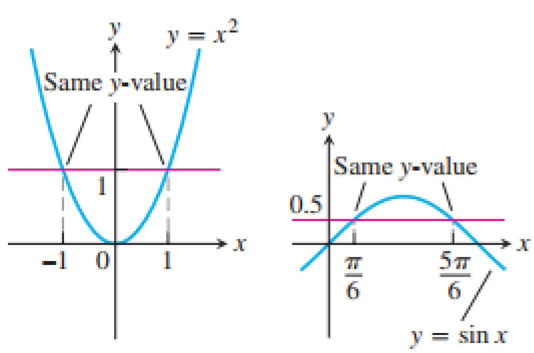
(1) الـدالـة $f(x) = \sqrt{x}$ دالــة واحد لـواحد على أي مجال من الأعداد غير السالبة.

(2) الـدالـة $g(x) = \sin(x)$ ليست واحد لواحد على المجال $[0, \pi]$ لأن $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{5\pi}{6}\right)$. ومع ذلك، فإن دالة الجيب واحد لواحد على المجال $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. ■

يُمكن أن يتقاطع رسم بياني لدالة واحد لواحد مع خط أفقي معين مـرة واحدة على الأكثر. إذا تقاطعت الـدالـة مع خط أفقي أكثر من مـرة، فإنها تفترض نفس قيمة y لقيمتين مختلفتين على الأقل لـ x وبالتالي فهي ليست واحد لواحد.



واحد لواحد: يلتقي الرسم البياني مع كل خط أفقي مرة واحدة على الأكثر



ليس واحداً لواحد: يلتقي الرسم البياني بخط أفقي واحد (أو أكثر من خط أفقي واحد) أكثر من مرة

اختبار الخط الأفقي للدوال واحد لواحد

The Horizontal Line Test for One-to-One Functions

تكون الدالة واحد لواحد إذا وفقط إذا تقاطع رسمها البياني مع كل خط أفقي مرة واحدة على الأكثر.

2-5-1 الدوال العكسية

Inverse Functions

تعريف بفرض أن $\mathbf{f}$ دالة واحد لواحد على المجال $\mathbf{D}$ مع مجموعة القيم $\mathbf{R}$. تُعرَّف الدالة العكسية $\mathbf{f^{-1}}$ بواسطة

$\mathbf{f^{-1}(b) = a}$ إذا كان $\mathbf{f(a) = b}$.

مجال تعريف $\mathbf{f^{-1}}$ هو $\mathbf{R}$ ومجموعة قيمه هي $\mathbf{D}$.

الرمز $\mathbf{f^{-1}}$ الذي يشير إلى معكوس $\mathbf{f}$ ويقرأ " معكوس $\mathbf{f}$ ". وإن $\mathbf{f^{-1}(x)}$ لا يعني $\mathbf{\frac{1}{f(x)}}$ (المقلوب). لاحظ أن مجالات التعريف ومجموعات القيم لـ $\mathbf{f}$ و $\mathbf{f^{-1}}$ متبادلة، وأن

$$\mathbf{(f^{-1} \circ f)(x) = x,}$$

من أجل كل $\mathbf{x}$ من مجال تعريف $\mathbf{f}$.

$$\mathbf{(f \circ f^{-1})(y) = y,}$$

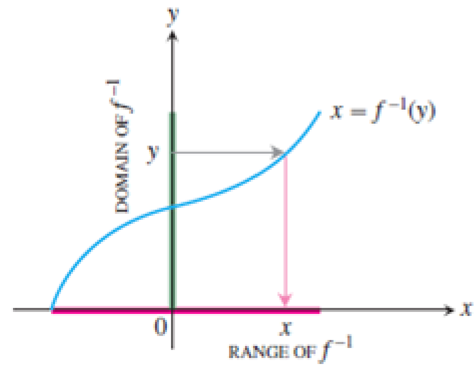
من أجل كل $\mathbf{y}$ من مجال تعريف $\mathbf{f^{-1}}$ (أو مجموعة قيم $\mathbf{f}$).

3-5-1 كيفية إيجاد الدالة العكسية

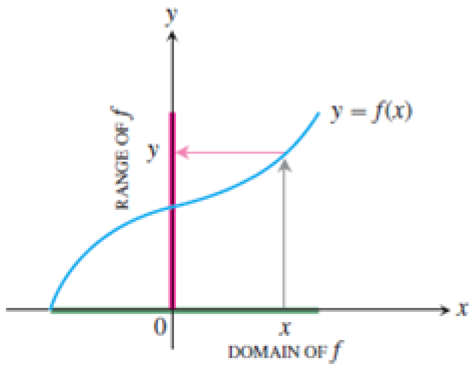
Finding Inverses

ترتبط الرسوم البيانية للدالة وعكسها ارتباطاً وثيقاً. لقراءة قيمة دالة من رسمها البياني، نبدأ عند النقطة $\mathbf{x}$ على المحور $\mathbf{x}$، وننتقل رأسياً إلى الرسم البياني، ثم نتحرك أفقياً إلى المحور $\mathbf{oy}$ لقراءة قيمة $\mathbf{y}$.

يُمكن قراءة الدالة العكسية من الرسم البياني عن طريق عكس هذه العملية. نبدأ بنقطة $\mathbf{y}$ على المحور $\mathbf{oy}$، ثم ننتقل أفقياً إلى الرسم البياني للدالة $\mathbf{f(x)}$. ثم ننتقل رأسياً إلى المحور $\mathbf{ox}$ لقراءة قيمة $\mathbf{x = f^{-1}(y)}$.



الرسم البياني لـ f^{-1} هو الرسم البياني لـ f، ولكن مع تبديل x وy. لإيجاد x التي أعطتنا y، نبدأ من y وننتقل إلى المنحنى ونزولاً إلى المحور x. مجال f^{-1} هو نطاق f. مجال f^{-1} هو مجال f.



لإيجاد قيمة f عند x، نبدأ عند x، وننتقل إلى المنحنى، ثم إلى المحور y

يُمكن تلخيص عملية المرور من f إلى f^{-1} كإجراء من خطوتين.

1. نحل المعادلة $y = f(x)$ بالنسبة إلى x.

2. نبادل بين x و y للحصول على الصيغة $y = f^{-1}(x)$.

4-5-1 أمثلـــة
Examples

أوجد مجموعة تعريف ومجموعة قيم كل من الـدوال التالية ولـدوالـها العكسية، ثم بين أن:

$$(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$$

مع رســم هذه ا الـدوال ودوالــها العكسية.

(1) $$f(x) = \frac{1}{2}x + 1$$

(2) $$f(x) = \frac{2x+1}{3x-4}$$

(3) $$f(x) = \sqrt{x-1} + 2$$

الحـل:

(1)

$$y = \frac{1}{2}x + 1 \quad \Rightarrow \quad x = 2y - 2$$

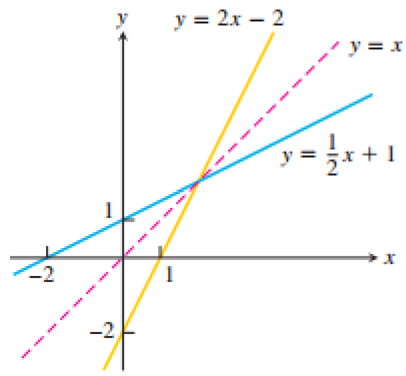
$$f^{-1}(x) = 2x - 2$$

$$D(f) = R, \qquad R(f) = R$$

$$D(f^{-1}) = R, \qquad R(f^{-1}) = R$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = f(2x-2) = \frac{1}{2}(2x-2)+1 = x$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{1}{2}x+1\right) = 2\left(\frac{1}{2}x+1\right) = x$$



يُظهر رسم $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ و $f^{-1}(x) = 2x - 2$ معاً تناظر الرسوم البيانية بالنسبة إلى المستقيم $y = x$

(2)

$$y = \frac{2x+1}{3x-4} \quad \Rightarrow \quad x = \frac{4y+1}{3y-2}$$

$$f^{-1}(x) = \frac{4x+1}{3x-2}$$

$$D(f) = R\backslash\left\{\frac{4}{3}\right\}, \qquad R(f) = R\backslash\left\{\frac{2}{3}\right\}$$

$$D(f^{-1}) = R\backslash\left\{\frac{2}{3}\right\}, \qquad R(f^{-1}) = R\backslash\left\{\frac{4}{3}\right\}$$

$$(f \circ f^{-1})(x) = f\left(f^{-1}(x)\right) = f\left(\frac{4x+1}{3x-2}\right) = \frac{2\left(\frac{4x+1}{3x-2}\right)+1}{3\left(\frac{4x+1}{3x-2}\right)-4} = x$$

$$(f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}\left(\frac{2x+1}{3x-4}\right) = \frac{4\left(\frac{2x+1}{3x-4}\right)+1}{3\left(\frac{2x+1}{3x-4}\right)-2} = x$$

- مـلاحظــة: $f(x)=\frac{ax+b}{a'x+b'} \Rightarrow R(f)=R\backslash\left\{\frac{a}{a'}\right\}$

(3)

$$y=\sqrt{x-1}+2 \quad \Rightarrow \quad x=(y-2)^2+1$$

$$f^{-1}(x)=(x-2)^2+1$$

$$D(f)=[1,\infty[, \qquad R(f)=[2,\infty[$$

$$D(f^{-1})=[2,\infty[, \qquad R(f^{-1})=[1,\infty[$$

$$(f\circ f^{-1})(x)=f\left(f^{-1}(x)\right)=f\left((x-2)^2+1\right)=\sqrt{[(x-2)^2+1]-1}\ +2$$
$$=(x-2)+2 \ =x$$

$$(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}\left(f(x)\right)=f^{-1}\left(\sqrt{x-1}+2\ \right)=\left(\sqrt{x-1}+2-2\right)^2+1$$
$$=(x-1)+1=x$$

5-5-1 الـدالة اللوغاريتمية
Logarithmic Function

الـدالـة $y=Log_a(x)$ هي الـدالة العكسية للـدالـة الأسـيـة $y=a^x$ $(a>0\,,\ a\neq 1)$

حـالات خـاصـة:

من أجـل $a=10$ نضع:

$$Log_{10}(x)=Log\,(x)$$

من أجـل $a=e$ نضع:

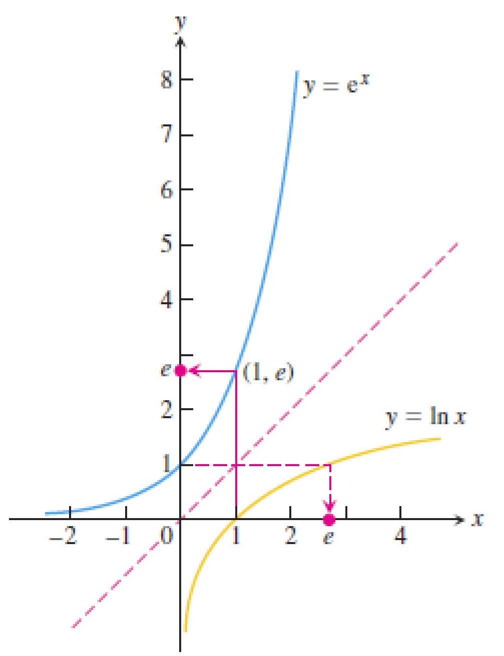
$$Log_e(x)=Ln(\,x)$$

نُسمي الـدالـة $Ln(\,x)$ دالـة اللـوغاريتـم الطبيعي.

من أجـل اللـوغاريتـم الطبيعي يكون:

$$Ln\,(x)=y \iff e^y=x$$

$$Ln\,(e)=1$$



﴿الرسم البياني لـ e^x ومعكوسها $\ln(x)$﴾

الدالة Function	مجموعة التعريف $D(f)$	مجموعة القيم $R(f)$
$y = a^x$	$]-\infty, \infty[$	$]0, \infty[$
$y = \mathrm{Log}_a(x)$	$]0, \infty[$	$]-\infty, \infty[$

خواص:

$$\ln(a.b) = \ln(a) + \ln(b)$$
$$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$$
$$\ln(a^n) = n\ln(a)$$
$$\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln(b)$$

مثال 9

عبر عن اللوغاريتمات التالية بالحدود $\ln(2)$ و $\ln(3)$:

$\ln(0.75)$, $\ln\left(\frac{4}{9}\right)$, $\ln(\sqrt{13.5})$, $\ln(\sqrt[3]{9})$

الحـل:

$$\ln(0.75) = \ln\left(\frac{3}{4}\right) = \ln(3) - \ln(4) = \ln(3) - 2.\ln(2)$$

$$\ln\left(\frac{4}{9}\right) = \ln(4) - \ln(9) = 2.\ln(2) - 2.\ln(3)$$

$$\ln(\sqrt{13.5}) = \ln\left(\sqrt{\frac{27}{2}}\right) = \frac{1}{2}(\ln(27) - 2.\ln(2)) = \frac{1}{2}(3.\ln(3) - 2.\ln(2))$$

$$\ln(\sqrt[3]{9}) = \ln\left(9^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{1}{3}\ln(9) = \frac{1}{3}\ln(3^2) = \frac{2}{3}\ln(3)$$

مـثـال 10

عبر عن اللوغاريتمات التالية بالحدود $\ln(5)$ و $\ln(7)$:

$\ln(9.8)$, $\ln\left(\frac{1}{125}\right)$, $\ln(7\sqrt{7})$, $\ln(1225)$, $\ln(0.056)$

الحـل:

$$\ln(9.8) = \ln\left(\frac{49}{5}\right) = \ln\left(\frac{7^2}{5}\right) = 2.\ln(7) - \ln(5)$$

$$\ln\left(\frac{1}{125}\right) = -\ln(125) = -\ln(5^3) = -3.\ln(5)$$

$$\ln(7\sqrt{7}) = \begin{cases} \ln\left(7^{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{2}\ln(7) \\ \ln(7) + \ln(\sqrt{7}) = \ln(7) + \frac{1}{2}\ln(7) = \frac{3}{2}\ln(7) \end{cases}$$

$$\ln(1225) = \ln(7^2 \times 5^2) = 2.\ln(7) + 2.\ln(5)$$

$$\ln(0.056) = \ln\left(\frac{7}{125}\right) = \ln(7) - \ln(125) = \ln(7) - \ln(5^3) = \ln(7) - 3.\ln(5)$$

نظراً لأن a^x و $\log_a(x)$ معكوسان، فإن تجميعهما بأي ترتيب يُعطي دالة المطابقة.

الخصائص العكسية لـ a^x و $\log_a(x)$

1- إذا كان الأساس a:

$$a^{\log_a(x)} = x, \quad \log_a(a^x) = x, \quad a > 0, a \neq 1, x > 0$$

2- إذا كان الأساس e:

$$e^{\ln(x)} = x, \quad \ln(e^x) = x, \quad x > 0$$

إن استبدال a^x بـ x في المعادلة $x = e^{\ln(x)}$ يُمكننا من إعادة كتابتها كقوة لـ e:

$$a^x = e^{x.\ln(a)}$$

تغيير شكل القاعدة

كل دالة لوغاريتمية هي مضاعف ثابت للوغاريتم الطبيعي.

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)} \qquad (a > 0\,,\ a \neq 1)$$

6-5-1 أمثلة
Examples

عبر عن ما يلي بأبسط شكل:

$e^{\ln(0.7)}$	$e^{-\ln(x^2)}$	$e^{\ln(x)-\ln(y)}$	$2.\ln(\sqrt{2})$	$\ln(\ln(e^e))$
$\ln(e^{2.\ln(x)})$	$\ln(\sin(x)) - \ln\left(\frac{\sin(x)}{5}\right)$	$\ln(\sin(2x)) - \ln\left(\frac{\sin(x)}{2}\right)$		
$\ln(3x^2 - 9x) + \ln\left(\frac{1}{3x}\right)$	$\ln(\sec(x)) + \ln(\cos(x))$	$3.\ln\left(\sqrt[3]{t^2-1}\right) - \ln(t+1)$		

الحـل:

$$e^{\ln 0.7} = 0.7$$

$$e^{-\ln x^2} = e^{\ln\frac{1}{x^2}} = \frac{1}{x^2}$$

$$e^{\ln x - \ln y} = e^{\ln\frac{x}{y}} = \frac{x}{y}$$

$$2.\ln\sqrt{2} = \ln\left(\sqrt{2}\right)^2 = \ln 2$$

$$\ln(\ln(e^e)) = \ln(e\ln(e)) = \ln(e \times 1) = \ln(e) = 1$$

$$\ln\left(e^{2.\ln x}\right) = n\left(e^{\ln x^2}\right) = \ln(x^2)$$

$$\ln(\sin(x)) - \ln\left(\frac{\sin(x)}{5}\right) = \ln\left[\frac{\sin(x)}{\frac{\sin(x)}{5}}\right] = \ln(5)$$

$$\ln(\sin(2x)) - \ln\left(\frac{\sin(x)}{2}\right) = \ln\left[\frac{\sin(2x)}{\frac{\sin(x)}{2}}\right] = \ln\left[\frac{2\times\sin(2x)}{\sin(x)}\right]$$

$$= \ln\left[\frac{2\times 2\times \sin(x)\cos(x)}{\sin(x)}\right] = \ln(4\times\cos(x))$$

$$\ln(3x^2-9x) + \ln\left(\frac{1}{3x}\right) = \ln\left[(3x^2-9x)\frac{1}{3x}\right] = \ln(x-3)$$

$$\ln(\sec(x)) + \ln(\cos(x)) = \ln(\sec(x)\times\cos(x)) = \ln\left[\frac{\cos(x)}{\cos(x)}\right] = \ln(1) = 0$$

$$3.\ \ln\sqrt[3]{t^2-1} - \ln(t+1) = \ln(t-1)(t+1) - \ln(t+1)$$

$$= \ln\frac{(t-1)(t+1)}{(t+1)} = \ln(t-1)$$

أوجــد y بــدلالـــة x

(-1)
$$\ln(y^2-1) - \ln(y+1) = \ln x$$

$$\Rightarrow \ln\frac{(y-1)(y+1)}{y+1} = \ln(x)$$

$$\Rightarrow \ln(y-1) = \ln(x)$$

$$\Rightarrow y-1 = x \Rightarrow y = x+1$$

(-2)
$$\ln(y-1) - \ln 2 = x + \ln x$$

$$\Rightarrow \ln\frac{y-1}{2} = x + \ln x$$

$$\Rightarrow \ln\frac{y-1}{2} - \ln x = x$$

$$\Rightarrow \ln\frac{y-1}{2x} = x$$

$$\Rightarrow e^{\ln\frac{y-1}{2x}} = e^x$$

$$\Rightarrow \frac{y-1}{2x} = e^x$$

$$\Rightarrow y - 1 = 2xe^x \Rightarrow y = 2xe^x + 1$$

$$\ln(y^2 - 2y) - \ln(y-2) = x - 2\ln x \qquad (-3)$$

$$\Rightarrow \ln \frac{y^2 - 2y}{y-2} = x - \ln x^2$$

$$\Rightarrow \ln y = x - \ln x^2$$

$$\Rightarrow \ln y + \ln x^2 = x$$

$$\Rightarrow \ln(y.x^2) = x$$

$$\Rightarrow y.x^2 = e^x$$

$$\Rightarrow y = \frac{e^x}{x^2}$$

$$\ln(y^2 + 4y + 3) - \ln(y+3) = 2 + \ln(x) - 2\ln(x^2) \qquad (-4)$$

$$\Rightarrow \ln \frac{(y^2 + 4y + 3)}{y+3} = 2 + \ln(x) - \ln x^4$$

$$\Rightarrow \ln \frac{(y+3)(y+1)}{y+3} = 2 + \ln\left[\frac{x}{x^4}\right]$$

$$\Rightarrow \ln(y+1) = 2 + \ln\left[\frac{1}{x^3}\right]$$

$$\Rightarrow \ln(y+1) - \ln\frac{1}{x^3} = 2$$

$$\Rightarrow \ln(y+1) + \ln x^3 = 2$$

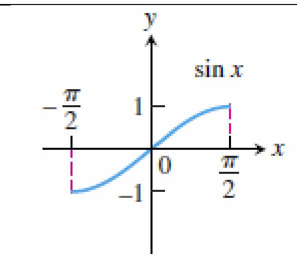
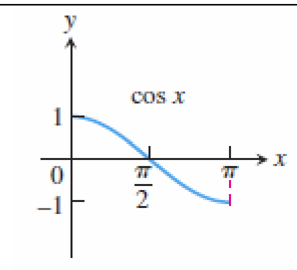
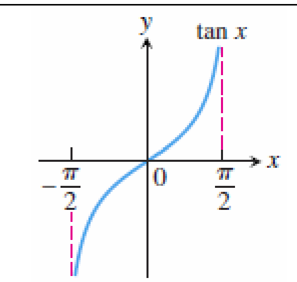
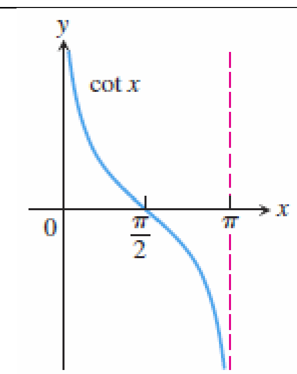
$$\Rightarrow \ln[x^3(y+1)] = 2$$

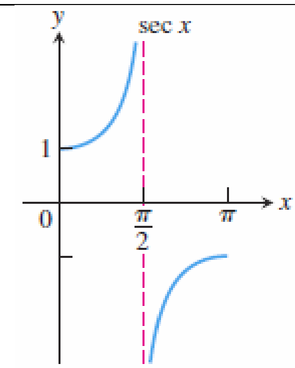
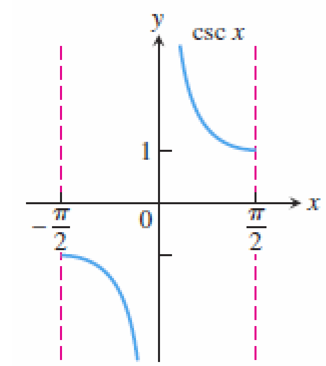
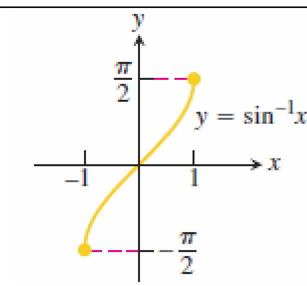
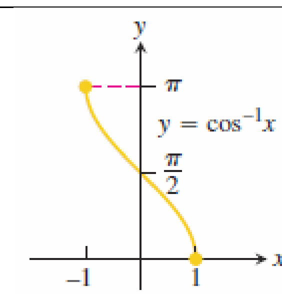
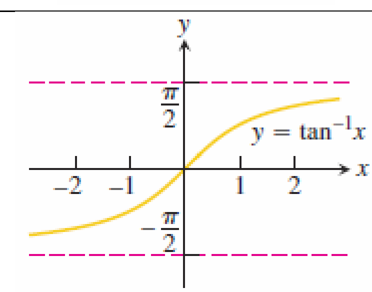
$$\Rightarrow x^3(y+1) = e^2$$

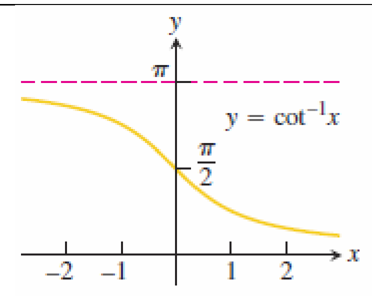
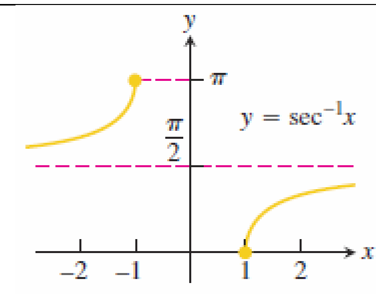
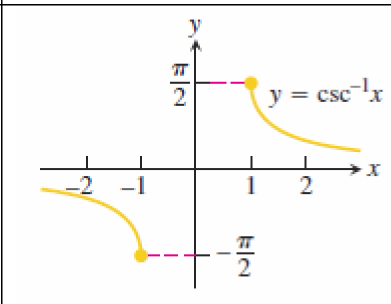
$$\Rightarrow y = \frac{e^2}{x^3} - 1$$

7-5-1 الـدوال المـثـلـثـيـــة الـعـكـسـيـة
Inverse Trigonometric Functions

إن الدوال المثلثية المذكورة سابقاً، ليست واحد لواحد (تتكرر قيمها بشكل دوري). ومع ذلك، يُمكننا تقييد مجـالاتـهـا بـفـواصــل زمنية تـكـون فـيهـا واحـد لـواحـد.

الـدالـة	مجموعة التعريف واحد لواحد	مجموعة القيم	Graph منحني الـدالـة
$y = \sin x$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$[-1, 1]$	
$y = \cos x$	$[0, \pi]$	$[-1, 1]$	
$y = \tan x$	$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$	$]-\infty, \infty[$	
$y = \cot x$	$]0, \pi[$	$]-\infty, \infty[$	

$\mathbf{y = \sec x}$	$[\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}] \backslash \left\{\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right\}$	$]-\infty, -\mathbf{1}] \cup [\mathbf{1}, \infty[$	
$\mathbf{y = \csc x}$	$\left[-\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}, \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right] \backslash \{\mathbf{0}\}$	$]-\infty, -\mathbf{1}] \cup [\mathbf{1}, \infty[$	
$\mathbf{y = \sin^{-1} x}$	$[-\mathbf{1}, \mathbf{1}]$	$\left[-\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}, \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right]$	
$\mathbf{y = \cos^{-1} x}$	$[-\mathbf{1}, \mathbf{1}]$	$[\mathbf{0}, \boldsymbol{\pi}]$	
$\mathbf{y = \tan^{-1} x}$	$]-\infty, \infty[$	$\left]-\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}, \frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}}\right[$	

$\mathbf{y = \cot^{-1} x}$	$]-\infty, \infty[$	$]0, \pi[$	
$\mathbf{y = \sec^{-1} x}$	$]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$	$[0, \pi] \backslash \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$	
$\mathbf{y = \csc^{-1} x}$	$]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$	$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \backslash \{0\}$	

8-5-1 متطابقات تتضمن $\sin^{-1}$ و $\cos^{-1}$

Identities Involving Arcsine and Arccosine

$$\sin\left(\sin^{-1}(x)\right) = \sin^{-1}(\sin(x)) = x$$

$$\cos\left(\cos^{-1}(x)\right) = \cos^{-1}(\cos(x)) = x$$

$$\sin^{-1}(-x) = -\sin^{-1}(x)$$

$$\sin^{-1}(x) + \cos^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$$

$$\cos^{-1}(-x) + \cos^{-1}(x) = \pi$$

9-5-1 أمثلـــــة

Examples

1) $\sin^{-1}(\cos(x)), \quad 0 \le x \le \pi$

$$= \frac{\pi}{2} - \cos^{-1}(\cos(x)) = \frac{\pi}{2} - x. \blacksquare$$

$\sin^{-1}(x) + \cos^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$

$$2)\ \cos^{-1}\left(\sin(x)\right),\quad -\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$$
$$= \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\left(\sin(x)\right) = \frac{\pi}{2} - x$$

$$3)\ \sin\left(\cos^{-1}(x)\right),\quad |x| \le 1$$

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$
$$\sin(x) = \sqrt{1 - \cos^2(x)}$$

$$= \sqrt{1 - \cos^2\left(\cos^{-1}(x)\right)} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$4)\ \cos\left(\sin^{-1}(x)\right),\quad |x| \le 1$$
$$= \sqrt{1 - \sin^2\left(\sin^{-1}(x)\right)} = \sqrt{1 - x^2}$$

$$5)\ \tan\left(\sin^{-1}(x)\right),\quad |x| \le 1$$
$$= \frac{\sin\left(\sin^{-1}(x)\right)}{\cos\left(\sin^{-1}(x)\right)} = \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$6)\ \tan\left(\cos^{-1}(x)\right),\quad |x| \le 1$$
$$= \frac{\sin\left(\cos^{-1}(x)\right)}{\cos\left(\cos^{-1}(x)\right)} = \frac{\sqrt{1 - x^2}}{x}$$

10-5-1 تـمــــاريــن
Exercises

صيغ الدوال العكسية

أوجد f^{-1} وحدد مجال ونطاق f^{-1}. وللتحقق، بيّن أن $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$

Find f^{-1} and identify the domain and range of f^{-1}.
As a check, show that $(f \circ f^{-1})(x) = (f^{-1} \circ f)(x) = x$

25. $f(x) = x^5$
26. $f(x) = x^4, \quad x \ge 0$
27. $f(x) = x^3 + 1$
28. $f(x) = (1/2)x - 7/2$
29. $f(x) = 1/x^2, \quad x > 0$
30. $f(x) = 1/x^3, \quad x \ne 0$
31. $f(x) = \dfrac{x + 3}{x - 2}$
32. $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} - 3}$
33. $f(x) = x^2 - 2x, \quad x \le 1$
    (*Hint:* Complete the square.)
34. $f(x) = (2x^3 + 1)^{1/5}$

35. $f(x) = \dfrac{x+b}{x-2}$, $\quad b > -2$ and constant

36. $f(x) = x^2 - 2bx$, $\quad b > 0$ and constant, $x \le b$

معكأأوس المستقيمات

37. a. Find the inverse of the function $f(x) = mx$, where m is a constant different from zero.

b. What can you conclude about the inverse of a function $y = f(x)$ whose graph is a line through the origin with a nonzero slope m?

38. Show that the graph of the inverse of $f(x) = mx + b$, where m and b are constants and $m \neq 0$, is a line with slope $1/m$ and y-intercept $-b/m$.

39. a. Find the inverse of $f(x) = x + 1$. Graph f and its inverse together. Add the line $y = x$ to your sketch, drawing it with dashes or dots for contrast.

b. Find the inverse of $f(x) = x + b$ (b constant). How is the graph of f^{-1} related to the graph of f?

c. What can you conclude about the inverses of functions whose graphs are lines parallel to the line $y = x$?

40. a. Find the inverse of $f(x) = -x + 1$. Graph the line $y = -x + 1$ together with the line $y = x$. At what angle do the lines intersect?

b. Find the inverse of $f(x) = -x + b$ (b constant). What angle does the line $y = -x + b$ make with the line $y = x$?

c. What can you conclude about the inverses of functions whose graphs are lines perpendicular to the line $y = x$?

اللوغاريتمات والأسس

عبر عن اللوغاريتمات التالية من حيث (2) ln و(3) ln

41. Express the following logarithms in terms of ln 2 and ln 3.

a. $\ln 0.75$	b. $\ln (4/9)$
c. $\ln (1/2)$	d. $\ln \sqrt[3]{9}$
e. $\ln 3\sqrt{2}$	f. $\ln \sqrt{13.5}$

42. Express the following logarithms in terms of ln 5 and ln 7.

a. $\ln (1/125)$	b. $\ln 9.8$
c. $\ln 7\sqrt{7}$	d. $\ln 1225$
e. $\ln 0.056$	f. $(\ln 35 + \ln (1/7))/(\ln 25)$

Use the properties of logarithms to write the expressions in Exercises 43 and 44 as a single term.

43. a. $\ln \sin\theta - \ln\left(\dfrac{\sin\theta}{5}\right)$ $\qquad$ b. $\ln (3x^2 - 9x) + \ln\left(\dfrac{1}{3x}\right)$

c. $\dfrac{1}{2}\ln (4t^4) - \ln b$

Find simpler expressions for the quantities in Exercises 45–48.

45. **a.** $e^{\ln 7.2}$ **b.** $e^{-\ln x^2}$ **c.** $e^{\ln x - \ln y}$

46. **a.** $e^{\ln(x^2+y^2)}$ **b.** $e^{-\ln 0.3}$ **c.** $e^{\ln \pi x - \ln 2}$

47. **a.** $2\ln\sqrt{e}$ **b.** $\ln(\ln e^e)$ **c.** $\ln(e^{-x^2-y^2})$

48. **a.** $\ln(e^{\sec\theta})$ **b.** $\ln(e^{(e^x)})$ **c.** $\ln(e^{2\ln x})$

In Exercises 49–54, solve for y in terms of t or x, as appropriate.

49. $\ln y = 2t + 4$

50. $\ln y = -t + 5$

51. $\ln(y - b) = 5t$

52. $\ln(c - 2y) = t$

53. $\ln(y - 1) - \ln 2 = x + \ln x$

54. $\ln(y^2 - 1) - \ln(y + 1) = \ln(\sin x)$

In Exercises 55 and 56, solve for k.

55. **a.** $e^{2k} = 4$ **b.** $100e^{10k} = 200$ **c.** $e^{k/1000} = a$

56. **a.** $e^{5k} = \frac{1}{4}$ **b.** $80e^k = 1$ **c.** $e^{(\ln 0.8)k} = 0.8$

In Exercises 57–60, solve for t.

57. **a.** $e^{-0.3t} = 27$ **b.** $e^{kt} = \frac{1}{2}$ **c.** $e^{(\ln 0.2)t} = 0.4$

58. **a.** $e^{-0.01t} = 1000$ **b.** $e^{kt} = \frac{1}{10}$ **c.** $e^{(\ln 2)t} = \frac{1}{2}$

59. $e^{\sqrt{t}} = x^2$

60. $e^{(x^2)}e^{(2x+1)} = e^t$

Simplify the expressions in Exercises 61–64.

61. **a.** $5^{\log_5 7}$ **b.** $8^{\log_8 \sqrt{2}}$ **c.** $1.3^{\log_{1.3} 75}$

d. $\log_4 16$ **e.** $\log_3 \sqrt{3}$ **f.** $\log_4\left(\frac{1}{4}\right)$

62. **a.** $2^{\log_2 3}$ **b.** $10^{\log_{10}(1/2)}$ **c.** $\pi^{\log_\pi 7}$

d. $\log_{11} 121$ **e.** $\log_{121} 11$ **f.** $\log_3\left(\frac{1}{9}\right)$

63. **a.** $2^{\log_4 x}$ **b.** $9^{\log_3 x}$ **c.** $\log_2(e^{(\ln 2)(\sin x)})$

64. **a.** $25^{\log_5(3x^2)}$ **b.** $\log_e(e^x)$ **c.** $\log_4(2^{e^x \sin x})$

Express the ratios in Exercises 65 and 66 as ratios of natural log rithms and simplify.

65. **a.** $\dfrac{\log_2 x}{\log_3 x}$ **b.** $\dfrac{\log_2 x}{\log_8 x}$ **c.** $\dfrac{\log_x a}{\log_{x^2} a}$

66. **a.** $\dfrac{\log_9 x}{\log_3 x}$ **b.** $\dfrac{\log_{\sqrt{10}} x}{\log_{\sqrt{2}} x}$ **c.** $\dfrac{\log_a b}{\log_b a}$

$\cos^{-1}$ و $\sin^{-1}$

أوجد القيمة الدقيقة لكل تعبير

Find the exact value of each expression.

67. **a.** $\sin^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)$ **b.** $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ **c.** $\sin^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

68. **a.** $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ **b.** $\cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ **c.** $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

69. **a.** $\arccos(-1)$ **b.** $\arccos(0)$

70. **a.** $\arcsin(-1)$ **b.** $\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

الفصل الثاني

النـهـايـات والاسـتمـرار

LIMITS AND CONTINUITY

1-2 نـهـايـات دالـة وقوانين الـنـهـايـات
Limit of a Function and Limit Laws

في كثير من الأحيان، عند دراسة دالة $f(x)$ ، نجد أنفسنا مهتمين بسلوك الـدالـة بالقرب من نقطة معينة c، ولكن ليس عند c.

قد تكون هذه هي الحالة، على سبيل المثال، إذا كان c عدداً غير نسبي، مثل π أو $\sqrt{2}$، حيث لا يمكن تقريب قيمه إلا من خلال أعداد نسبية قريبة" حيث نقوم فعليًا بتقييم الـدالـة بدلاً من ذلك. يحدث موقف آخر عند محاولة تقييم دالة عند c مما يؤدي إلى القسمة على الصفر، وهو أمر غير معرف.

نُقدم الآن مثالاً محدداً حيث نستكشف عدديًا كيف تتصرف الـدالـة بالقرب من نقطة معينة لا يُمكننا عندها تقييم الـدالـة بشكل مباشر.

مـثــال 1

كيف تتصرف الـدالـة

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

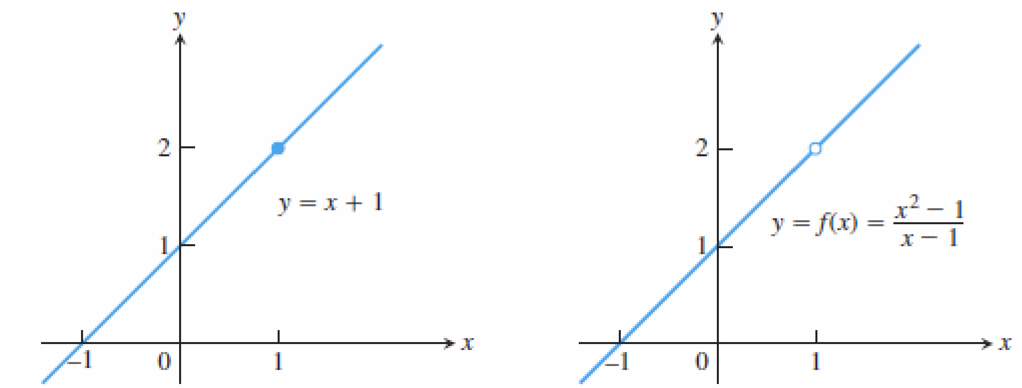
بالقرب من النقطة $x = 1$.

الـحـل:

تحدد الصيغة المعطاة f لجميع الأعداد الحقيقية x باستثناء $x = 1$ (لا يُمكننا القسمة على الصفر). بالنسبة لأي $x \neq 1$، يُمكننا تبسيط الصيغة عن طريق تحليل البسط وإلغاء العوامل المشتركة:

$$f(x) = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x + 1\,, \quad x \neq 1$$

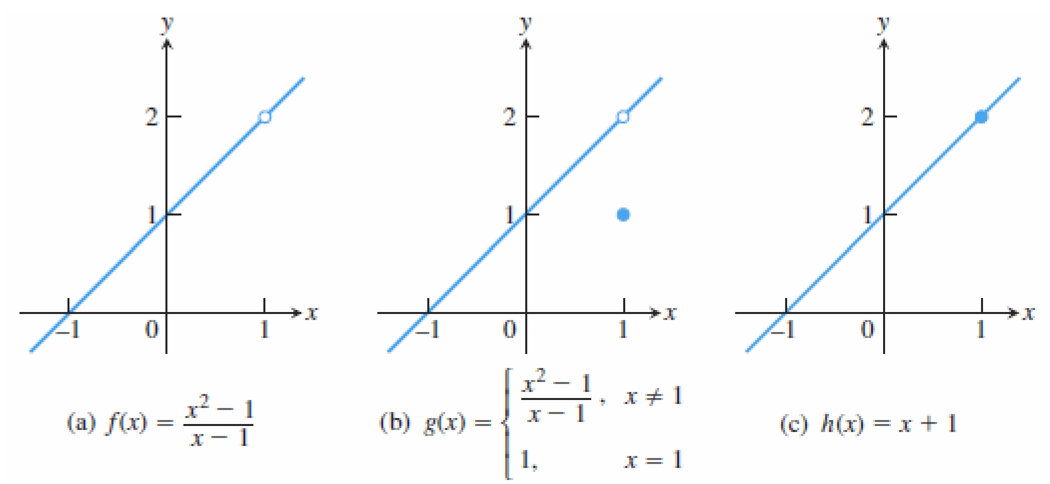
يمثل الرسم البياني لـ f هو المستقيم $y = x + 1$ بدون النقطة $(1, 2)$. تظهر هذه النقطة المزالة على شكل ثقب في الشكل التالي. على الرغم من أن $f(1)$ غير معرّف، فمن الواضح أنه يُمكننا جعل قيمة $f(x)$ قريبـة قدر الإمكان من 2 عن طريق اختيـار x قريبـة بما يكفي من 1.



الرسم البياني لـ **f** هو متطابق مع المستقيم $y = x + 1$ باستثناء عند النقطة $x = 1$، حيث **f** غير معرف

مــثــال 2

لا تعتمد قيمة النهاية للـدالـة على كيفية تعريف الـدالـة عند النقطة التي يتم الاقتراب منها. فمن أجل الدوال الثلاث في الشكل التالي، نلاحظ أن الـدالـة f لها نهاية 2 عندما $x \to 1$ على الرغم من أن f غير معرفة عند $x = 1$. الـدالـة g لها نهاية 2 عندما $x \to 1$ على الرغم من أن $g(1) \neq 2$. الـدالـة h هي الـدالـة الوحيدة من بين الدوال الثلاث التي نهايتها عندما $x \to 1$ تساوي قيمتها عند $x = 1$. بالنسبة إلى h، لدينا $\lim_{x \to 1} h(x) = h(1)$. هذه المساواة بين النهاية وقيمة الـدالـة مهمة، وسنعود إليها في فقرة الاستمرار.



النهايات للدوال $f(x), g(x), h(x)$ كلها تساوي 2 عندما تقترب x من 1.

ومع ذلك، فإن $h(x)$ فقط لها نفس قيمة الـدالـة مثل نهايتها عند النقطة $x = 1$

1-1-2 قوانين النهايات
Limit Laws

نظرية 1 قوانين النهايات

Limit Laws

إذا كانت L, M, c, k أعداداً حقيقية وكان

$$\lim_{x\to c} f(x) = L\ ,\quad \lim_{x\to c} g(x) = M$$ عندها يكون:

1 - $$\lim_{x\to c}\big(f(x) + g(x)\big) = L + M$$

2 - $$\lim_{x\to c}\big(f(x) - g(x)\big) = L - M$$

3 - $$\lim_{x\to c}\big(f(x).\,g(x)\big) = L.\,M$$

4 - $$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M},\quad M \neq 0$$

5 - $$\lim_{x\to c}\big(k.\,f(x)\big) = k.\,L$$

6 - $$\lim_{x\to c}[f(x)]^n = L^n$$

7 - $$\lim_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L} = L^{\frac{1}{n}},$$ n عدد صحيح موجب

مثال 3

أوجد النهايات التالية:

$$(1)\ \lim_{x\to c}(x^3 + 4x^2 - 3) \qquad (2)\ \lim_{x\to c}\frac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 5} \qquad (3)\ \lim_{x\to -2}\sqrt{4x^2 - 3}$$

الحل

$$(1)\ \lim_{x\to c}(x^3 + 4x^2 - 3) = \lim_{x\to c}(x^3) + \lim_{x\to c}(4x^2) - \lim_{x\to c}(3)$$

$$= c^3 + 4c^2 - 3$$

$$(2)\ \lim_{x\to c}\frac{x^4 + x^2 - 1}{x^2 + 5} = \frac{\lim_{x\to c}(x^4 + x^2 - 1)}{\lim_{x\to c}(x^2 + 5)}$$

$$= \frac{\lim_{x\to c}(x^4) + \lim_{x\to c}(x^2) - \lim_{x\to c}(1)}{\lim_{x\to c}(x^2) + \lim_{x\to c}(5)}$$

$$= \frac{c^4 + c^2 - 1}{c^2 + 5}$$

(3) $$\lim_{x\to -2} \sqrt{4x^2 - 3} = \sqrt{\lim_{x\to -2}(4x^2 - 3)}$$

$$= \sqrt{\lim_{x\to -2}(4x^2) - \lim_{x\to c}(3)}$$

$$= \sqrt{4(-2)^2 - 3}$$

$$= \sqrt{16 - 3} = \sqrt{13}\,.$$ ■

نـظـريـــة 2 نهايات كثيرات الحدود

Limits of Polynomials

إذ كان $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ عندها يكون

$$\lim_{x\to c} P(x) = P(c) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \cdots + a_1 c + a_0.$$

نـظـريـــة 3 نـهايات الـدوال الـكـسريـــة

Limits of Rational Functions

إذ كان $P(x)$ و $Q(x)$ كثيرا حدود و $Q(c) \neq 0$، عندها يكون

$$\lim_{x\to c} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(c)}{Q(c)}\,.$$

مـثـــال 4

التمرين التالي هو تطبيق مباشر النظريتين 2 و 3:

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3 + 4\,x^2 + -3}{x^2 + 5} = \frac{(-1)^3 + 4\,(-1)^2 + -3}{(-1)^2 + 5} = \frac{0}{6} = 0.$$ ■

إزالــة المقــامات الــصفريــة جبريــاً

لا تنطبق النظرية 3 إلا إذا لم يكن مقـام الـدالـة الكسرية صفراً عند نقطة النهاية c. وإذا كان المقام صفراً، فإن إلغـاء العوامـل المشتركة في البسط والمقام قد يؤدي إلى اختـزال الكسر إلى كسر لم يعد مقامه صفراً عند c. وإذا حدث ذلك، فيمكننا إيـجـاد النـهـاية عن طريـق التعويض في الكسر المبسط.

مثال

أوجد النـهاية:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-x}$$

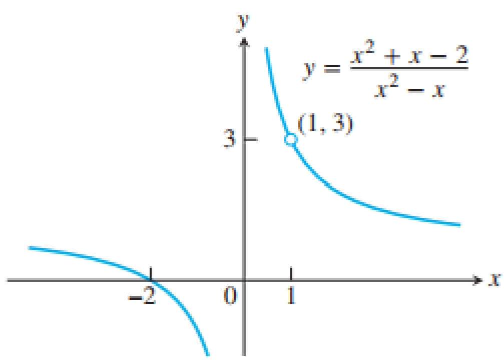
الحل

لا يمكننا استبدال $x=1$ لأنه يجعل المقام صفراً. نختبر البسط لنرى ما إذا كان هو أيضاً صفراً، إذا كان صفراً فهو يحتوي على عامل $x-1$ المشترك مع المقام. يؤدي حذف $(x-1)$ إلى الحصول على كسر أبسط بنفس قيم الأصل من أجل $x \neq 1$.

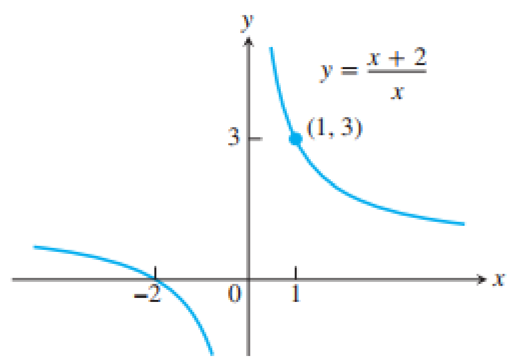
$$\frac{x^2+x-2}{x^2-x}=\frac{(x-1)(x+2)}{x(x-1)}=\frac{x+2}{x}, \quad x\neq 1$$

وبالتالي

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-x}=\lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x}=\frac{1+2}{1}=3. \qquad ■$$



$(-1-)$



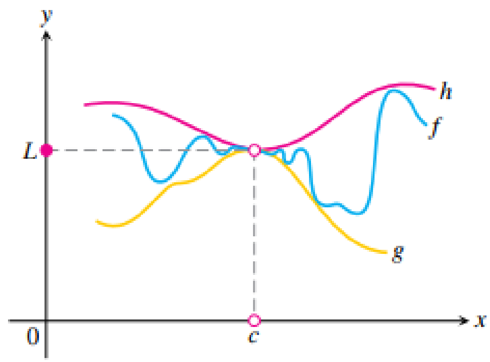
$(-2-)$

الرسم البياني لـ $f(x)=(x^2+x-2)/(x^2-x)$ في القسم الأول هو نفس الرسم البياني لـ $g(x)=(x+2)/x$ في القسم الثاني ما عدا عند المقطة $x=1$، حيث f غير معرف. الدوال لها نفس النهاية عندما $x\to 1$

نــظــريـــة الاحــاطــة

The Sandwich Theorem

تتيح لنا النظرية التالية حساب مجموعة متنوعة من النهايات. وتُسمى نظرية الاحاطة لأنها تشير إلى دالة f تكون قيمها محصورة بين قيم دالتين أخريين g و h لهما نفس النهاية L عند نقطة c. ولأنها محصورة بين قيم دالتين تقتربان من L، فيجب أن تقترب قيم f أيضاً من L.



﴿الرسم البياني لـ f محصور بين الرسم البياني لـ g و h﴾

نــظــريـــة 4 نــظــريـــة الاحــاطــة

The Sandwich Theorem

بفرض أن $g(x) \le f(x) \le h(x)$ من أجل كل x من مجال مفتوح يحوي النقطة c (مع امكانية استثناء النقطة $x = c$ نفسها). وبفرض أن

$$\lim_{x\to c} g(x) = \lim_{x\to c} h(x) = L.$$

عندها يكون $\lim_{x\to c} f(x) = L$.

مــثــال 3

ليكن

$$1 - \frac{x^2}{4} \le u(x) \le 1 + \frac{x^2}{2}, \qquad x \ne 0,$$

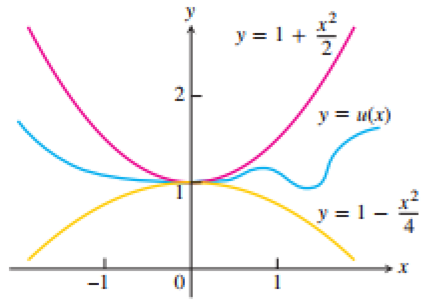
أوجد $\lim_{x\to 0} u(x)$، حيث لا يهم مدى تعقيد عبـارة $u(x)$.

الـحــل:

بما أن

$$\lim_{x\to 0}\left(1 - \frac{x^2}{4}\right) = 1 \quad and \quad \lim_{x\to 0}\left(1 + \frac{x^2}{2}\right) = 1$$

تشير نظرية الاحاطة إلى أن $\lim_{x\to 0} u(x) = 1$. ■



أي دالة $u(x)$ التي يقع رسمها البياني في المنطقة بين $y = 1 + (x^2/2)$ و $y = 1 - (x^2/4)$ لهـا نهـايـة 1 عندما $x \to 0$.

مـثـال 4

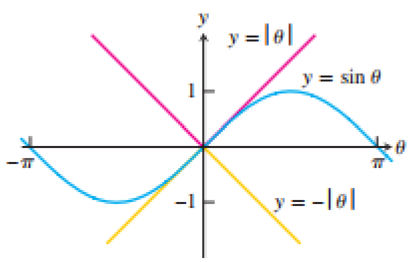
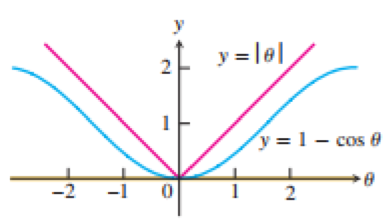
تساعدنا نظرية الاحاطة في وضع العديد من قـواعد النهـايـة المهمة:

1- $\lim\limits_{\theta \to 0} \sin(\theta) = 0$

2- $\lim\limits_{\theta \to 0} \cos(\theta) = 1$

3- من أجل أي دالة f، مع $\lim_{x\to c}|f(x)| = 0$ يكون $\lim_{x\to c} f(x) = 0$.

الحـل:

1- لدينا من أجل أي θ: $-\lvert\theta\rvert \le \sin(\theta) \le \lvert\theta\rvert$ وبما أن $\lim\limits_{\theta\to 0}(-\lvert\theta\rvert) = \lim\limits_{\theta\to 0}(\lvert\theta\rvert) = 0$ نحصل على أن $\lim\limits_{\theta\to 0} \sin(\theta) = 0$.	
2- لدينا من أجل أي θ: $0 \le 1 - \cos(\theta) \le \lvert\theta\rvert$ وبما أن $\lim\limits_{\theta\to 0}(1 - \cos(\theta)) = 0$ نحصل على أن $\lim\limits_{\theta\to 0} \cos(\theta) = 1$.	
3- بما أن $-\lvert f(x)\rvert \le f(x) \le \lvert f(x)\rvert$ وأن نهاية $-\lvert f(x)\rvert$ تساوي نهاية $\lvert f(x)\rvert$ عندما $x \to c$ نجد أن $\lim_{x\to c} f(x) = 0$. ■	

2-1-2 تمـــاريـن
Exercises

حساب النهايات

أوجد النهايات في التمارين الأتية

Find the limits in the following exercises.

11. $\lim_{x \to -7} (2x + 5)$

12. $\lim_{x \to 2} (-x^2 + 5x - 2)$

13. $\lim_{t \to 6} 8(t - 5)(t - 7)$

14. $\lim_{x \to -2} (x^3 - 2x^2 + 4x + 8)$

15. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x + 3}{x + 6}$

16. $\lim_{s \to 2/3} 3s(2s - 1)$

17. $\lim_{x \to -1} 3(2x - 1)^2$

18. $\lim_{y \to 2} \dfrac{y + 2}{y^2 + 5y + 6}$

19. $\lim_{y \to -3} (5 - y)^{4/3}$

20. $\lim_{z \to 0} (2z - 8)^{1/3}$

21. $\lim_{h \to 0} \dfrac{3}{\sqrt{3h + 1} + 1}$

22. $\lim_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{5h + 4} - 2}{h}$

نهايات القسمة

Find the limits in the following exercises

23. $\lim_{x \to 5} \dfrac{x - 5}{x^2 - 25}$

24. $\lim_{x \to -3} \dfrac{x + 3}{x^2 + 4x + 3}$

25. $\lim_{x \to -5} \dfrac{x^2 + 3x - 10}{x + 5}$

26. $\lim_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 7x + 10}{x - 2}$

27. $\lim_{t \to 1} \dfrac{t^2 + t - 2}{t^2 - 1}$

28. $\lim_{t \to -1} \dfrac{t^2 + 3t + 2}{t^2 - t - 2}$

29. $\lim_{x \to -2} \dfrac{-2x - 4}{x^3 + 2x^2}$

30. $\lim_{y \to 0} \dfrac{5y^3 + 8y^2}{3y^4 - 16y^2}$

31. $\lim_{x \to 1} \dfrac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1}$

32. $\lim_{x \to 0} \dfrac{\frac{1}{x - 1} + \frac{1}{x + 1}}{x}$

33. $\lim_{u \to 1} \dfrac{u^4 - 1}{u^3 - 1}$

34. $\lim_{v \to 2} \dfrac{v^3 - 8}{v^4 - 16}$

35. $\lim_{x \to 9} \dfrac{\sqrt{x} - 3}{x - 9}$

36. $\lim_{x \to 4} \dfrac{4x - x^2}{2 - \sqrt{x}}$

37. $\lim_{x \to 1} \dfrac{x - 1}{\sqrt{x + 3} - 2}$

38. $\lim_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{x^2 + 8} - 3}{x + 1}$

39. $\lim_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{x^2 + 12} - 4}{x - 2}$

40. $\lim_{x \to -2} \dfrac{x + 2}{\sqrt{x^2 + 5} - 3}$

41. $\lim_{x \to -3} \dfrac{2 - \sqrt{x^2 - 5}}{x + 3}$

42. $\lim_{x \to 4} \dfrac{4 - x}{5 - \sqrt{x^2 + 9}}$

النهايات مع الدوال المثلثية

Find the limits in the following Exercises

43. $\lim_{x \to 0} (2 \sin x - 1)$

44. $\lim_{x \to \pi/4} \sin^2 x$

45. $\lim_{x \to 0} \sec x$

46. $\lim_{x \to \pi/3} \tan x$

47. $\lim_{x \to 0} \dfrac{1 + x + \sin x}{3 \cos x}$

48. $\lim_{x \to 0} (x^2 - 1)(2 - \cos x)$

49. $\lim_{x \to -\pi} \sqrt{x + 4} \cos (x + \pi)$

50. $\lim_{x \to 0} \sqrt{7 + \sec^2 x}$

استخدام قواعد النهايات

53. Suppose $\lim_{x\to c} f(x) = 5$ and $\lim_{x\to c} g(x) = -2$. Find

a. $\lim_{x\to c} f(x)g(x)$ b. $\lim_{x\to c} 2f(x)g(x)$

c. $\lim_{x\to c} (f(x) + 3g(x))$ d. $\lim_{x\to c} \dfrac{f(x)}{f(x) - g(x)}$

54. Suppose $\lim_{x\to 4} f(x) = 0$ and $\lim_{x\to 4} g(x) = -3$. Find

a. $\lim_{x\to 4} (g(x) + 3)$ b. $\lim_{x\to 4} xf(x)$

c. $\lim_{x\to 4} (g(x))^2$ d. $\lim_{x\to 4} \dfrac{g(x)}{f(x) - 1}$

55. Suppose $\lim_{x\to b} f(x) = 7$ and $\lim_{x\to b} g(x) = -3$. Find

a. $\lim_{x\to b} (f(x) + g(x))$ b. $\lim_{x\to b} f(x)\cdot g(x)$

c. $\lim_{x\to b} 4g(x)$ d. $\lim_{x\to b} f(x)/g(x)$

56. Suppose that $\lim_{x\to -2} p(x) = 4$, $\lim_{x\to -2} r(x) = 0$, and $\lim_{x\to -2} s(x) = -3$. Find

a. $\lim_{x\to -2} (p(x) + r(x) + s(x))$

b. $\lim_{x\to -2} p(x)\cdot r(x)\cdot s(x)$

c. $\lim_{x\to -2} (-4p(x) + 5r(x))/s(x)$

Using the Sandwich Theorem استخدام نظرية الاحاطة

63. If $\sqrt{5 - 2x^2} \le f(x) \le \sqrt{5 - x^2}$ for $-1 \le x \le 1$, find $\lim_{x\to 0} f(x)$.

64. If $2 - x^2 \le g(x) \le 2\cos x$ for all x, find $\lim_{x\to 0} g(x)$.

65. **a.** It can be shown that the inequalities

$$1 - \frac{x^2}{6} < \frac{x\sin x}{2 - 2\cos x} < 1$$

hold for all values of x close to zero. What, if anything, does this tell you about

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{2 - 2\cos x}?$$

Give reasons for your answer.

2-2 الـتعـريـف الدقـيق للنـهــايــة

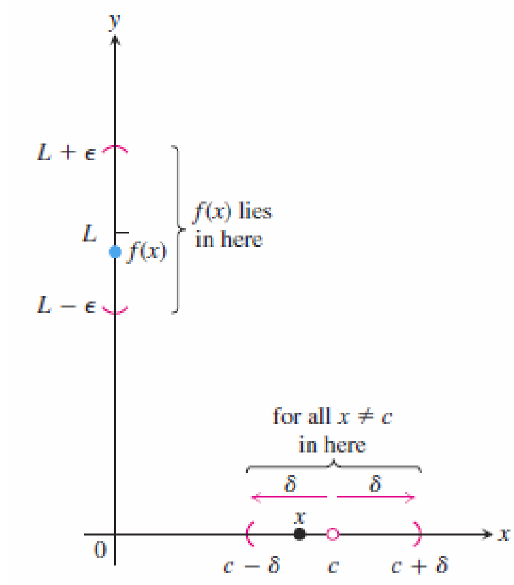
The Precise Definition of a Limit

تـعـريــف ليكن $f(x)$ معرفاً على مجال مفتوح حول نقطة c (مع امكانية استثناء النقطة $x = c$ نفسها). نقول إن نهاية $f(x)$ عندما تقترب x من c هو العدد L، ونكتب

$$\lim_{x\to c} f(x) = L,$$

إذا كان من أجل أي عدد $\varepsilon > 0$ يوجد عدد $\delta > 0$ بحيث يكون من أجل كل x،

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$



العلاقـة بين δ و ε في تعريف النهايـة

3-2 الـنهـايـات من جـانب أو طـرف واحد

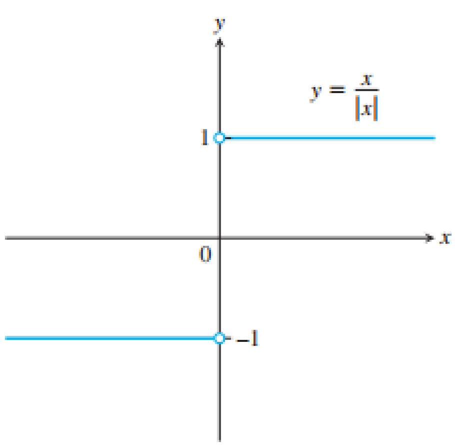
One-Sided Limits

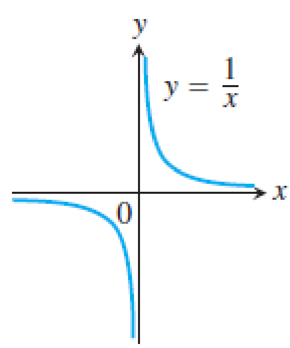
نهاية دالـة عند نقطة ما من جانب أو طرف واحد هي نهاية الـدالـة عندما يسعى المتحول إلى تلك النقطة من اليمين أو من اليسار.

$$\mathbf{f(x) = \frac{1}{x}}$$

النهاية من اليمين: $\mathbf{\lim_{x\to+0} f(x) = +\infty}$

النهاية من اليسار: $\mathbf{\lim_{x\to-0} f(x) = -\infty}$





نهايات مختلفة من اليمين واليسار عند نقطة الأصل

مــثـــال 5

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x \geq 0 \\ 2x + 3, & x < 0 \end{cases}$$

النهاية من اليمين:

$$\lim_{x \to +0} f(x) = 0^2 + 1 = 1$$

النهاية من اليسار:

$$\lim_{x \to -0} f(x) = 2(0) + 3 = 3$$

إذا كانت النهــايــة من اليمين تساوي النهــايــة من اليسار، وتساوي **A** مثلاً، عندها تكون النهــايــة موجـودة وتســاوي **A**.

إذا كانت النهــايــة من اليمين لا تساوي النهــايــة من اليسار عندها تكون النهــايــة غير مـوجـودة.

نـظــريـــة 5 للــدالــة $f(x)$ نهاية عندما تقترب x من c إذا وفقط إذا كان لها نهايات يسارية ويمينية هناك وكانت هذه النهايات (الأحادية الجانب) متساوية:

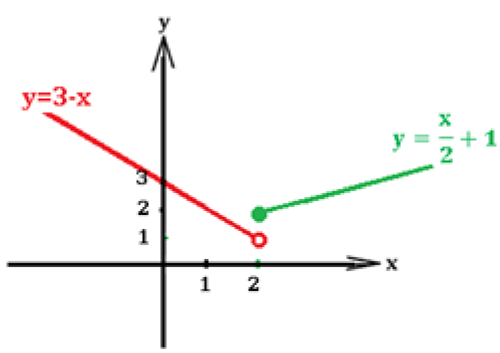
$$\lim_{x \to c} f(x) = L \iff \lim_{x \to -c^-} f(x) = L \text{ and } \lim_{x \to c^+} f(x) = L$$

1-3-2 أمـثـلــــــة
Examples

مــثـــال 6

ليكن لـديـنا الـدالـة:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + 1, & x \geq 2 \\ 3 - x, & x < 2 \end{cases}$$



عند النقطة $x = 2$ نجد أن:

النهــايــة من اليمين:

$$\lim_{x\to+2} f(x) = \frac{2}{2} + 1 = 2$$

النهـايـة من اليسار:

$$\lim_{x\to-2} f(x) = 3 - 2 = 1$$

وبالتالي نجد:

$$\lim_{x\to+2} f(x) \neq \lim_{x\to-2} f(x)$$

أي أن النهـايـة غير موجودة.

إلا أنه عند أي نقطة آخري (عند النقطة $x = 4$ مثلاً) تكون:

النهـايـة من اليمين:

$$\lim_{x\to+4} f(x) = \frac{4}{2} + 1 = 3$$

النهـايـة من اليسار:

$$\lim_{x\to-4} f(x) = \frac{4}{2} + 1 = 3$$

وبالتالي نجد:

$$\lim_{x\to+2} f(x) = \lim_{x\to-2} f(x)$$

أي أن النهـايـة موجودة وتساوي 3.

مثال

أوجد النهـايـات التالية:

(-1) $\lim_{x\to1}(x^3 - 2x^2 + 3x - 1) = 1$

(-2) $\lim_{x\to0}(x-2)\sqrt{x^2+1} = -2$

....

(-3) $\lim_{x\to-1}\frac{x^2+2x}{x-1} = \frac{-1}{-2} = \frac{1}{2}$

....

(-4) $\lim_{x\to0}(\sec(x) + e^x) = 1 + 1 = 2$

....

(-5) $\lim_{x\to0}\frac{x^2-2x}{x-2} = \frac{0}{-2} = 0$

....

(-6) $\lim_{x\to2}\frac{x^2-2x}{x-2}\left(=\frac{0}{0}\right)$

$$= \lim_{x\to2}\frac{x(x-2)}{x-2} = \lim_{x\to2} x = 2$$

(-7)

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+5x+4}{x+1}\left(=\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to -1}\frac{(x+4)(x+1)}{(x+1)}=\lim_{x\to -1}(x+4)=3$$

(-8)

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+2x^2-3x}{x^2-1}\left(=\frac{0}{0}\right)$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x(x^2+2x-3)}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x(x+3)(x-1)}{(x+1)(x-1)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x(x+3)}{(x+1)}=\frac{4}{2}=2$$

(-9)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\frac{\sqrt{3}-2}{-1}=2-\sqrt{3}$$

(-10)

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}=\frac{0}{0}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x+3}-2}{x-1}\times\frac{\sqrt{x+3}+2}{\sqrt{x+3}+2}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x+3-4}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\sqrt{x+3}+2}=\frac{1}{4}$$

(-11)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+100}-10}{x^2}\left(=\frac{0}{0}\right)$$

بضرب البسط والمقام بمرافق البسط والاختصار نجد:

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{x^2+100}+10}=\frac{1}{20}$$

(-12)

$$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{5-\sqrt{x^2+16}}\left(=\frac{0}{0}\right)$$

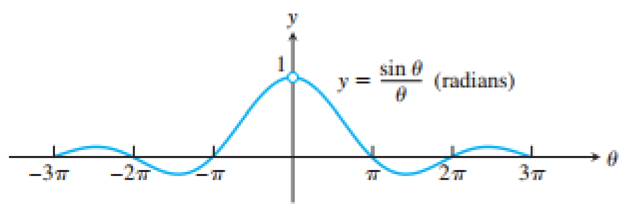
بضرب البسط والمقام بمرافق المقام والاختصار نجد:

$$= \lim_{x\to 3}\frac{5+\sqrt{x^2+16}}{-(3+x)} = \frac{10}{-6}\ . ■$$

4-2 النـهـايـات التي تتضمن $\sin\theta/\theta$

Limits Involving $(\sin\theta/\theta)$

الحقيقة الأساسية حول $\sin(\theta)/\theta$ هي أنه في القياس بالراديان تكون نهايتها حيث $\theta \to 0$ تساوي 1. يُمكننا أن نرى ذلك في الشكل التالي، ونؤكده جبرياً باستخدام نظرية الساندويتش.



يشير الرسم البياني $f(\theta) = \sin(\theta)/\theta$ إلى أن النهاية من اليمين واليسار عندما تقترب θ من 0 تساوي 1

1-4-2 أمـثـلــــــة

Examples

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{3}{3}\times\frac{\sin(3x)}{x}\right] = 3\times\lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{3x} = 3\times 1 = 3 \qquad (-1)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(2x)}{\sin(5x)} = \lim_{x\to 0}\frac{2x\,\frac{\sin(3x)}{2x}}{5x\,\frac{\sin(5x)}{5x}} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{2x}{5x}\times\frac{\frac{\sin(3x)}{2x}}{\frac{\sin(5x)}{5x}}\right] = \frac{2}{5}\times\frac{1}{1} = \frac{2}{5} \qquad (-2)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin(x)}{\cos(x)}}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{\sin(x)}{x}\times\frac{1}{\cos(x)}\right] = 1\times\frac{1}{1} = 1 \qquad (-3)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{1}{2}\times\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right] = \frac{1}{2}\times 1 = \frac{1}{2} \qquad (-4)$$

5- أوجد باستخدام Sandwich Theorem نهاية الـدالـة $f(x)$ عند الـنقـطـة $x = 0$ في كـل من الحــالات التالية:

$$\sqrt{5-2x^2} \le f(x) \le \sqrt{5-x^2}, \quad -1 \le x \le 1$$

بما أن:

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{5-2x^2} = \lim_{x\to 0} \sqrt{5-x^2} = \sqrt{5}$$

يكون:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \sqrt{5}$$

....

$$2-x^2 \le f(x) \le 2\cos(x)$$

بما أن:

$$\lim_{x\to 0}(2-x^2) = \lim_{x\to 0} 2\cos(x) = 2$$

يكون:

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 2$$

....

- إذا كان:

$$\frac{1}{1-\frac{x^2}{6}} \le \frac{x\sin(x)}{2-\cos(x)} \le 1$$

فأوجد

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x\sin(x)}{2-\cos(x)}\right) = ?$$

بما أن:

$$\lim_{x\to 0}(1) = \lim_{x\to 0}\left(1-\frac{x^2}{6}\right) = 1$$

يكون:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\sin(x)}{2-\cos(x)} = 1$$

....

-6 أوجد نهاية كل من الدوال التالية عند النقطة $x = 0$:

$$-1)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sqrt{2x})}{\sqrt{2x}} = 1$$

....

$$-2)\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin(3x)}{4x} = \lim_{x\to 0}\left[\frac{3}{4}\times\frac{\sin(3x)}{3x}\right] = \frac{3}{4}$$

....

$$-3)\ \lim_{x\to0}\frac{\sin(3x)}{\sin(5x)}=\lim_{x\to0}\frac{3x\,\dfrac{\sin(3x)}{3x}}{5x\,\dfrac{\sin(5x)}{5x}}=\frac{3}{5}\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{\sin(3x)}{3x}}{\dfrac{\sin(5x)}{5x}}=\frac{3}{5}$$

$$-4)\ \lim_{x\to0}\frac{x\csc(2x)}{\cos(5x)}=\lim_{x\to0}\frac{x\dfrac{1}{\sin(2x)}}{\cos(5x)}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}\left[\frac{2x}{\sin(2x)}\right]\left[\frac{1}{\cos(5x)}\right]=\frac{1}{2}\times1\times1=1$$

$$-5)\ \lim_{x\to0}\frac{x+x\cos(x)}{\sin(x).\cos(x)}=\lim_{x\to0}\left[\frac{x}{\sin(x).\cos(x)}+\frac{x\cos(x)}{\sin(x).\cos(x)}\right]$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{x}{\sin(x)}\times\frac{1}{\cos(x)}+\frac{x}{\sin(x)}\right]=1\times1+1=2$$

$$-6)\ \lim_{x\to0}\frac{\sin(3x).\cot(5x)}{x.\cot(4x)}=\lim_{x\to0}\frac{\sin(3x)\dfrac{\cos(5x)}{\sin(5x)}}{x\dfrac{\cos(4x)}{\sin(4x)}}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin(3x).\cos(5x).\sin(4x)}{x.\cos(4x).\sin(5x)}$$

$$=\lim_{x\to0}\left[\frac{3\sin(3x)}{3x}\right]\left[\frac{4x\dfrac{\sin(4x)}{4x}}{5x\dfrac{\sin(5x)}{5x}}\right]\left[\frac{\cos(5x)}{\cos(4x)}\right]=3\times\frac{4}{5}\times1=\frac{12}{5}$$

$$1-\ \lim_{x\to-1}(x^3+2x^2-5x-7)=-1$$

$$2-\ \lim_{x\to0}\frac{3}{\sqrt{x+1}+1}=\frac{3}{2}$$

$$3-\ \lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\sin^2(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{2}$$

$$4-\ \lim_{x\to0}\left[(x^2-1)\big(2-\cos(x)\big)\right]=(-1)(1)=-1$$

$$5-\ \lim_{x\to0}\sqrt{7+\sec^2(x)}=\sqrt{8}$$

$$6-\ \lim_{x\to1}\frac{x-1}{2-\sqrt{3x+1}}=\frac{4}{-3}$$

$$7-\ \lim_{x\to3}\frac{x-3}{4-\sqrt{x^2+7}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\cdots=\frac{8}{-6}$$

$$8-\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\cdots=-2$$

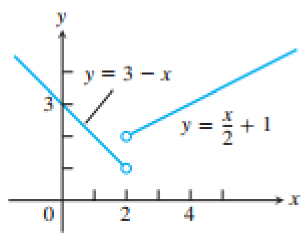
2-4-2 تـمــاريــن

Exercises

أوجد الـنـهــايــة عند النقطة 1 من اليمين ومن اليسار لـكـل من الـدوال التالية:

$$f(x)=\frac{x}{|x-1|}\,,\qquad f(x)=\frac{x}{x-1}\,,\qquad f(x)=\frac{|x-1|}{x^2-1}$$

3. Let $f(x)=\begin{cases}3-x, & x<2\\ \frac{x}{2}+1, & x>2.\end{cases}$



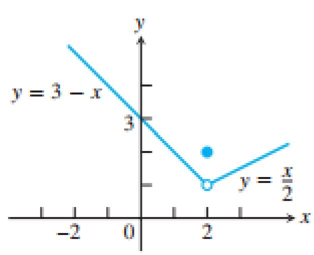
a. Find $\lim_{x\to 2^+} f(x)$ and $\lim_{x\to 2^-} f(x)$.

b. Does $\lim_{x\to 2} f(x)$ exist? If so, what is it? If not, why not?

c. Find $\lim_{x\to 4^-} f(x)$ and $\lim_{x\to 4^+} f(x)$.

d. Does $\lim_{x\to 4} f(x)$ exist? If so, what is it? If not, why not?

4. Let $f(x)=\begin{cases}3-x, & x<2\\ 2, & x=2\\ \frac{x}{2}, & x>2.\end{cases}$



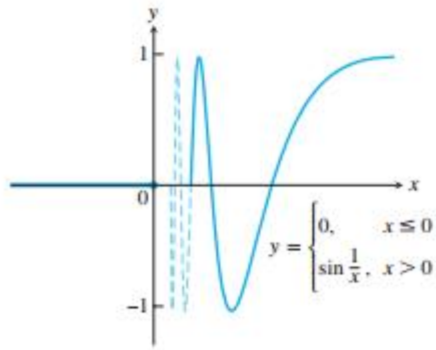
a. Find $\lim_{x\to 2^+} f(x)$, $\lim_{x\to 2^-} f(x)$, and $f(2)$.

b. Does $\lim_{x\to 2} f(x)$ exist? If so, what is it? If not, why not?

c. Find $\lim_{x\to -1^-} f(x)$ and $\lim_{x\to -1^+} f(x)$.

d. Does $\lim_{x\to -1} f(x)$ exist? If so, what is it? If not, why not?

5. Let $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ \sin \frac{1}{x}, & x > 0. \end{cases}$



a. Does $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ exist? If so, what is it? If not, why not?

b. Does $\lim_{x \to 0^-} f(x)$ exist? If so, what is it? If not, why not?

c. Does $\lim_{x \to 0} f(x)$ exist? If so, what is it? If not, why not?

7. **a.** Graph $f(x) = \begin{cases} x^3, & x \ne 1 \\ 0, & x = 1. \end{cases}$

b. Find $\lim_{x \to 1^-} f(x)$ and $\lim_{x \to 1^+} f(x)$.

c. Does $\lim_{x \to 1} f(x)$ exist? If so, what is it? If not, why not?

8. **a.** Graph $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2, & x \ne 1 \\ 2, & x = 1. \end{cases}$

b. Find $\lim_{x \to 1^+} f(x)$ and $\lim_{x \to 1^-} f(x)$.

c. Does $\lim_{x \to 1} f(x)$ exist? If so, what is it? If not, why not?

Graph the functions in Exercises 9 and 10. Then answer these questions.

a. What are the domain and range of f?

b. At what points c, if any, does $\lim_{x \to c} f(x)$ exist?

c. At what points does only the left-hand limit exist?

d. At what points does only the right-hand limit exist?

9. $f(x) = \begin{cases} \sqrt{1 - x^2}, & 0 \le x < 1 \\ 1, & 1 \le x < 2 \\ 2, & x = 2 \end{cases}$

10. $f(x) = \begin{cases} x, & -1 \le x < 0, \text{ or } 0 < x \le 1 \\ 1, & x = 0 \\ 0, & x < -1 \text{ or } x > 1 \end{cases}$

إيجاد النهايات أحادية الجانب جبرياً

أوجد النهايات في التمارين الأتية.

Find the limits in the following Exercises

11. $\lim_{x\to -0.5^-}\sqrt{\frac{x+2}{x+1}}$

12. $\lim_{x\to 1^+}\sqrt{\frac{x-1}{x+2}}$

13. $\lim_{x\to -2^+}\left(\frac{x}{x+1}\right)\left(\frac{2x+5}{x^2+x}\right)$

14. $\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{x+1}\right)\left(\frac{x+6}{x}\right)\left(\frac{3-x}{7}\right)$

15. $\lim_{h\to 0^+}\frac{\sqrt{h^2+4h+5}-\sqrt{5}}{h}$

16. $\lim_{h\to 0^-}\frac{\sqrt{6}-\sqrt{5h^2+11h+6}}{h}$

17. a. $\lim_{x\to -2^+}(x+3)\frac{|x+2|}{x+2}$ **b.** $\lim_{x\to -2^-}(x+3)\frac{|x+2|}{x+2}$

18. a. $\lim_{x\to 1^+}\frac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|}$ **b.** $\lim_{x\to 1^-}\frac{\sqrt{2x}(x-1)}{|x-1|}$

Use the graph of the greatest integer function $y=\lfloor x\rfloor$, Figure 1.10 in Section 1.1, to help you find the limits in Exercises 19 and 20.

19. a. $\lim_{\theta\to 3^+}\frac{\lfloor\theta\rfloor}{\theta}$ **b.** $\lim_{\theta\to 3^-}\frac{\lfloor\theta\rfloor}{\theta}$

20. a. $\lim_{t\to 4^+}(t-\lfloor t\rfloor)$ **b.** $\lim_{t\to 4^-}(t-\lfloor t\rfloor)$

استخدم $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin(\theta)}{\theta}=1$

أوجد النهايات في التمارين الأتية.

Find the limits in the following Exercises.

21. $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\sqrt{2}\theta}{\sqrt{2}\theta}$

22. $\lim_{t\to 0}\frac{\sin kt}{t}$ (k constant)

23. $\lim_{y\to 0}\frac{\sin 3y}{4y}$

24. $\lim_{h\to 0^-}\frac{h}{\sin 3h}$

25. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{x}$

26. $\lim_{t\to 0}\frac{2t}{\tan t}$

27. $\lim_{x\to 0}\frac{x\csc 2x}{\cos 5x}$

28. $\lim_{x\to 0} 6x^2(\cot x)(\csc 2x)$

29. $\lim_{x\to 0}\frac{x+x\cos x}{\sin x\cos x}$

30. $\lim_{x\to 0}\frac{x^2-x+\sin x}{2x}$

31. $\lim_{\theta\to 0}\frac{1-\cos\theta}{\sin 2\theta}$

32. $\lim_{x\to 0}\frac{x-x\cos x}{\sin^2 3x}$

33. $\lim_{t\to 0}\frac{\sin(1-\cos t)}{1-\cos t}$

34. $\lim_{h\to 0}\frac{\sin(\sin h)}{\sin h}$

35. $\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\sin 2\theta}$

36. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 4x}$

37. $\lim_{\theta\to 0}\theta\cos\theta$

38. $\lim_{\theta\to 0}\sin\theta\cot 2\theta$

39. $\lim_{x\to 0}\frac{\tan 3x}{\sin 8x}$

40. $\lim_{y\to 0}\frac{\sin 3y\cot 5y}{y\cot 4y}$

41. $\lim_{\theta\to 0}\frac{\tan\theta}{\theta^2\cot 3\theta}$

42. $\lim_{\theta\to 0}\frac{\theta\cot 4\theta}{\sin^2\theta\cot^2 2\theta}$

5-2 الاســـتمرار
Continuity

نقول عن دالـــة $f(x)$ إنهـا مستمرة في نقطة x_0 إذا كان لها نـهاية عند هـذه النقطة وكانت هذه النـهاية تساوي قيمتها عند هذه النقطة:

$$\lim_{x\to -x_0} f(x) = \lim_{x\to +x_0} f(x) = f(x_0)$$

نقول عن دالـــة $f(x)$ إنها مستمرة على مجـال ما إذا كانت مستمرةً في كل نقطة من نقاطه.

1-5-2 أمـثـلـــــة
Examples

1- لتكن لدينا الـدالـة:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 5, & x < 3 \\ x + 1, & x \geq 3 \end{cases}$$

هل الـدالـــة مستمرة عند النقطة $x_0 = 3$.

الـحـل:

لدينا من أجل النقطة $x_0 = 3$:

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = 9^2 - 5 = 4$$

$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = 3 + 1 = 4$$

$$f(3) = 3 + 1 = 4$$

وبالتالي نجد

$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = f(3) = 4$$

وهذا يعني أن $f(x)$ مستمر في نقطة 3. ■

2- من أجل الـدالـة:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin 2x}{x}, & x \neq 0 \\ 2, & x = 0 \end{cases}$$

هل الـدالـــة مستمرة عند النقطة $x_0 = 2$.

الـحـل:

نجد من أجل النقطة $x_0 = 0$:

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x\to 0^-} \frac{2.\sin 2x}{2x} = 2 \times 1 = 2$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sin 2x}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2.\sin 2x}{2x} = 2\times 1 = 2$$

$$f(0) = 2$$

وبالتالي نجد

$$\lim_{x\to -0} f(x) = \lim_{x\to +0} f(x) = f(0) = 2$$

وهذا يعني أن $f(x)$ مستمر في نقطة $x = 2$. ■

-3 من أجل الـدالـة:

$$f(x) = \sin\big(x - \sin(x)\big)$$

نجد من أجل النقطة $x_0 = \pi$:

$$\lim_{x\to\pi} \sin\big(x - \sin(x)\big) = 0$$

$$f(\pi) = 0$$

أي أن $f(x)$ مستمر في نقطة $x = \pi$. ■

-4 من أجل الـدالـة:

$$f(x) = \sec(x.\sec^2(x) - \tan^2(x) - 1)$$

نجد:

$$\lim_{x\to 1} \sec(x.\sec^2(x) - \tan^2(x) - 1) = \lim_{x\to 1} \sec\left(x.\sec^2(x) - \sec^2(x)\right)$$

$$= \lim_{x\to 1} \sec\left((x-1)\sec^2(x)\right) = \sec(0) = \frac{1}{\cos 0} = 1$$

$$f(1) = 1$$

أي أن $f(x)$ مستمر في نقطة $x = 1$. ■

أوجد قيمة الـدالـة

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 9}{x - 3}, & x \neq 3 \\ ???\ , & x = 3 \end{cases}$$

عند النقطة $x = 3$، أي $f(3)$، بحيث تـكـون الـدالـة مستمرة في تلك النقطة.

الـحـل:

$$f(3) = \lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 9}{x - 3} \left(= \frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 3} \frac{(x+3)(x-3)}{x - 3} = \lim_{x\to 3}(x+3) = 6\,. \quad ■$$

أوجد قيمة الـدالـة

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-16}{x^2-3x-4}, & x \neq 4 \\ ??? \quad , & x = 4 \end{cases}$$

عند النقطة $x = 4$، أي $f(4)$، بحيث تكون الـدالـة مستمرةً في تلك النقطة.

الحـل:

$$f(4) = \lim_{x\to 4}\frac{x^2-16}{x^2-3x-4}\left(=\frac{0}{0}\right)$$

$$= \lim_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x+1)} = \lim_{x\to 4}\frac{(x+4)}{(x+1)} = \frac{8}{5}. \quad ■$$

ليكن لدينا الـدالـة:

$$f(x) = \begin{cases} x^2-1, & x < 3 \\ 2ax, & x \geq 3 \end{cases}$$

عين قيمة a بحيث تـكـون الـدالـة مستمرةً في كـل نقطة x.

الحـل:

يجب أن تكون النهاية من اليمين تساوي النهاية من اليسار، أي:

$$\left.\begin{matrix} \lim\limits_{x\to 3}(x^2-1) = 8 \\ \lim\limits_{x\to 3}(2ax) = 6a \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad 8 = 6a \quad \Rightarrow \quad a = \frac{4}{3}. \quad ■$$

2-5-2 تـمـــاريـــن
Exercises

النهايات المتعلقة بالدوال المثلثية

أوجد النهايات في التمارين الأتية. هل الدوال مستمرة عند النقطة التي يتم الاقتراب منها؟

Find the limits in Exercises. Are the functions continuous at the point being approached?

31. $\lim\limits_{x\to\pi}\sin(x-\sin x)$ **32.** $\lim\limits_{t\to 0}\sin\left(\frac{\pi}{2}\cos(\tan t)\right)$

33. $\lim\limits_{y\to 1}\sec(y\sec^2 y - \tan^2 y - 1)$

34. $\lim\limits_{x\to 0}\tan\left(\frac{\pi}{4}\cos(\sin x^{1/3})\right)$

35. $\lim\limits_{t\to 0}\cos\left(\frac{\pi}{\sqrt{19-3\sec 2t}}\right)$ **36.** $\lim\limits_{x\to\pi/6}\sqrt{\csc^2 x + 5\sqrt{3}\tan x}$

37. $\lim\limits_{x\to 0^+}\sin\left(\frac{\pi}{2}e^{\sqrt{x}}\right)$ **38.** $\lim\limits_{x\to 1}\cos^{-1}(\ln\sqrt{x})$

43. For what value of a is

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < 3 \\ 2ax, & x \geq 3 \end{cases}$$

continuous at every x?

44. For what value of b is

$$g(x) = \begin{cases} x, & x < -2 \\ bx^2, & x \geq -2 \end{cases}$$

continuous at every x?

45. For what values of a is

$$f(x) = \begin{cases} a^2x - 2a, & x \geq 2 \\ 12, & x < 2 \end{cases}$$

continuous at every x?

46. For what value of b is

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x - b}{b + 1}, & x < 0 \\ x^2 + b, & x > 0 \end{cases}$$

continuous at every x?

47. For what values of a and b is

$$f(x) = \begin{cases} -2, & x \leq -1 \\ ax - b, & -1 < x < 1 \\ 3, & x \geq 1 \end{cases}$$

continuous at every x?

48. For what values of a and b is

$$g(x) = \begin{cases} ax + 2b, & x \leq 0 \\ x^2 + 3a - b, & 0 < x \leq 2 \\ 3x - 5, & x > 2 \end{cases}$$

continuous at every x?

6-2 النهـايـات التي تتضمن مـا لا نـهـايـة ومقـاربـات الـرســوم البيـانيــة

Limits Involving Infinity and Asymptotes of Graphs

النهايات عند اللانهاية لها خصائص مشابهة لتلك الخاصة بالنهايات النهائية.

نـظـريــة 6 جميع قوانين النهاية في النظريــة 1 تـكون صحيحة عندما نستبدل $\lim\limits_{x\to c}$ بـ $\lim\limits_{x\to\infty}$ أو بـ $\lim\limits_{x\to-\infty}$. أي أن المتغير x قد يقترب من عدد منتـه c أو من $\pm\infty$.

مـثــال 7

$$1-\quad \lim_{x\to\infty}\left(5+\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}(5) + \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 5 + 0 = 5$$

$$2-\quad \lim_{x\to\infty}\frac{\pi\sqrt{3}}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\left(\pi\sqrt{3}\,\frac{1}{x}\,\frac{1}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}(\pi\sqrt{3}) \times \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right) \times \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$= \pi\sqrt{3}.0.0 = 0. \quad \blacksquare$$

2-6-1 النهايات عند اللانهاية للدوال الكسرية

Limits at Infinity of Rational Functions

لتحديد نهاية الدالة الكسرية، نقوم أولاً بقسمة البسط والمقام على أعلى قوة لـ x في المقام. تعتمد النتيجة بعد ذلك على درجات كثيرات الحدود المعنية.

مثال 8

يُوضح هذا المثال ما يحدث عندما تكون درجة البسط أقل من أو تساوي درجة المقام.

$$1- \quad \lim_{x\to\infty}\frac{5x^2+8x-3}{3x^2+2}=\lim_{x\to\infty}\frac{5+\frac{8}{x}-\frac{3}{x^2}}{3+\frac{2}{x^2}} \qquad \text{نقسم البسط والمقام على } x^2$$

$$=\frac{5+0-0}{3+0}=\frac{5}{3}.$$

$$2- \quad \lim_{x\to\infty}\frac{11x+2}{2x^3-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{11}{x^2}+\frac{2}{x^3}}{2-\frac{1}{x^3}} \qquad \text{نقسم البسط والمقام على } x^3$$

$$=\frac{0+0}{2-0}=0. \quad \blacksquare$$

نوضح الحالة التي تكون فيها درجة البسط أكبر من درجة المقام في المثال رقم 10.

2-6-2 الخطوط المقاربة الأفقية

Horizontal Asymptotes

إذا اقتربت المسافة بين رسم دالة ما وخط ثابت ما من الصفر كلما ابتعدت نقطة على الرسم البياني بشكل متزايد عن الأصل، فإننا نقول إن الرسم البياني يقترب من الخط بشكل مقارب وأن الخط هو خط مقارب للرسم البياني.

تعريف المستقيم $y = b$ هو **مقارب أفقي** لمنحني الدالة $y = f(x)$ إذا كان

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = b \qquad or \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$

2-6-3 الخطوط المقاربة المائلة

Oblique Asymptotes

إذا كانت درجة البسط لدالة كسرية أكبر بمقدار 1 من درجة المقام، فإن للرسم البياني مستقيم مقارب مائل. نجد معادلة الخط المستقيم عن طريق قسمة البسط على المقام للتعبير عن f كدالة خطية بالإضافة إلى باق يساوي الصفر عندما $x \to \pm\infty$.

مـثــال 9

أوجد المستقيم المقـارب المـائـل لمنحني الدالـــة

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 4}$$

الحـل:

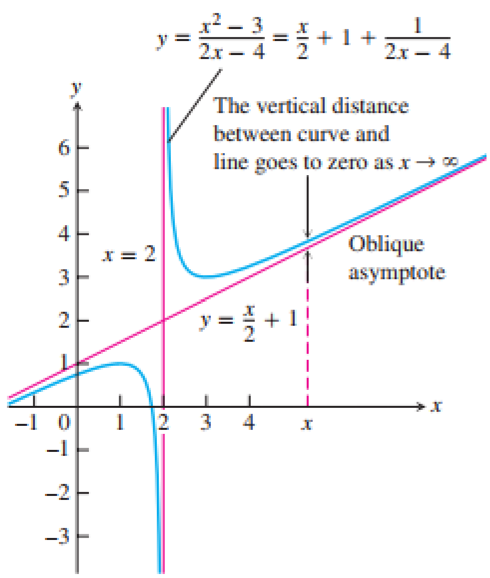
نُقسم البسط على المقام:

$$f(x) = \frac{x^2 - 3}{2x - 4} = \overbrace{\underbrace{\left(\frac{x}{2} + 1\right)}_{\substack{\text{quotient} \\ \text{حاصل القسمة}}}}^{g(x)} + \underbrace{\left(\frac{1}{2x - 4}\right)}_{\substack{\text{remainder} \\ \text{الباقي}}}$$

وبما أن $x \to \pm\infty$، فإن البـاقي، الـذي يُعطي المسافة الرأسـية بين منحني الدالـــة f والدالـــة g، يـصبح صـفـراً، مما يجعـل المستقيم المـائـل

$$g(x) = \frac{x}{2} + 1$$

مقـارباً لمنحني الدالـــة f.



يحتوي رسم الـدالـة على مقارب مـائـل

4-6-2 المقاربات الرأسية أو العمودية
Vertical Asymptotes

تعريف المستقيم $x = a$ هو مقارب رأسي أو عمودي لرسم الدالة $y = f(x)$ إذا كان

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \pm\infty \qquad or \qquad \lim_{x \to a^-} f(x) = \pm\infty$$

مثال 10

أوجد المقاربات الأفقية والرأسية لمنحنى الدالة

$$y = \frac{x+3}{x+2}.$$

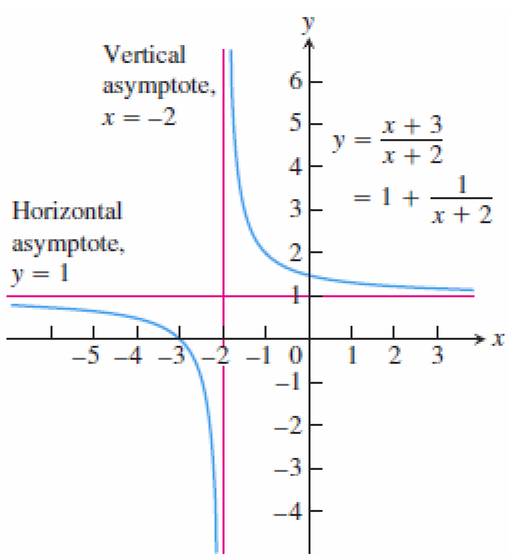
الحل:

نهتم بسلوك الدالة عندما $x \to \pm\infty$، وعندما $x \longrightarrow -2$ حيث يكون المقام صفراً.

ويتم ايجاد المقاربات بسرعة إذا أعدنا صياغة الدالة الكسرية، على شكل دالة كثير حدود + باق. من خلال قسمة البسط على المقام نجد:

$$y = 1 + \frac{1}{x+2}.$$

عندما $x \to \pm\infty$، يقترب المنحنى من المقارب الأفقي $y = 1$ وعندما $x \to -2$ يقترب المنحنى من المقارب الرأسي $x = 2$. ■



المستقيمات $y = 1$ و $x = -2$ هي مقاربات للمنحنى

5-6-2 تـمـــاريـــن
Exercises

نـهايات الدوال الكسرية

أوجد نهاية كل دالة كسرية (أ) عندما $x \to \infty$ و (ب) عندما $x \to -\infty$

Find the limit of each rational function (a) as $x \to \infty$ and (b) as $x \to -\infty$

13. $f(x) = \dfrac{2x + 3}{5x + 7}$

14. $f(x) = \dfrac{2x^3 + 7}{x^3 - x^2 + x + 7}$

15. $f(x) = \dfrac{x + 1}{x^2 + 3}$

16. $f(x) = \dfrac{3x + 7}{x^2 - 2}$

17. $h(x) = \dfrac{7x^3}{x^3 - 3x^2 + 6x}$

18. $g(x) = \dfrac{1}{x^3 - 4x + 1}$

19. $g(x) = \dfrac{10x^5 + x^4 + 31}{x^6}$

20. $h(x) = \dfrac{9x^4 + x}{2x^4 + 5x^2 - x + 6}$

21. $h(x) = \dfrac{-2x^3 - 2x + 3}{3x^3 + 3x^2 - 5x}$

22. $h(x) = \dfrac{-x^4}{x^4 - 7x^3 + 7x^2 + 9}$

النهايات عندما $x \to \infty$ أو $x \to -\infty$

إن العملية التي نحدد بها نهايات الدوال الكسرية تنطبق بشكل جيد على النسب التي تحتوي على أعداد غير صحيحة أو قوى سالبة لـ x: اقسم البسط والمقام على أعلى قوة لـ x في المقام واستمر من هناك. أوجد النهايات في التمارين الآتية.

The process by which we determine limits of rational functions applies equally well to ratios containing noninteger or negative powers of x: divide numerator and denominator by the highest power of x in the denominator and proceed from there. Find the limits in the following Exercises.

23. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{8x^2 - 3}{2x^2 + x}}$

24. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{x^2 + x - 1}{8x^2 - 3}\right)^{1/3}$

25. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(\dfrac{1 - x^3}{x^2 + 7x}\right)^5$

26. $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt{\dfrac{x^2 - 5x}{x^3 + x - 2}}$

27. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2\sqrt{x} + x^{-1}}{3x - 7}$

28. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2 + \sqrt{x}}{2 - \sqrt{x}}$

29. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x} - \sqrt[5]{x}}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[5]{x}}$

30. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^{-1} + x^{-4}}{x^{-2} - x^{-3}}$

31. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{2x^{5/3} - x^{1/3} + 7}{x^{8/5} + 3x + \sqrt{x}}$

32. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x} - 5x + 3}{2x + x^{2/3} - 4}$

Find the limits in Exercises 53–58.

53. $\lim \dfrac{1}{x^2 - 4}$ as

a. $x \to 2^+$ **b.** $x \to 2^-$

c. $x \to -2^+$ **d.** $x \to -2^-$

54. $\lim \dfrac{x}{x^2 - 1}$ as

a. $x \to 1^+$ **b.** $x \to 1^-$

c. $x \to -1^+$ **d.** $x \to -1^-$

55. $\lim \left(\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{x}\right)$ as

a. $x \to 0^+$ **b.** $x \to 0^-$

c. $x \to \sqrt[3]{2}$ **d.** $x \to -1$

56. $\lim \dfrac{x^2 - 1}{2x + 4}$ as

a. $x \to -2^+$ **b.** $x \to -2^-$

c. $x \to 1^+$ **d.** $x \to 0^-$

57. $\lim \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 2x^2}$ as

a. $x \to 0^+$ **b.** $x \to 2^+$

c. $x \to 2^-$ **d.** $x \to 2$

e. What, if anything, can be said about the limit as $x \to 0$?

58. $\lim \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^3 - 4x}$ as

a. $x \to 2^+$ **b.** $x \to -2^+$

c. $x \to 0^-$ **d.** $x \to 1^+$

e. What, if anything, can be said about the limit as $x \to 0$?

Find the limits in Exercises 49–52.

49. $\lim\limits_{x \to (\pi/2)^-} \tan x$ **50.** $\lim\limits_{x \to (-\pi/2)^+} \sec x$

51. $\lim\limits_{\theta \to 0^-} (1 + \csc \theta)$ **52.** $\lim\limits_{\theta \to 0} (2 - \cot \theta)$

إيجاد نهاية الفروقات عندما $x \to \mp\infty$

أوجد النهايات في التمارين الأتية

Find the limits in the following Exercises

80. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x+9}-\sqrt{x+4}\right)$

81. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+25}-\sqrt{x^2-1}\right)$

82. $\lim_{x\to-\infty}\left(\sqrt{x^2+3}+x\right)$

83. $\lim_{x\to-\infty}\left(2x+\sqrt{4x^2+3x-2}\right)$

84. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{9x^2-x}-3x\right)$

85. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+3x}-\sqrt{x^2-2x}\right)$

86. $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-x}\right)$

المقاربات المائلة

أرسِم الدوال الكسرية في التمارين الأتية وأدرج الرسوم البيانية ومعادلات المقاربات

Graph the rational functions in the following Exercises.
Include the graphs and equations of the asymptotes.

99. $y=\dfrac{x^2}{x-1}$

100. $y=\dfrac{x^2+1}{x-1}$

101. $y=\dfrac{x^2-4}{x-1}$

102. $y=\dfrac{x^2-1}{2x+4}$

103. $y=\dfrac{x^2-1}{x}$

104. $y=\dfrac{x^3+1}{x^2}$

❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋ ❋

الفصل الثالث

التـفــــاضــل

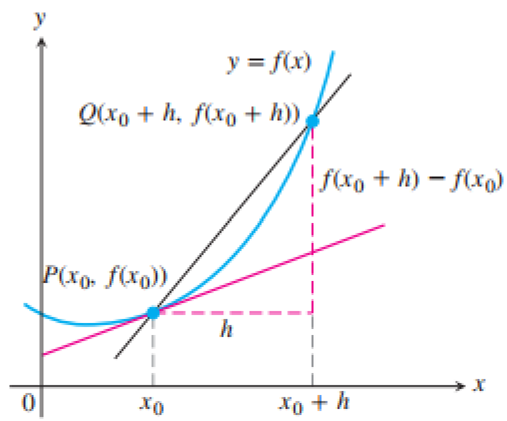
DIFFERENTIATION

1-3 المـمــاســات والمشتق عند نـقطـة

Tangents and the Derivative at a Point

لإيجاد المماس لمنحنى عشوائي $y = f(x)$ عند نقطة ما $p(x_0, f(x_0))$، نحسب ميـل المستقيم القــاطــع الذي يمر عبر النقطة P ونقطة قريبة $Q(x_0 + h, f(x_0 + h))$، ثم نتحقق من نـهاية الميــل عندما $h \to \infty$ كما هو موضح في الشكل التالي.

إذا كانت النهاية موجودة، نسميها ميــل المنحنى عند النقطة P، ونعرف المماس عند P بأنه المستقيم الذي يمر عبر P ولـه هـذا الميــل.



ميــل المستقيم الممـــاس عند النقطة P هو $\lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

تـعريــف ميل المنحنى $y = f(x)$ عند النقطة $p(x_0, f(x_0))$ هو الـعدد

$$m = \lim_{h\to0}\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

(بشــرط وجود النـهــايــة).

المستقيم المماس للمنحنى عند النقطة P هــو المستقيم الذي ميله m ويـمـر عبر النقطة P.

مــثــال 1

1- أوجد ميل المنحنى $y=\frac{1}{x}$ عند أي نقطة $x=a\neq 0$. ما هو ميل المنحنى عند النقطة $x=-1$.

2- أين يكون ميل المنحنى مساوياً لـ $-\frac{1}{4}$.

3- ماذا يحدث لمماس المنحنى عند النقطة $\left(a,\frac{1}{a}\right)$ عندما تتغير a ؟

الحــل:

1- إن ميل المنحنى $y=\frac{1}{x}$ عند النقطة $\left(a,\frac{1}{a}\right)$ هو:

$$m=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{a+h}-\frac{1}{a}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}.\frac{a-(a+h)}{a.(a+h)}$$

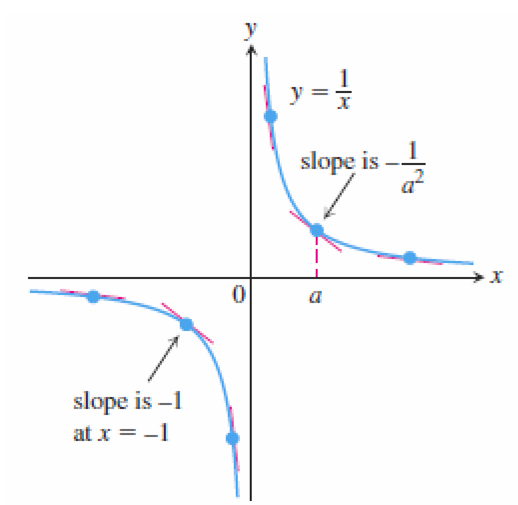
$$=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{h.a.(a+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{a.(a+h)}=-\frac{1}{a^2}.$$

2- بما أن ميل المنحنى $y=\frac{1}{x}$ عند أي نقطة $x=a$ هو $-\frac{1}{a^2}$ ، يكون بالتالي

$$-\frac{1}{a^2}=-\frac{1}{4}$$

وهذا يعني أن $a^2=4$ وبالـتـالي تـكـون $a=2\ or\ a=-2$. أي أن المنحنى له الميل $-\frac{1}{4}$ عند كل من النقطتين $\left(2,\frac{1}{2}\right)$ و $\left(-2,-\frac{1}{2}\right)$.

3- الميل $-\frac{1}{a^2}$ سـالب دوماً إذا كان $a\neq 0$. إذا سـعـت a إلى الصفـر من اليمين $a\to 0^+$ (أو من اليسار $a\to 0^-$) يصبح المماس شديد الانحدار. عندما تبتعد a عن نقطة الأصل في أي اتجاه، يقترب الميل من 0 ويستوي المماس ليصبح أفـقـيـاً.



المماسات شديدة الانحدار بالقرب من الأصل، وتصبح تدريجية أكثر كلما ابتعدت نقطة التماس

تـعريــف المشــتق لـلـدالـة f عند الـنـقـطـة x_0، والـذي يُشـــار إلـيــه بـ $f'(x_0)$، هـو

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

بشــرط وجـود هـذه الـنـهـايـة.

3-1-1 تـمـــاريـــن

Exercises

الميول والمستقيمات المماسّة

أوجد معادلة المماس للمنحنى عند النقطة المعطاة.

ثم ارسم المنحنى والمماس معاً.

Find an equation for the tangent to the curve at the given point. Then sketch the curve and tangent together.

5. $y = 4 - x^2,\quad (-1, 3)$
6. $y = (x-1)^2 + 1,\quad (1, 1)$
7. $y = 2\sqrt{x},\quad (1, 2)$
8. $y = \frac{1}{x^2},\quad (-1, 1)$
9. $y = x^3,\quad (-2, -8)$
10. $y = \frac{1}{x^3},\quad \left(-2, -\frac{1}{8}\right)$

أوجد ميل الرسم البياني لـلـدالـة عند النقطة المعطاة. ثم أوجد معادلة الخط المماس للرسم البياني هناك

Find the slope of the function's graph at the given point. Then find an equation for the line tangent to the graph there.

11. $f(x) = x^2 + 1,\quad (2, 5)$
12. $f(x) = x - 2x^2,\quad (1, -1)$
13. $g(x) = \frac{x}{x-2},\quad (3, 3)$
14. $g(x) = \frac{8}{x^2},\quad (2, 2)$
15. $h(t) = t^3,\quad (2, 8)$
16. $h(t) = t^3 + 3t,\quad (1, 4)$
17. $f(x) = \sqrt{x},\quad (4, 2)$
18. $f(x) = \sqrt{x+1},\quad (8, 3)$

أوجد ميل المنحنى عند النقطة المشار إليها.

Find the slope of the curve at the point indicated.

19. $y = 5x^2,\quad x = -1$
20. $y = 1 - x^2,\quad x = 2$
21. $y = \frac{1}{x-1},\quad x = 3$
22. $y = \frac{x-1}{x+1},\quad x = 0$

2-3 المشــتق كـدالــة
The Derivative as a Function

عرّفـنـا المشـتق لـدالة $y = f(x)$ عند نقطة x_0 كنهاية

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

نقوم الآن بدراســة المشتق كـدالـة مشتقة من f، من خـلال النظر في النهاية عند كل نـقـطـة x من مـجـال f.

تـعريــف المشـــتق لــلــدالة $f(x)$ بالنسبة إلى المتغير x هو الـدالـة f' التي قيمتها عند x

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h},$$

بشــرط وجـود هذه الـنـهـايـة.

يُمكن كتابة صيغة المشتق على الشكل التـالي المكافئ:

$$f'(x)=\lim_{z\to x}\frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

1-2-3 حساب المشــتـقـات من الـتـعـريــف
Calculating Derivatives from the Definition

تُسمى عملية حساب المشتق بالـتـفـاضـل. ولـلـتـأكيد على أن الـتـفـاضـل هو عملية يتم إجراؤهـا على دالــة $y = f(x)$ ، نستخدم الـترميز

$$\frac{d}{dx}f(x)$$

للإشـــارة إلى المشــتـق $f'(x)$.

2-2-3 أمـثـلـــة
Examples

مــثــال 2

أوجد مشتق الـدالـة $f(x)=\frac{x}{x-1}$، لأي x نقطة من مجـال تعريف f.

الـحـل:

نستخدم تعريف المشتق، والذي يتطلب منا حساب $f(x+h)$ ثم طرح $f(x)$ للحصول على البسط في حاصل الفرق. لدينا

$$f(x+h)=\frac{x+h}{(x+h)-1} \quad \textit{and} \quad f(x)=\frac{x}{x-1}$$

وبالتالي:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x+h}{x+h-1}-\frac{x}{x-1}}{h}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{(x+h)(x-1)-x(x+h-1)}{(x+h-1)(x-1)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{-h}{(x+h-1)(x-1)}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{(x+h-1)(x-1)}=\frac{-1}{(x-1)^2}. \quad ■$$

مـثـال 3

1- أوجد مشتق الـدالـة $f(x)=\sqrt{x}$ من أجل $x>0$.

1- أوجد المستقيم المماس للمنحني $f(x)=\sqrt{x}$ عند $x=4$.

الـحـل:

1- نستخدم الصيغة المكافئة لحساب f'

$$f'(x)=\lim_{z\to x}\frac{f(z)-f(x)}{z-x}$$

$$=\lim_{z\to x}\frac{\sqrt{z}-\sqrt{x}}{z-x}$$

$$=\lim_{z\to x}\frac{\sqrt{z}-\sqrt{x}}{(\sqrt{z}-\sqrt{x})(\sqrt{z}+\sqrt{x})}$$

(أو يُمكن ضرب كل من البسط والمقام بـ $\sqrt{z}-\sqrt{x}$)

$$=\lim_{z\to x}\frac{1}{\sqrt{z}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

1- إن ميل المستقيم المماس للمنحني عند $x = 4$ هو

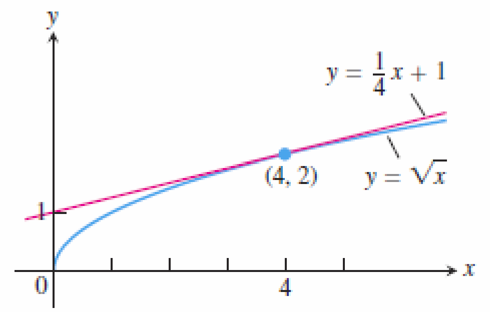
$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \Rightarrow f'(4) = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4},$$

المستقيم المماس هو المستقيم المار بالنقطة $(4, 2)$ وميله $\frac{1}{4}$:

$$(y - y_0) = m(x - x_0)$$

$$(y - 2) = \frac{1}{4}(x - 4)$$

$$y = \frac{1}{4}x + 1$$



المنحني $y = \sqrt{x}$ والمستقيم المماس له عند $x = 4$

ملاحظات:

هناك عدة طرق للإشارة إلى مشتق دالة $y = f(x)$، حيث يكون المتغير المستقل هو x والمتغير التابع هو y.

من بعض الرموز الشائعة للمشتق نقدم:

$$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f(x) = D(f)(x) = D_x f(x).$$

تُشير الرموز $\frac{d}{dx}$ و D إلى عملية التفاضل، ونقرأ $\frac{dy}{dx}$ على النحو التالي: "مشتق y بالنسبة إلى x"، ونقرأ $\frac{df}{dx}$ و $\frac{d}{dx}f(x)$ على أنها "مشتق f بالنسبة إلى x".

للإشارة إلى قيمة المشتق عند رقم محدد $x = a$، نستخدم الرمز

$$f'(a) = \left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=a} = \left.\frac{d}{dx}f(x)\right|_{x=a}$$

على سبيل المثال (كما في المثال السابق):

$$\mathbf{f'(4) = \frac{d}{dx}\sqrt{x}\Big|_{x=4} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\Big|_{x=4} = \frac{1}{2\sqrt{4}} = \frac{1}{4}}.$$

3-2-3 تـمـــاريــن
Exercises

إيجاد الدوال والقيم المشتقة

باستخدام التعريف، احسب مشتقات الدوال في التمارين الأتية،
ثم أوجد قيم المشتقات كما هو محدد

Using the definition, calculate the derivatives of the functions in
The following Exercises. Then find the values of the derivatives as specified

1. $f(x) = 4 - x^2;\quad f'(-3), f'(0), f'(1)$
2. $F(x) = (x-1)^2 + 1;\quad F'(-1), F'(0), F'(2)$
3. $g(t) = \frac{1}{t^2};\quad g'(-1), g'(2), g'(\sqrt{3})$
4. $k(z) = \frac{1-z}{2z};\quad k'(-1), k'(1), k'(\sqrt{2})$
5. $p(\theta) = \sqrt{3\theta};\quad p'(1), p'(3), p'(2/3)$
6. $r(s) = \sqrt{2s+1};\quad r'(0), r'(1), r'(1/2)$

أوجد المشتقات المشار إليها

Find the indicated derivatives.

7. $\frac{dy}{dx}$ if $y = 2x^3$
8. $\frac{dr}{ds}$ if $r = s^3 - 2s^2 + 3$
9. $\frac{ds}{dt}$ if $s = \frac{t}{2t+1}$
10. $\frac{dv}{dt}$ if $v = t - \frac{1}{t}$
11. $\frac{dp}{dq}$ if $p = \frac{1}{\sqrt{q+1}}$
12. $\frac{dz}{dw}$ if $z = \frac{1}{\sqrt{3w-2}}$

الميول والمستقيمات المماسة

قم بمفاضلة الدوال وإيجاد ميل المستقيم المماس عند القيمة المعطاة للمتغير المستقل.

Differentiate the functions and find the slope of the tangent
line at the given value of the independent variable.

13. $f(x) = x + \frac{9}{x},\quad x = -3$
14. $k(x) = \frac{1}{2+x},\quad x = 2$
15. $s = t^3 - t^2,\quad t = -1$
16. $y = \frac{x+3}{1-x},\quad x = -2$

قم بمفاضلة الدوال. ثم أوجد معادلة المستقيم المماس عند النقطة المشار إليها على رسم الـدالـة
of the tangent Differentiate the functions. Then find an equation
line at the indicated point on the graph of the function.

17. $y = f(x) = \dfrac{8}{\sqrt{x-2}}, \quad (x, y) = (6, 4)$

18. $w = g(z) = 1 + \sqrt{4-z}, \quad (z, w) = (3, 2)$

In Exercises 19–22, find the values of the derivatives.

19. $\left.\dfrac{ds}{dt}\right|_{t=-1}$ if $s = 1 - 3t^2$

20. $\left.\dfrac{dy}{dx}\right|_{x=\sqrt{3}}$ if $y = 1 - \dfrac{1}{x}$

21. $\left.\dfrac{dr}{d\theta}\right|_{\theta=0}$ if $r = \dfrac{2}{\sqrt{4-\theta}}$

22. $\left.\dfrac{dw}{dz}\right|_{z=4}$ if $w = z + \sqrt{z}$

استخدام الصيغة البديلة للمشتقات

استخدم الصيغة $f'(x) = \lim_{z\to x}\frac{f(z)-f(x)}{z-x}$ لإيجاد المشتق للوظائف في التمارين الأتية.

Use the formula $f'(x) = \lim_{z\to x}\frac{f(z)-f(x)}{z-x}$ to find the derivative of the functions in the following Exercises

23. $f(x) = \dfrac{1}{x+2}$

24. $f(x) = x^2 - 3x + 4$

25. $g(x) = \dfrac{x}{x-1}$

26. $g(x) = 1 + \sqrt{x}$

3-3 قـواعـد الـتـفـاضــل
Differentiation Rules

نُقدم الآن عدة قواعد تسمح لنا بمفاضلة الدوال الثابتة، ودوال القوى، وكثيرات الحدود، والدوال الأسية، الدوال الكسرية، ومجموعات معينة منها، ببساطة وبشكل مباشر.

1-3-3 الـقوى والـمضاعفات والـمجـاميع والـفـروق
Powers, Multiples, Sums, and Differences

مشتق الـدالة الثابـتة
Derivative of a Constant Function

قاعدة بسيطة للتفاضل: مشتق أي دالة ثابتة يساوي الصفر.

إذا كان $f(x) = c$، عندها يكون:

$$\frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(c) = 0.$$

قاعدة القــوى
Power Rule

إن قاعدة القوى صالحة لجميع الأعداد الحقيقية a. يُمكن أن يكون العدد a عدداً صحيحاً سالباً أو قوة كسرية أو عدداً غير عادي. لتطبيق **قاعدة القــوى**، نطرح 1 من الأس الأصلي a ونضرب النتيجة في a.

$$\frac{d}{dx}x^{a} = ax^{a-1}, \quad \forall x.$$

قاعدة مشتق الضرب بثابت
Derivative Constant Multiple Rule

القاعدة التالية تقول أنه عندما يتم ضرب دالة قابلة للاشتقاق بثابت، يتم ضرب مشتقها بنفس الثابت.

إذا كانت u دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى x، و c ثابت، عندها يكون

$$\frac{d}{dx}cu = c\frac{du}{dx}.$$

قاعدة مجموع المشتقات
Derivative Sum Rule

إذا كانت f و g دوال قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى x، فإن مجموعهما $f+g$ قابل للاشتقاق عند كل نقطة، حيث تكون f و g كلاهما قابلتان للاشتقاق عند هذه النقاط

$$\frac{d}{dx}(f+g) = \frac{df}{dx} + \frac{dg}{dx}.$$

مشتقات الـــدوال الأسية
Derivatives of Exponential Functions

إذا كان $a > 0$ وكانت u دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى x، فإن a^{u} تكون دالة قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى x ويكون

$$\frac{d}{dx}a^{u} = a^{u}\ln(a)\frac{du}{dx}.$$

من أجل الحالة الخاصة ، عندما يكون $a = e$ يكون:

مشتق الـدالة الأسية الطبيعية
Derivative of the Natural Exponential Function

$$\frac{d}{dx}e^{u} = e^{u}\frac{du}{dx} \quad , \quad \textit{and} \quad \frac{d}{dx}e^{x} = e^{x} \quad (u \equiv x).$$

قاعدة مشتق الجداء
Derivative Product Rule

إذا كانت u v دوال قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى x، عندها يكون

$$\frac{d}{dx}(u.v) = v\frac{du}{dx} + u\frac{dv}{dx}$$

أو

$$(u.v)' = u'v + v'u$$

قاعدة مشتق حاصل القسمة
Derivative Quotient Rule

إذا كانت u, v دوال قابلة للاشتقاق بالنسبة إلى x، وإذا كان حاصل القسمة $\frac{u}{v}$ قابلاً للاشتقاق بالنسبة إلى x، عندها يكون

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{v\frac{du}{dx} - u\frac{dv}{dx}}{v^2}.$$

المشتقات من الدرجة الثانية فأكثر
Second- and Higher-Order Derivatives

إذا كانت $y = f(x)$ دالة قابلة للاشتقاق، فإن مشتقتها $f'(x)$ أيضًا دالة. إذا كانت f' قابلة للاشتقاق أيضاً، فيمكننا اشتقاق f' للحصول على دالة جديدة لـ x يشار إليها بـ f''. وبالتالي $f'' = (f)'$. لذا تُسمى f'' المشتق الثاني لـ f لأنها مشتق المشتق الأول. وتُكتب بعدة طرق:

$$f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{dy'}{dx} = y'' = D^2(f)(x) = D_x^2 f(x).$$

الرمز D^2 يعني أن عملية التفاضل تتم مرتين.

إذا كان لدينا، مثلاً، $y = x^6$، عندها يكون $y' = 6x^5$ ومنه نجد

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{d}{dx}(6x^5) = 30x^4.$$

إذاً

$$D^2(x^6) = 30x^4.$$

إذا كانت y'' قابلة للاشتقاق، فإن مشتقتها، $y''' = \frac{dy''}{dx} = \frac{d^3y}{dx^3}$ ، هو المشتق الثالث لـ y بالنسبة إلى x. تستمر الأسماء كما تتخيل، مع

$$y^{(n)} = \frac{dy^{(n-1)}}{dx} = \frac{d^ny}{dx^n} = D^n(y)$$

الإشارة إلى المشتق رقم n لـ y بالنسبة إلى x لأي عدد صحيح موجب n.

مـثـال 4

المشتقات الأربعة الأولى للـدالـة $y = x^3 - 3x^2 + 2$ هي

المشتقة الأولى: $y' = 3x^2 - 6x$

المشتقة الثانية: $y'' = 6x - 6$

المشتقة الثالثة: $y''' = 6$

المشتقة الرابعة: $y^{(4)} = 0$

الـدالـة لها مشتقات من جميع الرتب، والمشتقات الخامسة وما بعدها كلها أصفار. ■

2-3-3 تــمـــاريــن
Exercises

حسابات المشتقات

أوجد المشتقات الأولى والثانية

Find the first and second derivatives

1. $y = -x^2 + 3$
2. $y = x^2 + x + 8$
3. $s = 5t^3 - 3t^5$
4. $w = 3z^7 - 7z^3 + 21z^2$
5. $y = \dfrac{4x^3}{3} - x + 2e^x$
6. $y = \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x}{4}$
7. $w = 3z^{-2} - \dfrac{1}{z}$
8. $s = -2t^{-1} + \dfrac{4}{t^2}$
9. $y = 6x^2 - 10x - 5x^{-2}$
10. $y = 4 - 2x - x^{-3}$
11. $r = \dfrac{1}{3s^2} - \dfrac{5}{2s}$
12. $r = \dfrac{12}{\theta} - \dfrac{4}{\theta^3} + \dfrac{1}{\theta^4}$

أوجد y' :(أ) بتطبيق قاعدة الضرب و (ب) بضرب العوامل لإنتاج مجموع من الحدود الأبسط للتفاضل

Find y': (a) by applying the Product Rule and (b) by multiplying the factors to produce a sum of simpler terms to differentiate

13. $y = (3 - x^2)(x^3 - x + 1)$
14. $y = (2x + 3)(5x^2 - 4x)$
15. $y = (x^2 + 1)\left(x + 5 + \dfrac{1}{x}\right)$
16. $y = (1 + x^2)(x^{3/4} - x^{-3})$

أوجد مشتقات الدوال

Find the derivatives of the functions

17. $y = \dfrac{2x + 5}{3x - 2}$
18. $z = \dfrac{4 - 3x}{3x^2 + x}$
19. $g(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x + 0.5}$
20. $f(t) = \dfrac{t^2 - 1}{t^2 + t - 2}$
21. $v = (1 - t)(1 + t^2)^{-1}$
22. $w = (2x - 7)^{-1}(x + 5)$
23. $f(s) = \dfrac{\sqrt{s} - 1}{\sqrt{s} + 1}$
24. $u = \dfrac{5x + 1}{2\sqrt{x}}$
25. $v = \dfrac{1 + x - 4\sqrt{x}}{x}$
26. $r = 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{\theta}} + \sqrt{\theta}\right)$
27. $y = \dfrac{1}{(x^2 - 1)(x^2 + x + 1)}$
28. $y = \dfrac{(x + 1)(x + 2)}{(x - 1)(x - 2)}$
29. $y = 2e^{-x} + e^{3x}$
30. $y = \dfrac{x^2 + 3e^x}{2e^x - x}$

31. $y = x^3 e^x$

32. $w = re^{-r}$

33. $y = x^{9/4} + e^{-2x}$

34. $y = x^{-3/5} + \pi^{3/2}$

35. $s = 2t^{3/2} + 3e^2$

36. $w = \dfrac{1}{z^{1.4}} + \dfrac{\pi}{\sqrt{z}}$

37. $y = \sqrt[7]{x^2} - x^e$

38. $y = \sqrt[3]{x^{9.6}} + 2e^{1.3}$

39. $r = \dfrac{e^s}{s}$

40. $r = e^\theta\left(\dfrac{1}{\theta^2} + \theta^{-\pi/2}\right)$

إيجاد المشتقات من جميع الرتب للدوال الأتية

Find the derivatives of all orders of the functions

41. $y = \dfrac{x^4}{2} - \dfrac{3}{2}x^2 - x$

42. $y = \dfrac{x^5}{120}$

43. $y = (x - 1)(x^2 + 3x - 5)$

44. $y = (4x^3 + 3x)(2 - x)$

إيجاد المشتقات الأولى والثانية للدوال

Find the first and second derivatives of the functions

45. $y = \dfrac{x^3 + 7}{x}$

46. $s = \dfrac{t^2 + 5t - 1}{t^2}$

47. $r = \dfrac{(\theta - 1)(\theta^2 + \theta + 1)}{\theta^3}$

48. $u = \dfrac{(x^2 + x)(x^2 - x + 1)}{x^4}$

49. $w = \left(\dfrac{1 + 3z}{3z}\right)(3 - z)$

50. $p = \dfrac{q^2 + 3}{(q - 1)^3 + (q + 1)^3}$

51. $w = 3z^2 e^{2z}$

52. $w = e^z(z - 1)(z^2 + 1)$

4-3 مشتق الـدوال المثلثية

Derivatives of Trigonometric Functions

$$(\sin(x))' = \sin'(x) = \frac{d}{dx}\sin(x) = \cos(x).$$

$$(\cos(x))' = \cos'(x) = \frac{d}{dx}\cos(x) = -\sin(x).$$

$$(\tan(x))' = \tan'(x) = \frac{d}{dx}\tan(x) = \sec^2(x).$$

$$(\cot(x))' = \cot'(x) = \frac{d}{dx}\cot(x) = -\csc^2(x).$$

$$(\sec(x))' = \sec'(x) = \frac{d}{dx}\sec(x) = \sec(x)\tan(x).$$

$$(\csc(x))' = \csc'(x) = \frac{d}{dx}\csc(x) = -\csc(x)\cot(x).$$

أمثـلـــــة 1-4-3
Examples

مـثـال 5

−1 $y = x^2 - \sin(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = 2x - \frac{d}{dx}\sin(x)$$
$$= 2x - \cos(x)$$

−2 $y = e^x \sin(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{d}{dx}e^x\right)\sin(x) + e^x\frac{d}{dx}\sin(x)$$
$$= e^x\sin(x) + e^x\cos(x)$$
$$= e^x(\sin(x) + \cos(x))$$

−3 $y = \dfrac{\sin(x)}{x}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x\dfrac{d}{dx}\sin(x) - \sin(x).1}{x^2}$$
$$= \frac{x\cos(x) - \sin(x)}{x^2}. \quad \blacksquare$$

مـثـال 6

−1 $y = 5e^x + \cos(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(5e^x) + \frac{d}{dx}(\cos(x))$$
$$= 5e^x - \sin(x)$$

−2 $y = \sin(x)\cos(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = \sin(x)\frac{d}{dx}(\cos(x)) + \cos(x)\frac{d}{dx}(\sin(x))$$
$$= \sin(x)\,(-\sin(x)) + \cos(x)\,(\cos(x))$$
$$= -\sin^2(x) + \cos^2(x)$$

−3 $y = \dfrac{\cos(x)}{1 - \sin(x)}$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 - \sin(x))\dfrac{d}{dx}(\cos(x)) - \cos(x)\dfrac{d}{dx}(1 - \sin(x))}{(1 - \sin(x))^2}$$
$$= \frac{(1 - \sin(x))(-\sin(x)) - \cos(x)\,(0 - \cos(x))}{(1 - \sin(x))^2}$$

$$= \frac{-\sin(x) + \sin^2(x) + \cos^2(x)}{(1 - \sin(x))^2}$$

$$= \frac{1 - \sin(x)}{(1 - \sin(x))^2}$$

$$= \frac{1}{1 - \sin(x)}.$$

■

مــثــال 7

أوجد y'' إذا كان $y = \sec(x)$.

الحــل:

$$y = \sec(x)$$

$$y' = \sec(x)\tan(x)$$

$$y'' = \frac{d}{dx}\big(\sec(x)\tan(x)\big)$$

$$= \tan(x)\frac{d}{dx}\big(\sec(x)\big) + \sec(x)\frac{d}{dx}\big(\tan(x)\big)$$

$$= \tan(x)\big(\sec(x)\tan(x)\big) + \sec(x)\left(\sec^2(x)\right)$$

$$= \sec(x)\tan^2(x) + \sec^3(x).$$

■

2-4-3 تــمـــاريـــن
Exercises

المشتقات

أوجد $\frac{dy}{dx}$

Find $\frac{dy}{dx}$

1. $y = -10x + 3\cos x$
2. $y = \frac{3}{x} + 5\sin x$
3. $y = x^2\cos x$
4. $y = \sqrt{x}\sec x + 3$

2. $y = \frac{3}{x} + 5\sin x$
4. $y = \sqrt{x}\sec x + 3$

5. $y = \csc x - 4\sqrt{x} + 7$
6. $y = x^2\cot x - \frac{1}{x^2}$
7. $f(x) = \sin x \tan x$
8. $g(x) = \csc x \cot x$
9. $y = (\sec x + \tan x)(\sec x - \tan x)$
10. $y = (\sin x + \cos x)\sec x$

11. $y = \dfrac{\cot x}{1 + \cot x}$

12. $y = \dfrac{\cos x}{1 + \sin x}$

13. $y = \dfrac{4}{\cos x} + \dfrac{1}{\tan x}$

14. $y = \dfrac{\cos x}{x} + \dfrac{x}{\cos x}$

15. $y = x^2 \sin x + 2x \cos x - 2 \sin x$

16. $y = x^2 \cos x - 2x \sin x - 2 \cos x$

17. $f(x) = x^3 \sin x \cos x$

18. $g(x) = (2 - x) \tan^2 x$

أوجد $\dfrac{ds}{dt}$

Find $\dfrac{ds}{dt}$

19. $s = \tan t - e^{-t}$

20. $s = t^2 - \sec t + 5e^t$

21. $s = \dfrac{1 + \csc t}{1 - \csc t}$

22. $s = \dfrac{\sin t}{1 - \cos t}$

أوجد $\dfrac{dr}{d\theta}$

Find $\dfrac{dr}{d\theta}$

23. $r = 4 - \theta^2 \sin \theta$

24. $r = \theta \sin \theta + \cos \theta$

25. $r = \sec \theta \csc \theta$

26. $r = (1 + \sec \theta) \sin \theta$

أوجد $\dfrac{dp}{dq}$

Find $\dfrac{dp}{dq}$

27. $p = 5 + \dfrac{1}{\cot q}$

28. $p = (1 + \csc q) \cos q$

29. $p = \dfrac{\sin q + \cos q}{\cos q}$

30. $p = \dfrac{\tan q}{1 + \tan q}$

31. $p = \dfrac{q \sin q}{q^2 - 1}$

32. $p = \dfrac{3q + \tan q}{q \sec q}$

33. Find y'' if

a. $y = \csc x$.

b. $y = \sec x$.

34. Find $y^{(4)} = d^4 y/dx^4$ if

a. $y = -2 \sin x$.

b. $y = 9 \cos x$.

النهايات المثلثية

أوجد النهايات

Find the limits

47. $\lim\limits_{x \to 2} \sin \left(\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2} \right)$

48. $\lim\limits_{x \to -\pi/6} \sqrt{1 + \cos(\pi \csc x)}$

49. $\lim\limits_{\theta \to \pi/6} \dfrac{\sin \theta - \frac{1}{2}}{\theta - \frac{\pi}{6}}$

50. $\lim\limits_{\theta \to \pi/4} \dfrac{\tan \theta - 1}{\theta - \frac{\pi}{4}}$

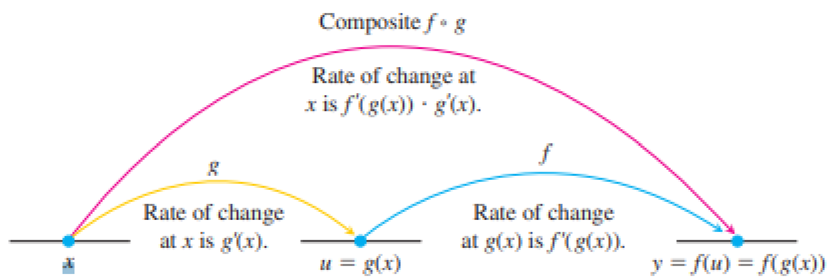
51. $\lim\limits_{x \to 0} \sec \left[e^x + \pi \tan \left(\dfrac{\pi}{4 \sec x} \right) - 1 \right]$

52. $\lim\limits_{x \to 0} \sin \left(\dfrac{\pi + \tan x}{\tan x - 2 \sec x} \right)$

53. $\lim\limits_{t \to 0} \tan \left(1 - \dfrac{\sin t}{t} \right)$

54. $\lim\limits_{\theta \to 0} \cos \left(\dfrac{\pi \theta}{\sin \theta} \right)$

3-4-3 مشتق الـدالـة المركبة
Derivative of a Composite Function



﴾مشتق الـدالـة $f \circ g$ عند النقطة x هي هـو مشتق f عند $g(x)$ مضروباً في مشتق g عند x﴿

نـظـريــة 1 – قـاعدة السلسلة إذا كانت الـدالـة $f(u)$ قابلة للاشتقاق عند النقطة $u = g(x)$ و $g(x)$ قابلة للاشتقاق عند x، فإن الـدالـة المركبة $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ قابلة للاشتقاق عند x، ويكون

$$(f \circ g)(x)' = f'(g(x)).g'(x).$$

في صيغة لايبنيز، إذا $y = f(u)$ و $u = g(x)$، عندها يـكون

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx},$$

حيث $\frac{dy}{du}$ يتم تقييمها عند $u = g(x)$.

4-4-3 أمـثـلــــة
Examples

مـثـــال 8

إيجاد المشتق للـدالـــة $f(x) = \tan(5 - \sin(2x))$.

الـحـل:

$$f(x) = \tan(5 - \sin(2x))$$

إذا نظرنا إلى $f(x)$ بالشكل $f(u)$ و $u = 5 - \sin(2x)$، عندهـا يـكون

$$f(u) = \tan(u) \quad , \quad u = 5 - \sin(2x)$$

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{du}f(u)\ .\ \frac{d}{dx}u$$
$$= \frac{d}{du}\tan(u)\,.\frac{d}{dx}(5-\sin(2x))$$
$$= \sec^2(u)\left(0-\cos(2x)\frac{d}{dt}(2x)\right)$$
$$= \sec^2(u)\,(-2\cos(2x))$$
$$= -2(\cos(2x))\sec^2(5-\sin(2x))\ . \qquad ■$$

مــثــال 9

أوجد مشتق كل من الدوال التالية.

$f_1(x) = (5x^3 - x^4)^7$	$f_2(x) = \frac{1}{3x-2}$	$f_3(x) = \sin^5(x)$	$f_4(x) = e^{\sqrt{3x+1}}$

الحــل:

$$f_1'(x) = \frac{d}{dx}f_1(x) = \frac{d}{dx}(5x^3-x^4)^7 = 7(5x^3-x^4)^6\frac{d}{dx}(5x^3-x^4)$$
$$= 7(5x^3-x^4)^6(3\times 5x^2-4x^3)$$
$$= 7(5x^3-x^4)^6(15x^2-4x^3)$$

$$f_2'(x) = \frac{d}{dx}f_2(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{3x-2}\right) = \frac{d}{dx}(3x-2)^{-1}$$
$$= -1(3x-2)^{-2}\frac{d}{dx}(3x-2)$$
$$= -\frac{3}{(3x-2)^2}$$

$$f_3'(x) = \frac{d}{dx}f_3(x) = \frac{d}{dx}\left(\sin^5(x)\right) = 5\sin^4(x)\frac{d}{dx}\sin(x)$$
$$= 5\sin^4(x)\cos(x)$$

$$f_4'(x) = \frac{d}{dx}f_4(x) = \frac{d}{dx}\left(e^{\sqrt{3x+1}}\right) = e^{\sqrt{x+1}}\frac{d}{dx}\left(\sqrt{3x+1}\right)$$
$$= e^{\sqrt{x+1}}\frac{d}{dx}(3x+1)^{\frac{1}{2}} = e^{\sqrt{x+1}}\frac{1}{2}(3x+1)^{-\frac{1}{2}}\times 3$$
$$= \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}e^{\sqrt{x+1}}\ . \qquad ■$$

مــثـــال 10

نعلم أن دالة القيمة دالة المطلقة $y=|x|$ غير قابلة للاشتقاق عند $x=0$. ومع ذلك، فإن الـدالـة قابلة للاشتقاق عند جميع الأعداد الحقيقية الأخرى، كما نوضح الآن. بما أن $|x|=\sqrt{x^2}$، يُمكننا اشتقاق الصيغة التالية:

$$\frac{d}{dx}(|x|)=\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x^2}\right)$$
$$=\frac{1}{2\sqrt{x^2}}\ \frac{d}{dx}(x^2)$$
$$=\frac{1}{2|x|}(2x)$$
$$=\frac{x}{|x|}\ ,\quad x\neq 0.$$ ■

مــثـــال 11

بيّن أن ميـل أي مستقيم يمس منحني الـدالـة $y=\frac{1}{(1-2x)^3}$ يكون موجباً.

الـحــل:

نُوجـد المشتق:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{d}{dx}\frac{1}{(1-2x)^3}=\frac{d}{dx}(1-2x)^{-3}$$
$$=-3(1-2x)^{-4}\frac{d}{dx}(1-2x)$$
$$=-3(1-2x)^{-4}(-2)$$
$$=6(1-2x)^{-4}$$
$$=\frac{6}{(1-2x)^4}\ ,\quad x\neq\frac{1}{2}\ .$$

إن ميـل المستقيم المماس هـو

$$\frac{dy}{dx}=\frac{6}{(1-2x)^4}\,,$$

حاصل قسمة عددين موجبين، موجب. ■

5-4-3 تمــاريــن
Exercises
حساب المشتق

أوجد $\frac{dy}{dx} = f'(g(x)).g'(x)$ حيث، $y = f(u),\ u = g(x)$

1. $y = 6u - 9, \quad u = (1/2)x^4$
2. $y = 2u^3, \quad u = 8x - 1$
3. $y = \sin u, \quad u = 3x + 1$
4. $y = \cos u, \quad u = -x/3$
5. $y = \cos u, \quad u = \sin x$
6. $y = \sin u, \quad u = x - \cos x$
7. $y = \tan u, \quad u = 10x - 5$
8. $y = -\sec u, \quad u = x^2 + 7x$

اكتب الـدالـة على الشكل $y = f(u)$ و $u = g(x)$. ثم أوجد $\frac{dy}{dx}$ كـدالة لـ x.

Write the function in the form $y = f(u)$ and $u = g(x)$.
Then find $\frac{dy}{dx}$ as a function of x.

9. $y = (2x + 1)^5$
10. $y = (4 - 3x)^9$
11. $y = \left(1 - \frac{x}{7}\right)^{-7}$
12. $y = \left(\frac{x}{2} - 1\right)^{-10}$
13. $y = \left(\frac{x^2}{8} + x - \frac{1}{x}\right)^4$
14. $y = \sqrt{3x^2 - 4x + 6}$
15. $y = \sec(\tan x)$
16. $y = \cot\left(\pi - \frac{1}{x}\right)$
17. $y = \sin^3 x$
18. $y = 5\cos^{-4} x$
19. $y = e^{-5x}$
20. $y = e^{2x/3}$
21. $y = e^{5-7x}$
22. $y = e^{\left(4\sqrt{x}+x^2\right)}$

أوجد مشتقات الـدوال في التمـارين التالية.

Find the derivatives of the functions in the following exercises.

23. $p = \sqrt{3 - t}$
24. $q = \sqrt[3]{2r - r^2}$
25. $s = \frac{4}{3\pi}\sin 3t + \frac{4}{5\pi}\cos 5t$
26. $s = \sin\left(\frac{3\pi t}{2}\right) + \cos\left(\frac{3\pi t}{2}\right)$
27. $r = (\csc\theta + \cot\theta)^{-1}$
28. $r = 6(\sec\theta - \tan\theta)^{3/2}$
29. $y = x^2\sin^4 x + x\cos^{-2} x$
30. $y = \frac{1}{x}\sin^{-5} x - \frac{x}{3}\cos^3 x$
31. $y = \frac{1}{21}(3x - 2)^7 + \left(4 - \frac{1}{2x^2}\right)^{-1}$
32. $y = (5 - 2x)^{-3} + \frac{1}{8}\left(\frac{2}{x} + 1\right)^4$
33. $y = (4x + 3)^4(x + 1)^{-3}$
34. $y = (2x - 5)^{-1}(x^2 - 5x)^6$
35. $y = xe^{-x} + e^{3x}$
36. $y = (1 + 2x)e^{-2x}$
37. $y = (x^2 - 2x + 2)e^{5x/2}$
38. $y = (9x^2 - 6x + 2)e^{x^3}$
39. $h(x) = x\tan\left(2\sqrt{x}\right) + 7$
40. $k(x) = x^2\sec\left(\frac{1}{x}\right)$

5-3 التفاضل الضمني
Implicit Differentiation

لقد تم وصف معظم الدوال التي تعاملنا معها حتى الآن بمعادلة من النموذج $y = f(x)$ والتي تعبر عن y صراحة من حيث المتغير x.

يحدث موقف آخر عندما نواجه معادلات مثل:

$$x^3 + y^3 - 9xy = 0, \quad y^2 - x = 0, \quad \text{or} \quad x^2 + y^2 - 25 = 0$$

تحدد هذه المعادلات علاقة ضمنية $F(x, y) = 0$ بين المتغيرين x و y.

في بعض الحالات نتمكن من حل مثل هذه المعادلة بالنسبة إلى y كدالة صريحة لـ x (وذلك طبعاً من أجل إيجاد المشتق y').

أحياناً لا نتمكن من عزل التابع y، أي أننا لا نستطيع كتابة المعادلة الضمنية $F(x, y) = 0$ على الشكل $y = f(x)$، إلا أننا نستطيع إيجاد المشتق $\frac{dy}{dx}$ للدالة المعطاة $F(x, y) = 0$، وذلك بالتفاضل الضمني.

مثال 12

أوجد ميل الدائرة $x^2 + y^2 = 25$ عند النقطة $(3, -4)$.

الحل:

يُمكن حل هذه المشكلة بسهولة كبيرة، وذلك بمفاضلة المعادلة المعطاة ضمنياً بالنسبة إلى x.

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}.$$

وبالتالي يكون الميل عند النقطة $(3, -4)$:

$$-\frac{x}{y}\bigg|_{(3,-4)} = -\frac{3}{-4} = \frac{3}{4}.$$

لاحظ أن المشتق dy/dx يتضمن كلاً من المتغيرين x و y، وليس فقط المتغير المستقل x. ■

التفاضل الضمني

Implicit Differentiation

1. نشتق طرفي المعادلة بالنسبة إلى x، مع معاملة y كدالة قابلة للتفاضل بالنسبة إلى x.
2. نُجمع الحدود التي تحوي على المشتق $\frac{dy}{dx}$ في أحد جانبي المعادلة ثم حلها للحصول على $\frac{dy}{dx}$.

مــثــال 13

أوجد المشتق $y' = \frac{dy}{dx}$ إذا كان $y^2 = x^2 + \sin(xy)$

الـحـل:

نفاضل المعادلة ضمنياً.

$$y^2 = x^2 + \sin(xy)$$

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(\sin(xy))$$

$$2y\frac{dy}{dx} = 2x + \cos(xy)\frac{d}{dx}(xy)$$

$$2y\frac{dy}{dx} = 2x + \cos(xy)\left(y + x\frac{dy}{dx}\right)$$

$$2y\frac{dy}{dx} - (\cos(xy))\left(x\frac{dy}{dx}\right) = 2x + \cos(xy)\,y$$

$$(2y - x\cos(xy))\frac{dy}{dx} = 2x + \cos(xy)\,y$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x + y\cos(xy)}{2y - x\cos(xy)}$$

المشتق يتضمن كلاً من المتغيرين x و y، وليس فقط المتغير المستقل x. ■

المشتقات من مرتبة أعلى
Derivatives of Higher Order

يُمكن أيضاً اسـتخدام التفاضل الضمني لإيجاد مشتقات من مرتبـة أعلى.

مــثــال 14

أوجد $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ إذا كان $2x^3 - 3y^2 = 8$

الـحـل:

للبدء، نقوم بمفاضلة طرفي المعادلة بالنسبة إلى x من أجل إيجـاد $y' = \frac{dy}{dx}$.

$$\frac{d}{dx}(2x^3) - \frac{d}{dx}(3y^2) = \frac{d}{dx}(8)$$

$$6x^2 - 6yy' = 0$$

$$\Rightarrow \quad y' = \frac{x^2}{y},$$

بتطبيق قـاعدة مشتق القسمة لإيجاد y'' :

$$y'' = \left(\frac{x^2}{y}\right)' = \frac{2xy - x^2y'}{y^2} = \frac{2x}{y} - \frac{x^2}{y^2} \times y'$$

وبتعويض y' بما يساويها نجد:

$$y'' = \frac{2x}{y} - \frac{x^2}{y^2}\left(\frac{x^2}{y}\right) = \frac{2x}{y} - \frac{x^4}{y^3}\ , \ \ y \neq 0. \ \ ■$$

1-5-3 المستقيمات المماســة والمستقيمات النـاظمــة

Tangents, and Normal Lines

مــثـــال 15

بيّن أن النقطة $(2,4)$ تقع على المنحنى $x^3 + y^3 - 9xy = 0$. ثم أوجد المماس والناظم على المنحنى هناك.

الحـل:

النقطة $(2,4)$ تقع على المنحنى لأن إحداثياتها تُحقق معادلة المنحنى:

$$(2)^3 + (4)^3 - 9(2)(4) = 8 + 64 - 72 = 0.$$

لإيجاد ميل المنحنى عند $(2,4)$، نستخدم أولاً التفاضل الضمني لإيجاد المشتق $y' = \frac{dy}{dx}$:

$$x^3 + y^3 - 9xy = 0$$

$$\frac{d}{dx}(x^3) + \frac{d}{dx}(y^3) - \frac{d}{dx}(9xy) = \frac{d}{dx}(0)$$

$$3x^2 + 3y^2\frac{dy}{dx} - 9\left(y + x\frac{dy}{dx}\right) = 0$$

$$(3y^2 - 9x)\frac{dy}{dx} + 3x^2 - 9y = 0$$

$$3(y^2 - 3x)\frac{dy}{dx} = 9y - 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y - x^2}{y^2 - 3x}$$

ثم نقوم بإيجـاد قيمة المشتق عند النقطة $(2,4)$:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2,4)} = \left.\frac{3y - x^2}{y^2 - 3x}\right|_{(2,4)} = \frac{3(4) - (2)^2}{(4)^2 - 3(2)} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.$$

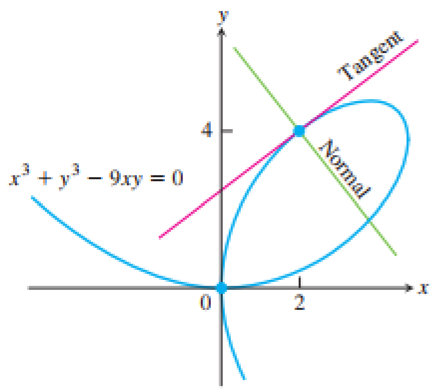
المماس عند النقطة $(2,4)$ هو المستقيم المار بالنقطة $(2,4)$ وميله $m_T = y' = \frac{4}{5}$، (m_T ميل المماس)

$$y - y_1 = m_T(x - x_1)$$

$$y-4=\frac{4}{5}(x-2)$$
$$y=\frac{4}{5}x+\frac{12}{5}.$$

العمود أو الناظم على المنحنى عند النقطة $(2,4)$ هو المستقيم العمودي على المماس هناك، والذي يمر بالنقطة $(2,4)$ وميله $m_N=-\frac{5}{4}$، (m_N ميل الناظم)

$$y-y_1=m_N(x-x_1)$$
$$y-4=-\frac{5}{4}(x-2)$$
$$y=-\frac{5}{4}x+\frac{13}{2}.$$



يوضح المثال كيفية إيجاد معادلات المماس والعمود على ورقة ديكارت **عند النقطة** $(2,4)$

2-5-3 تمـــاريـــن
Exercises

التفاضل ضمنياً

استخدم التفاضل الضمني لإيجاد $\frac{dy}{dx}$ في التمارين التالية.

Use implicit differentiation to find $\frac{dy}{dx}$ in the following Exercises.

1. $x^2y+xy^2=6$
2. $x^3+y^3=18xy$
3. $2xy+y^2=x+y$
4. $x^3-xy+y^3=1$
5. $x^2(x-y)^2=x^2-y^2$
6. $(3xy+7)^2=6y$
7. $y^2=\frac{x-1}{x+1}$
8. $x^3=\frac{2x-y}{x+3y}$
9. $x=\tan y$
10. $xy=\cot(xy)$
11. $x+\tan(xy)=0$
12. $x^4+\sin y=x^3y^2$
13. $y\sin\left(\frac{1}{y}\right)=1-xy$
14. $x\cos(2x+3y)=y\sin x$
15. $e^{2x}=\sin(x+3y)$
16. $e^{x^2y}=2x+2y$

Find $\frac{dr}{d\theta}$ in the following Exercises.

17. $\theta^{1/2} + r^{1/2} = 1$

18. $r - 2\sqrt{\theta} = \frac{3}{2}\theta^{2/3} + \frac{4}{3}\theta^{3/4}$

19. $\sin(r\theta) = \frac{1}{2}$

20. $\cos r + \cot\theta = e^{r\theta}$

المشتقات من المرتبة الثانية

Use implicit differentiation to find $\frac{dy}{dx}$ and then $\frac{d^2y}{dx^2}$

21. $x^2 + y^2 = 1$

22. $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$

23. $y^2 = e^{x^2} + 2x$

24. $y^2 - 2x = 1 - 2y$

25. $2\sqrt{y} = x - y$

26. $xy + y^2 = 1$

27. If $x^3 + y^3 = 16$, find the value of d^2y/dx^2 at the point (2, 2).

28. If $xy + y^2 = 1$, find the value of d^2y/dx^2 at the point $(0, -1)$.

In Exercises 29 and 30, find the slope of the curve at the given points.

29. $y^2 + x^2 = y^4 - 2x$ at $(-2, 1)$ and $(-2, -1)$

30. $(x^2 + y^2)^2 = (x - y)^2$ at $(1, 0)$ and $(1, -1)$

الميول والمماسات والخطوط العمودية

تأكد من أن النقطة المعطاة تقع على المنحنى وأوجد الخطوط التي تكون (أ) مماسة و(ب) عمودية على المنحنى عند النقطة المعطاة.

Verify that the given point is on the curve and find the lines that are (a) tangent and (b) normal to the curve at the given point.

31. $x^2 + xy - y^2 = 1, \quad (2, 3)$

32. $x^2 + y^2 = 25, \quad (3, -4)$

33. $x^2y^2 = 9, \quad (-1, 3)$

34. $y^2 - 2x - 4y - 1 = 0, \quad (-2, 1)$

35. $6x^2 + 3xy + 2y^2 + 17y - 6 = 0, \quad (-1, 0)$

36. $x^2 - \sqrt{3}xy + 2y^2 = 5, \quad (\sqrt{3}, 2)$

37. $2xy + \pi\sin y = 2\pi, \quad (1, \pi/2)$

38. $x\sin 2y = y\cos 2x, \quad (\pi/4, \pi/2)$

39. $y = 2\sin(\pi x - y), \quad (1, 0)$

40. $x^2\cos^2 y - \sin y = 0, \quad (0, \pi)$

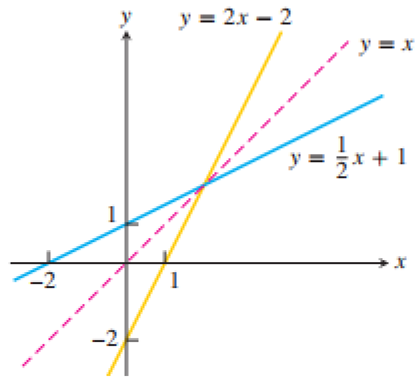
6-3 مشتقات الـدوال العكسية واللوغاريتمات

Derivatives of Inverse Functions and Logarithms

1-6-3 مشتقات معكوســات الـدوال القابلة للاشتقاق

Derivatives of Inverses of Differentiable Functions

لقد حسبنا، في مثال سابق، معكوس الـدالـة $f(x) = \frac{1}{2}x + 1$ على أنه $f^{-1}(x) = 2x - 2$. ويوضح الشكل التالي الرسوم البيانية لكلتا الدالتين.



﴿إن رسم مستقيم وعكسه معاً يوضح تماثل الرسم البياني بالنسبة للمستقيم $y = x$. والميول مقلوبات لبعضها البعض﴾

وإذا حسبنا مشتقاتهما، نرى أن

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x + 1\right) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{d}{dx}(2x - 2) = 2$$

إن كل مشتق هو مقلوب المشتق الآخر، لذا فإن ميـل أحد الخطـوط هـو مقلوب ميـل خطه العكسي.

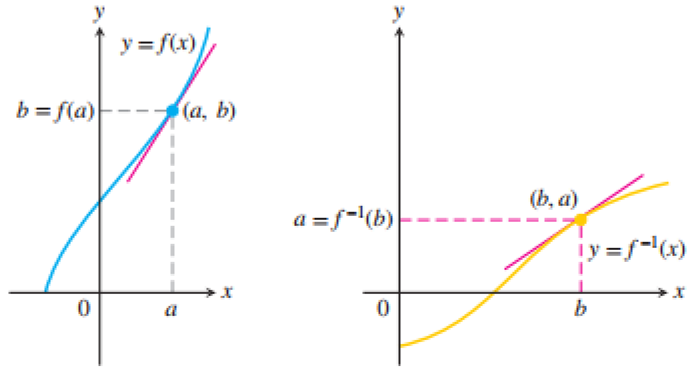
إن انعكاس أي مستقيم غير أفقي أو غير رأسي عبر المستقيم $y = x$ يـؤدي دائماً إلى عكـس ميـل المسـتقيم. إذا كان للمستقيم الأصلي الميل $m \neq 0$، فإن للمستقيم المنعكــــس الميــل $\frac{1}{m}$.

تنطبق العلاقة التبادلية بين ميول f و f^{-1} على الـدوال الأخــرى أيضاً، ولكن يجب أن نكون حذرين عند مقــارنة الميول عند النقــاط المقابلة.

إذا كان ميـل $y = f(x)$ عند النقطة $(a, f(a))$ هو $f'(a)$ و $f'(a) \neq 0$ فإن ميـل $f^{-1}(x)$ عـند النقطة $(f(a), a)$ هـو المقلـوب $\frac{1}{f'(a)}$ (انظر الشكل التالي).

إذا وضعنا $b = f(a)$ فإن

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}.$$



الميول تكون متبادلة أو عكسية: $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$ *or* $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}$

تحتوي الرسـوم البيانية للـدوال العكسيـة على ميـول متعاكسـة عند النقـاط المقابلـة

إذا كان للـدالـة $y = f(x)$ مستقيم مماس أفقي عند $(a, f(a))$، فإن الـدالـة العكسية f^{-1} لها مستقيم مماس رأسي عند $(f(a), a)$، وهذا الميل اللانهـائي يعني أن f^{-1} غير قـابلـة للاشتقـاق عند $f(a)$. تُعطي النظرية 3 الشروط التي بموجبها تكون f^{-1} قابلة للاشتقاق.

نـظـريـة 2 – قـاعـدة المشتقات للـدوال العكسية

The Derivative Rule for Inverses

لتكن f دالة معرّفة على مجال I. إذا كان المشق $f'(x)$ موجداً ولا يساوي الصفر على I، عندها يكون f^{-1} قابلاً للاشتقاق عند كل نقطة من مجموعة تعريفه (والتي هي مجموعة قيم f).

وقيمة مشتقه $(f^{-1})'$ عند نقطة b (b من مجموعة تعريف f^{-1}) تساوي مقلوب قيمة مستق f عند النقطة $a = f^{-1}(b)$:

$$(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}(b)\right)}$$

أو

$$\left.\frac{df^{-1}}{dx}\right|_{x=b} = \frac{1}{\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=f^{-1}(b)}}$$

مـثـال 16

إن الـدالـة $f(x) = x^2, x \geq 0$ ودالـتـهـا العكسية $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ لـهـما المشتقات $f'(x) = 2x$ و $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$.

لنتحقق من أن النظرية 3 تُعطي نفس عبـارة المشتق لـ f^{-1}:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$
$$= \frac{1}{2(f^{-1}(x))}$$
$$= \frac{1}{2(\sqrt{x})} = \frac{1}{2\sqrt{x}}\,. \quad \blacksquare$$

2-6-3 مشتق دالة اللوغاريتم الطبيعي

Derivative of the Natural Logarithm Function

بما أننا نعلم أن الـدالـة الأسية $f(x) = e^x$ قابلة للاشتقاق في كل مكان، فيمكننا تطبيق النظرية 3 لإيجاد مشتق دالة اللوغاريتم العكسية $f^{-1}(x) = \ln(x)$:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$
$$= \frac{1}{e^{f^{-1}(x)}} \qquad f'(u) = e^u$$
$$= \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x}\,. \quad \blacksquare$$

3-6-3 المشتقات لـ a^u و $\log_a(u)$

The Derivatives of a^u and $\log_a(u)$

نبدأ بالمعادلة:

$$\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}e^{x\ln(a)}$$
$$= e^{x\ln(a)}\frac{d}{dx}(x\ln(a)) \qquad \frac{d}{dx}e^u = e^u\frac{du}{dx}$$
$$= e^{x\ln(a)}.\ln(a)$$
$$= a^x.\ln(a)$$

لإيجاد المشتق للـدالـة $\log_a(u)$ من أجل أي أساس ($a > 0,\ a \neq 1$)، نبدأ بصيغة تغيير الأساس للوغاريتمات ونعبر عن $\log_a(u)$ باللوغاريتمات الطبيعية،

$$\log_a(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(a)}.$$

بأخذ المشتقات، نجد

$$\frac{d}{dx}\log_a(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\ln(x)}{\ln(a)}\right)$$

$$= \frac{1}{\ln(a)} \cdot \frac{d}{dx} \ln(x)$$

$$= \frac{1}{\ln(a)} \cdot \frac{1}{x}$$

$$= \frac{1}{x \ln(a)} .$$

إذا كانت u دالة قابلـة للاشـتقاق بالنسبة إلى x و $u > 0$، عندها نجد الصيغة التالية:

من أجل $a > 0$ و $a \neq 1$ يكون:

$$\frac{d}{dx} \log_a(u) = \frac{1}{u . \ln(a)} \frac{du}{dx}$$

4-6-3 التفاضل اللوغاريتمي

Logarithmic Differentiation

غالباً ما يمكن إيجاد مشتقات الـدوال الموجبة المعطاة بواسطة صيغ تتضمن حاصل ضرب وحواصل قسمة وقوى بشكل أسرع إذا أخذنا اللوغـاريتم الطبيعي لكلا الجانبين قبل التفاضل. وهذا يُمكننا من اسـتخدام قـوانين اللوغـاريتمات لتبسيط الصيغ قـبل التفاضل.

يتم توضيح العملية، المسماة **التفاضل اللوغاريتمي**، في المثال التالي.

مـثـال 17

أوجد المشتق $\frac{dy}{dx}$ من أجـل:

$$y = \frac{(x^2+1)(x+3)^{\frac{1}{2}}}{x-1} , \quad x > 1.$$

الحـل:

نأخذ اللوغاريتم الطبيعي لكلا الطرفين ونبسط النتيجة باستخدام الخصائص الجبرية للوغاريتمات:

$$\ln(y) = \ln \frac{(x^2+1)(x+3)^{\frac{1}{2}}}{x-1}$$

$$= \ln\left[(x^2+1)(x+3)^{\frac{1}{2}}\right] - \ln(x-1)$$

$$= \ln(x^2+1) + \ln(x+3)^{\frac{1}{2}} - \ln(x-1)$$

$$= \ln(x^2+1) + \frac{1}{2}\ln(x+3) - \ln(x-1)$$

ثم نأخذ مشتقات كلا الطرفين بالنسبة إلى x:

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x+3} - \frac{1}{x-1}$$

بعد ذلك نحل بالنسبة إلى $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{dy}{dx} = y\left(\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{2x+6} - \frac{1}{x-1}\right)$$

وأخيراً، نستبدل y:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(x^2+1)(x+3)^{\frac{1}{2}}}{x-1}\left(\frac{2x}{x^2+1} + \frac{1}{2x+6} - \frac{1}{x-1}\right). \quad \blacksquare$$

5-6-3 العدد e معبراً عنه كنهاية

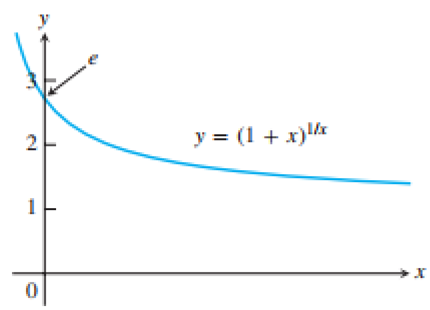
The Number e Expressed as a Limit

نظرية 3 – العدد e كنهاية يُمكن حساب العدد e كنهاية

$$e = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}},$$

أو

$$e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}$$



الرقم e هو نهاية الدالة المرسومة هنا عندما $x \to 0$

3-6-6 تــمـــاريــن
Exercises

مشتقات الدوال العكسية

في التمارين من 1 إلى 4:

1– أوجد $f^{-1}(x)$

2– ارسم بيانياً f و f^{-1} معاً.

3– أوجد $\frac{df}{dx}$ عند $x = a$ و $\frac{df^{-1}}{dx}$ عند $x = f(a)$

لإظهار أنه عند هذه النقاط $df^{-1}/dx = 1/(df/dx)$

In Exercises 1–4:

a. Find $f^{-1}(x)$.

b. Graphf and f^{-1} together.

c. Evaluate df/dx at $x = a$ and df^{-1}/dx at $x = f(a)$ to show that at these points $df^{-1}/dx = 1/(df/dx)$.

1. $f(x) = 2x + 3, \quad a = -1$ **2.** $f(x) = (1/5)x + 7, \quad a = -1$

3. $f(x) = 5 - 4x, \quad a = 1/2$ **4.** $f(x) = 2x^2, \quad x \geq 0, \quad a = 5$

5. a. Show that $f(x) = x^3$ and $g(x) = \sqrt[3]{x}$ are inverses of one another.

b. Graph f and g over an x-interval large enough to show the graphs intersecting at $(1, 1)$ and $(-1, -1)$. Be sure the picture shows the required symmetry about the line $y = x$.

c. Find the slopes of the tangents to the graphs of f and g at $(1, 1)$ and $(-1, -1)$ (four tangents in all).

d. What lines are tangent to the curves at the origin?

مشتقات اللوغاريتمات

أوجد مشتق y بالنسبة إلى x أو t أو θ كما هو مناسب.

Find the derivative of y with respect to x, t, or **θ** as appropriate.

11. $y = \ln 3x$ **12.** $y = \ln kx$, k constant

13. $y = \ln(t^2)$ **14.** $y = \ln(t^{3/2})$

15. $y = \ln \frac{3}{x}$ **16.** $y = \ln \frac{10}{x}$

17. $y = \ln(\theta + 1)$ **18.** $y = \ln(2\theta + 2)$

19. $y = \ln x^3$ **20.** $y = (\ln x)^3$

21. $y = t(\ln t)^2$ **22.** $y = t\sqrt{\ln t}$

23. $y = \frac{x^4}{4}\ln x - \frac{x^4}{16}$ **24.** $y = (x^2 \ln x)^4$

25. $y = \frac{\ln t}{t}$ **26.** $y = \frac{1 + \ln t}{t}$

27. $y = \frac{\ln x}{1 + \ln x}$ **28.** $y = \frac{x \ln x}{1 + \ln x}$

29. $y = \ln(\ln x)$ **30.** $y = \ln(\ln(\ln x))$

31. $y = \theta(\sin(\ln \theta) + \cos(\ln \theta))$

32. $y = \ln(\sec \theta + \tan \theta)$

33. $y = \ln \frac{1}{x\sqrt{x + 1}}$ **34.** $y = \frac{1}{2}\ln \frac{1 + x}{1 - x}$

35. $y = \frac{1 + \ln t}{1 - \ln t}$ **36.** $y = \sqrt{\ln \sqrt{t}}$

35. $y = \dfrac{1 + \ln t}{1 - \ln t}$

36. $y = \sqrt{\ln \sqrt{t}}$

37. $y = \ln(\sec(\ln \theta))$

38. $y = \ln\left(\dfrac{\sqrt{\sin\theta\cos\theta}}{1 + 2\ln\theta}\right)$

39. $y = \ln\left(\dfrac{(x^2 + 1)^5}{\sqrt{1 - x}}\right)$

40. $y = \ln\sqrt{\dfrac{(x + 1)^5}{(x + 2)^{20}}}$

التفاضل اللوغاريتمي

استخدم التفاضل اللوغاريتمي لإيجاد المشتق لـ y بالنسبة إلى المتغير المستقل المعطى.

Use logarithmic differentiation to find the derivative of y with respect to the given independent variable.

41. $y = \sqrt{x(x + 1)}$

42. $y = \sqrt{(x^2 + 1)(x - 1)^2}$

43. $y = \sqrt{\dfrac{t}{t + 1}}$

44. $y = \sqrt{\dfrac{1}{t(t + 1)}}$

45. $y = (\sin\theta)\sqrt{\theta + 3}$

46. $y = (\tan\theta)\sqrt{2\theta + 1}$

47. $y = t(t + 1)(t + 2)$

48. $y = \dfrac{1}{t(t + 1)(t + 2)}$

49. $y = \dfrac{\theta + 5}{\theta\cos\theta}$

50. $y = \dfrac{\theta\sin\theta}{\sqrt{\sec\theta}}$

51. $y = \dfrac{x\sqrt{x^2 + 1}}{(x + 1)^{2/3}}$

52. $y = \sqrt{\dfrac{(x + 1)^{10}}{(2x + 1)^5}}$

53. $y = \sqrt[3]{\dfrac{x(x - 2)}{x^2 + 1}}$

54. $y = \sqrt[3]{\dfrac{x(x + 1)(x - 2)}{(x^2 + 1)(2x + 3)}}$

إيجاد المشتقات

أوجد مشتقة y بالنسبة إلى x أو t أو θ كما هو مناسب.

Find the derivative of *y* with respect to x, t, or θ as appropriate.

55. $y = \ln(\cos^2\theta)$

56. $y = \ln(3\theta e^{-\theta})$

57. $y = \ln(3te^{-t})$

58. $y = \ln(2e^{-t}\sin t)$

59. $y = \ln\left(\dfrac{e^\theta}{1 + e^\theta}\right)$

60. $y = \ln\left(\dfrac{\sqrt{\theta}}{1 + \sqrt{\theta}}\right)$

61. $y = e^{(\cos t + \ln t)}$

62. $y = e^{\sin t}(\ln t^2 + 1)$

أوجد dy/dx

find dy/dx

63. $\ln y = e^y \sin x$

64. $\ln xy = e^{x+y}$

65. $x^y = y^x$

66. $\tan y = e^x + \ln x$

أوجد المشتق لـ y بالنسبة إلى المتغير المستقل المعطى.

Find the derivative of *y* with respect to the given independent variable.

67. $y = 2^x$

68. $y = 3^{-x}$

69. $y = 5^{\sqrt{s}}$

70. $y = 2^{(s^2)}$

71. $y = x^\pi$

72. $y = t^{1-e}$

73. $y = \log_2 5\theta$

74. $y = \log_3(1 + \theta\ln 3)$

75. $y = \log_4 x + \log_4 x^2$

76. $y = \log_{25} e^x - \log_5 \sqrt{x}$

77. $y = \log_2 r \cdot \log_4 r$

78. $y = \log_3 r \cdot \log_9 r$

79. $y = \log_3 \left(\left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{\ln 3} \right)$

80. $y = \log_5 \sqrt{\left(\frac{7x}{3x+2} \right)^{\ln 5}}$

81. $y = \theta \sin (\log_7 \theta)$

82. $y = \log_7 \left(\frac{\sin \theta \cos \theta}{e^\theta 2^\theta} \right)$

83. $y = \log_5 e^x$

84. $y = \log_2 \left(\frac{x^2 e^2}{2\sqrt{x+1}} \right)$

85. $y = 3^{\log_2 t}$

86. $y = 3 \log_8 (\log_2 t)$

87. $y = \log_2 (8t^{\ln 2})$

88. $y = t \log_3 \left(e^{(\sin t)(\ln 3)} \right)$

التفاضل اللوغاريتمي باستخدام الأسس

استخدم التفاضل اللوغاريتمي لإيجاد المشتق لـ y بالنسبة إلى المتغير المستقل المعطى

Use logarithmic differentiation to find the derivative of y With respect to the given independent variable.

89. $y = (x+1)^x$

90. $y = x^{(x+1)}$

91. $y = (\sqrt{t})^t$

92. $y = t^{\sqrt{t}}$

93. $y = (\sin x)^x$

94. $y = x^{\sin x}$

95. $y = x^{\ln x}$

96. $y = (\ln x)^{\ln x}$

7-3 الـدوال الـمثلثـية الـعكسـيـة

Inverse Trigonometric Functions

مشتقات الـدوال المثلثية العكسية Derivatives of the inverse trigonometric functions	
1-	$\frac{d(\sin^{-1}(u))}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}, \quad \|u\| < 1$
2-	$\frac{d(\cos^{-1}(u))}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}, \quad \|u\| < 1$
3-	$\frac{d(\tan^{-1}(u))}{dx} = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$
4-	$\frac{d(\cot^{-1}(u))}{dx} = -\frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$
5-	$\frac{d(\sec^{-1}(u))}{dx} = \frac{1}{\|u\|\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}, \quad \|u\| > 1$
6-	$\frac{d(\csc^{-1}(u))}{dx} = -\frac{1}{\|u\|\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}, \quad \|u\| > 1$

مـثـال 18

أوجد مشتق الدالة

$$y = \sin^{-1}(x^2)$$

الحـل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sin^{-1}(u)) = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}}\frac{d}{dx}(u)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-(x^2)^2}}\frac{d}{dx}(x^2) = \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}\ . \qquad \blacksquare$$

مـثـال 19

أوجد مشتق الدالة

$$y = \sec^{-1}(5x^4)$$

الحـل:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\sec^{-1}(u)) = \frac{1}{|u|\sqrt{u^2-1}}\frac{d}{dx}(u) \qquad |u| > 1$$

$$= \frac{1}{|5x^4|\sqrt{(5x^4)^2-1}}\frac{d}{dx}(5x^4)$$

$$= \frac{1}{5x^4\sqrt{25x^8-1}}(20x^3) \qquad |5x^4| = 5x^4 > 1 > 0$$

$$= \frac{4}{x\sqrt{25x^8-1}}\ . \qquad \blacksquare$$

1-7-3 متطابقـات الـدالة العكسـيـة والـدالة المسـاعـدة العكسـيـة

Inverse Function–Inverse Cofunction Identities

$$\cos^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} - \sin^{-1}(x)$$
$$\cot^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1}(x)$$
$$\csc^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} - \sec^{-1}(x)$$

2-7-3 تمــــاريـــن
Exercises

القيم المشتركة

أوجد الزوايــا

Find the angles

1. **a.** $\tan^{-1} 1$ **b.** $\tan^{-1}(-\sqrt{3})$ **c.** $\tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

2. **a.** $\tan^{-1}(-1)$ **b.** $\tan^{-1}\sqrt{3}$ **c.** $\tan^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$

3. **a.** $\sin^{-1}\left(\frac{-1}{2}\right)$ **b.** $\sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ **c.** $\sin^{-1}\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)$

4. **a.** $\sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ **b.** $\sin^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ **c.** $\sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

5. **a.** $\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$ **b.** $\cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$ **c.** $\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

6. **a.** $\csc^{-1}\sqrt{2}$ **b.** $\csc^{-1}\left(\frac{-2}{\sqrt{3}}\right)$ **c.** $\csc^{-1} 2$

7. **a.** $\sec^{-1}(-\sqrt{2})$ **b.** $\sec^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$ **c.** $\sec^{-1}(-2)$

8. **a.** $\cot^{-1}(-1)$ **b.** $\cot^{-1}(\sqrt{3})$ **c.** $\cot^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$

التقييمات

ابحث عن القيم

Find the values

9. $\sin\left(\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)$ **10.** $\sec\left(\cos^{-1}\frac{1}{2}\right)$

11. $\tan\left(\sin^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)\right)$ **12.** $\cot\left(\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right)$

إيجاد المشتقات

أوجد المشتق لـ y بالنسبة للمتغير المناسب.

Find the derivative of *y* with respect to the appropriate variable.

21. $y = \cos^{-1}(x^2)$ **22.** $y = \cos^{-1}(1/x)$

23. $y = \sin^{-1}\sqrt{2}\,t$ **24.** $y = \sin^{-1}(1 - t)$

25. $y = \sec^{-1}(2s + 1)$ **26.** $y = \sec^{-1} 5s$

27. $y = \csc^{-1}(x^2 + 1), \quad x > 0$

28. $y = \csc^{-1}\frac{x}{2}$

29. $y = \sec^{-1}\frac{1}{t}, \quad 0 < t < 1$ **30.** $y = \sin^{-1}\frac{3}{t^2}$

31. $y = \cot^{-1}\sqrt{t}$ **32.** $y = \cot^{-1}\sqrt{t - 1}$

33. $y = \ln(\tan^{-1} x)$ **34.** $y = \tan^{-1}(\ln x)$

35. $y = \csc^{-1}(e^t)$ **36.** $y = \cos^{-1}(e^{-t})$

37. $y = s\sqrt{1 - s^2} + \cos^{-1} s$ **38.** $y = \sqrt{s^2 - 1} - \sec^{-1} s$

39. $y = \tan^{-1}\sqrt{x^2 - 1} + \csc^{-1} x, \quad x > 1$